SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLÓGIE

ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A MATEMATIKY

Polynomické metódy návrhu regulátorov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

FCHPT-5414-26859

Študijný program: I-AICHP Automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve

Číslo a názov študijného odboru: 5.2.14 Automatizácia

Školiace pracovisko: OIRP ÚIAM FCHPT

Vedúca záverečnej práce/školiteľ: Ing. Anna Vasičkaninová

BRATISLAVA 2011 **Bc. František Tomeček**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Akademický rok: 2010/2011
Evidenčné číslo: FCHPT-5414-26859

STU
FCHPT

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent:	**Bc. František Tomeček**
ID študenta:	26859
Študijný program:	automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor:	5.2.14 automatizácia
Vedúca práce:	Ing. Anna Vasičkaninová

Názov práce: **Polynomické metódy návrhu riadenia**

Špecifikácia zadania:

Základné princípy polynomických metód.
Návrh regulátora pre vybraný chemickotechnologický proces a jeho simulačné overenie.

Rozsah práce: 60

Riešenie zadania práce od: 14. 02. 2011
Dátum odovzdania práce: 21. 05. 2011

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
dekanát
4

L. S.

Bc. František Tomeček
Študent

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
Vedúci pracoviska

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
Garant študijného programu

ABSTRAKT

Diplomová práca sa zaoberá polynomickými metódami návrhu regulátorov. Riadeným procesom je etážová rektifikačná kolóna. Riadenou veličinou je hodnota destilátu, riadiacou veličinou je hodnota spätného toku destilátu. V práci sa nachádza stručný úvod do teórie polynómov a diofantických rovníc ako aj ich možné riešenie. Na výpočet ustálených stavov bol použitý príkaz *f-solve*. Nelineárny model v tvare diferenciálnych rovníc bol použitý v s-funkcii, ktorá opisovala etážovú rektifikačnú kolónu. Na základe skokovej zmeny spätného toku destilátu bol experimentálnou identifikáciou proces identifikovaný ako systém prvého rádu s dopravným oneskorením. Všetky navrhnuté regulátory boli vyhodnotené na základe vybraných kritérií kvality *ise* a *iae*. Pri výpočtoch parametrov regulátorov bol použitý *Polynomial Toolbox v Matlabe*.

ABSTRACT

The diploma thesis deals with polynomial controller design methods. Controlled process is a onfloor rectification column. Operated variable is the amount of distillate, manipulated variable is the value of the distillate reflux. The diploma thesis is a brief introduction intto the theory of polynomials, diophantine equations and their possible solution. To calculate the steady state a f-solve function was used. Nonlinear model in the form of differential equations was used in a s-function, which described the tray rectification column. On a step change basis of a reflux distillate experimental identification, the process was identified as a first order system with time delay. All the designed controllers are evaluated based on selected criteria, iae and quality ise. For the calculation of controller parameters a Polynomial Toolbox in Matlab was used.

Prehlásenie:

Prehlasujem, že na diplomovej práci som pracoval samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov a za použitia uvedenej literatúry.

V Bratislave 20.5. 2011 ....

podpis

POĎAKOVANIE:

Dovoľujem si poďakovať vedúcej diplomovej práce Ing. Anne Vasičkaninovej za poskytnutie cenných rád a pripomienok pri vypracovaní tejto diplomovej práce.

Obsah

PRÍLOHY:

Príloha 1: Výpočet ustálených stavov

Príloha 2: Odozva systému na skokovú zmenu

Príloha 3: S-funkcia obsahujúca diferenciálne rovnice

Príloha 4: S-funkcia obsahujúca diferenciálne rovnice s poruchami

Príloha 5: Výpočet parametrov PID regulátorov

Príloha 6: Výpočet pólov pre PA regulátor

Príloha 7: Výpočet regulátorov pre H_2 a H_∞ riadenie

Príloha 8: Simulačná schéma zapojenia PID regulátora

Príloha 9: Simulačná schéma zapojenia PA regulátora

Príloha 10: Simulačná schéma zapojenia parametrizovaného regulátora

Príloha 11: Simulačná schéma zapojenia H_2 regulátora

Príloha 12: Simulačná schéma zapojenia H_∞ regulátora

ZOZNAM OBRÁZKOV:

ZOZNAM TABULIEK:

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK:

$u(t)$	akčná veličina
$y(t)$	regulovaná veličina
$w(t)$	žiadaná hodnota
$e(t)$	regulačná odchýlka
$v(t)$, $d(t)$	poruchová veličina
$G(s)$	regulovaný systém
$G_R(s)$	regulátor
$A(s), B(s)$	členy prenosovej funkcie
p_0, p_1, q_0, q_1, q_2	regulačná odchýlka
Z	zosilnenie
T_i	integračná časová konštanta
T_d	derivačná časová konštanta
a, b, p, q, r, s	ľubovoľné polynómy
$R\left[z^{-1}\right]$	množina všetkých polynómov v komplexnej rovine
∂	stupeň polynómu
$\|\ \|_i$	lineárna norma

1. ÚVOD

Všade okolo nás je stále väčšia snaha zvyšovania produktivity práce. Proces, pri ktorom je riadiaca činnosť človeka vo výrobných priemyselných odvetviach nahradená činnosťou rôznych strojov a zariadení sa nazýva automatizácia. Neodmysliteľnou súčasťou automatizácie je riadenie procesov. Najskôr sa pozornosť človeka sústreďovala na spojité sústavy riadené jednoduchými regulátormi proporcionálneho, integračného a derivačného typu. S vývojom a s potrebou riadiť stále zložitejšie procesy vznikla teória diskrétne riadených sústav.

Postupom času sa prišlo na to, že správanie sa sústav je skôr záležitosť algebry než analýzy. Táto myšlienka viedla k vypracovávaniu novej algebraickej metódy, ktorá sa stala ďalšou etapou vo vývoji teórie automatického riadenia. Najskôr bolo treba nájsť zodpovedajúci matematický popis sústavy, ktorý by umožnil účinné a jednotné riešenie pre rôznorodé úlohy v riadení. Tento popis je založený na algebre polynómov.

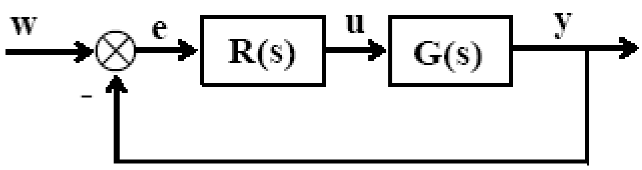
Polynomické či algebraické metódy návrhu riadenia tvoria základný nástroj pre teoretický návrh lineárnych regulačných obvodov. Od svojho vzniku v 70-tých rokoch prešli veľkým vývojom. Ich výhodou oproti stavovým metódam je riešenie problému vychádzajúce len zo vstupno-výstupného modelu bez potreby zavádzať ďalšie stavové veličiny.

Príkladom podpory výpočtov algebraickej teórie v automatizácii a jej riadení je program *Matlab*, bez ktorého si dnes nedokáže väčšina odborníkov svoju prácu predstaviť. Na základe vložených dát a vytvorených skriptov dokáže tento program identifikovať a optimalizovať systém, pričom nám poskytne numerické aj grafické riešenie.

2. TEORETICKÁ ČASŤ

2.1 Regulačný obvod

Regulačný obvod je súbor prostriedkov, ktoré zabezpečujú požadované hodnoty sledovaných veličín na konkrétnom zariadení. V regulačnom obvode vzniká dej, kedy pripojením regulátora (riadiaci systém) zaistíme udržovanie žiadanej veličiny.



Obr.1 Schéma regulačného obvodu

Cieľom riadenia je generovať akčnú veličinu *u(t)* tak, aby sa regulovaná veličina *y(t)* chovala podľa dopredu stanovených predpokladov, ktoré sú charakterizované žiadanou veličinou *w(t).* Najúčinnejším spôsobom, ako to dosiahnuť, je použitie zápornej spätej väzby.

K známemu prenosu regulovaného systému *G(s)* je nutné nájsť prenos regulátora $G_R(s)$ tak, aby regulačná odchýlka *e(t)* bola čo najmenšia (nulová) [3].

2.1.1 Stabilita regulačného obvodu

Stabilita je vlastnosť obvodu vrátiť sa do ustáleného stavu po doznení poruchovej veličiny, ktorá ho z ustáleného stavu vyviedla. Je základnou a nutnou (i keď nie postačujúcou) podmienkou správnej funkcie systému riadenia. Systém riadenia, ktorý nedisponuje stabilitou nie je vôbec schopný realizovať proces riadenia a má nulovú efektívnosť. Nestabilita systému riadenia môže byť príčinou havárie riadeného systému [3].

Kritéria kvality sa rozdeľujú na algebraické (Hurwitzovo, Routh – Schourovo) a frekvenčné (Nyquistovo, Michael-Leonardovo). Algebraické kritéria vychádzajú z koeficientov charakteristickej rovnice. Možno ich použiť pri lineárnych dynamických systémoch, ktorých charakteristická rovnica je algebraická [3].

Stabilita systému nezávisí od počiatočných podmienok a ani od tvaru vstupného signálu, ale závisí od polohy koreňov charakteristickej rovnice.

Regulačný obvod môže byť:

- stabilný
- na hranici stability
- nestabilný

Stabilné lineárne spojité systémy matematicky vyjadruje podmienka:

$$\int_0^\infty |k(t)|dt < M < \infty$$

$$\text{resp. : } \lim_{t\to\infty} k(t) = 0$$

kde *k(t)* je impulzná funkcia systému a *M* je konečné kladné reálne číslo. Tieto vzťahy sú splniteľné len vtedy, ak všetky póly obrazu impulznej funkcie *K(s)*, ktorý je totožný s prenosovou funkciou systému, ležia v ľavej polrovine komplexnej roviny koreňov, čiže všetky korene charakteristickej rovnice majú zápornú reálnu časť [3].

Systém je na hranici stability ak platia vzťahy:

$$\int_0^\infty |k(t)|dt = \infty$$

$$0 < \lim_{t\to\infty} k(t) < \infty$$

Systém je nestabilný vtedy, ak odchýlka výstupu systému od ustálenej hodnoty y_s pri konečnej zmene vstupu Δu v čase $t = t_0$ s plynúcim časom rastie do nekonečna. Potom platia vzťahy:

$$\int_0^\infty |k(t)|dt = \infty$$

$$\left|\lim_{t \to \infty} k(t)\right| = \infty$$

Sledovanie stability (resp. nestability) systému má veľký význam pri automatickom riadení procesov v systémoch, pretože nestabilný systém treba najprv stabilizovať, aby ho bolo možné riadiť [3].

2.2 Algebra polynómov

Algebraická teória lineárneho riadenia vznikla začiatkom 70-tých rokov. Vzniká potreba novej teórie, ktorá by bola vhodná pre riadenie sústav pomocou počítačov, čiže teória, ktorej podstata by bola diskrétna. Touto teóriou sa stala teória diskrétneho lineárneho riadenia, nazývaná tiež algebraická, pretože pracuje s algebraickými pojmami a využíva algebraickú interpretáciu polynómov.

Podľa nej nie je polynóm $A = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n$ chápaný ako funkcia premennej *s*, ale ako algebraický objekt, čiže prvok množiny podobných vlastností, ktoré predstavujú rad postupnosti reálnych čísel.

2.2.1 Algebraické metódy riadenia

Tieto metódy vychádzajú z vnútorného opisu riadeného systému. Podielom dvoch polynómov v komplexnej rovine *z* alebo z^{-1} je vyjadrený prenos systému

$$G_s(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-n}}$$

Nekonečnými postupnosťami sa rozumejú rady, ktoré sa delia na stabilné, kauzálne a rekurentné. Pomocou týchto radov je definovaný prenos sústavy. Rekurentné rady charakterizujú lineárne sústavy a stabilné rady charakterizujú stabilné sústavy. Kauzálnymi radmi sa vyznačujú fyzikálne realizovateľné sústavy. Základná myšlienka algebraickej metódy syntézy optimálneho riadenia využíva to, že s polynómami je možné pracovať samostatne. Zložitejšia algebra racionálnych prenosov je zjednodušená na algebru polynómov. Nájdenie efektívnych algoritmov je cieľom týchto metód riadenia.

Táto metóda sa využíva aj pre riešenie mnohorozmerových sústav. Prenos nie je jednotlivá sústava, ale matica sústav. Taký prenos potom môžeme chápať ako súčin polynomiálnej matice a polynomiálnej matice prevrátenej vzhľadom na jej poradie. Teória viacrozmerových sústav je zovšeobecnením teórie jednorozmerových sústav, pričom pracujeme s polynomiálnymi maticami namiesto s polynómami [1].

2.2.2 Operácie s polynómami

Pri algoritmoch sa vychádza z polynómov s reálnymi koeficientami, ktoré sa vyskytujú najčastejšie. Existujú rôzne algebraické operácie, napr. :

Delenie polynómov

Delenie polynómov dáva možnosť dvom daným polynómom $a, b \neq 0 \in R\left[z^{-1}\right]$ určiť polynómy $g, h \in R\left[z^{-1}\right]$ tak, že platí

$$a = bg + h$$

Medzi týmito polynómami platí vzťah $\partial h < \partial b$. Ak je $\partial a < \partial b$, potom $g = 0$ a $h = a$. V opačnom prípade je potreba od polynómu a odčítať také násobky polynómu b, ktoré postupne redukujú jeho stupeň. Ak platí $\partial a < \partial b$, výpočet sa ukončí.

Najväčší spoločný deliteľ polynómov

Dôležitý algoritmus, ktorý umožňuje dvom daným polynómom $a, b \in R\left[z^{-1}\right]$ nájsť ich najväčší spoločný deliteľ $d = (a, b)$ a polynómy *p, q,* a *r, s,* ktoré spĺňajú

$$ap + bq = d$$
$$ar + bs = 0$$

Je potreba určiť, ktorý z polynómov *a, b* má vyšší stupeň. Od tohto polynómu sa odčítajú také násobky druhého polynómu, ktoré postupne redukujú jeho stupeň. Ak jeho stupeň klesne pod stupeň polynómu redukujúceho, úloha polynómov sa zamení. Redukcia sa robí tak dlho, až bude jeden z polynómov nulový. Zostávajúci polynóm je potom najväčším spoločným deliteľom *d*. Definície usporiadania polynómov *a, b, p, q, r, s* do matíc

$$Q = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Zápis algoritmu:

1) Dáme *p=1, s=1, q=0, r=0*
2) Určíme nenulový polynóm menšieho stupňa v matici *L*. Ak sú oba polynómy nulové, tak je koniec
3) Ak je polynóm nižšieho stupňa v druhom (spodnom) riadku matice *L*, zameníme riadky matice *Q* a *L*
4) Ak je polynóm v druhom riadku matice *L* nulový, je koniec
5) Určíme číslo λ ako podiel koeficientov najvyšších mocnín z^{-1} a číslo ρ ako rozdiel stupňov polynómov v druhom a prvom riadku matice *L*
6) Odpočítame prvý riadok násobený λz^{ρ} od druhého riadku v matici L aj matici Q
7) Postup opakujeme od bodu 2)

Po ukončení algoritmov je polynóm $d = (a, b)$ na mieste polynómu *a* v matici *L*, na mieste polynómu *b* je nula. Polynómy *p, q, r, s* sú na svojom mieste v matici *Q* [1][2].

