

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE**  
**ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE**  
**A MATEMATIKY**

**NÁVRH RIADIACICH ŠTRUKTÚR POMOCOU**  
**ZJEDNODUŠENÝCH MODELOV**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

**FCHPT-5415-50901**

**BRATISLAVA 2011**

**Kornélia Černá**

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE**  
**ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A**  
**MATEMATIKY**

**NÁVRH RIADIACICH ŠTRUKTÚR POMOCOU**  
**ZJEDNODUŠENÝH MODELOV**

**BAKALÁRSKA PRÁCA**

FCHPT-5415-50901

**Študijný program:** Automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve

**Číslo a názov študijného odboru:** 5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo

**Školiace pracovisko:** Fakulta chemickej a potravinárskej technológie

**Vedúci záverečnej práce/školiteľ:** Ing. Mária Karšaiová, CSc.

**Bratislava 2011**

**Kornélia Černá**



## ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka: **Kornélia Černá**  
ID študenta: **50901**  
Študijný program: **automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve**  
Kombinácia študijných odborov: **5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo**  
Vedúca práce: **Ing. Mária Karšaiová, CSc.**  
Miesto vypracovania: **Bratislava**

Názov práce: **Návrh riadiacich štruktúr pomocou zjednodušených modelov**

Špecifikácia zadania:

- využitie niektorých metód na zjednodušenie modelov dynamických systémov
- návrh riadiacich štruktúr
- simulačná aplikácia na technologický proces

Rozsah práce: **30**

Riešenie zadania práce od: **14. 02. 2011**

Dátum odovzdania práce: **21. 05. 2011**

**Kornélia Černá**  
Študentka



**prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.**  
Vedúci pracoviska

**prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.**  
Garant študijného programu

### ***Pod'akovanie:***

Touto cestou sa chcem poďakovať vedúcej mojej bakalárskej práce Ing. Márii Karšaiovej, CSc. za cenné rady a odborné vedenie, vďaka ktorým som danú tému lepšie spracovala.

***Vyhlásenie:***

Čestne vyhlasujem, že bakalársku prácu som spracovala samostatne, pomocou použitej literatúry, ktorá je uvedená v závere bakalárskej práce.

V Bratislave, 20. 05. 2011

  
.....

## **ABSTRAKT**

Hlavnou úlohou bakalárskej práce je oboznámenie sa so zjednodušujúcimi metódami, konkrétne s metódou agregácie. Metóda agregácie využíva zjednodušenie pôvodného systému na vytvorenie redukovaného modelu s cieľom získania jednoduchšej štruktúry riadenia. Redukovaný model si ponecháva základné znaky pôvodného systému a je možné zvoliť viac redukovaných modelov vzhľadom k cieľom, ktoré chceme dosiahnuť a pri použití rozličných agregáčnych techník. Práca obsahuje teoretickú časť, ktorá všeobecne vysvetľuje jednotlivé agregáčne techniky a praktickú časť, kde sa ukáže vhodnosť riadenia pôvodného systému pomocou zjednodušených modelov.

**Kľúčové slová:** agregácia, redukcia modelu, stabilný systém

## **ABSTRACT**

The main task of this thesis is to familiarize with simplifying methods, specifically with the method of aggregation. This method uses simplification of the original system to create reduced model for purpose of getting simpler file structure. Reduced model preserves the essential characteristics of the original system and it is possible to choose the number of reduced models with regard to the purpose of our task, by using different aggregation methods. The thesis contains theoretical part, that explains particular aggregation techniques and work part, where is applied control of the original system by reduced models.

**Keywords:** aggregation, model reduction, stable system

# Obsah

|                                            |           |
|--------------------------------------------|-----------|
| <b>Zoznam obrázkov.....</b>                | <b>8</b>  |
| <b>Zoznam tabuliek.....</b>                | <b>9</b>  |
| <b>Úvod.....</b>                           | <b>10</b> |
| <b>1. Agregácia.....</b>                   | <b>11</b> |
| 1.2. Agregáčné metódy .....                | 11        |
| 1.2.1. Presná agregácia.....               | 12        |
| 1.2.2. Modálna agregácia .....             | 13        |
| 1.2.3. Metóda vyváženej realizácie .....   | 15        |
| 1.2.4. Redukcia modelu.....                | 16        |
| 1.3. Vlastnosti agregovaného systému ..... | 17        |
| <b>2. Praktická časť .....</b>             | <b>19</b> |
| 2.1. Stabilný systém .....                 | 19        |
| 2.1.1. Presná agregácia.....               | 20        |
| 2.1.2. Modálna agregácia .....             | 24        |
| 2.1.3. Vyvážená realizácia .....           | 27        |
| 2.1.4. Redukcia modelu.....                | 30        |
| 2.2. Zásobníky kvapaliny .....             | 37        |
| 2.2.1. Presná agregácia.....               | 39        |
| 2.2.2. Modálna agregácia .....             | 40        |
| <b>Záver.....</b>                          | <b>45</b> |
| <b>Zoznam použitej literatúry.....</b>     | <b>46</b> |
| <b>Prílohy.....</b>                        | <b>47</b> |

## Zoznam obrázkov

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Obr. 1 Schéma riadenia stabilného systému.....                                                 | 22 |
| Obr. 2 Výstup stabilného systému $x_1$ pri použití presnej agregácie.....                      | 22 |
| Obr. 3 Výstup stabilného systému $x_2$ pri použití presnej agregácie.....                      | 23 |
| Obr. 4 Výstup stabilného systému $x_3$ pri použití presnej agregácie.....                      | 23 |
| Obr. 5 Výstup stabilného systému $x_1$ pri použití modálnej agregácie.....                     | 25 |
| Obr. 6 Výstup stabilného systému $x_2$ pri použití modálnej agregácie.....                     | 26 |
| Obr. 7 Výstup stabilného systému $x_3$ pri použití modálnej agregácie.....                     | 26 |
| Obr. 8 Výstup stabilného systému $x_1$ pri použití metódy vyváženej realizácie.....            | 29 |
| Obr. 9 Výstup stabilného systému $x_2$ pri použití metódy vyváženej realizácie.....            | 29 |
| Obr. 10 Výstup stabilného systému $x_3$ pri použití metódy vyváženej realizácie.....           | 39 |
| Obr. 11 Schéma riadenia stabilného systému pomocou PI regulátora.....                          | 32 |
| Obr. 12 Riadenie systému redukovaného na druhý rád pomocou PI regulátora.....                  | 32 |
| Obr. 13 Riadenie systému redukovaného na prvý rád pomocou PI regulátora.....                   | 34 |
| Obr. 14 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe $x_1$ ..... | 35 |
| Obr. 15 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe $x_2$ ..... | 35 |
| Obr. 16 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe $x_3$ ..... | 36 |
| Obr. 17 Schéma troch zásobníkov kvapaliny.....                                                 | 37 |
| Obr. 18 Schéma riadenia zásobníkov kvapaliny.....                                              | 42 |
| Obr. 19 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.1 na porovnanie agregáčnych metód.....             | 43 |
| Obr. 20 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.2 na porovnanie agregáčnych metód.....             | 43 |

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Obr. 21 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.3 na porovnanie<br>agregačných metód..... | 44 |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|

## Zoznam tabuliek

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| Tabuľka 1. Konštanty zásobníkov kvapaliny..... | 38 |
|------------------------------------------------|----|

## Zoznam symbolov, značiek a skratiek

|                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| $F [m^2]$                 | prierez zásobníka         |
| $k_{i,i} [m^{2.5}s^{-1}]$ | konštanta ventilu         |
| $q [m^3s^{-1}]$           | objemový prietok          |
| $h [m]$                   | výška hladiny v zásobníku |

## Úvod

Pojem agregácia a agregáčne metódy boli pôvodne vyvinuté v odlišných oblastiach ako je riadenie systému. Problém agregácie pochádza z ekonomickej oblasti, kde bol predmetom rozsiahleho výskumu v ekonomickej literatúre, čomu predchádzalo množstvo rôznych motivácií. Začiatky výskumu vyplývajú z otázky vhodnosti analógie medzi makro a mikroekonomickými vzťahmi. Ďalšie úvahy o normatívnom poňatí agregácie boli vyvinuté za predpokladu, že medzi makro a mikro modelmi môže prevládať dokonalá súhra. Použitím teórie štatistického rozhodovania boli navrhnuté postupy pre optimálnu agregáciu a vyhodnotené v súčasných rovniciach ekonometrických modelov, predikcií a zjednodušení.

Štruktúra dynamických ekonomických systémov, reprezentovaná rozložiteľnými maticami, bola analyzovaná Simonom a Andom, ktorí ďalej ukázali, že bežné správanie by mohlo byť zistené dynamickým podsystemom. Po relatívne dlhom čase, medzisystémové spojenia ovládajú správanie sa systému a zároveň zachovávajú stav rovnováhy v každom podsysteme. Tieto výsledky im teda dovoľujú nebrať na vedomie slabé väzby v štúdiách čiastkovej rovnováhy. Fisher navrhol progresívne delenie pre agregáciu ekonomických modelov s ohľadom na znižovanie nákladov určitých kritérií .

Záujem o vypočítanie skutočných koeficientov v Leontiefovom vstupno-výstupnom modeli podmienil snahu o riešenie problému agregácie, v dôsledku príliš veľkých nákladov na invertovanie rozsiahlych matic, ktoré si vyžadovali náročné a zdĺhavé výpočty. Hlavným cieľom bolo určiť, či by sa agregácia dala použiť na získanie približnej inverzie viac úsporným spôsobom.

Je teda vidieť, že štúdium agregácie malo veľký význam vo viacerých oblastiach, najmä v oblasti riadenia zložitých systémov bol o agregáciu veľký záujem, pretože ponúkala možnosť vytvorenia zjednodušujúcich štruktúr modelov, ľahko použiteľných pri analýze a syntéze regulátorov.

Aoki propagoval používanie agregovaných metód pri zjednodušení modelu a kontrole dynamických systémov veľkého formátu. Ďalšie štúdiá a rozvoj boli predmetom mnohých výskumných prác. Ostatné techniky redukcie a zjednodušenia modelu sú v súčasnosti k dispozícii (Chmúrny, 1991).

# 1. Agregácia

## 1.1. Zjednodušujúce metódy

Základom riadenia systémov pomocou zjednodušujúcich metód je zjednodušenie systému tak, aby sa neznížila kvalita riadenia, alebo len čiastočne a zároveň aby sme dosiahli požadované ciele. Zjednodušenie systému je založené na zjednodušení jeho matematického modelu, čo vedie k jednoduchšiemu spôsobu návrhu regulátorov. Medzi zjednodušujúce metódy patria aj agregačné metódy. Využívajú zmenu stavového priestoru premenných na vytvorenie redukovaného modelu, ktorý si zachováva určité kvalitatívne vlastnosti pôvodného systému (Genesio 1976).

Ďalšou skupinou zjednodušujúcich metód sú poruchové metódy, ktoré využívajú postupy, pri ktorých sa vzniknuté dynamické interakcie v systéme neuvažujú. Poruchové metódy možno použiť pri systémoch, ktoré sa dajú aproximovať systémami s jednoduchšou štruktúrou. Poruchové metódy sa delia na metódy slabých väzieb a silných väzieb. Princíp metódy slabých väzieb plynie z existencie nesusingulárnych porúch, čo sa dá matematicky vyjadriť tak, že porucha nám vystupuje na pravej strane diferenciálnej rovnice. Metóda silných väzieb je naopak založená na existencii singulárnych porúch, čo môžeme matematicky vyjadriť ako poruchy vystupujúce na ľavej strane diferenciálnej rovnice. Metódy so singulárnymi poruchami ponúkajú veľa možností na zostrojenie zjednodušených modelov či riadiacich systémov, ktoré majú hierarchickú štruktúru (Siret, 1977)

## 1.2. Agregačné metódy

Jednou z možností riadenia systémov je nahradenie daného systému iným systémom, ktorý má oveľa menšie rozmery, ale zachováva základné znaky pôvodného systému. Takýchto redukovaných modelov môžeme vytvoriť viac, vždy zameraných na iný cieľ a použitých pomocou rôznych agregáčnych techník. Pre zjednodušenie niektorých alebo všetkých podsystémov, môžeme agregáčne techniky využívať aj pri hierarchickom riadení, kde platí, že čím je vyššia úroveň riadených systémov, tým by

mali byť modely pre výkonné rozhodovanie jednoduchšie. Navrhnuté riadenie bude suboptimálne (Chmúrný, 1991).

### 1.2.1. Presná agregácia

V tejto kapitole budú opísané rôzne agregáčne techniky, ktoré sa používajú na riadenie veľkých dynamických systémov .

Nech je dynamický systém vyššieho rádu opísaný rovnicami (Aoki, 1968,)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad 1.1a$$

$$\mathbf{y}(t) = C \mathbf{x}(t) \quad 1.1b$$

kde  $\mathbf{x}(t)$  je vektor stavových veličín v závislosti na čase  $t$  rozmeru  $n$

$\mathbf{u}(t)$  je vektor riadiacich veličín v závislosti na čase  $t$  rozmeru  $m$

$\mathbf{y}(t)$  je vektor výstupných veličín v závislosti na čase  $t$  rozmeru  $p$

$A$ ,  $B$  a  $C$  sú matice konštánt s odpovedajúcimi rozmerkami  $n \times n$ ,  $n \times m$  a  $n \times p$ . Systém (1.1) chceme nahradiť vyhovujúcim redukovaným modelom nižšieho rádu v tvare (Pavúková, 2010)

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = F \mathbf{z}(t) + G \mathbf{u}(t) \quad 1.2a$$

$$\mathbf{w}(t) = H \mathbf{z}(t) \quad 1.2b$$

kde  $\mathbf{z}(t)$  je vektor agregovaných stavových veličín v závislosti na čase  $t$  rozmeru  $r$

$\mathbf{w}(t)$  je vektor agregovaných výstupných veličín v závislosti na čase  $t$  rozmeru  $q$

O takomto modeli môžeme predpokladať, že pre určitú triedu vstupov  $\mathbf{u}(t)$ , sú agregované výstupy  $\mathbf{w}(t)$  dobrou aproximáciou pôvodných výstupov  $\mathbf{y}(t)$  a pre rád

agregovaného modelu platí  $m \leq r \leq n$ . Obidva dynamické modely (1.1) a (1.2) využívajú rovnaké vstupné aj výstupné dáta, len ich dynamické opisy sa líšia.

Vzťah pôvodným (1.1) a redukovaným (1.2) modelom je potom :

$$\mathbf{z}(t) = L \mathbf{x}(t) \quad 1.3$$

kde  $L$  je matica konštánt typu  $r \times n$ , ktorá vlastne vyberá len určité časti z vektora  $\mathbf{x}(t)$ .

Použitie tejto rovnice (1.3) tak, aby bola splnená ekvivalencia medzi modelmi (1.1) a (1.2) môžeme iba v prípade, že budú splnené nasledujúce podmienky:

$$FL = LA \quad 1.4$$

$$G = LB \quad 1.5$$

$$\mathbf{z}(0) = L \mathbf{x}(0) \quad 1.6$$

Riešenie pre (1.4) je pseudoinverzná matica, vychádzajúca z riešenia pomocou metódy najmenších štvorcov a je nasledovné:

$$F = LAL^T[LL^T]^{-1} \quad 1.7$$

Matica  $F$  získaná aproximatívnym riešením (1.4) závisí od agregáčnej matice  $L$ . Maticu  $L$  teda určíme tak, aby vlastné čísla matice  $F$  boli obsiahnuté aj vo vlastných číslach matice  $A$  (Siret, 1977).

### 1.2.2. Modálna agregácia

Osobitným prípadom presnej agregácie je modálna agregácia. Hlavnou vlastnosťou modálnej agregácie je, že v agregovanom modeli sa zachováva  $k$  dominantných vlastných čísel systému. V súčasnosti sa používajú viaceré metódy modálnej agregácie (Davison, 1988).

Prvým krokom k riešeniu pri použití modálnej agregácie je nájdenie modálnej matice k matici  $A$ .

$$A = M_A J_A M_A^{-1} \quad 1.8$$

kde  $J_A$  je diagonálna (resp. Jordanova) matica, ktorá má vlastné čísla matice  $A$  obsiahnuté na diagonále.

Nech vlastné čísla sú v  $J_A$  usporiadané zostupne

$$M_A = \begin{bmatrix} M_R & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad 1.9$$

kde  $M_R$  má rozmery redukovaného systému  $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$

$$\text{Nech } P = [I_{k \times k} \ 0_{k \times (n-k)}]$$

Potom agregačná matica bude mať tvar

$$L = M_R P M_A^{-1} \quad 1.10$$

a matice agregovaného modelu sú:

$$A_r = M_R P J_A P^T M_R^{-1} \quad 1.11$$

$$B_r = M_R P M_A^{-1} B \quad 1.12$$

Dostupné na: <http://www.kasr.elf.stuba.sk/predmety/rzs/prednasky/predn5.ppt>

Metóda modálnej agregácie sa dá použiť na všetky prípady, pokiaľ systém nemá deformované vlastné vektory, lebo získaný agregovaný model v takom prípade nezabezpečuje zhodu ustálených stavov.

### 1.2.3. Metóda vyváženej realizácie

Algoritmus pre výpočet a použitie vyváženej realizácie môžeme rozdeliť na dve časti, prvou je transformácia stavového modelu (resp. vonkajšieho modelu – prenosovej funkcie) na vyváženú realizáciu a druhou je následná redukcia modelu (vyváženej realizácie).

Nech  $(A,B,C)$  je pozorovateľná a riaditeľná realizácia, potom existuje aj regulárna transformačná matica  $T$  taká, že transformovaný systém

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \quad 1.13$$

bude vyhovovať podmienke

$$\tilde{X}_C = \tilde{Y}_0 = \Sigma \quad 1.14$$

kde  $\Sigma > 0$  je diagonálna matica

V prostredí programu MATLAB sa redukcia systému na nižší rád pomocou vyváženej realizácie aplikuje príkazom `balreal`

$$[SYSb, G1, T, Ti] = \text{balreal}(Gs) \quad 1.15$$

kde  $SYSb$  je transformovaný systém v stavovom priestore,  $G1$  je diagonálna matica – Hankelove singulárne čísla,  $T$  je transformačná matica,  $Ti$  je inverzná transformačná matica a nakoniec  $Gs$  je pôvodný prenos stabilného systému. Dostupné na :  
<<http://www.kasr.elf.stuba.sk/predmety/rzs/prednasky/predn5.ppt>>

### 1.2.4 Redukcia modelu

Nech máme vyvážený model taký, že pre príslušné gramiany pozorovateľnosti a riaditeľnosti platí:

$$X_C = Y_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad 1.16$$

Nech  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n$

potom redukovaný model  $(A_r, B_r, C_r)$  „vyberieme“ ako prvých  $r$  stavov z  $(A, B, C)$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_r & A_{rn} \\ & \ddots & \\ A_{n1} & A_{nn} \end{bmatrix} \quad 1.17$$

$$B = \begin{bmatrix} B_r \\ \vdots \\ B_{nn} \end{bmatrix} \quad 1.18$$

$$C = [C_r \quad \dots \quad C_{nn}] \quad 1.19$$

Podmienka  $\sigma_r \geq \sigma_{r+1}$  je podstatne dôležitá pre zabezpečenie stability aj agregovaného modelu. V prostredí programu MATLAB sa používa príkaz `modred` pre redukciu systému.