Ďalšie metódy sú napr. :

- Rozvoj polynomiálneho zlomku
- Faktorizácia polynómu
- Reflex polynómu
- Test stability polynómu

2.3 Diofantické rovnice

Lineárna skalárna polynomická rovnica

$$a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$$

sa nazýva diofantická rovnica podľa matematika Diophanta z Alexandrie. Polynómy *a(s), b(s)* a *c(s)* sú dané a polynómy *x(s)* a *y(s)* sú neznáme.

Riešiteľnosť diofantickej rovnice: Nech *a(s), b(s)* a *c(s)* sú polynómy s reálnymi koeficientmi. Potom rovnica má riešenie vtedy a len vtedy, ak najväčší spoločný deliteľ *a(s)* a *b(s)* delí *c(s).*

Z vety o riešiteľnosti diofantickej rovnice vyplýva, že ak *a(s)* a *b(s)* sú nesúdeliteľné, potom diofantická rovnica je riešiteľná pre ľubovoľný polynóm *c(s)* okrem prípadu ak *c(s)* = 1. Keď diofantická rovnica je riešiteľná, potom má nekonečne veľa riešení. Ak *x'(s), y'(s)* je partikulárne riešenie diofantickej rovnice, potom všeobecné riešenie diofantickej rovnice je:

$$x(s)=x'(s)+b(s)t(s)$$
$$y(s)=y'(s)-a(s)t(s)$$

pričom *t(s)* je ľubovoľný polynóm (parameter) *a(s), b(s)* sú nesúdeliteľné polynómy.

Keď polynómy *a(s), b(s)* sú nesúdeliteľné, potom *a(s)* = *a(s), b(s)* = *b(s).* Ak neplatí tento vzťah, riešenie diofantickej rovnice môžeme tiež hľadať pre minimálny stupeň polynómu *x(s),* alebo pre minimálny stupeň polynómu *y(s).*

Vynikajúcim nástrojom na riešenia diofantických polynomických rovníc je *Polynomial Toolbox for MATLAB* [6].

2.3.1 Diofantické polynomiálne rovnice a ich riešenie

V prípade riešenia úloh algebraického riadenia využívame vlastnosti polynómov. Ak je daná jednorozmerová úloha, je možnosť syntézy algebraického optimálneho riadenia previesť na riešenia lineárnej diofantickej (neurčitej) polynomiálnej rovnice v tvare

$$a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$$

kde *a(s), b(s), c(s)* sú dané polynómy a *x(s), y(s)* sú polynómy neznáme.

Ak je x_0, y_0 riešením rovnice $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s})+b(\mathrm{s})y(\mathrm{s})=c(\mathrm{s})$ a d je najväčší spoločný deliteľ polynómov *a(s)* a *b(s)*, potom platí

$$\left(a(\mathrm{s}),b(\mathrm{s})\right)=d \qquad \begin{matrix} a(\mathrm{s})=d_{a_0} \\ b(\mathrm{s})=d_{b_0} \end{matrix}$$

Dosadením dostaneme

$$d\left(a_0x_0+b_0y_0\right)=c(\mathrm{s})$$

z tejto rovnice potom vyplýva, že rovnica $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s})+b(\mathrm{s})y(\mathrm{s})=c(\mathrm{s})$ má riešenie práve vtedy ak $d=\left(a(\mathrm{s}),b(\mathrm{s})\right)|\,c(\mathrm{s})$. Rovnica $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s})+b(\mathrm{s})y(\mathrm{s})=c(\mathrm{s})$ je lineárna, preto jej všeobecné riešenie je súčtom partikulárneho riešenia úplnej rovnice a všeobecného riešenia skalárnej rovnice. Ak je x_0, y_0 partikulárne riešenie rovnice, potom jej riešenie má tvar

$$x(\mathrm{s})=x_0+\frac{b(\mathrm{s})}{(a(\mathrm{s}),b(\mathrm{s}))}t \qquad y(\mathrm{s})=y_0+\frac{a(\mathrm{s})}{(a(\mathrm{s}),b(\mathrm{s}))}t$$

kde *t* je ľubovoľný polynóm $t\in R\left[z^{-1}\right]$ [1].

2.3.2 Spôsoby riešenia diofantických rovníc

Riešenie diofantickej rovnice na základe najväčšieho spoločného deliteľa dvoch polynómov

Ak máme rovnicu $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s})+b(\mathrm{s})y(\mathrm{s})=c(\mathrm{s})$, v nej nájdeme k polynómom *a(s), b(s)* ich najväčšieho spoločného deliteľa *d(s)* a pomocné polynómy *p, q, r, s* také, pričom platí

$$\begin{aligned} a(\mathrm{s})p+b(\mathrm{s})q&=d(\mathrm{s}) \\ a(\mathrm{s})r+b(\mathrm{s})s&=0 \end{aligned}$$

Pre partikulárne riešenie x_0, y_0 môžeme rovnicu $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s})+b(\mathrm{s})y(\mathrm{s})=c(\mathrm{s})$ písať v tvare $a_0x_0+b_0y_0=c(\mathrm{s})$. Vynásobíme túto rovnicu podielom $\dfrac{d(\mathrm{s})}{c(\mathrm{s})}$ a dostaneme

$$a_0 x_0 \frac{d(\mathrm{s})}{c(\mathrm{s})} + b_0 y_0 \frac{d(\mathrm{s})}{c(\mathrm{s})} = d(\mathrm{s})$$

Potom platí

$$x_0 = p\frac{c(\mathrm{s})}{d(\mathrm{s})} \qquad y_0 = q\frac{c(\mathrm{s})}{d(\mathrm{s})}$$

Najjednoduchšie riešenie skrátenej rovnice $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s}) + b(\mathrm{s})y(\mathrm{s}) = 0$ je pre $x(\mathrm{s}) = b_0$, $y(\mathrm{s}) = -a_0$ bude $a(\mathrm{s})b_0 - b(\mathrm{s})a_0 = 0$.

kde a_0, b_0 sú nesúdeliteľné polynómy.

Pretože polynómy *r, s* v rovnici $a(\mathrm{s})r + b(\mathrm{s})s = 0$ sú tiež nesúdeliteľné polynómy, vyplýva z porovnania tejto rovnice a rovnice $a(\mathrm{s})b_0 - b(\mathrm{s})a_0 = 0$, že

$$r = b_0 = \frac{b(\mathrm{s})}{(a(\mathrm{s}), b(\mathrm{s}))} \qquad s = -a_0 = -\frac{a(\mathrm{s})}{(a(\mathrm{s}), b(\mathrm{s}))}$$

Všeobecné riešenie rovnice $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s}) + b(\mathrm{s})y(\mathrm{s}) = c(\mathrm{s})$ môžeme potom napísať v tvare

$$x(\mathrm{s}) = p\frac{c(\mathrm{s})}{d(\mathrm{s})} + rt \qquad y(\mathrm{s}) = q\frac{c(\mathrm{s})}{d(\mathrm{s})} + st$$

kde $t \in R\left[z^{-1}\right]$ je ľubovoľný polynóm. Riešením *x(s), y(s)* budú také polynómy len vtedy, keď $\frac{c(\mathrm{s})}{d(\mathrm{s})}$ bude polynóm, teda ak $d(\mathrm{s}) \,|\, c(\mathrm{s})$ [1].

Riešenie diofantickej rovnice metódou neurčitých koeficientov

Pri tejto metóde sa určuje len partikulárne riešenie rovnice $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s}) + b(\mathrm{s})y(\mathrm{s}) = c(\mathrm{s})$. Použitím tejto rovnice sa riešia sústavy lineárnych rovníc, ktoré vzniknú porovnaním koeficientov mocnín z^{-1} v riešenej rovine. Najskôr sa musia určiť stupne hľadaných polynómov. Volia sa možnosti

$$\partial x = \partial b - 1$$

$$\partial y = \partial a - 1 \qquad \text{pre } \partial a = \partial c < \partial b$$

$$\partial y = \partial c - \partial b \qquad \text{pre ostatné prípady}$$

Sústava lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení ak $(a(\mathrm{s}), b(\mathrm{s})) \neq 1$ delí *c(s)*, a jediné riešenie ak $(a(\mathrm{s}), b(\mathrm{s})) = 1$. Pri tejto metóde nie je možné určiť všeobecné riešenie rovnice $a(\mathrm{s})x(\mathrm{s}) + b(\mathrm{s})y(\mathrm{s}) = c(\mathrm{s})$ [1].

Špeciálne riešenie x, y minimalizujúce stupeň polynómu y

Pri praktických použitiach rovnice $a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$ treba nájsť partikulárne riešenie, ktoré spĺňajú požiadavky podľa úlohy. Jeden z požiadavkou je minimalizácia polynómu ∂y. Ak je x_0, y_0 ľubovoľné partikulárne riešenie rovnice $a(s)x(s)+b(s)y(s)=c(s)$, potom všeobecné riešenie je v tvare

$$x(s)=x_0+\frac{b(s)}{(a(s),b(s))}t \qquad y(s)=y_0-\frac{a(s)}{(a(s),b(s))}t$$

pre ľubovoľné $t\in R\left[z^{-1}\right]$.

Pri delení polynómu y_0 polynómom $a(s)\,|\,(a(s),b(s))$ dostaneme podľa $b(s)=a(s)p+q$ podiel p zvyšok q v tvare $y_0=\frac{a(s)}{(a(s),b(s))}p+q$.

Dosadením dostaneme

$$y_0=\frac{a(s)}{(a(s),b(s))}p+q-\frac{a(s)}{(a(s),b(s))}t=q-\frac{a(s)}{(a(s),b(s))}(t-p)$$

Pri dosadení $t=p$ bude riešenie rovnice

$$x(s)=x_0+\frac{b(s)}{(a(s),b(s))}p$$

$$y(s)=q$$

Toto riešenie je jednoznačné a dáva polynóm $y(s)$ s minimálnym možným stupňom [1].

2.4 H_2 optimálne riadenie

Úlohou H_2 optimálneho riadenia je stabilizácia lineárneho systému a súčasná minimalizácia normy prenosovej matice v Hardyho priestore H_2.

$$G(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

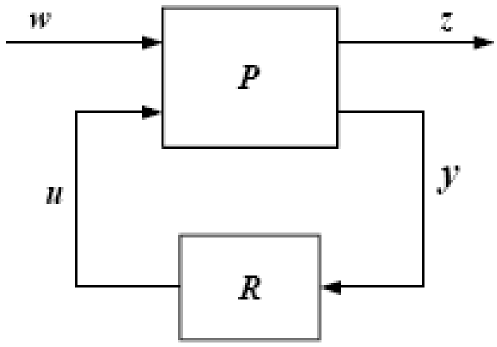
$$G_{11}(s)=C_1(sI-A)^{-1}B_1$$

$$G_{12}(s)=C_1(sI-A)^{-1}B_2+D_{12}$$

$$G_{21}(s)=C_2(sI-A)^{-1}B_2+D_{21}$$

$$G_{22}(s)=C_2(sI-A)^{-1}B_2$$

kde matice A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21} sú dané modelom objektu (vstupno-stavovo-výstupným).



Obr.2 Štandardná schéma objektu

$$x(t) = Ax(t) + B_1 v(t) + B_2 u(t)$$
$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} v(t) + D_{12} u(t)$$
$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} v(t) + D_{22} u(t)$$

Predpokladáme, že dvojica: (A, B_1) je stabilizovateľná, (A, C_1) je detekovateľná, (A, B_2) je stabilizovateľná, (A, C_2) je detekovateľná.

$$D_{12}^T C1 = 0 \qquad B_1 D_{21}^T = 0 \qquad D_{12}^T D_{12} = 0$$
$$D_{21} D_{21}^T = I \qquad D_{11} = D_{22} = 0$$

Označme $C(s)$ ako prenosovú maticu regulátora. Prenosová matica riadiaceho systému medzi w a z, bude potom v spätnoväzbovej konfigurácii zobrazenej na Obr.2 v tvare:

$$H(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)\left[I - C(s)G_{22}(s)\right]^{-1} C(s)G_{21}(s)$$

Úloha H_2 optimálneho riadenia je daná nasledovným spôsobom [1]. Majme daný objekt $G(s)$, nájdime regulátor $C(s)$ taký, ktorý stabilizuje riadený systém a minimalizuje H_2 normu matice H, definovanú v tvare

$$\|H\| = \left(\frac{1}{2\pi j} \int tr H^T(-s) H(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Úloha H_2 optimálneho riadenia môže byť prepísaná na úlohu umiestnenia pólov, v ktorej dynamika uzavretého regulačného obvodu je určená dvoma spektrálnymi faktormi $f(s)$ a $g(s)$, získanými z optimalizácie.

H_2 optimálny zákon riadenia je v tvare:

$$p(s)u = -q(s)y$$

kde polynómy $p(s)$ a $q(s)$ sú získané riešením diofantickej rovnice

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = f(s)g(s)$$

Polynómy $f(s)$ a $g(s)$ sú definované nasledovne

$$N_L(s)N_L^T(-s) = f(-s)f(s)$$
$$N_R^T(-s)N_R(s) = g(s)g(-s)$$

kde $a(s)$, $b(s)$, $N_L(s)$ a $N_R(s)$ sú dané podľa

$$C_2(sI - A)^{-1}B_2 = \frac{b(s)}{a(s)}$$
$$N_L(s) = a(s)G_{21}(s)$$
$$N_R(s) = G_{12}(s)a(s)$$

Ak prenosová funkcia uzavretého regulačného obvodu *H* je daná v tvare

$$H = \begin{bmatrix} W_1SV_1 \\ W_2UV_1 \end{bmatrix}$$

kde W_1, W_2, V_1 sú tvarovacie filtre, potom v prípade SISO systému 2-normy sa prevedie na minimalizáciu

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left|W_1(j\omega)S(j\omega)V_1(j\omega)\right|^2 + \left|W_2(j\omega)U(j\omega)V_1(j\omega)\right|^2\right)d\omega$$

Toto je H_2 verzia známej zmiešavacej citlivostnej H_∞ optimalizačnej úlohy [4][5].

2.5 H$_\infty$ riadenie

Majme štandardnú konfiguráciu ako na obr.2 kde *P* je riadený objekt a *R* je regulátor. *W* je vektor vstupných veličín, ktorého prvky môžu byť poruchy procesu, referenčné vstupy *URO* alebo zašumené signály meranie, *u* je vektor opisujúci akčné zásahy, *z* je vektor chýb a *y* je vektor výstupnej matice. Model má tvar

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

Pričom

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

je prenosová matica riadeného objektu. Hľadaný regulátor je potom opísaný rovnicou

$$u = R(s)y$$

pričom $R(s)$ je prenosová matica regulátora.

Prenosová matica *URO* medzi vstupom w a výstupom z je daná lineárnou zlomkovou transformáciou (LFT – linear fractional transformation)

$$z = G_1(G, R)w$$

kde

$$G_1(s) = G_{wz}(s) = G_{11}(s) + G_{12}(s)R(s)\left[I - G_{22}(s)R(s)\right]^{-1} G_{21}(s)$$

Úloha návrhu regulátora pre riadený objekt s prenosovou maticou $G(s)$ spočíva v nájdení prenosovej matice regulátora $R(s)$, aby norma prenosovej matice sledovania $G_{wz}(s)$ bola čo najmenšia. Musí platiť

$$\min_{R(s)} \left\| G_{wz}(s) \right\|_\infty$$

Tento problém sa tiež označuje ako H_∞ – optimalizačný problém. Označenie $\|.\|_\infty$ je skrátené vyjadrenie výrazu

$$\left\| G(s) \right\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max} \left\{ G(j\omega) \right\}$$

pričom $\sigma_{\max}$ označuje najväčšiu singulárnu hodnotu matice. Pre SISO systémy sa zmení na tvar

$$\left\| G(j\omega) \right\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \left| G(j\omega) \right|$$

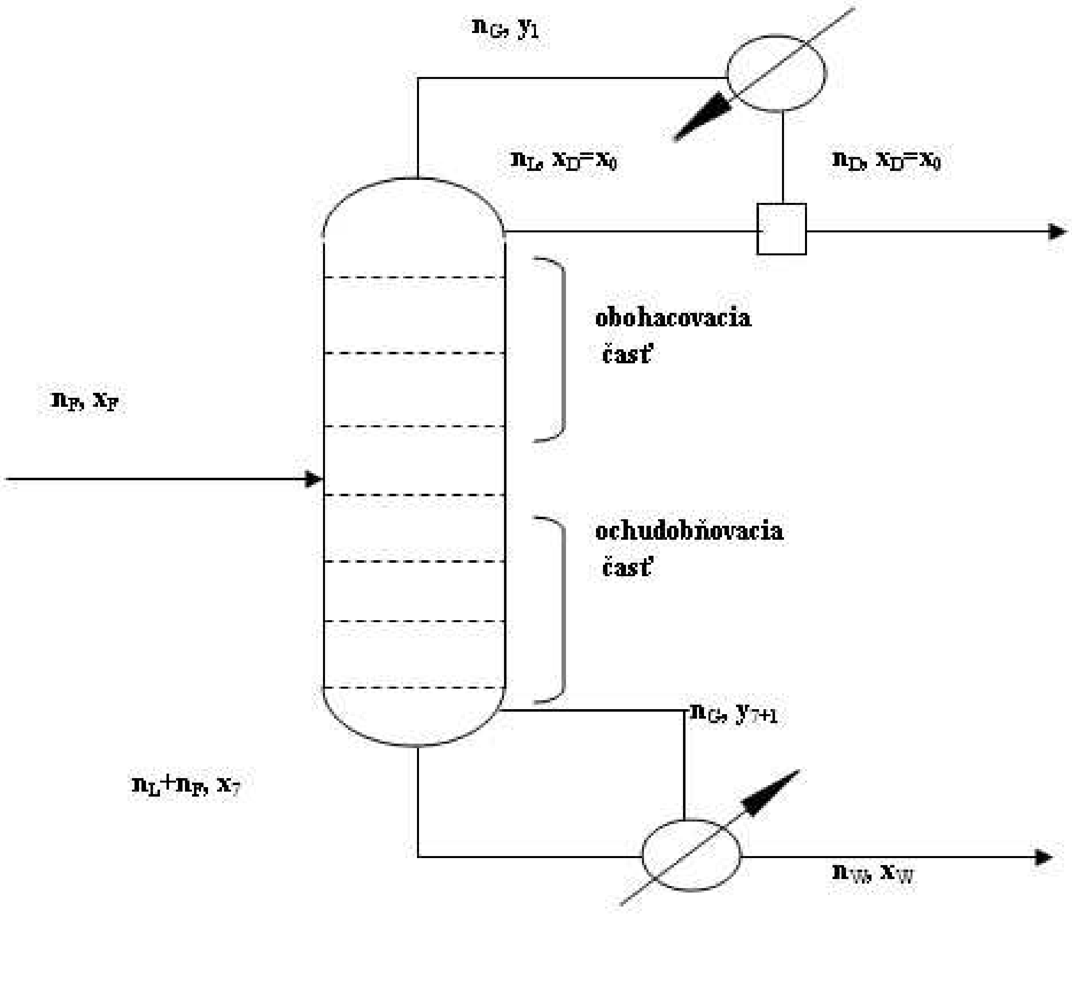
teda opisuje maximum amplitúdy frekvenčnej charakteristiky. Regulátor, ktorý vznikne podľa vyššie formulovanej úlohy sa nazýva H_∞ regulátor v Hardyho H_2 priestore a označuje množinu ohraničených funkcií, ktoré sú v pravej komplexnej rovine analytické [4][5].

3. PRAKTICKÁ ČASŤ

3.1. Model etážovej rektifikačnej kolóny

Cieľom projektu bolo navrhnutie regulátorov pomocou polynomických metód riadenia pre etážovú rektifikačnú kolónu a následné vyhodnotenie podľa vybraných kritérií kvality.

Delí sa binárna zmes benzén – toluén. Obe látky sa miešajú dokonale pozdĺž celej kolóny. K prestupu látky dochádza len na etáži. Účinnosť etáži je definovaná Murphreeho účinnosťou.



Obr.3 Schéma etážovej rektifikačnej kolóny

Parameter	Hodnota	Jednotka
a	0.0021567456	-
b	0.821112327	-
c	2.3066176	-
d	-0.39916116	-
e	0.88823513	-
F^s	22.5	kmolh^{-1}
D^s	7.74	kmolh^{-1}
L^s	22.26	kmolh^{-1}
x_f^s	0.23	-
x_d^s	0.667	-

Tab.1 Parametre etážovej rektifikačnej kolóny

Kolóna má 25 etáží, nástreková etáž je č. 14. Účinnosť etáží je 60%. Zádrže kvapalnej fázy v kolóne sú: 1 kmol vo varáku, 0.1 kmol na každej etáži a 0.2 kmol v kondenzátore. Zaujíma nás zloženie destilátu, pričom požadovaná hodnota je 0.95 s možnou odchýlkou 0.03. Zloženie destilátu x_d sa riadi spätným tokom do kolóny L.

Ustálené stavy boli vypočítané pomocou príkazu *f-solve*. Nelineárny model etážovej rektifikačnej kolóny tvoria diferenciálne rovnice. Tieto rovnice boli použité v s-funkcii. Na základe skokovej zmeny hodnoty spätného toku L z hodnoty 22.26 kmolh^{-1} na 24.26 kmolh^{-1} bol experimentálne identifikovaný systém ako systém prvého rádu s dopravným oneskorením.

- Rovnica rovnovážnej krivky (za predpokladu $x^* = x$)

$$y^* = \frac{a + bx + cx^2}{1 + dx + ex^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$\eta_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{y_i * - y_{i+1}} \Rightarrow y_i = \eta_i y_i^* + (1 - \eta_i) y_{i+1}$$

3.1.1 Dynamický matematický model

Varák *(n+1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y^*_{n+1}(t)=\frac{a+bx_{n+1}(t)+cx_{n+1}(t)^2}{1+dx_{n+1}(t)+ex_{n+1}(t)^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_{n+1}=\eta_{n+1}y^*_{n+1}(t)$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$(n_L(t)+n_F(t))x_n(t)=n_G(t)y_{n+1}(t)+n_W(t)x_{n+1}(t)+\frac{d(Z_{n+1}x_{n+1}(t))}{dt}$$

zač. podmienka : $x_{n+1}(t=0)=x_w(t=0)$

Ochudobňovacia časť kolóny *(n, n-1, …, j, …, k+1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y^*_j(t)=\frac{a+bx_j(t)+cx_j(t)^2}{1+dx_j(t)+ex_j(t)^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_j(t)=\eta_j y^*_j(t)+(1-\eta_j)y_{j+1}(t)$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$(n_L(t)+n_F(t))x_{j-1}(t)+n_G(t)y_{j+1}(t)=(n_L(t)+n_F(t))x_j(t)+n_G(t)y_j(t)+\frac{d(Z_jx_j(t))}{dt}$$

zač. podmienka : $x_j(t=0)$

j = n, ,n-1, …, k+1

Nástreková etáž *(k)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_k^*(t) = \frac{a + bx_k(t) + cx_k(t)^2}{1 + dx_k(t) + ex_k(t)^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_k(t) = \eta_k y_k^*(t) + (1 - \eta_k) y_{k+1}(t)$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_F(t)x_F(t) + n_L(t)x_{k-1}(t) + n_G(t)y_{k+1}(t) = (n_L(t) + n_F(t))x_k(t) + n_G(t)y_k(t) + \frac{d(Z_k x_k(t))}{dt}$$

zač. podmienka : $x_k(t=0)$

Obohacovacia časť kolóny *(k-1, k-2, …, i, …, 2, 1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_i^*(t) = \frac{a + bx_i(t) + cx_i(t)^2}{1 + dx_i(t) + ex_i(t)^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_i(t) = \eta_i y_i^*(t) + (1 - \eta_i) y_{i+1}(t)$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_L(t)x_{i-1}(t) + n_G(t)y_{i+1}(t) = n_L(t)x_i(t) + n_G(t)y_i(t) + \frac{d(Z_i x_i(t))}{dt}$$

zač. podmienka : $x_k(t=0)$

i = k-1, k-2, …, 1

Kondenzátor *(0)*

- Len materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_G(t)y_1(t) = n_L(t)x_0(t) + n_D(t)x_0(t) + \frac{d(Z_0 x_0(t))}{dt}$$

zač. podmienka : $x_0(t=0) = x_D(t=0)$

DMM etážovej rektifikačnej kolóny má tvar nelineárneho stavového opisu s nenulovými začiatočnými podmienkami, kde:

- Stavové veličiny: $x_n(t),..,x_0(t)$
- Vstupné veličiny: $n_G(t), n_L(t), n_D(t), n_W(t), n_F(t), x_F(t)$
- Výstupné veličiny napr. : $x_{n+1}(t) = x_w(t), x_o(t) = x_D(t)$

3.1.2 Matematický model ustáleného stavu

- Rovnica rovnovážnej krivky (za predpokladu $x* = x$)

$$y^* = \frac{a + bx^s + cx^{s2}}{1 + dx^s + ex^{s2}}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$\eta_i = \frac{y_i^s - y_{i+1}^s}{y_i * - y_{i+1}^s} \Rightarrow y_i^s = \eta_i y_i^* + (1 - \eta_i) y_{i+1}{}^s$$

Varák *(n+1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_{n+1}^* = \frac{a + bx_{n+1}^s + cx_{n+1}^s{}^2}{1 + dx_{n+1}^s + ex_{n+1}^s{}^2}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_{n+1}^s = \eta_{n+1} y_{n+1}^*$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$(n_L{}^s + n_F{}^s) x_n^s = n_G^s y_{n+1}^s + n_W^s x_{n+1}^s$$

Ochudobňovacia časť kolóny *(n, n-1, …, j, …, k+1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_j^* \frac{a + bx_j^s + cx_j^{s2}}{1 + dx_j^s + ex_j^{s2}}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_j^s(t) = \eta_j y_j^* + (1 - \eta_j) y_{j+1}^s$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$(n_L^s + n_F^s) x_{j-1}^s + n_G y_{j+1}^s = (n_L^s + n_F^s) x_j^s + n_G^s y_j^s$$

j = n, ,n-1, …, k+1

Nástreková etáž *(k)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_k^* = \frac{a + bx_k^s + cx_k^{s2}}{1 + dx_k^s + ex_k^{s2}}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_k^s = \eta_k y_k^* + (1 - \eta_k) y_{k+1}^s$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_F^s x_F^s + n_L^s x_{k-1}^s + n_G^s y_{k+1}^s = (n_L^s + n_F^s) x_k^s + n_G^s y_k^s$$

Obohacovacia časť kolóny *(k-1, k-2, …, i, …, 2, 1)*

- Rovnica rovnovážnej krivky

$$y_i^* = \frac{a + bx_i^s + cx_i^{s2}}{1 + dx_i^s + ex_i^{s2}}$$

- Rovnica Murphreeho účinnosti:

$$y_i^s = \eta_i y_i^* + (1 - \eta_i) y_{i+1}^s$$

- Materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_L^s x_{i-1}^s + n_G^s y_{i+1}^s = n_L^s x_i^s + n_G^s y_i^s$$

Kondenzátor ***(0)***

- Len materiálová bilancia prchavejšej (= nižšie vriacej) zložky

$$n_G^s y_1^s = n_L^s x_0^s + n_D^s x_0^s$$

- Bilancia kolóny: $n_F^s = n_W^s + n_D^s$

- Bilancia kondenzátora: $n_G^s = n_L^s + n_D^s$

- Bilancia zložky pre kolónu: $n_F^s x_F^s = n_W^s x_W^s + n_D^s x_D^s$

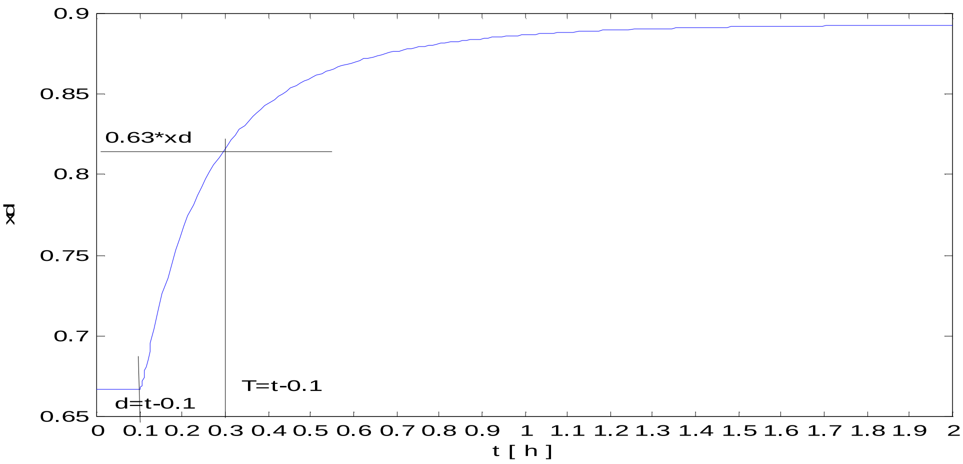
- Bilancia zložky pre kondenzátor: $n_G^s y_1^s = n_L^s x_D^s + n_D^s x_D^s$

3.1.3 Identifikácia

Používaným vstupným signálom je skoková zmena jednej zo vstupných veličín pri zachovaní ostatných vstupných veličín ako konštánt. Pred skokovou zmenou musí byť systém v ustálenom stave. Časový priebeh výstupnej veličiny je prechodová charakteristika, ktorú získame ako odozvu systému na skokovú zmenu hodnoty spätného toku destilátu. Takto získanú prechodovú charakteristiku je treba identifikovať. Na základe zmeny vstupnej veličiny spätného toku L z hodnoty 22.26 kmolh^{-1} na 24.26 kmolh^{-1} bola prechodová charakteristika experimentálne identifikovaná ako systém 1. rádu s dopravným oneskorením. Vo všeobecnosti má prenosová funkcia tvar:

$$G(s) = \frac{Z}{(Ts+1)^n} e^{-Ds}$$

kde Z je zosilnenie, T je časová konštanta, D je dopravné oneskorenie a n je rád systému.