### 1.3. Vlastnosti agregovaného systému

Nech je chyba redukcie  $e(t)$  definovaná touto rovnicou:

$$e(t) = z(t) - L(t) \quad 1.20$$

Potom sa požaduje, aby  $e(t) = 0$  pre všetky  $t \geq 0$  ak  $z(0) = Lx(0)$  alebo inou možnosťou je, aby  $e(t) \rightarrow \infty$  pre  $t \rightarrow \infty$  ak  $z(0) \neq Lx(0)$ .  $F$  bude tvorená tak, aby bola asymptoticky stabilná. Predošlý kvadratický funkcionál, ktorého váhové koeficienty sú  $Q$  a  $R$  a ktorý nám minimalizáciou dá optimálne riadenie, je nahradený funkcionálom (Siret, 1977)

$$\min J_a = \frac{1}{2} \int_0^t [z^T(t)Q_r z(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad 1.21$$

a zákon riadenia pre matematický model je

$$u(t) = -R^{-1}GK_r z(t) \quad 1.22$$

kde  $K_r$  je pozitívne definitné riešenie rovnice

$$K_r F + F^T K_r - K_r G R^{-1} G K_r + Q_r = 0 \quad 1.23$$

a pre  $Q_r$  platí

$$Q_r = [LL^T]^{-1} LQL^T [LL^T]^{-1} \quad 1.24$$

Ak použijeme transformáciu

$$x(t) = T y(t) \quad 1.25$$

transformuje sa pôvodný systém do Jordanovej kanonickej formy

$$\mathbf{y}(t) = J \mathbf{y}(t) + S \mathbf{u}(t) \quad 1.26$$

kde  $J = T^{-1}AT$  a  $S = T^{-1}B$

Vybraním transformačnej matice v tvare

$$L = [I_r, 0_{rx(n-r)}]T^{-1} \quad 1.27$$

kde  $n > r$ , je rád pôvodného a agregovaného modelu a  $T$  je transformačná matica zachovávajúca hlavné vlastnosti pôvodného systému v agregovanom modeli, môžeme zabezpečiť, aby póly uzavretého systému ostali v určenej obmedzenej oblasti. Modifikujeme pôvodný funkcionál a odpovedajúci funkcionál redukovaného modelu bude

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2} \int_0^t \exp(2\alpha t) [\mathbf{z}^T(t) Q_r \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\mathbf{z}_a^T(t) Q_a \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}_a^T(t) R \mathbf{u}_a(t)] dt \end{aligned} \quad 1.28$$

Nakoniec redukovaný model a matica zosilnení majú tvar

$$\mathbf{z}_a(t) = [F - I_r] \mathbf{z}_a(t) + G \mathbf{u}_a(t) \quad 1.29$$

$$Z = R^{-1} G K_a \quad 1.30$$

kde  $K_a$  je riešením maticovej rovnice

$$K_a F + F^T K_a - K_a G R^{-1} G K_a + (Q_a + 2\alpha I_r) = 0 \quad (\text{Chmúrny, 1991}) \quad 1.31$$

## 2. Praktická časť

Opísané postupy zjednodušenia(redukcie) modelov stabilných systémov boli aplikované na konkrétnom stabilnom systéme a troch zásobníkoch kvapaliny bez interakcie.

### 2.1. Stabilný systém

V nasledujúcom príklade boli aplikované metódy agregácie na stabilný systém, ktorého matematický model v stavovom priestore vyplýva z fyzikálnych, chemických a konštrukčných vlastností procesu.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

s kvadratickou účelovou funkciou

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a

$$R = [1]$$

Cieľom je vytvoriť agregovaný model a následne navrhnúť spätnoväzbové riadenie ktoré odsúva vlastné hodnoty systému do určitej stabilnej oblasti v komplexnej rovine.

### 2.1.1. Presná agregácia

V prvom rade sme vypočítali vlastné čísla matice  $A$ , ktoré sa musia nachádzať aj v agregovanej matici  $T$

vlastné čísla:

- 1.3877

- 9.2186

- 5.3937

Vlastné čísla matice  $A$  nám ukazujú, že systém je stabilný. Následne sme vypočítali transformačnú maticu  $T$  v prostredí programu MATLAB použitím príkazu

$$[T, D] = \text{eig}(A)$$

kde  $D$  je matica s vlastnými číslami matice na diagonále a transformačná matica  $T$  je

$$T = \begin{bmatrix} -0.6346 & -0.3897 & 0.1206 \\ -0.5270 & 0.2771 & -0.9190 \\ -0.5653 & 0.8783 & 0.3754 \end{bmatrix}$$

z čoho bola vypočítaná hodnota inverznej matice  $T^{-1}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1.0184 & -0.2819 & -0.3629 \\ -0.8018 & 0.1901 & 0.7229 \\ 0.3422 & -0.8692 & 0.4261 \end{bmatrix}$$

ktorú sme použili pri hľadaní agregáčnej matice  $L$  z rovnice 1.27, t.z., že matica  $L$  je prvý riadok z matice  $T^{-1}$

$$L = \begin{bmatrix} -1.0184 & -0.2819 & -0.3629 \end{bmatrix}$$

Použitím rovníc 1.4 – 1.7 sme vypočítali hodnoty redukovaných matíc  $F$  a  $G$

$$F = -1.3877$$

$$G = -0.3629$$

Dynamický model z rovnice 1.2a je teda

$$\mathbf{z}'(t) = -1.3877\mathbf{z}(t) - 0.3629\mathbf{u}(t)$$

a modifikovaný tvar váhovej matice z rovnice 1.24 je

$$Q_r = 0.8010$$

Riccatiho rovnica tohto agregovaného modelu, ktorá je popísaná rovnicou 1.31 je

$$-0.1317 K_a - 0.7754 K_a^2 + 2.8010 = 0$$

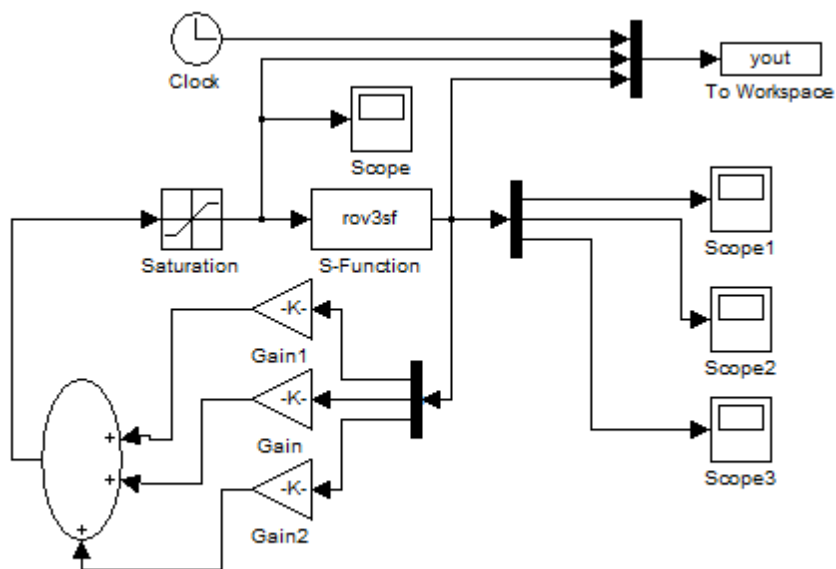
a výsledok Riccatiho rovnice podľa rovnice 1.30 je

$$K_a = 3.0538$$

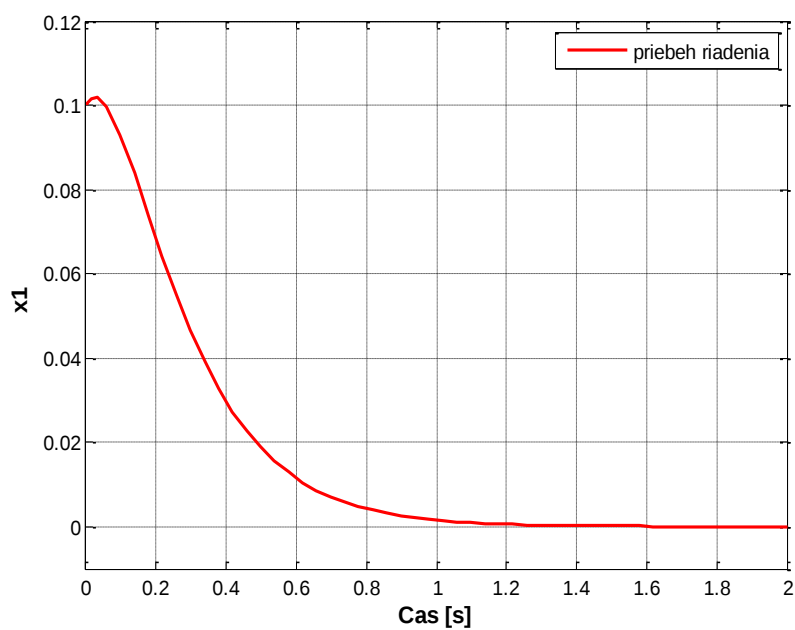
A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.22 je

$$\mathbf{u}(t) = -3.1100\mathbf{x}_1(t) - 0.8610\mathbf{x}_2(t) - 1.1083\mathbf{x}_3(t)$$

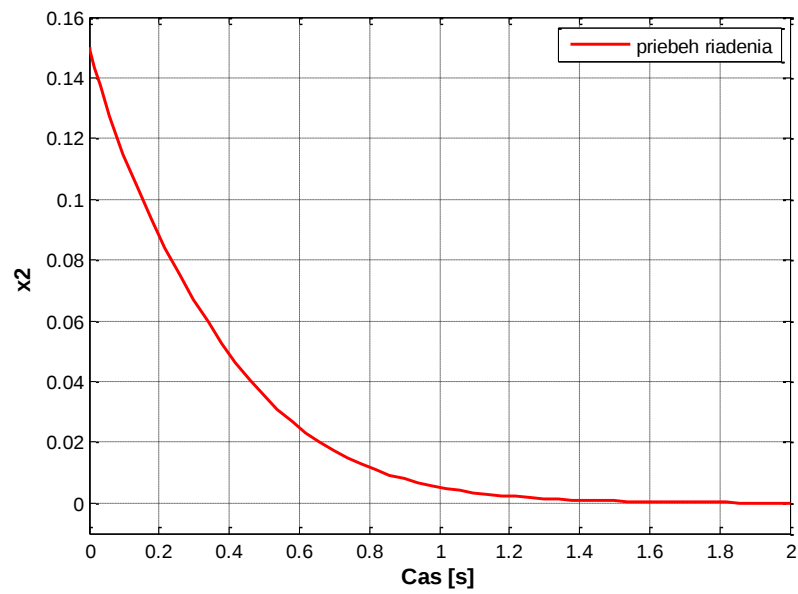
Schéma riadenia stabilného systému je znázornená na Obr. 1, kde akčný zásah vstupuje do s-funkcie a výstupy systému sú zobrazené na Obr.2 – Obr. 4



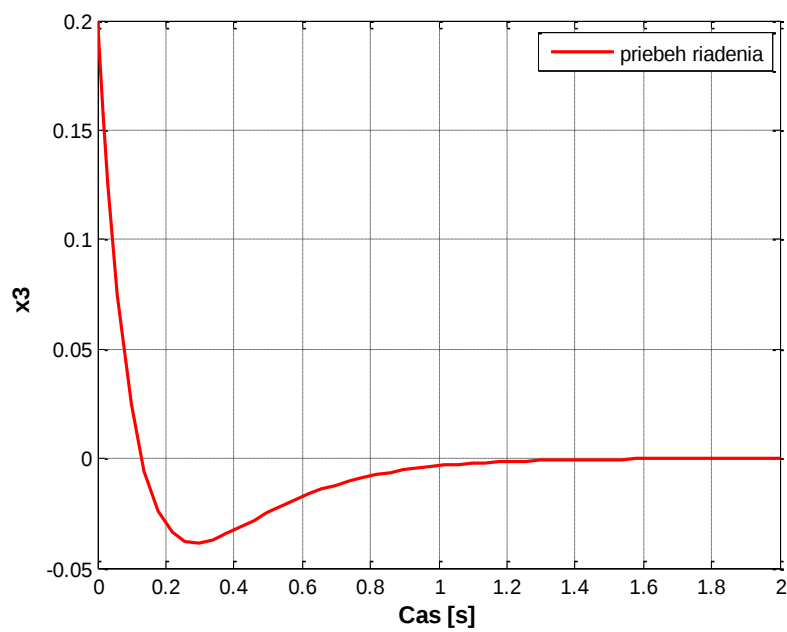
Obr. 1 Schéma riadenia stabilného systému



Obr.2 Výstup stabilného systému  $x_1$  pri použití presnej agregácie



Obr.3 Výstup stabilného systému  $x_2$  pri použití presnej agregácie



Obr.4 Výstup stabilného systému  $x_3$  pri použití presnej agregácie

### 2.1.2. Modálna agregácia

Druhou spomenutou metódou bola modálna agregácia, ktorú sme vypočítali pre následné porovnanie jednotlivých agregačných techník.

Pomocou príkazu  $[M_A, J_A] = \text{jordan}(A)$  v prostredí programu MATLAB bola najprv vypočítaná Jordanova matica s vlastnými číslami matice  $A$  na diagonále

$$J_A = \begin{bmatrix} -1.3877 & 0 & 0 \\ 0 & -5.3937 & 0 \\ 0 & 0 & -9.2186 \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici  $A$  je podľa rovnice 1.9

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.6462 & 0.0413 & 0.3125 \\ 0.5367 & -0.3145 & -0.2222 \\ 0.5757 & 0.1285 & -0.7042 \end{bmatrix}$$

potom agregáčnā matica  $L$  je z rovnice 1.10

$$L = [0.6462 \quad 0.1789 \quad 0.2303]$$

kde  $M_R$  je rozmerov redukovaného systému  $1 \times 1$  a  $P = [I_{1 \times 1} \quad 0_{1 \times (n-1)}]$ .

Matice redukovaného systému sú potom z rovníc 1.11 a 1.12

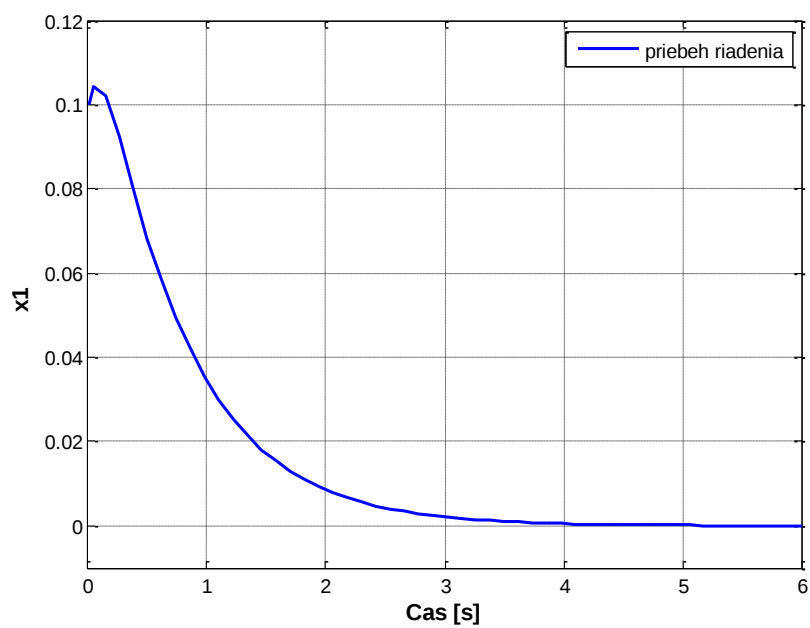
$$A_r = -1.3877$$

$$B_r = 0.2303$$

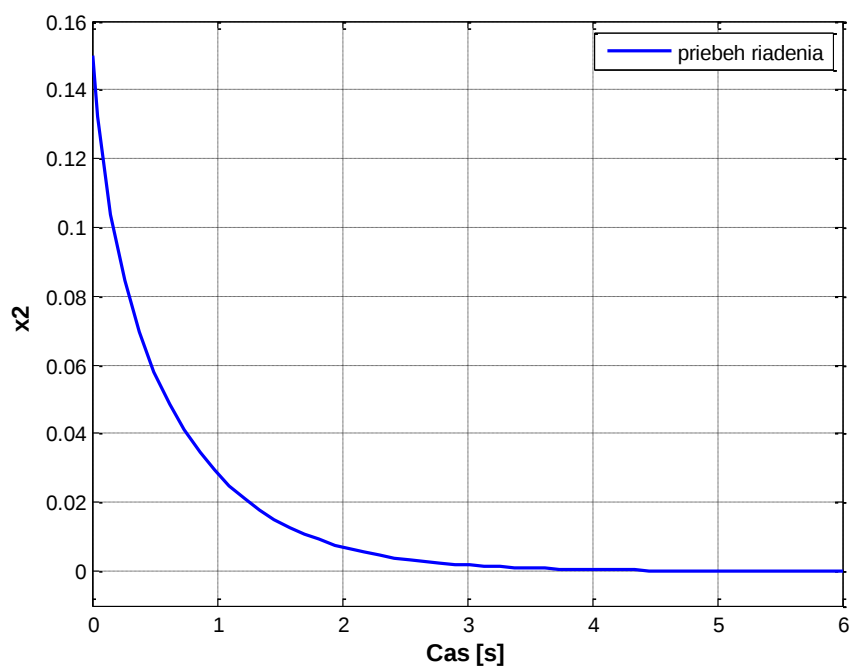
Zákon riadenia sa vypočíta podobne ako pri presnej agregácii opísanej vyššie a je nasledovný

$$\mathbf{u}(t) = -2.7761x_1(t) - 0.7685x_2(t) - 0.9893x_3(t)$$

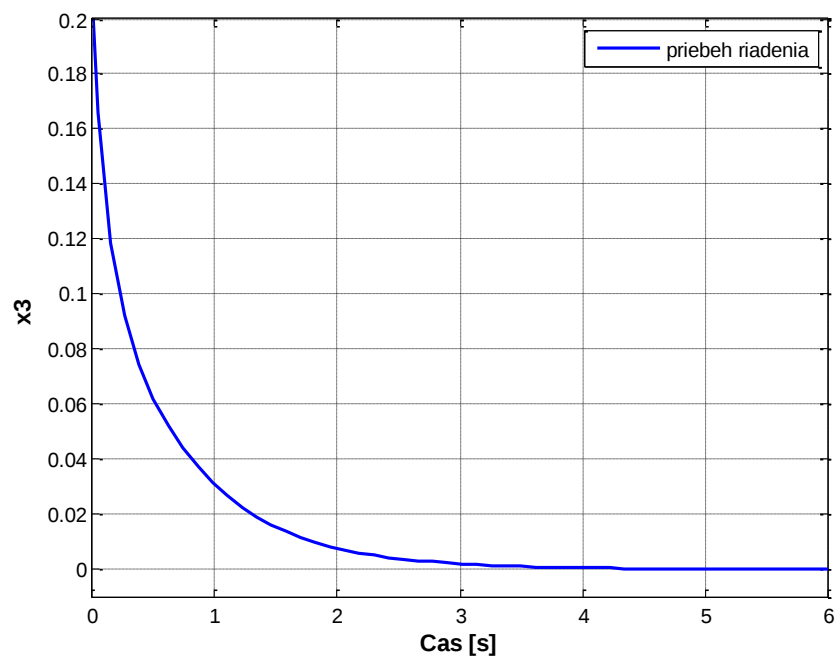
Na Obr. 5 – Obr.7 sú znázornené výstupy stabilného systému pri použití modálnej agregácie.



Obr. 5 Výstup stabilného systému  $x_1$  pri použití modálnej agregácie



Obr. 6 Výstup stabilného systému  $x_2$  pri použití modálnej agregácie



Obr. 7 Výstup stabilného systému  $x_3$  pri použití modálnej agregácie

### 2.1.3. Vyvážená realizácia

Pre transformovaný stabilný systém na prenosovú funkciu bola najskôr vypočítaná vyvážená realizácia pomocou príkazu v prostredí MATLAB z rovnice 1.15

$$[\text{SYSb}, G1, T, Ti] = \text{balreal}(Gs)$$

kde

$$G(s) = \frac{2s + 10}{s^3 + 16s^2 + 70s + 69}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1.5695 & 0.2546 & 0.3863 \\ 1.0489 & -0.3086 & -0.3879 \\ 0.3701 & -0.6031 & -0.0355 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3863 & 0.3879 & -0.0355 \\ 0.1842 & 0.3440 & -1.7562 \\ 0.8979 & -1.8028 & 1.3014 \end{bmatrix}$$

pomocou ktorej bola navrhnutá agregáčnā matica  $L$  z rovnice 1.26, t.z., že matica  $L$  je prvý riadok matice  $T^{-1}$

$$L = [0.3863 \quad 0.3879 \quad -0.0355]$$

Pomocou rovníc 1.4 – 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc  $F$  a  $G$

$$F = -2.8395$$

$$G = -0.0355$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -2.8395\mathbf{z}(t) - 0.0355\mathbf{u}(t)$$