Obr.4 Zobrazenie prechodovej charakteristiky

Zosilnenie Z sa vypočíta ako

$$Z = \frac{y(\infty) - y(0)}{u(\infty) - u(0)}$$

$$Z = \frac{0.8927 - 0.667}{24.26 - 22.26} = 0.1129$$

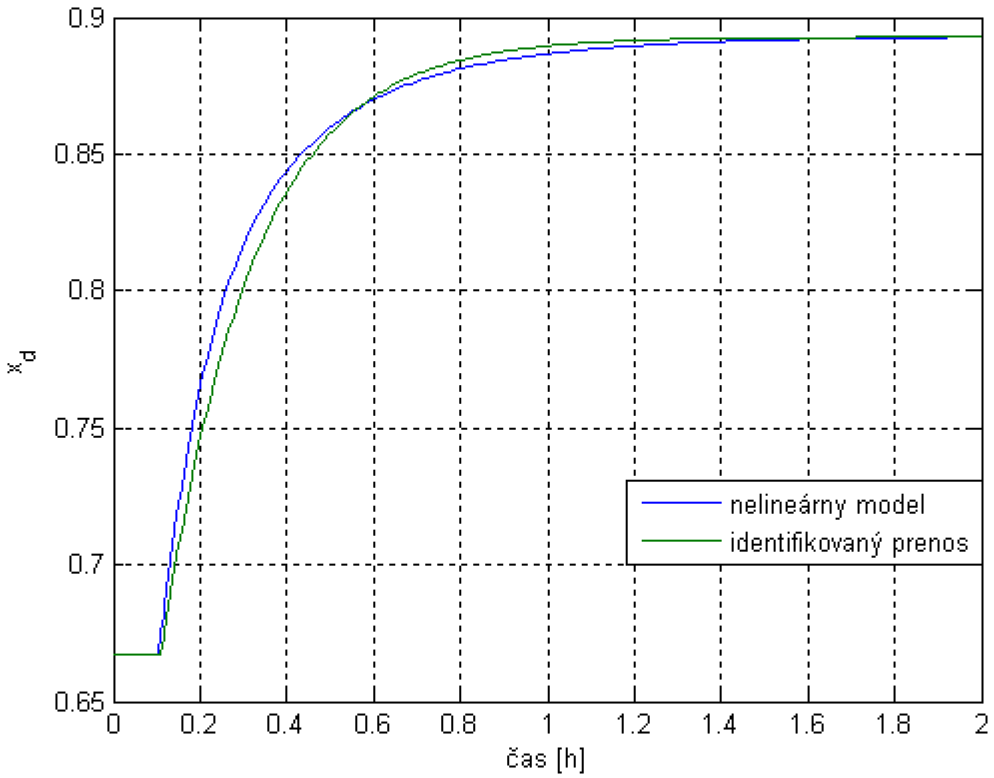
Hodnota časovej konštanty T sa v prípade systému prvého rádu dá odčítať z prechodovej charakteristiky ako čas, za ktorý dosiahne výstupná veličina 63% svojej ustálenej hodnoty, $T = 0.21$.

Dopravné oneskorenie odčítame z prechodovej charakteristiky, $D = 0.01$

Výsledný prenos má teda tvar

$$G(s) = \frac{0.1129}{0.21s + 1} e^{-0.01s}$$

Na obr.5 je porovnanie pôvodnej a identifikovanej prechodovej charakteristiky.



Obr.5 Porovnanie odozvy systému na skokovú zmenu spätného toku destilátu

3.2 Návrh regulátorov

Úlohou regulátora je generovať akčnú veličinu spracovávaním regulačnej odchýlky podľa určitého predpisu. Klasické regulátory majú tri základné prvky. Kombináciou dostaneme rôzne typy regulátorov:

- P- proporcionálny regulátor,
- PI- proporcionálno-integračný regulátor,
- PD- proporcionálno-derivačný regulátor
- PID- proporcionálno-integračno-derivačný regulátor.

Podľa experimentálnych metód sme navrhli rôzne typy PID regulátorov.

Výpočet parametrov PID regulátora Cohenovou-Coonovou metódou

Táto metóda vychádza z určenia špecifických parametrov T_u a T_n. Konštanty regulátora boli získané na základe vypočítaných parametrov zosilnenia sústavy Z, času nábehu T_n a času prieťahu T_u.

$$Z_r = \left(\frac{T_n}{T_u z}\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{T_u}{4T_n}\right) = \left(\frac{0.21}{0.01\times 0.1129}\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{0.01}{4\times 0.21}\right) = 250.2214$$

$$T_I = T_u\left[\frac{\left(32+\frac{6T_u}{T_n}\right)}{\left(13+\frac{8T_u}{T_n}\right)}\right] = 0.01\left[\frac{\left(32+\frac{6\times 0.01}{0.21}\right)}{\left(13+\frac{8\times 0.01}{0.21}\right)}\right] = 0.0241$$

$$T_D = T_u\left[\frac{4}{11+\frac{2T_u}{T_n}}\right] = 0.01\left[\frac{4}{11+\frac{2\times 0.01}{0.21}}\right] = 0.0036$$

Výpočet parametrov PID regulátora podľa metódy priamej syntézy

Sú určené konštanty Z, T_u *a* T_n. Zvolí sa časová konštanta *URO* menšia ako časová konštanta regulovaného systému. O *URO* sa predpokladá, že sa chová ako systém 1. rádu s dopravným oneskorením.

$$Z_r = \frac{2T_nT_u}{2z\left(T_{URO}+T_u\right)} = \frac{2\times 0.21\times 0.01}{2\times 0.1129\times\left(15+0.01\right)} = 61.4303$$

$$T_I = T_n + \frac{T_u}{2} = 0.21 + \frac{0.01}{2} = 0.2150$$

$$T_D = \frac{T_{URO} T_u}{2\left(T_{URO} + T_u\right)} = \frac{15 \times 0.01}{2 \times (15 + 0.01)} = 0.0034$$

Výpočet parametrov PID regulátora Zieglerovou-Nicholsovou metódou

Pri tejto metóde sa vypočítajú kritické hodnoty parametrov, ktoré sú na hranici stability a následne sa z nich vypočítajú konštanty pre regulátor.

$$Z_r = \frac{1.2T_n}{T_u z} = \frac{1.2 \times 0.21}{0.01 \times 0.1129} = 223.2064$$

$$T_I = 2T_u = 2 \times 0.01 = 0.02$$

$$T_D = 0.5T_u = 0.5 \times 0.01 = 0.05$$

Výpočet parametrov PID regulátora Chienovou-Hronesovou-Reswickovou metódou s 0% preregulovaním

Regulátor vychádza z *Zieglerovej-Nicholsovej* metódy v snahe dosiahnuť lepšie tlmenie v regulačnom obvode.

$$Z_r = 0.6\left[\frac{T}{DZ}\right] = 0.6\left[\frac{0.21}{0.01 \times 0.1129}\right] = 111.6032$$

$$T_I = T = 0.21$$

$$T_D = 0.5D = 0.5 \times 0.01 = 0.005$$

Výpočet parametrov PID regulátora Chienovou-Hronesovou-Reswickovou metódou s 20% preregulovaním

$$Z_r = 0.95\left[\frac{T}{DZ}\right] = 0.95\left[\frac{0.21}{0.01 \times 0.1129}\right] = 176.7050$$

$$T_I = 1.4T = 1.4 \times 0.21 = 0.2940$$

$$T_D = 0.47D = 0.47 \times 0.01 = 0.0047$$

regulátor	Cohen-Coon	Metóda priamej syntézy	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswick 0%	Chien-Hrones-Reswick 20%
Z_r	250.221	61.4303	223.2064	111.6032	176.7050
T_I	0.0241	0.2150	0.02	0.21	0.2940
T_D	0.0036	0.0034	0.005	0.005	0.0047

Tab.2 Hodnoty parametrov PID regulátorov

3.2.1 Kritéria kvality riadenia

1. čas regulácie (t_{reg}) - je to čas za ktorý dosiahne výstupná veličina žiadanú hodnotu s určitou presnosťou.
2. *iae* – predstavuje absolútnu plochu hodnoty odchýlky riadenia *e*.

$$I_{iae} = \int_0^\infty |e(t)| dt$$

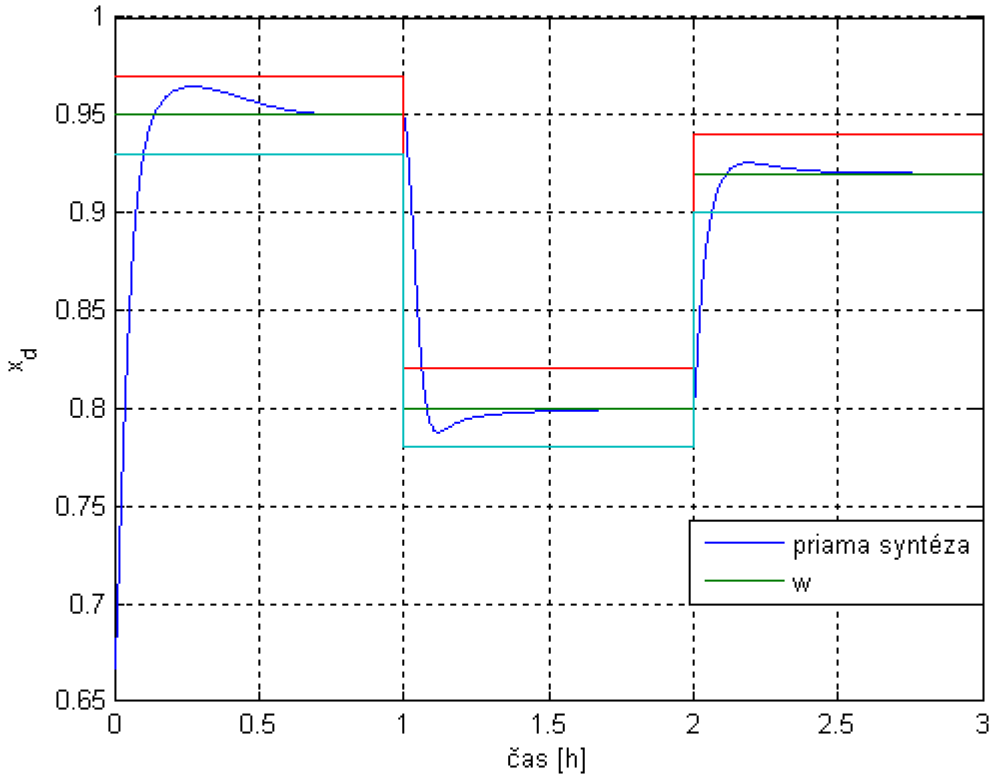
3. *ise* – predstavuje kvadratickú plochu odchýlky riadenia

$$I_{ise} = \int_0^\infty e^2(t) dt$$

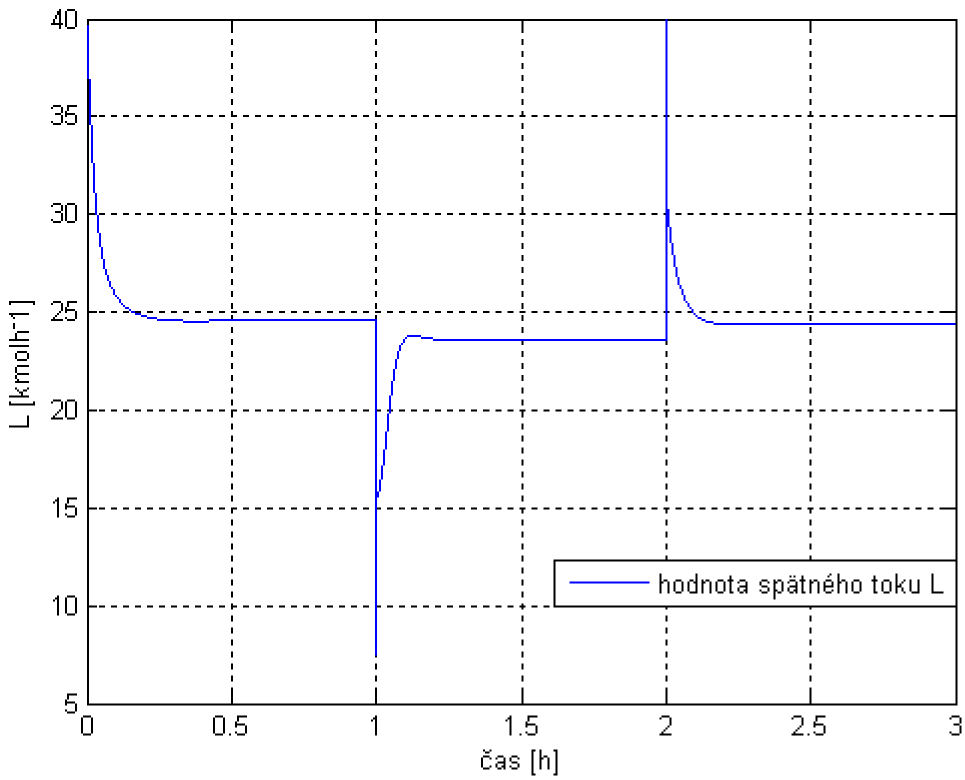
regulátor	Cohen-Coon	Metóda priamej syntézy	Ziegler-Nichols	Chien-Hrones-Reswick 0%	Chien-Hrones-Reswick 20%
iae	0.0419	0.0313	0.0442	0.0315	0.0303
ise	0.0038	0.0033	0.0039	0.0031	0.0030

Tab.3 Porovnanie kvality PID regulátorov

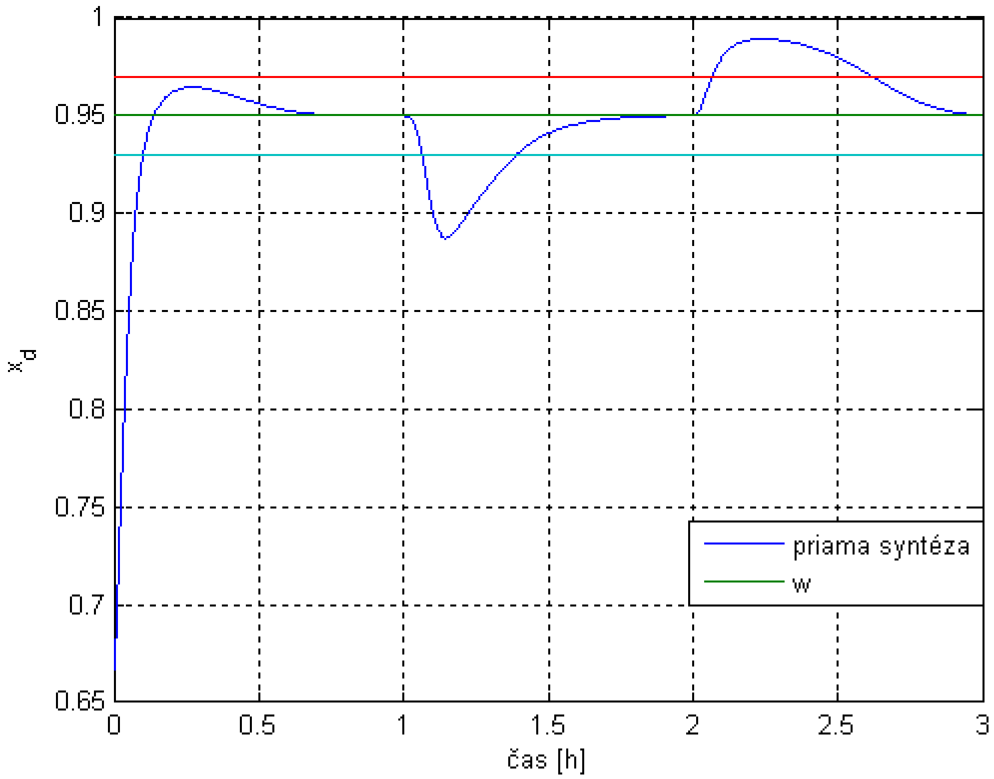
Pre overenie návrhu regulátorov boli v systéme sledované zmeny žiadanej hodnoty x_d. Pri ďalšej simulácii do systému vstupovali v čase t = 1h a t = 2h poruchy *d(t)* a *v(t)*. Tab.3 porovnáva simuláciou získané údaje o kvalite riadenia. Podľa kritérií kvality je regulátor navrhnutý pomocou priamej syntézy najvhodnejší.