Potom transformovaný systém v stavovom priestore bude z rovnice 1.13

$$AA = \begin{bmatrix} -0.9388 & -2.0718 & 0.1720 \\ 2.0718 & -10.5242 & 1.9621 \\ 0.1720 & -1.9621 & -4.5371 \end{bmatrix}$$

$$BB = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ -0.3879 \\ -0.0355 \end{bmatrix}$$

$$CC = [0.3863 \quad 0.3879 \quad -0.0355]$$

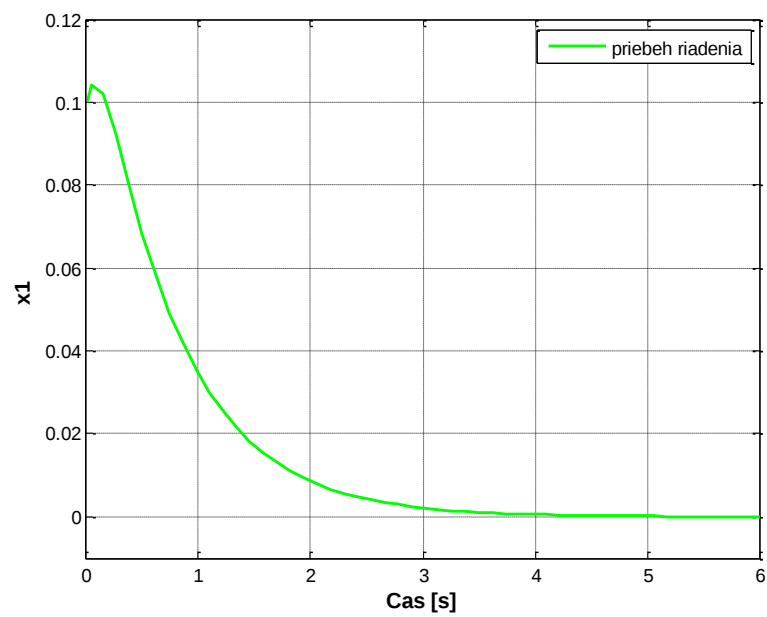
Modifikovaný tvar váhovej matice  $Q_r$  z rovnice 1.23

$$Q_r = 3.3229$$

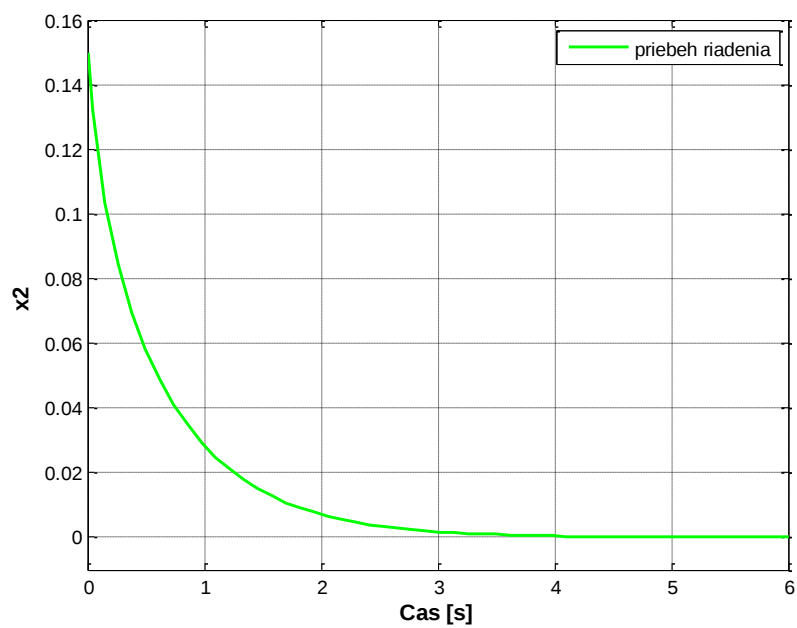
A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.22 je

$$\mathbf{u}(t) = 40.0987x_1(t) + 40.2673x_2(t) - 3.6808x_3(t)$$

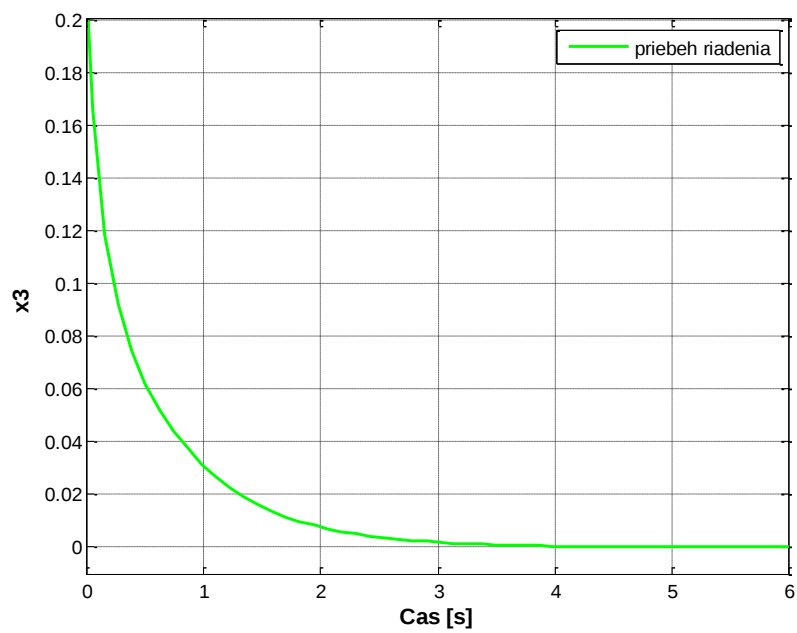
Na Obr. 8 – Obr. 10 sú znázornené výstupy stabilného systému pri použití vyváženej realizácie.



Obr. 8 Výstup stabilného systému  $x_1$  pri použití metódy vyváženej realizácie



Obr. 9 Výstup stabilného systému  $x_2$  pri použití metódy vyváženej realizácie



Obr. 10 Výstup stabilného systému  $x_3$  pri použití metódy vyváženej realizácie

#### 2.1.4. Redukcia modelu

Vyvážená realizácia pôvodného stabilného systému je

$$A1 = \begin{bmatrix} -0.9388 & -2.0718 & 0.1720 \\ 2.0718 & -10.5242 & 1.9621 \\ 0.1720 & -1.9621 & -4.5371 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ -0.3879 \\ -0.0355 \end{bmatrix}$$

$$C1 = [0.3863 \quad 0.3879 \quad -0.0355]$$

$$D1 = [0]$$

Z takto získanej vyváženej realizácie bol systém zredukovaný na druhý rád pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$Gs2 = \text{modred}(Gsa, [3])$$

$$A2 = \begin{bmatrix} -0.9322 & -2.146 \\ 2.146 & -11.37 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} 0.3849 \\ -0.4032 \end{bmatrix}$$

$$C2 = [0.3849 \quad 0.4032]$$

$$D2 = [0.0002771]$$

Z tohto stavového opisu bola vypočítaná prenosová funkcia v tvare

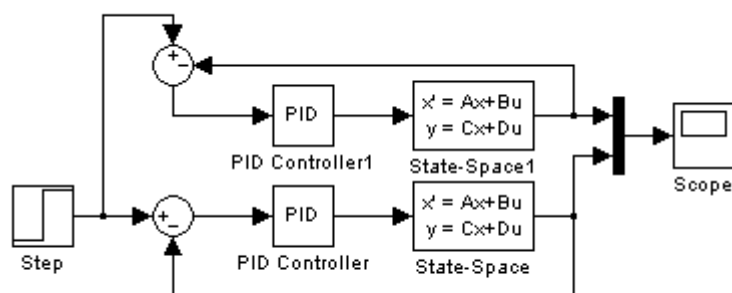
$$G2(s) = \frac{-0.01101s + 2.203}{s^2 + 12.3s + 15.2}$$

a pre prenos v tomto tvare bol Strejcovou metódou identifikácie navrhnutý PI regulátor :

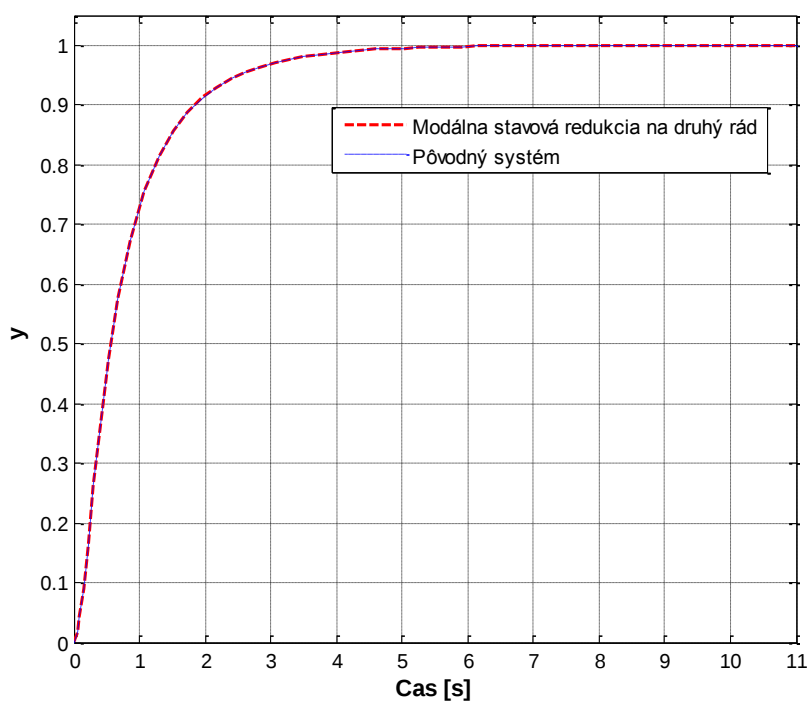
$$Zr = 6,9013$$

$$Ti = 0,834$$

Na Obr. 11 je znázornená schéma riadenia redukovaného a pôvodného systému s použitím PI regulátora. Na Obr. 12 a Obr. 13 je potom znázornené riadenie redukovaného systému na druhý a prvý rád s použitím PI regulátorov. Žiadaná hodnota bola pre oba prípady rovná jednej.



Obr.11 Schéma riadenia stabilného systému pomocou PI regulátora



Obr. 12 Riadenie systému redukovaného na druhý rád s použitím PI regulátora

Pre redukciu systému na prvý rád bol použitý príkaz v prostredí MATLAB

$$Gs2 = \text{modred}(Gsa, [2, 3])$$

kde stavový opis systém potom bude

$$A3 = [-1.337]$$

$$B3 = [0.461]$$

$$C3 = [0.461]$$

$$D3 = [-0.01402]$$

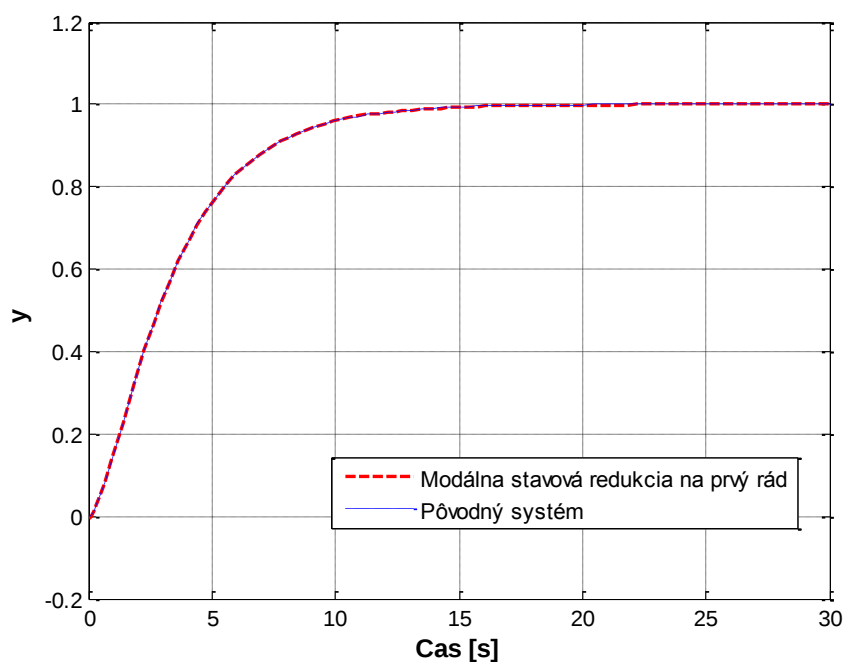
Z tohto stavového opisu bola vypočítaná prenosová funkcia v tvare

$$G2(s) = \frac{-0.01402s + 0.1938}{s + 1.337}$$

a pre tento zredukovaný systém bol Strejcovou metódou identifikácie navrhnutý PI regulátor

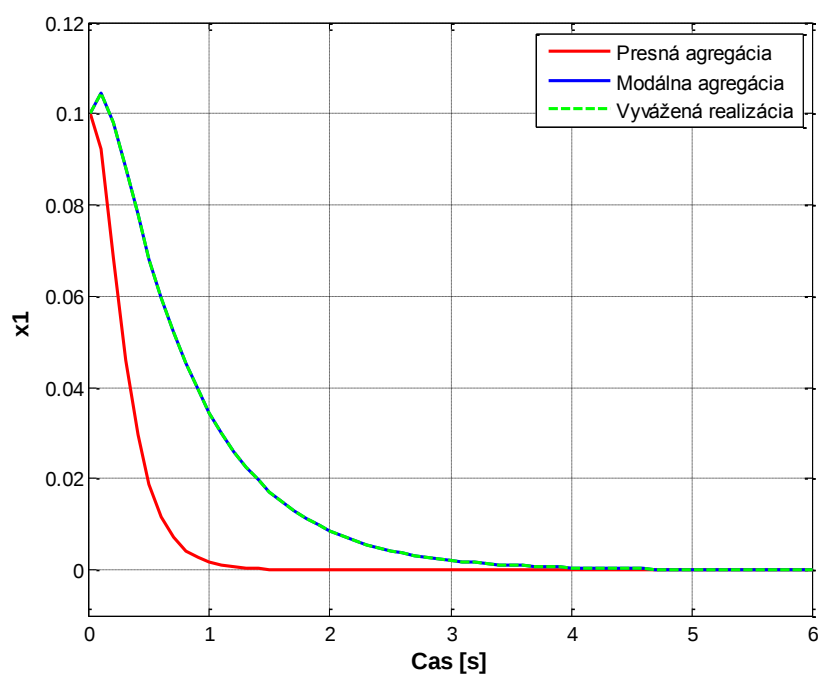
$$Zr = 0.4315$$

$$Ti = 0.2315$$

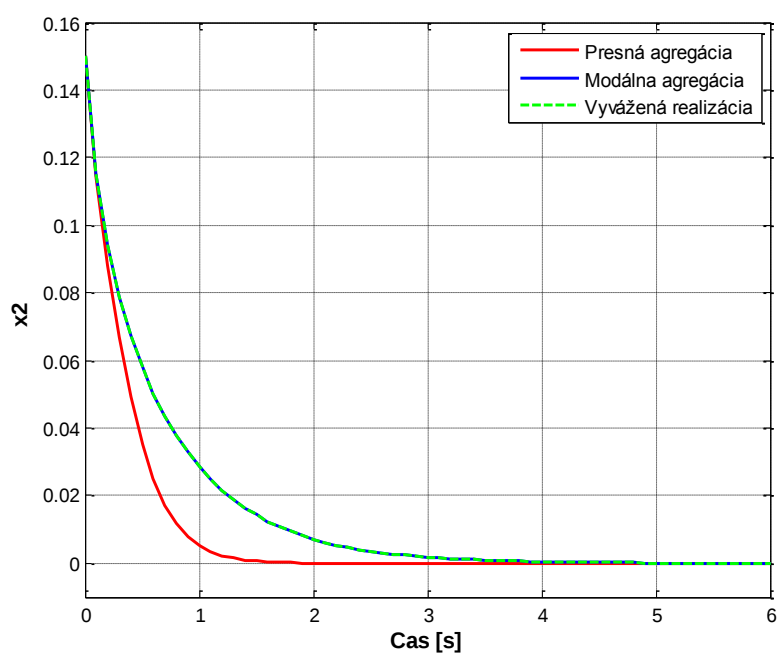


Obr. 13 Riadenie systému redukovaného na prvý rád s použitím PI regulátora

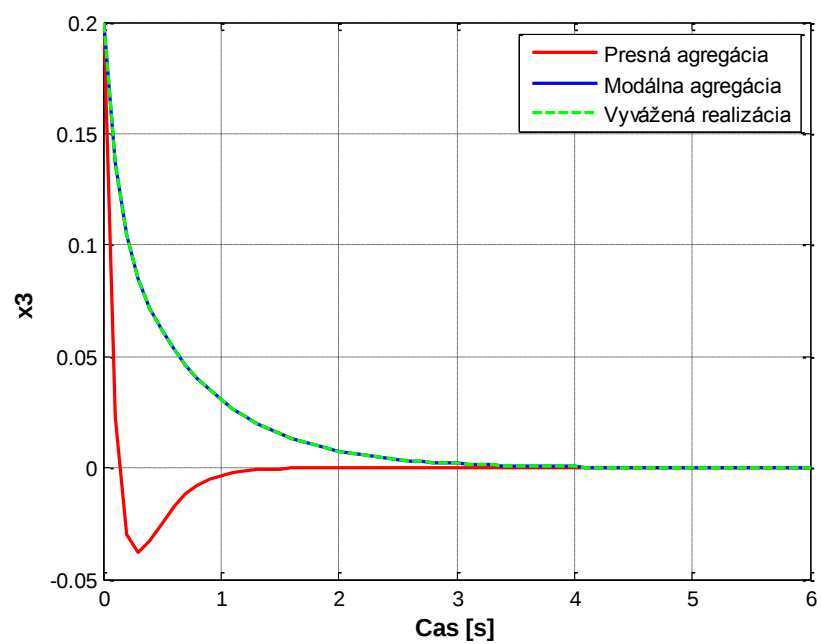
Na Obr. 14 – Obr. 16 sú znázornené výstupy nášho stabilného systému pri použití presnej agregácie, modálnej agregácie a vyváženej realizácie. Z ukázaných priebehov výstupov zo systému je vidieť, že modálna agregácia a vyvážená realizácia sa úplne zhodujú. Pri použití metódy presnej agregácie sa systém najrýchlejšie ustálil na žiadanej hodnote v porovnaní so zvyšnými dvomi metódami.



Obr. 14 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe  $x_1$



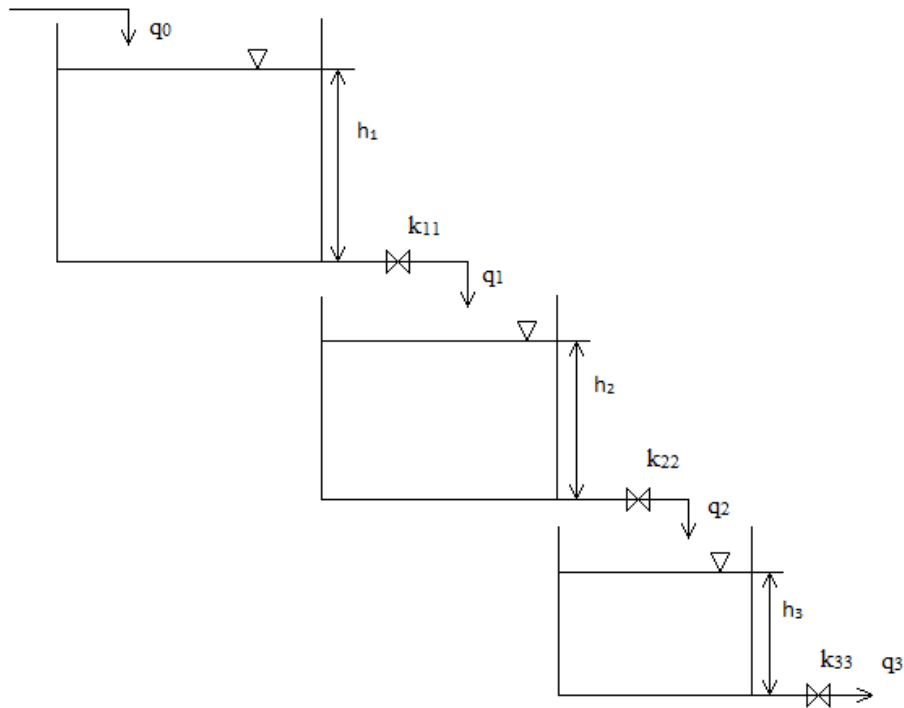
Obr. 15 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe  $x_2$



Obr. 16 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém pri výstupe  $x_3$

## 2.2. Zásobníky kvapaliny

Máme systém troch zásobníkov kvapaliny bez interakcie zapojených pod sebou podľa obr. 17, kde prvý zásobník je zásobovaný vstupným prúdom  $q_0$ .



Obr. 17 Schéma troch zásobníkov

Matematický model zásobníkov kvapaliny predstavuje nelineárny systém, opísaný rovnicami:

$$q_0 = k_{11}\sqrt{h_1} + F_1 \frac{dh_1}{dt}$$

$$k_{11}\sqrt{h_1} = k_{22}\sqrt{h_2} + F_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$k_{22}\sqrt{h_2} = k_{33}\sqrt{h_3} + F_3 \frac{dh_3}{dt}$$

$$h_1(0) = h_1^s$$

$$h_2(0) = h_2^s$$

$$h_3(0) = h_3^s$$

Tabuľka 1. Konštanty zásobníkov kvapaliny

| $F_1[\text{m}^2]$ | $F_2[\text{m}^2]$ | $F_3[\text{m}^2]$ | $k_{11}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$ | $k_{22}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$ | $k_{33}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$ | $q_0^s[\text{m}^3\text{s}^{-1}]$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| 0.9               | 0.7               | 1                 | 1.2                                   | 1.2                                   | 1.2                                   | 1                                |

V ustálenom stave platí

$$q_0^s = k_{11}\sqrt{h_1^s}$$

$$k_{11}\sqrt{h_1^s} = k_{22}\sqrt{h_2^s}$$

$$k_{22}\sqrt{h_2^s} = k_{33}\sqrt{h_3^s}$$

kde  $s$  predstavuje ustálený stav.