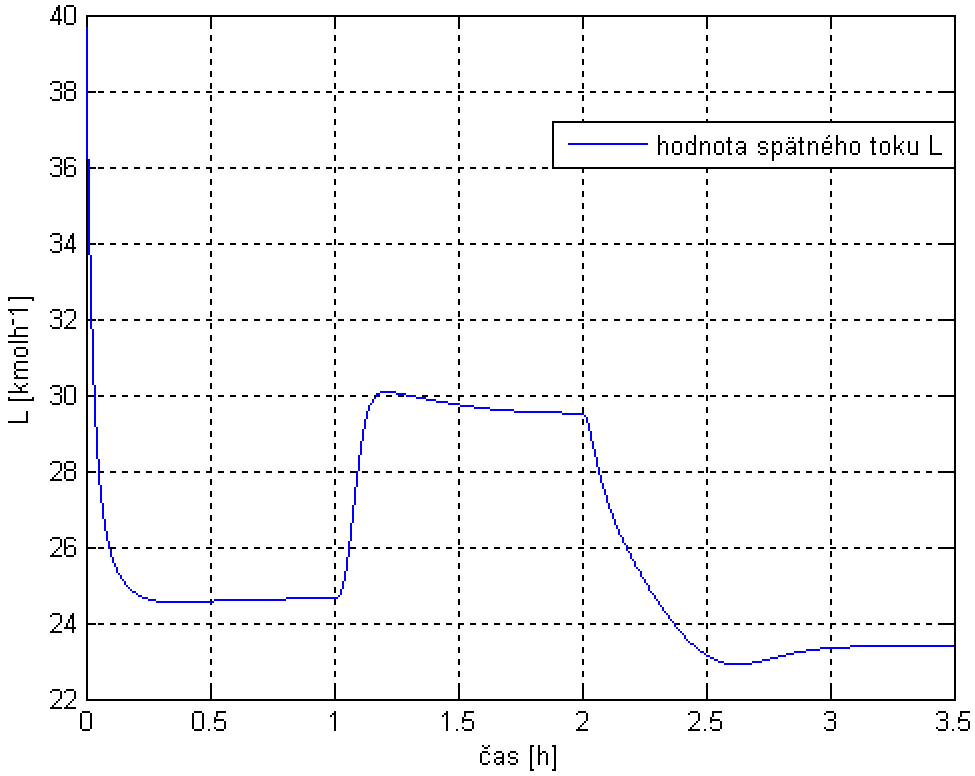
Obr.6 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.7 Akčný zásah PID regulátora



Obr.8 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch



Obr.9 Akčný zásah PID regulátora pri výskyte porúch

3.2.2 PA regulátor

Uzavretý regulačný obvod je tvorený riadeným systémom $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ a regulátorom $G_R(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$.

Pre návrh PA regulátora platí, že ak chceme odstrániť *TRO* pridáme do systému integrátor a polynómy *p(s)* a *q(s)* určíme z rovnice $a_i(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$, pričom $a_i(s) = sa(s)$. Regulátor potom bude v tvare $Gr(s) = \frac{q(s)}{p_i(s)}$, kde $p_i(s) = sp(s)$.

Polynóm $c(s)$ je stupňa *2n* v tvare $(s + m_0)$. V takomto tvare nespĺňa podmienku rýdzosti, ale prenos nami realizovaného regulátora podmienku spĺňa, pretože sme ho doplnili o integrátor. Parameter m_0 je kladné reálne číslo, ktoré ovplyvňuje kvalitu a vlastnosti odozvy regulačného obvodu. Regulátor sa dá vypočítať ručne alebo pomocou *polynomického toolboxu v Matlabe*. Simuláciou sme zistili, že vhodný parameter m_0 pre náš prípad bude 25, čiže polynóm *c(s)* má tvar $c(s) = (s + 25)(s + 25)$.

Ručný výpočet regulátora:

$$a_i(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$$
$$sa(s)p(s) + b(s)q(s) = c(s)$$

$$s(0.21s + 1)p_0 + 0.1129(q_1 s + q_0) = (s + 25)(s + 25)$$
$$0.21p_o s^2 + p_0 s + 0.1129q_1 s + 0.1129q_0 = s^2 + 50s + 625$$

Pri porovnaní pravej a ľavej strany dostaneme 3 rovnice o 3 neznámych

$$\begin{aligned} s^2 &: 0.21p_0 = 1 & & p_0 = 4.7619 \\ s^1 &: p_0 + 0.1129q_1 = 50 & \Rightarrow\quad & q_1 = 400.6917 \\ s^0 &: 0.1129q_0 = 625 & & q_0 = 5535.8724 \end{aligned}$$

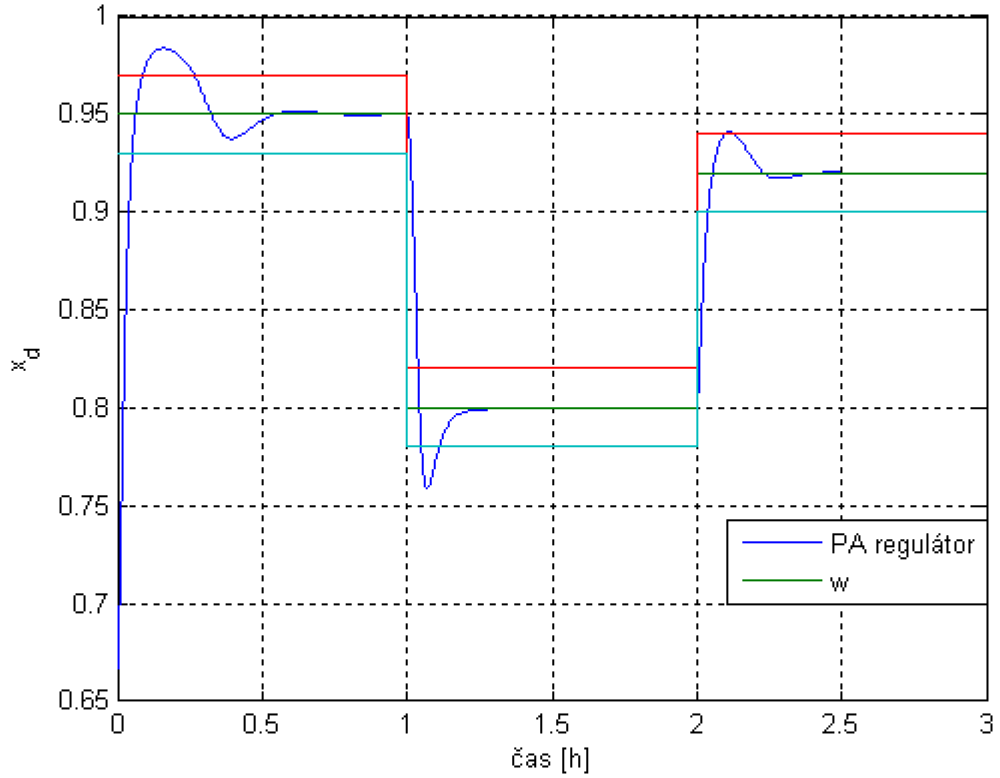
Výsledný prenos regulátora:

$$G_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{p_0 s} = \frac{400.6917s + 5535.8724}{4.7619s} = 84.1453 + \frac{5535.8724}{4.7619s}$$

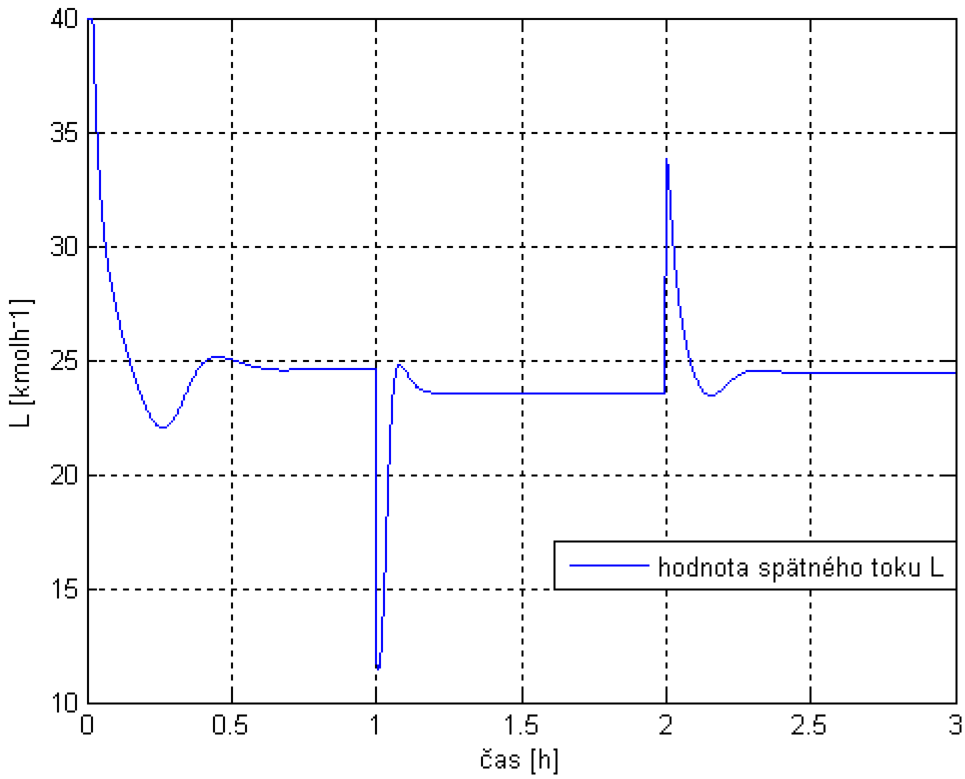
Parametre regulátora sa v *Matlabe* dajú vypočítať príkazom *axbyc*.

regulátor	**iae**	**ise**	**iae$_1$**	**ise$_1$**
$G_R(s)$	0.0267	0.0022	0.0264	0.0017

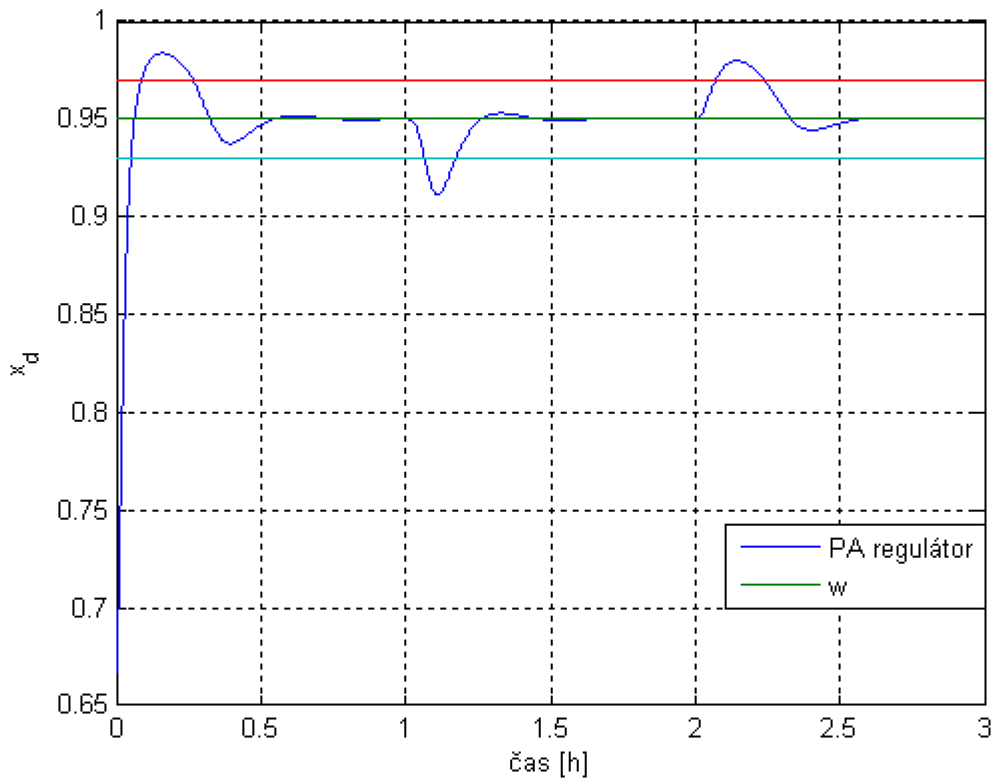
Tab.4 Kvalita PA regulátora pre sledovanie žiadanej hodnoty a systém s poruchami



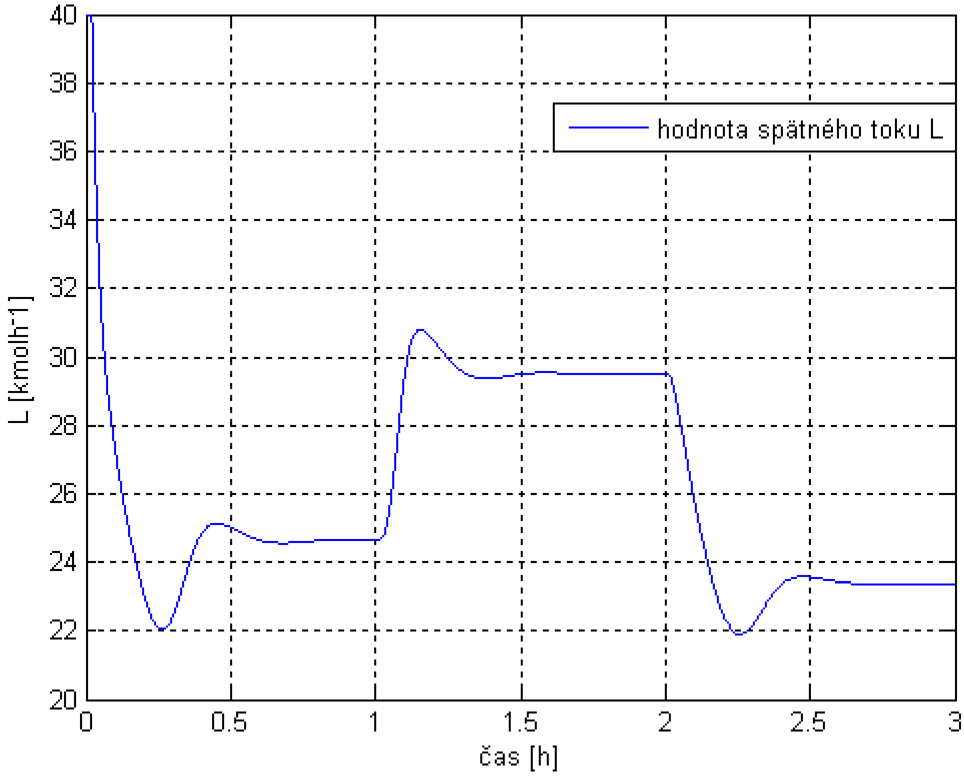
Obr.10 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.11 Akčný zásah *PA* regulátora



Obr.12 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch



Obr.13 Akčný zásah *PA* regulátora pri výskyte porúch

3.2.3 Parametrizovaný regulátor

Táto metóda využíva model riadeného systému a regulátora so stabilnými prenosovými funkciami, čiže je možné ju použiť pre riadený objekt aj pre regulátor a to vtedy a len vtedy ak je prenosová funkcia $G(s)$ rýdza a stabilná v Hurwitzovom zmysle.

Pre systém s prenosom sa hľadá stabilizujúci regulátor, ktorý odstráni trvalú regulačnú odchýlku.

$$G(s) = \frac{0.1129}{0.21s+1}$$

$$a(s) = \frac{0.21s+1}{s+m_0} \qquad b(s) = \frac{0.1129}{s+m_0}$$

a(s), b(s) dosadíme do rovnice $a(s)x(s)+b(s)y(s)=1$, rovnica bude v tvare:

$$\frac{0.21s+1}{s+m_0}x(s)+\frac{0.1129}{s+m_0}y(s)=1$$

Jej partikulárne riešenie je $x(s)=1,\ y(s)=m_0-1$. Týmto spôsobom je určený len jeden stabilizujúci regulátor. Ak chceme dostať všetky riešenia pre systém, regulátor bude mať prenosovú funkciu:

$$G_R(s) = \frac{m_0 - 1 + \dfrac{0.21s+1}{s+m_0}T(s)}{1 - \dfrac{0.1129}{s+m_0}T(s)}$$

Vstupná a výstupná veličina obvodu bude mať potom prenosovú funkciu

$$G_{RR}(s) = -b(s)(x(s)-b(s)T(s))$$

Dosadením *b(s)* a *x(s)* dostaneme

$$G_{RR}(s) = -\frac{1}{s+m_0}\left(1-\frac{1}{s+m_0}T(s)\right) = \frac{-s-m_0+T(s)}{\left(s+m_0\right)^2}$$

Trvalá regulačná odchýlka musí byť odstránená a rovnako musí platiť $\lim_{x\to 0} G_{RR}(s)=0$, ak $T(s)=0$. Vyjadríme prenosovú funkciu parametrizovaného regulátora $G_R(s)$.

Opäť tu máme ľubovoľný návrhový parameter m_0. Vhodnou voľbou parametra m_0 bol navrhnutý PI regulátor pre daný systém. Simulačne bolo dokázané, že vhodná voľba parametra (koreňa) je $m_0 = 40$. V Tab.5 sú uvedené kritériá kvality pre daný regulátor.

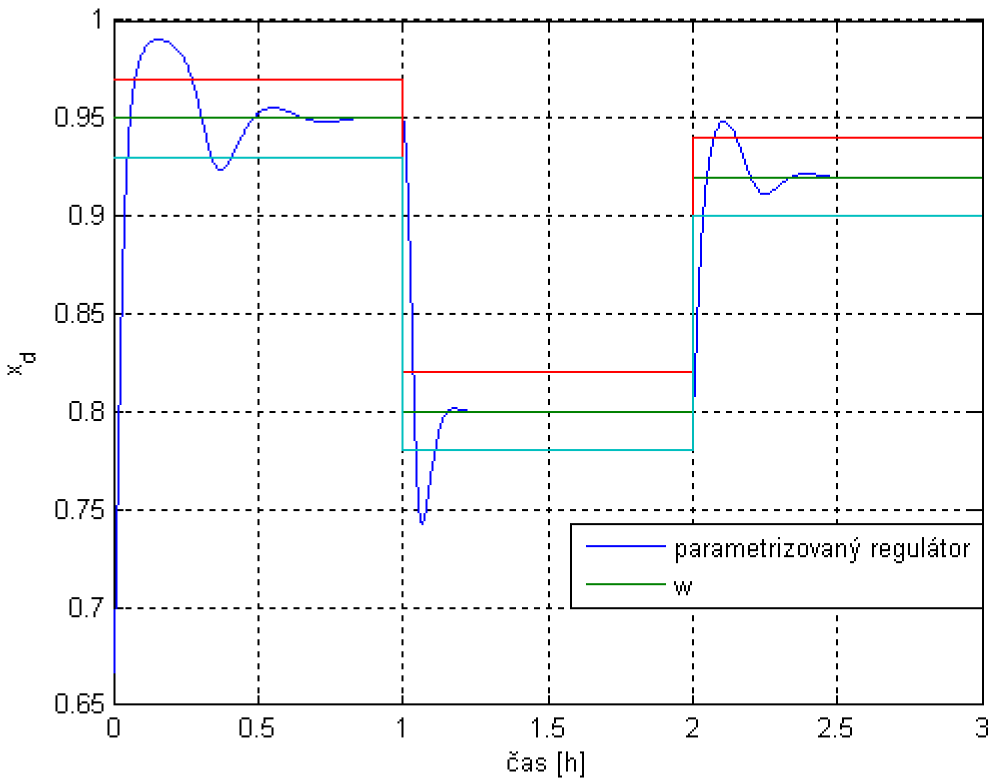
$$G_R(s) = 2m_0 - 1 + \frac{m_0^{\ 2}}{s}$$

Výsledný prenos:

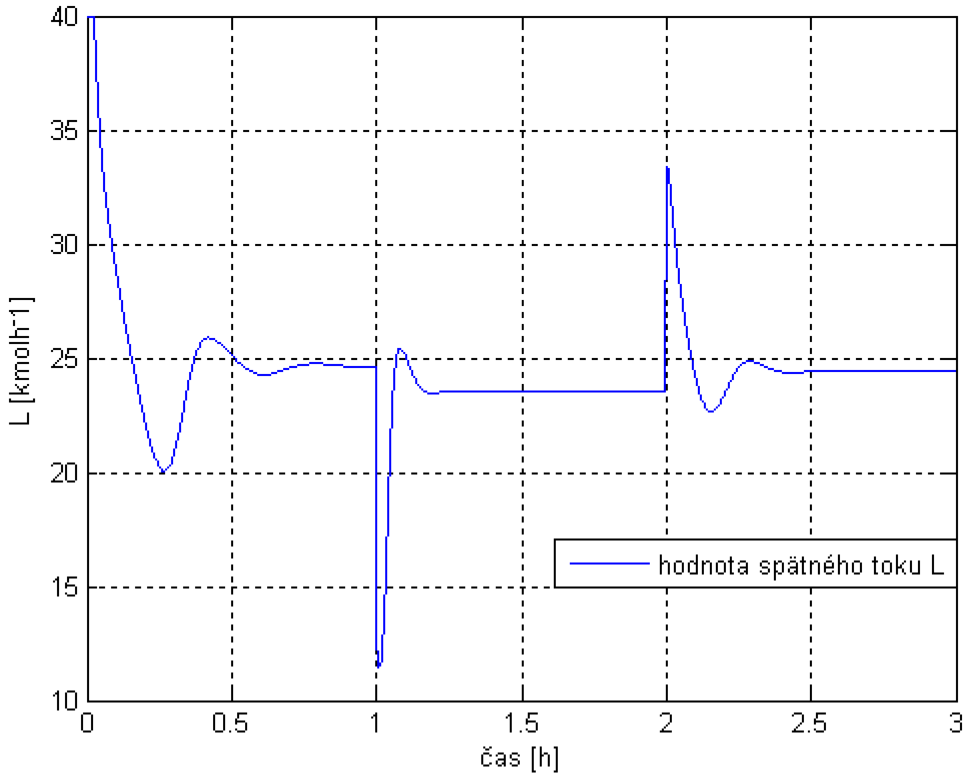
$$G_R(s) = 2m_0 - 1 + \frac{m_0^{\ 2}}{s} = 2 \times 40 - 1 + \frac{40^2}{s} = \frac{79s + 1600}{s} = 79 + \frac{1600}{s}$$

regulátor	**iae**	**ise**	**iae$_1$**	**ise$_1$**
$G_R(s)$	0.0309	0.0024	0.0282	0.0017

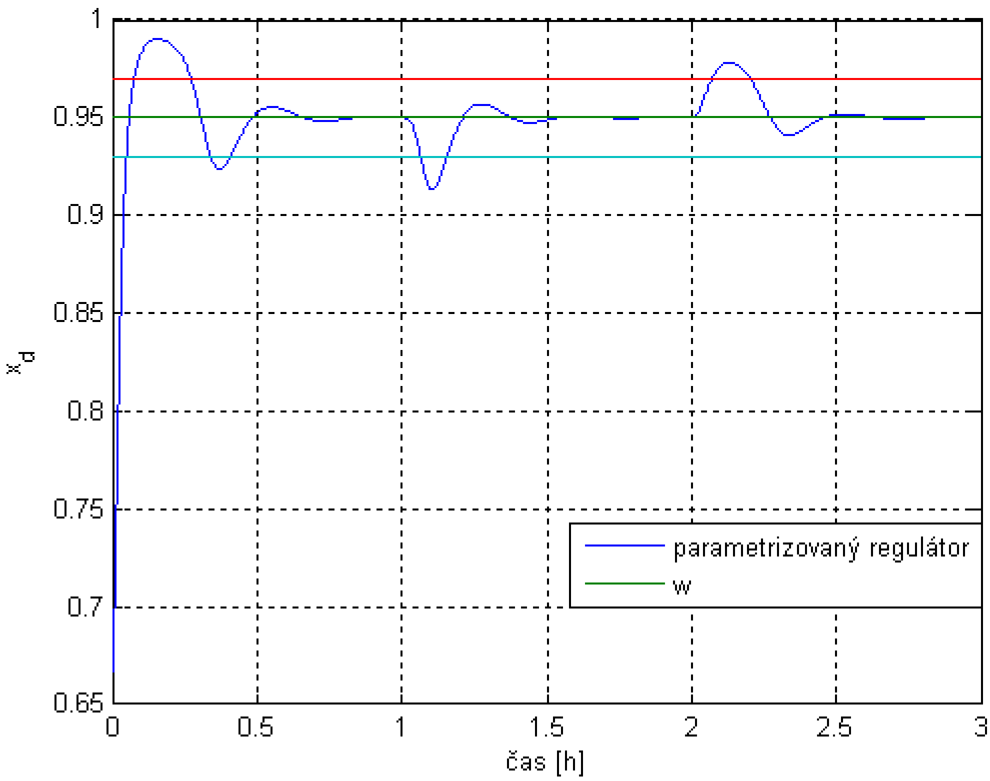
Tab.5 Kvalita parametrizovaného regulátora pre sledovanie žiadanej hodnoty a systém s poruchami



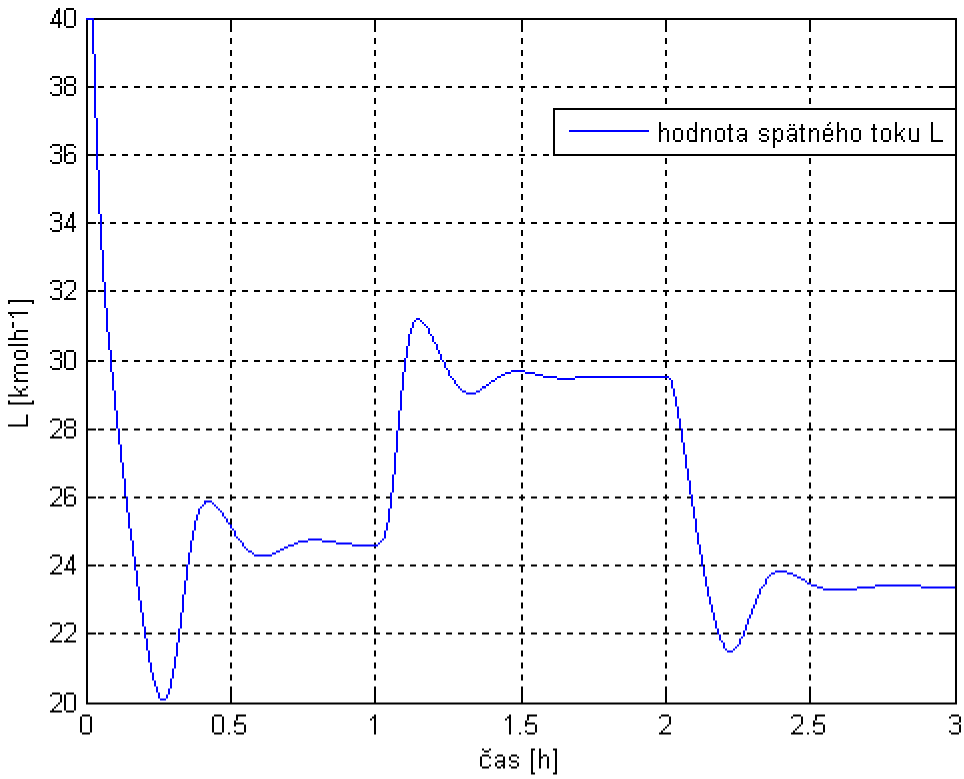
Obr.14 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.15 Akčný zásah parametrizovaného regulátora



Obr.16 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch



Obr.17 Akčný zásah parametrizovaného regulátora pri výskyte porúch

3.2.4 H_2 riadenie

Funguje na princípe stabilizácie lineárneho systému pričom využíva minimalizáciu 2-normy prenosovej matice SISO systému v Hardyho priestore H_2.

Rozšírený systém bol vypočítaný pomocou príkazu *augw*. Vstupné parametre boli prenos kolóny a tri váhové matice. Regulátor sa vypočíta pomocou vhodnej voľby parametrov váhových matíc.

$$G(s) = \frac{0.1129}{0.21s + 1}$$

$$W_1 = 0.6\frac{(s+100)}{(100s+1)} \qquad W_2 = 0.0001 \qquad W_3 = [\ ]$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.336 \\ 0 & -4.762 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.96 & -0.003226 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5376 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.006 & 0 \\ 0 & 0.0001 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Z matíc sa vypočíta regulátor $G_R(s)$ maticovom tvare pomocou príkazu *h2syn*, z ktorého sa vypočítajú parametre $q(s)$ a $p(s)$, tvoriace polynomický regulátor. Tento regulátor v sebe neobsahuje integračnú činnosť. Ako výstupné parametre tohto príkazu dostaneme vypočítaný regulátor, póly uzavretého regulačného obvodu a výpočet normy H_2 riadenia.