Výšky hladín v zásobníkoch sú potom:

$$h_1^s = \left( \frac{q_0^s}{k_{11}} \right)^2 = 0.6944\text{m}$$

$$h_2^s = \left( \frac{q_0^s}{k_{22}} \right)^2 = 0.6944\text{m}$$

$$h_3^s = \left( \frac{q_0^s}{k_{33}} \right)^2 = 0.6944\text{m}$$

Matice systému sú:

$$A = \begin{bmatrix} -0.8000 & 0 & 0 \\ 1.0286 & -1.0286 & 0 \\ 0 & 0.7200 & -0.7200 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.1111 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vlastné čísla matice A

-0.7200

-1.0286

-0.8000

### 2.2.1. Presná agregácia

Transformačná matica

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0245 \\ 0 & 0.3939 & 0.1104 \\ 1 & -0.9191 & -0.9936 \end{bmatrix}$$

z čoho bola vypočítaná hodnota inverznej matice  $T^{-1}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 30.0000 & 2.3333 & 1 \\ -11.4237 & 2.5386 & 0 \\ 40.7615 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ktorá bola ďalej použitá pri hľadaní agregáčnej matice  $L$  z rovnice 1.27

$$L = \begin{bmatrix} 30.0000 & 2.3333 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc  $F$  a  $G$

$$F = -0.7200$$

$$G = 33.3333$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -0.7200\mathbf{z}(t) + 33.3333\mathbf{u}(t)$$

potom modifikovaný tvar váhovej matice  $Q_r$  z rovnice 1.24

$$Q_r = 0.0011$$

A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.22 je

$$\mathbf{u}(t) = 42.6909\mathbf{x}_1(t) + 3.3204\mathbf{x}_2(t) + 1.4230\mathbf{x}_3(t)$$

### 2.2.2. Modálna agregácia

Pre porovnanie agregácií bol vypočítaný zákon riadenia aj z hodnôt modálnej agregácie:

Najprv bola vypočítaná Jordanova matica s vlastnými číslami matice  $A$  obsiahnutými na diagonále

$$J_A = \begin{bmatrix} -0.8000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0286 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7200 \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici  $A$  je

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4.5000 & -4.5000 & 0 \\ -40.5000 & 10.5000 & 30.0000 \end{bmatrix}$$

potom agregáčnā matica je z rovnice 1.10

$$L = [1 \ 0 \ 0]$$

kde  $M_R$  je rozmerov redukovaného systému  $1 \times 1$  a  $P = [I_{1 \times 1} \ 0_{1 \times (n-1)}]$ .

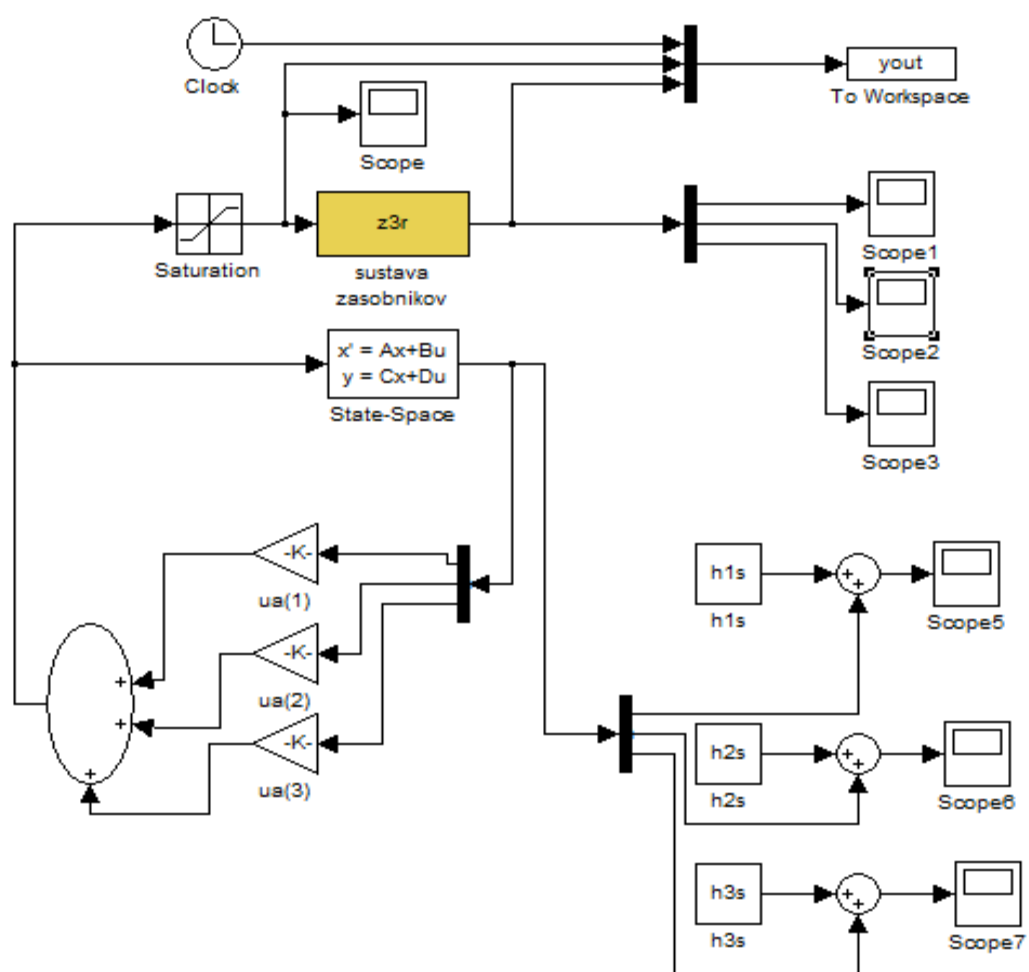
Matice redukovaného systému sú potom z rovníc 1.11 a 1.12

$$A_r = -0.8000$$

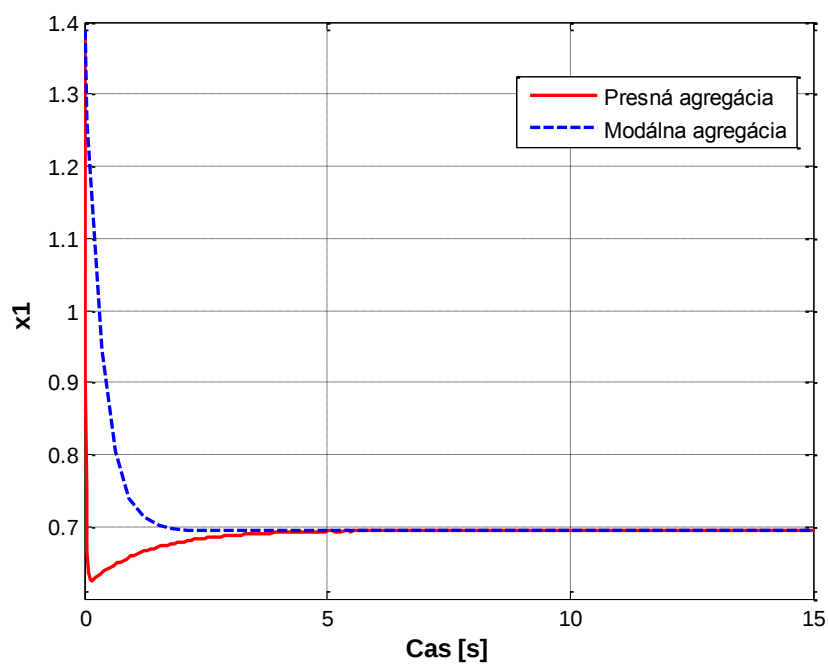
$$B_r = 1.1111$$

Zákon riadenia sa vypočíta obdobne ako pri agregácii opísanej vyššie a je nasledovný

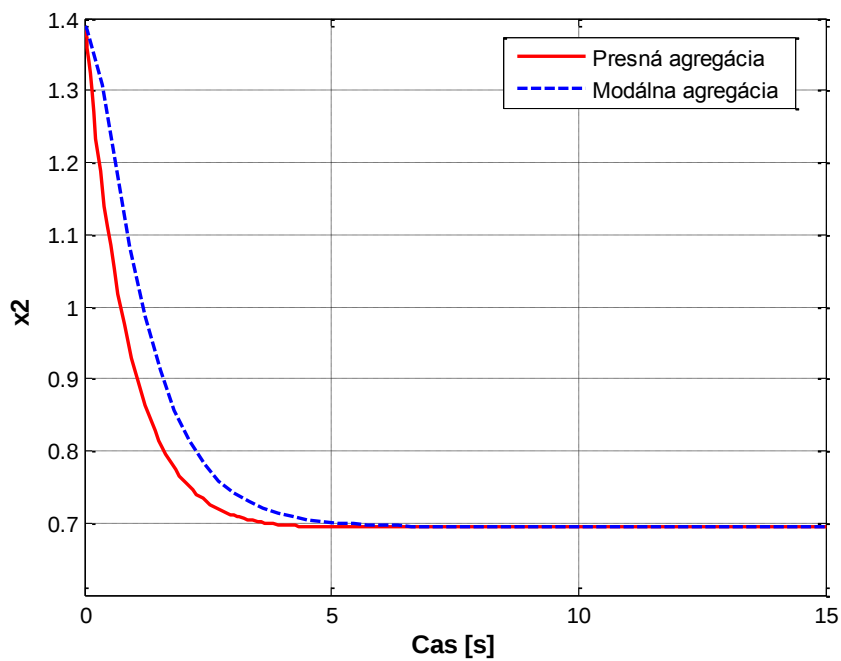
$$\mathbf{u}(t) = 1.9214 \mathbf{x}_1(t)$$