Výsledný regulátor má potom tvar :

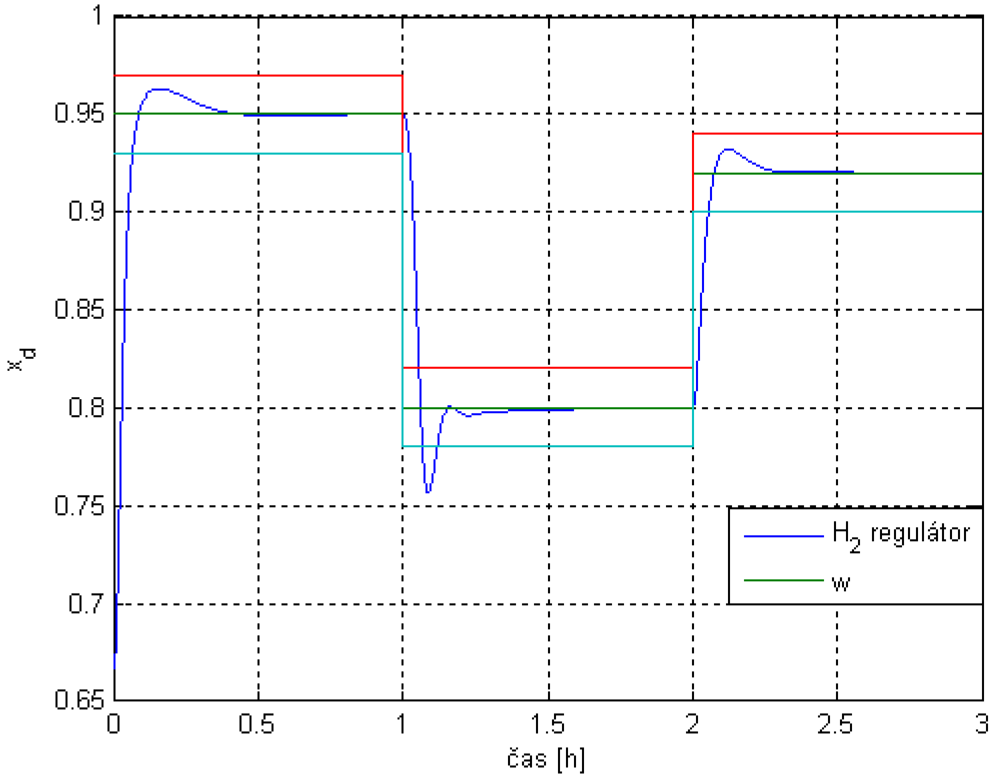
$$G_R(s) = \frac{5998s + 2.58 \cdot 10^4}{s^2 + 86.69s + 0.8668}$$

Súčasne si môžeme overiť stabilitu pomocou pólov uzavretého regulačného obvodu.

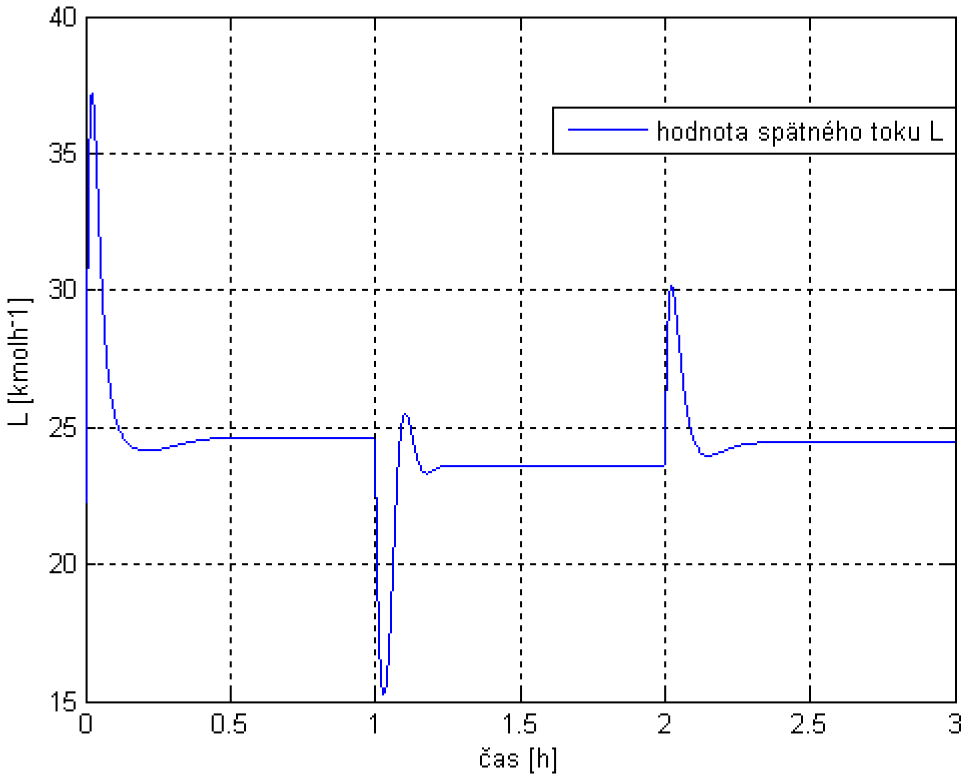
$$p_1 = -43.3435 + 36.7023i$$
$$p_2 = -43.3435 - 36.7023i$$

regulátor	**iae**	**ise**	**iae_1**	**ise_1**
$G_R(s)$	0.0268	0.0031	0.0455	0.0030

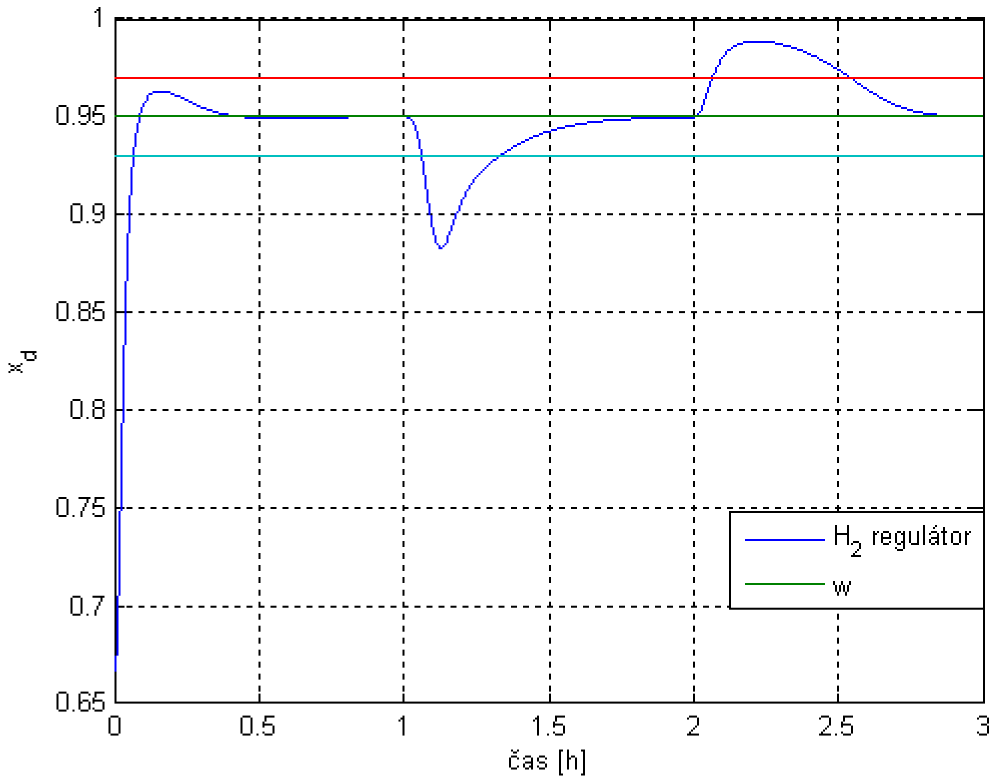
Tab.6 Kvalita H_2 regulátora pre sledovanie žiadanej hodnoty a systém s poruchami



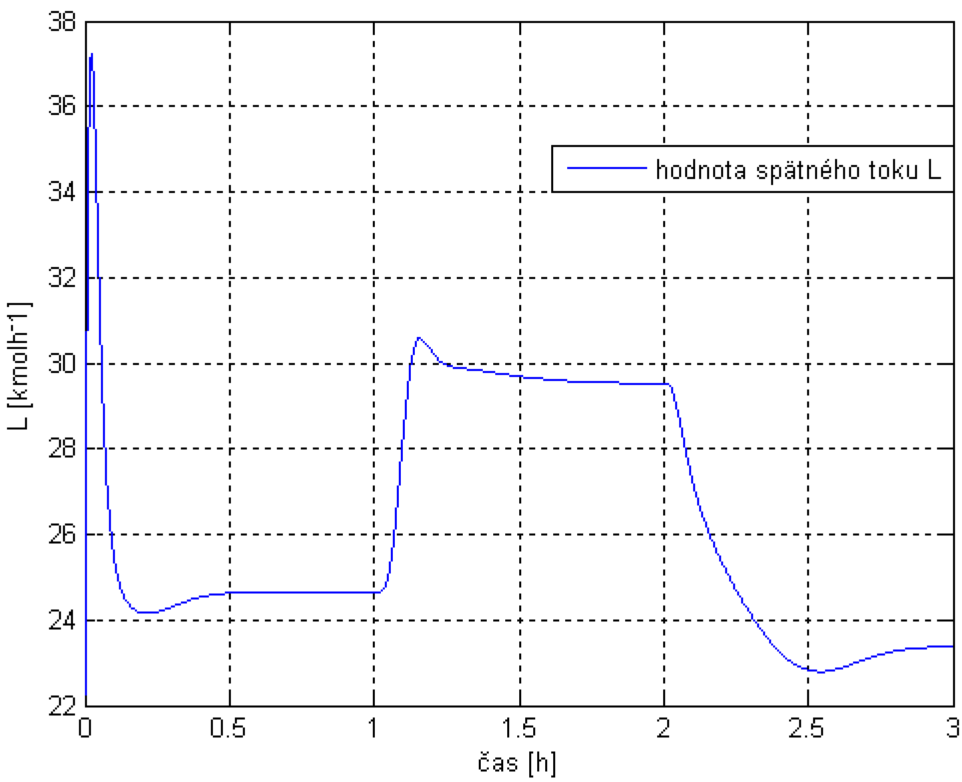
Obr.18 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.19 Akčný zásah navrhnutého H_2 regulátora



Obr.20 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch



Obr.21 Akčný zásah navrhnutého H_2 regulátora pri výskyte porúch

3.2.5 H_∞ riadenie

Úlohou H_∞ riadenia je nájsť takú prenosovú maticu regulátora $G_R(s)$ v Hardyho priestore H_2, aby norma prenosovej matice sledovania $G_{WZ}(s)$ bola čo najmenšia. Musí teda platiť $\min\limits_{R(s)} \left\| G_{wz}(s) \right\|_\infty$.

Rozšírený systém bol vypočítaný pomocou príkazu *augw*. Vstupné parametre boli rovnaké ako v prípade H_2 (prenos kolóny a tri váhové matice). Regulátor sa vypočíta pomocou vhodnej voľby parametrov váhových matíc.

$$G(s) = \frac{0.1129}{0.21s + 1}$$

$$W_1 = 0.5\frac{(s+100)}{(100s+1)} \quad W_2 = 0.0001 \quad W_3 = [\ ]$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.336 \\ 0 & -4.762 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0.625 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.002688 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5376 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.0001 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Z týchto matíc sa vypočíta regulátor $G_R(s)$ maticovom tvare pomocou príkazu *hinfsyn*, z ktorého sa vypočítajú parametre *q(s)* a *p(s)*, tvoriace polynomický regulátor. Tento regulátor v sebe neobsahuje integračnú činnosť. Ako výstupné parametre tohto príkazu dostaneme vypočítaný regulátor, póly uzavretého regulačného obvodu a výpočet normy H_∞ riadenia.

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & 5.551\times10^{-17} \\ 1.221\times10^{5} & -871.8 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0.005599 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.363\times10^{7} & -9.678\times10^{4} \end{bmatrix} D = [0]$$

Výsledný regulátor má tvar :

$$G_R(s) = \frac{7.633 \cdot 10^4 s + 3.635 \cdot 10^5}{s^2 + 871.8s + 8.718}$$

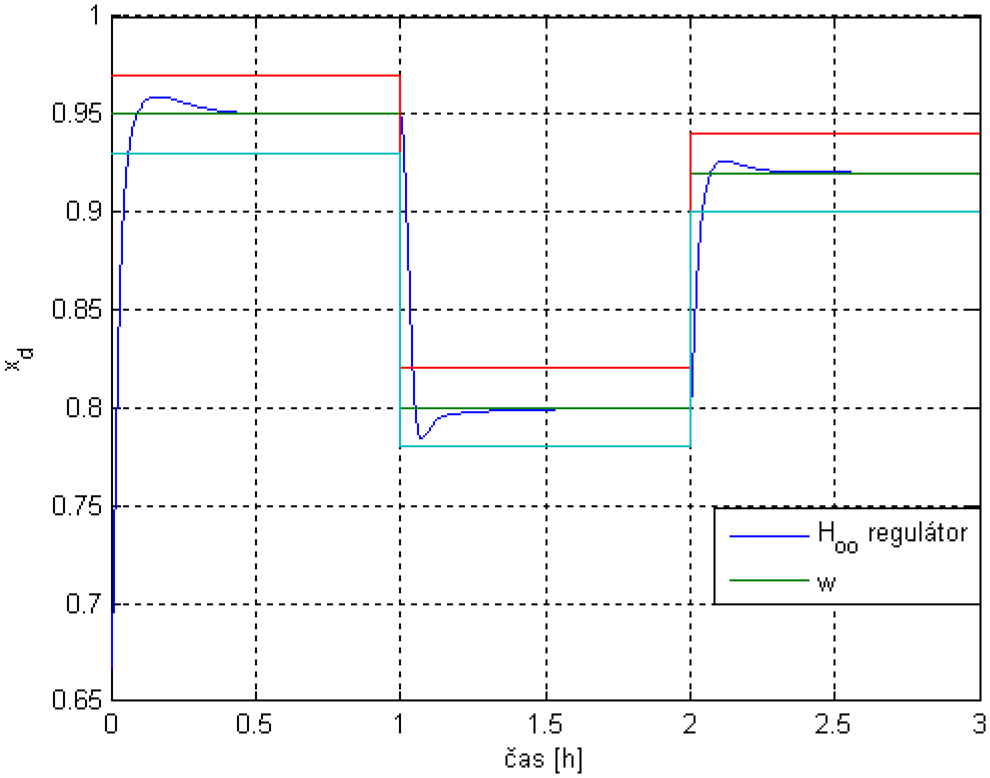
Súčasne si môžeme overiť stabilitu pomocou pólov uzavretého regulačného obvodu.