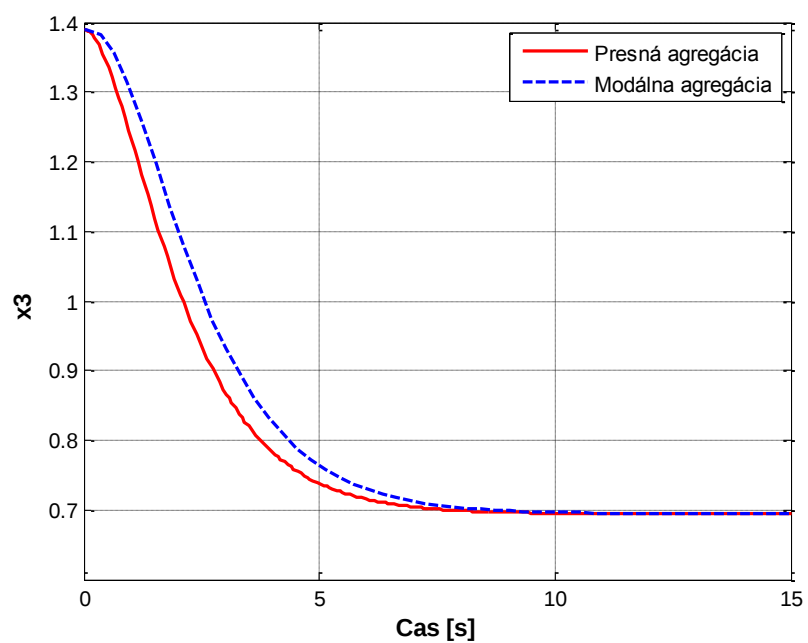
Obr. 18 Schéma riadenia zásobníkov



Obr. 19 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.1 na porovnanie agregáčnych metód



Obr. 20 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.2 na porovnanie agregáčnych metód



Obr. 21 Priebeh výšky hladiny v zásobníku č.3 na porovnanie agregáčnych metód

## Záver

Hlavnou úlohou bakalárskej práce bolo zoznámenie sa so zjednodušujúcimi metódami ako účelnými nástrojmi na riadenie systémov zložitejšej štruktúry ako aj ich aplikácia na dané systémy.

Cieľom tejto práce bolo ukázať riadenie pôvodného systému pomocou redukovaného modelu, ktorý bol navrhnutý použitým rozličných agregačných techník, ktoré sa radia medzi zjednodušujúce metódy. V práci boli predstavené a aplikované konkrétne agregačné metódy, a to presná agregácia, modálna agregácia, vyvážená realizácia a metóda redukcie modelu.

Prvá časť práce bola zameraná na teoretický popis agregačných techník pre lepšie pochopenie princípu redukcie systému. Druhú časť tvorili príklady, na ktorých sme aplikovali zjednodušené riadenie.

Pri riadení stabilného systému boli použité všetky spomenuté metódy, ktorých výsledky sú počítané a vykreslené pomocou programu MATLAB. Všetky aplikované metódy nám pomohli dosiahnuť požadované výsledky v pomerne krátkom čase, ale pri ich porovnaní je vidieť, že priebehy riadenia pri modálnej agregácii a vyvázenej realizácii boli úplne zhodné a systém sa pri použití presnej agregácie ustálil na žiadanej hodnote rýchlejšie ako pri ostatných metódach.

Na overenie vhodnosti riadenia redukovaným modelom boli metódy presnej a modálnej agregácie použité aj na konkrétny prípad systému zásobníkov kvapaliny bez interakcie. Aj keď sa obe metódy ustálili na požadovanej výške hladiny v takmer rovnakom čase, o niečo účinnejšia bola metóda presnej agregácie, lebo pri jej aplikácii sa systém ustálil na požadovanej hodnote výšky hladiny rýchlejšie ako pri použití modálnej agregácie.

Zo všetkých použitých metód sa ako najúčinnější prejavila metóda presnej agregácie, lebo práve pri jej použití systém dosiahol požadovanú hodnotu a ustálil sa na nej v najkratšom čase a to pre oba skúmané systémy.

Výsledkom našej práce je teda potvrdenie o vhodnosti riadenia s použitím agregačných metód a na základe našich výsledkov je metóda presnej agregácie doporučená ako najlepší spôsob riadenia systémov.

## Zoznam použitej literatúry

CHMÚRNY, D., DVORAN, J., KARŠAIOVÁ, M., BAKOŠOVÁ, M.: *Coordination in Hierarchical Control Structure for Linear and Non - Linear Large - Scale Chemical – technological*. System Analysis, Modeling and Simulation, 1991. vol. 8

GENESIO, R., MILANESE, M.: *Note on Derivation and Use of Reduced Order Models*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976 vol. 21

SIRET, J., MICHAILESCO, G., BERTRAND, P.: *Representation of Linear Dynamical Systems by Aggregated Models*. International Journal of Control, 1977. vol. 26

AOKI, M.: *Control of Large – Scale Dynamical Systems by Aggregation*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968. vol. 13

PAVÚKOVÁ, L.: *Možnosti riadenia technologických procesov pomocou zjednodušených modelov*, Diplomová práca: Bratislava, 2010

DAVISON, E.J.: *A new Method for Simplifying linear dynamic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966. vol. 11

### Internetové zdroje:

Modálna agregácia. Vyvážená realizácia. Redukcia modelu. Dostupné na

<http://www.kasr.elf.stuba.sk/predmety/rzs/prednasky/predn5.ppt>

## Prílohy

CD obsahuje pdf súbor bakalárskej práce a používané programy

### Príloha 1.

Agregačné metódy aplikované na stabilný systém

```
% načítanie hodnôt stabilného systému
A=[-4 1 2;3 -5 0;5 0 -7];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0];
D=[0];

% presná agregácia stabilného systému
vlastne=eig(A);
[T,D]=eig(A);
Tin=inv(T);
L=[1 0 0]*inv(T);
F=L*A*L'*inv((L*L'));
G=L*B;
Q=eye(3);
R=1;
QA=inv((L*L'))*L*Q*L'*inv(L*L');
alfa=1;
FA=F+alfa;
riesric=roots([- (G*inv(R)*G'), (2*FA), (QA+2*alfa)]);
KA=inv(R)*G'*riesric(1);
ua=KA*L;
ua=real(ua)

%modálna agregácia stabilného systému
[Ma,Ja]=jordan(A);
Ja=inv(Ma)*A*Ma;
Mr=Ma(1,1);
P=[1 0 0];
L=Mr*P*inv(Ma);
F=Mr*P*Ja*P'*inv(Mr);
G=Mr*P*inv(Ma)*B;
Q=eye(3);
R=1;
QA=inv((L*L'))*L*Q*L'*inv(L*L');
alfa=1;
FA=F+alfa;
riesric=roots([- (G*inv(R)*G'), (2*FA), (QA+2*alfa)]);
KM=inv(R)*G'*riesric(1);
K=real(KM)
uaa=KM*L;
uaa=real(uaa)

%vyvážená realizácia stabilného systému
A = [-4 1 2;3 -5 0;5 0 -7];
B = [0;0;1];
C = [1 0 0];
D = [0];
sys = ss(A,B,C,D);
[cit,men] = ss2tf(A,B,C,D,1);
Gs = tf(cit,men)
```

```

[SYSb,G1,T,Ti] = balreal(sys)
Ab = SYSb.a;
Bb = SYSb.b;
Cb = SYSb.c;
Db = SYSb.d;
[citb,denb] = ss2tf(Ab,Bb,Cb,Db);
Gsb = tf(citb,denb);
AA=T*A*Ti
BB=T*B
CC=C*Ti
%balreal
L=[1 0 0]*Ti;
F=L*A*L'*inv((L*L'));
G=L*B;
Q=eye(3);
R=1;
QA=inv((L*L'))*L*Q*L'*inv(L*L');
alfa=1;
FA=F+alfa;
riesric=roots([- (G*inv(R)*G'), (2*FA), (QA+2*alfa)]);
KB=inv(R)*G'*riesric(1);
uab=KB*L

% redukcia modelu na 2.rád
Gs2=modred(SYSb,[3]);

a2=[-0.9322 -2.146;2.146 -11.37];
b2=[0.3849;-0.4032];
c2=[0.3849 0.4032];
d2=[0.0002771];
[cit2,men2]=ss2tf(a2,b2,c2,d2,1);
Gs2_p=tf(cit2,men2);

% redukcia modelu na 1.rád
Gs1=modred(SYSb,[2 3]);
a1=[-1.337]
b1=[0.461]
c1=[0.461]
d1=[-0.01402]
[cit1,men1]=ss2tf(a1,b1,c1,d1,1)
Gs1_p=tf(cit1,men1)

```

## Príloha 2.

Agregačné metódy aplikované na systém troch zásobníkov kvapaliny bez interakcie

```

%Výpočet konštánt linearizovaného modelu 3 zásobníkov pod sebou bez
interakcie
k11=1.2;k22=1.2;k33=1.2;F1=0.9;F2=0.7;F3=1;qv1s=1;qv1=qv1s*1.1;
h1s=(qv1s/k11).^2;
h2s=(qv1s/k22).^2;
h3s=(qv1s/k33).^2;

a11=-k11/(2*F1*sqrt(h1s));
a12=0;

```

```

a13=0;
a21=k11/(2*F2*sqrt(h1s));
a22=-k22/(2*F2*sqrt(h2s));
a23=0;
a31=0;
a32=k22/(2*F3*sqrt(h2s));
a33=-k33/(2*F3*sqrt(h3s));
b11=1/F1;
b21=0;
b31=0;

A=[a11 a12 a13;a21 a22 a23;a31 a32 a33];
B=[b11;b21;b31];
C=eye(3);%[0 1 1];
D=[0;0;0];

k1=k11/2*sqrt(h1s);
k2=k22/2*sqrt(h2s);
k3=k33/2*sqrt(h3s);

%presná agregácia
eig(A)
[V,H]=eig(A);
V*H*inv(V);
Tin=inv(V);
L=[1 0 0]*inv(V);
F=L*A*L'*inv((L*L'));
G=L*B;
Q=eye(3);
R=1;
QA=inv((L*L'))*L*Q*L'*inv(L*L');
alfa=1;
FA=F+alfa;
riesric=roots([- (G*inv(R)*G'), (2*FA), (QA+2*alfa)]);
KA=inv(R)*G'*riesric(1);
ua=KA*L

%modálna agregácia
[Ma,Ja]=jordan(A);
Ja=inv(Ma)*A*Ma;
Mr=Ma(1,1);
P=[1 0 0];
L=Mr*P*inv(Ma);
F=Mr*P*Ja*P'*inv(Mr);
G=Mr*P*inv(Ma)*B;
Q=eye(3);
R=1;
QA=inv((L*L'))*L*Q*L'*inv(L*L');
alfa=1;
FA=F+alfa;
riesric=roots([- (G*inv(R)*G'), (2*FA), (QA+2*alfa)]);
KA=inv(R)*G'*riesric(1);
uaa=KA*L

```