$p_1 = -49.9368$

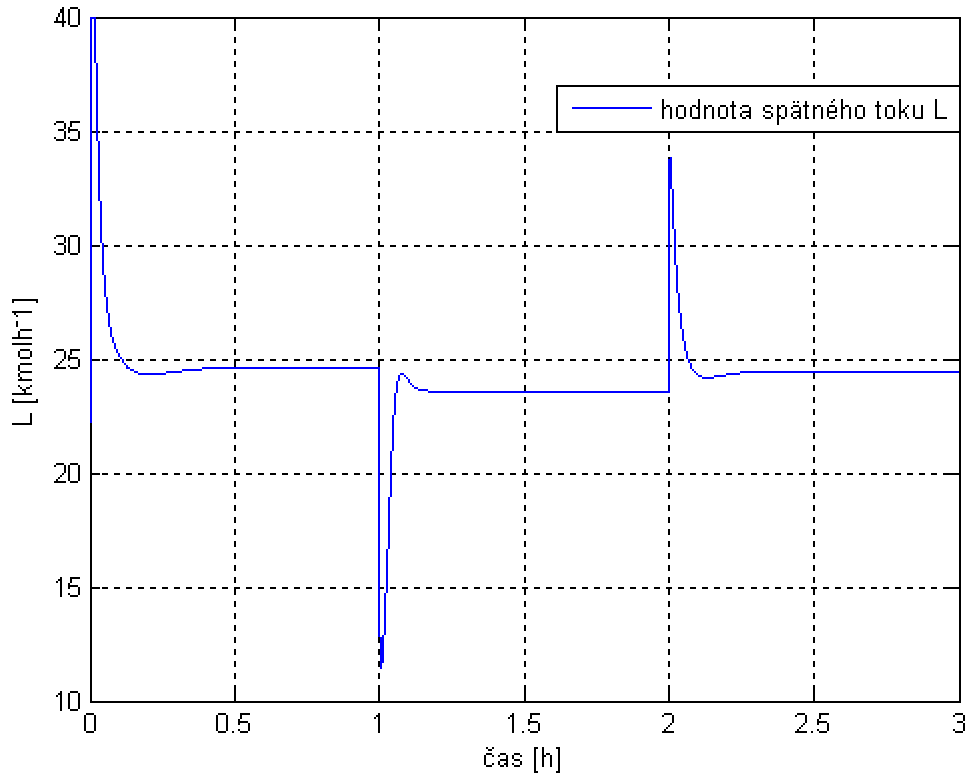
$p_2 = -821.9077$

regulátor	**iae**	**ise**	**iae₁**	**ise₁**
$G_R(s)$	0.0193	0.0021	0.0357	0.0020

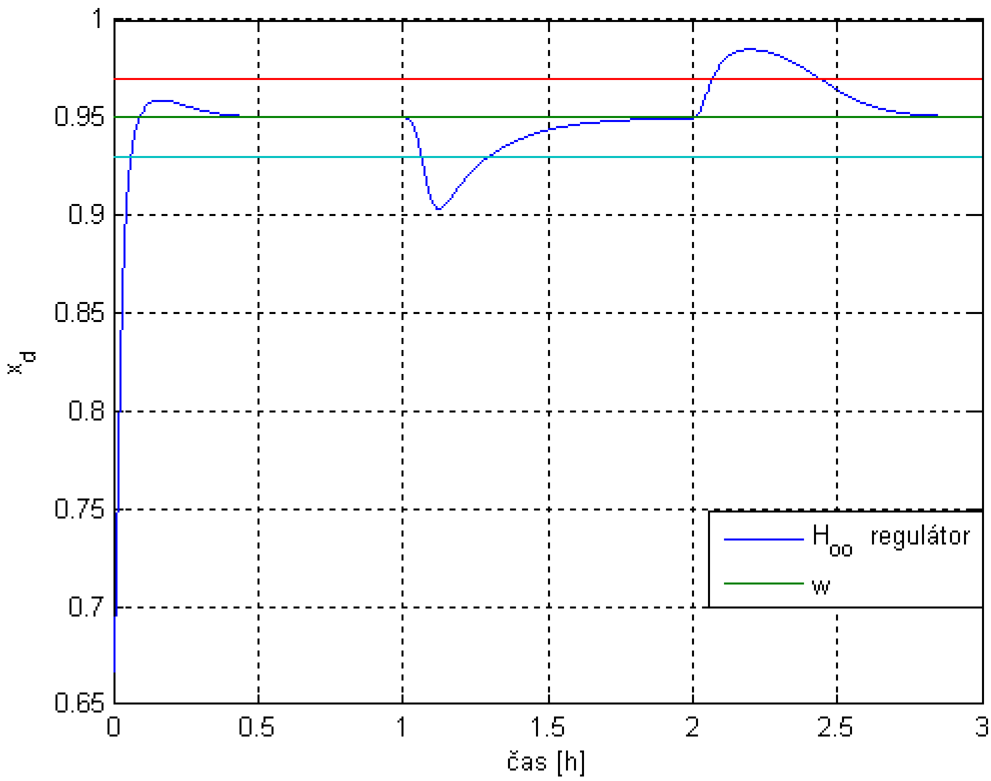
Tab.7 Kvalita H_∞ regulátora pre sledovanie žiadanej hodnoty a systém s poruchami



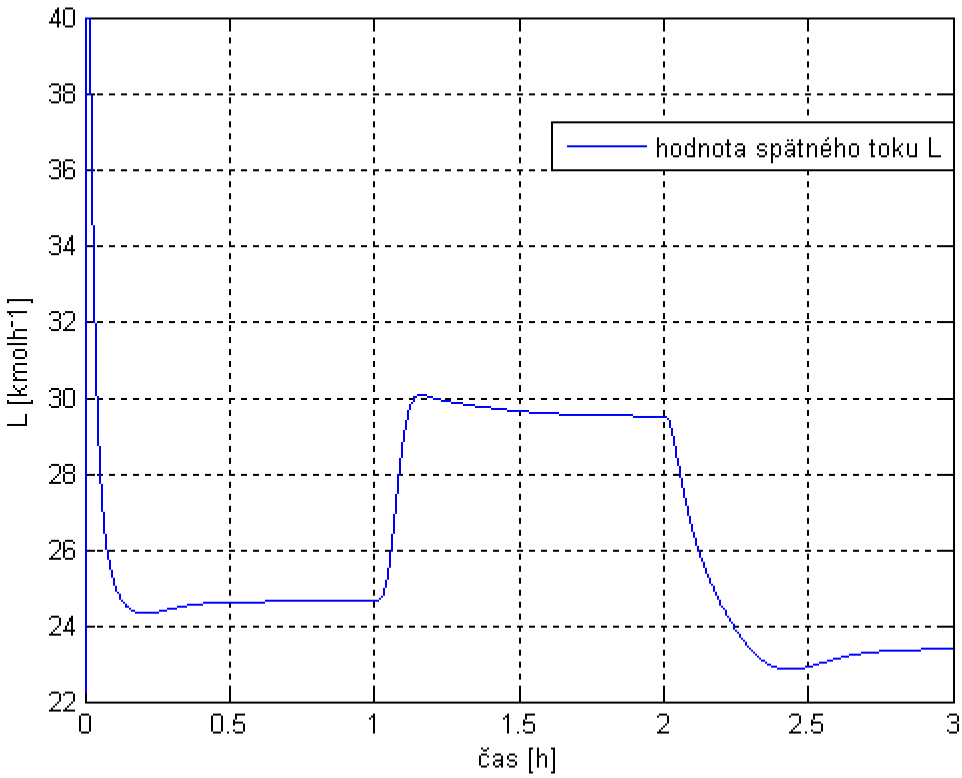
Obr.22 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.23 Akčný zásah navrhnutého H_∞ regulátora



Obr.24 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch



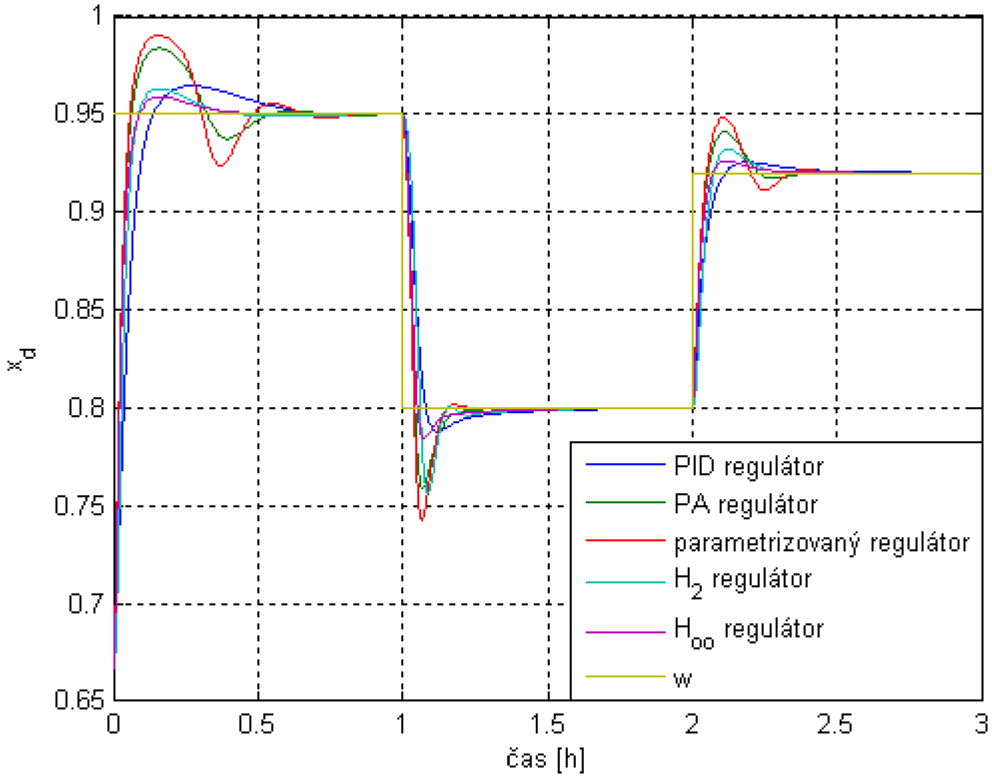
Obr.25 Akčný zásah navrhnutého H_∞ regulátora pri výskyte porúch

regulátor	**Metóda priamej syntézy**	**PA regulátor**	**Parametrizovaný regulátor**	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{H_\infty}$
iae	0.0313	0.0267	0.0309	0.0268	0.0193
ise	0.0033	0.0022	0.0024	0.0031	0.0021

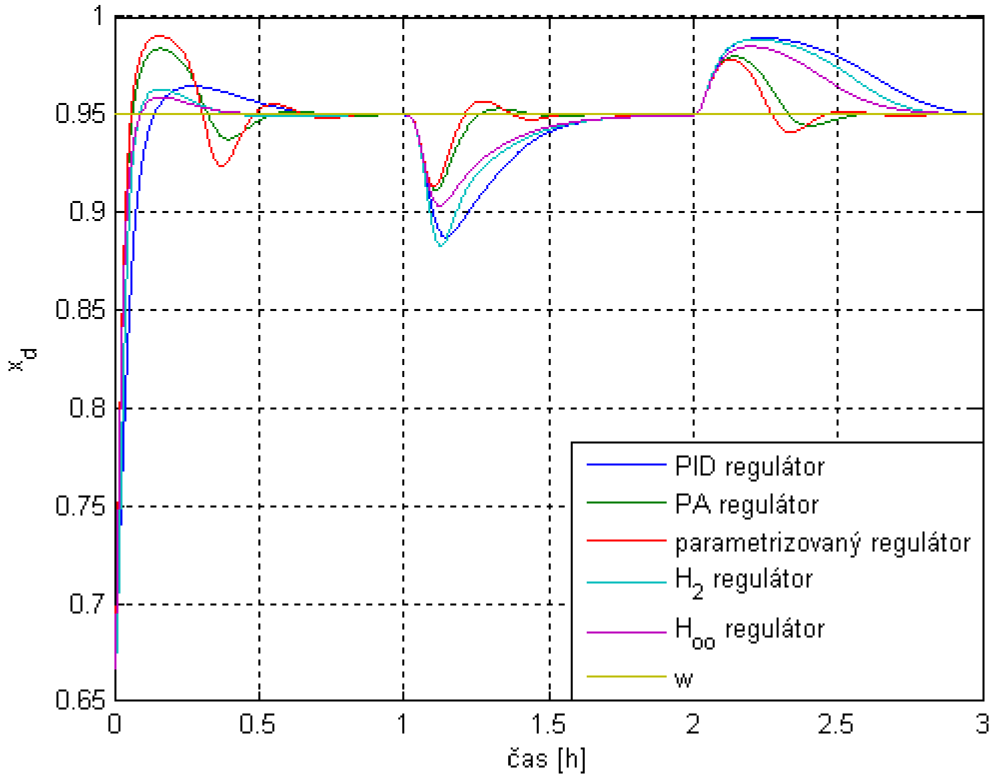
Tab.8 Kvalita riadenia pre sledovanie zmeny žiadanej hodnoty

regulátor	**Metóda priamej syntézy**	**PA regulátor**	**Parametrizovaný regulátor**	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{H_\infty}$
iae	0.0562	0.0264	0.0282	0.0455	0.0357
ise	0.0037	0.0017	0.0017	0.0030	0.0020

Tab.9 Kvalita riadenia pre systém s poruchami



Obr.26 Sledovanie hodnoty destilátu pri zmene žiadanej hodnoty



Obr.27 Riadenie hodnoty destilátu pri výskyte porúch

4. ZÁVER

Cieľom tejto diplomovej práce bol návrh regulátorov pre etážovú rektifikačnú kolónu pomocou polynomického návrhu riadenia. Riadenou veličinou bola hodnota destilátu a riadiacou veličinou bola hodnota spätného toku destilátu. Kolóna má 25 etáží, nástreková etáž bola č. 14. Ustálené stavy boli vypočítané pomocou príkazu f-solve Nelineárny model kolóny bol v tvare diferenciálnych rovníc, ktoré boli použité v s-funkcii.

Pri návrhu regulátorov sa vychádzalo z prenosu systému prvého rádu s dopravným oneskorením. Z týchto regulátorov bol na základe vybraných kritérií kvality *ise* a *iae* najlepšie navrhnutý regulátor metódou priamej syntézy.

Pre prípad polynomických regulátorov bolo navrhnutých niekoľko typov. Pre PA regulátor bola vhodnou voľbou pólu dosiahnutá lepšia regulácia ako pri klasických PID. Podobný výsledok bol pri návrhu PI regulátora pomocou parametrizácie. V úlohe sledovania bol podľa vybraných kritérií kvality *ise* a *iae* pri riadení na žiadanú hodnotu najlepšie navrhnutý H_∞ regulátor. V úlohe sledovanie bolo dokázané, že všetky regulátory sú schopné odstrániť poruchy v systéme, pričom najlepšie odstránenie porúch bolo dosiahnuté pomocou parametrizovaného a PA regulátora. Výsledky sú uvedené v tabuľkách.

LITERATÚRA

[1] BALÁTĚ, J. Automatické řízení. Praha: Nakladatelství BEN-technická literatura, 2003. ISBN80-7300-020-2

[2] KUČERA. V. Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení. Praha : Academia Praha, 1978

[3] KUČERA. V. Využití polynomiálních metod v řízení technologických procesú. Praha : Seminární kurs ÚTLA ČSAV Praha, 1988

[4] J. MIKLEŠ and M. FIKAR: Process Modelling, Identification, and Control. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007

[5] J. MIKLEŠ and M. FIKAR: Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov II. STU Press, Bratislava, 2008, ISBN80-227-2134-4

[6] M. ŠEBEK, H. KWAKERNAAK: Polynomial Toolbox Maunal, Polyx s.r.o, Praha, 1999

[7] THE POLYX, Ltd: Polynomial Toolbox2.0 Manual, The PolyX, Praha 1999

[8] THE POLYX, Ltd: PolyX Home Page, http://www.polyx.cz, http://www.polyx.com

[9] VASIČKANINOVÁ, A., BAKOŠOVÁ, M.: Neural network predictive control of a distillation column, In Proceedings of the 37th International Conference of Slovak Society of Chemical Engineering, Tatranské Matliare, Slovakia, 2010. ISBN 978-80-227-3290-1

PRÍLOHY

Prílohy sú priložené na CD.