

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE

FCHPT-5414-50947

GLOBÁLNA OPTIMALIZÁCIA POMOCO U METÓDY
ALPHABB

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2012

Bc. Andrea Szakálová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE

GLOBÁLNA OPTIMALIZÁCIA POMOCOU METÓDY
ALPHABB

DIPLOMOVÁ PRÁCA

FCHPT-5414-50947

Študijný program: Automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve

Číslo študijného odboru: 2621

Názov študijného odboru: 5.2.14 Automatizácia

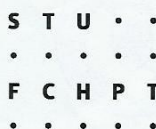
Školiace pracovisko: Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Vedúci záverečnej práce/školiťel': prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.

Konzultant: Ing. Radoslav Paulen

Bratislava 2012-05-18

Bc. Andrea Szakálová



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Andrea Szakálová**
ID študenta: 50947
Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor: 5.2.14 automatizácia
Vedúci práce: prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
Konzultant: Ing. Radoslav Paulen
Miesto vypracovania: ÚIAM FCHPT STU v Bratislave

Názov práce: **Globálna optimalizácia pomocou metódy alphaBB**

Špecifikácia zadania:

Metóda alphaBB patrí medzi najčastejšie používané pri hľadaní globálneho optima nekonvexných optimalizačných problémov pomocou deterministického prístupu. Základom tejto metódy sú algoritmy pre rozdeľovanie Euklidovského priestoru hľadaných veličín a pre ohraničovanie hodnôt účelovej funkcie. Táto práca sa zameria na efektívnu implementáciu týchto algoritmov, na ich analýzu a zlepšenie funkcionality. Bude vytvorená knižnica týchto algoritmov v prostredí MATLAB a tieto budú použité na riešenie vybraných problémov globálnej optimalizácie.

Rozsah práce: 60

Zoznam odbornej literatúry:

1. ČIŽNÍAR, M. – PODMAJERSKÝ, M. – HIRMAJER, T. – FIKAR, M. – LATIFI, M. Global optimization for parameter estimation of differential-algebraic. *Chemical Papers* Vol. 63, No. 3. s. 274. ISSN 0366-6352.
2. PARDALOS, P. – FLOUDAS, C. *Frontiers in Global Optimization*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 597 s.

Riešenie zadania práce od: 13. 02. 2012
Dátum odovzdania práce: 19. 05. 2012

Szakalova'
Bc. Andrea Szakalová
študentka



prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska



prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne, a že som uviedla každú použitú literatúru súvisiacu so zameraním diplomovej práce.

Bratislava, 18. 05. 2012

.....

vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Touto cestou vyslovujem pod'akovanie vedúcemu mojej diplomovej práce, Prof. Ing. Miroslavovi Fikarovi DrSc., a konzultantovi Ing. Radoslavovi Paulenovi, za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej diplomovej práce.

ABSTRAKT

Diplomová práca pojednáva o globálnej optimalizácii, ktorá je založená na vyhľadávaní globálneho minima účelovej funkcie v prítomnosti obmedzení. Cieľom tejto práce je implementácia metódy alphaBB ako metódy globálnej optimalizácie a vytvorenie algoritmov v prostredí MATLAB, ktoré sa používajú na nájdenie minimálnych vlastných čísel intervalovej matice. Diplomová práca obsahuje aj vzorové príklady, ktoré sú vyriešené viacerými metódami opísanými teoreticky v tejto práci.

Kľúčové slová: globálna optimalizácia, vlastné čísla intervalových matíc, algoritmy.

ABSTRACT

Diploma work deals with global optimization, based on global minimum search of objective function in the presence of constraints. . The aim of this work is an implementation of alphaBB method as a global optimization method and creation of the algorithms in MATLAB, which are used for finding the minimal eigenvalue of the interval Hessian matrix. Diploma work also includes the model examples resolved by the methods theoretically described in this work.

Key words: global optimization, eigenvalue of interval matrix , algorithms.

Obsah

Zoznam obrázkov.....	9
Zoznam tabuliek.....	10
ÚVOD.....	11
1 GLOBÁLNA OPTIMALIZÁCIA	13
1.1 Priestorová metóda vetiev a hraníc.....	13
1.1.1 Formulácia NLP problému	13
1.1.2 Algoritmus alphaBB	14
1.2 Konvexná relaxácia	14
1.2.1 Podhodnocovanie bilineárnych členov	17
1.2.2 Podhodnocovanie jednorozmerových konkávných členov.....	17
1.2.3 Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov	18
1.2.4 Celkový konvexný podhodnotiteľ.....	18
1.2.5 Podhodnocovanie obmedzenia typu rovnosti	19
1.3 Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov	20
1.3.1 Geršgorinova metóda	21
1.3.2 Metóda E-matice	22
1.3.3 Mori a Kokame metóda	23
1.3.4 Metóda relaxovaného Hessiánu	24
1.3.5 Kharitonova metóda.....	25
1.3.6 Hertzova metóda	26
1.3.7 Váhovaná Geršgorinova metóda.....	26
1.3.8 Metóda H-matice	27
1.3.9 Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	28
2 VZOROVÉ PRÍKLADY	29
2.1 Vzorový príklad 1	29
2.2 Vzorový príklad 2.....	37
2.3 Vzorový príklad 3.....	44
ZÁVER	52
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY	53
PRÍLOHY.....	55

Zoznam obrázkov

Obr. 1 Obmedzenia pôvodného nekonvexného problému	35
Obr. 2 Konvexifikovaná dovolená oblasť	36
Obr. 3 Porovnanie metód na výpočet jednej alfa hodnoty pri rôzne zvolenej presnosti	49
Obr. 4 Porovnanie metód na výpočet rôznej alfa hodnoty pri rôzne zvolenej presnosti	50

Zoznam tabuliek

Tab. 1 Výsledky pre vzorový príklad 2 získané pomocou α BB algoritmu použitím metód na výpočet jednej α hodnoty	40
Tab. 2 Výsledky pre vzorový príklad 2 získané pomocou α BB algoritmu použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt	41
Tab. 3 Výsledky pre vzorový príklad 2 použitím metód na výpočet jednej α hodnoty	42
Tab. 4 Výsledky pre vzorový príklad 2 použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt	43
Tab. 5 Výsledky pre vzorový príklad 3 použitím metód na výpočet jednej α hodnoty	47
Tab. 6 Výsledky pre vzorový príklad 3 použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt	47
Tab. 7 Porovnanie času výpočtu daných metód pri rôzne zvolenej presnosti	48
Tab. 8 Porovnanie počtu iterácií daných metód pri rôzne zvolenej presnosti	51

ÚVOD

Vo veľkom množstve optimalizačných problémov vznikajúcich v priemyselnom alebo vedeckom kontexte, ktoré sa v súčasnosti riešia pomocou algoritmov nelineárneho programovania (NLP), sa často stretávame s nekonvexnosťou v niektorých funkciách vystupujúcich v týchto problémoch (Repčíková, 2009). Táto nekonvexnosť spôsobuje, že tieto problémy vykazujú niekoľko lokálnych extrémov, čo viedlo k rozvoju metód globálnej optimalizácie (Adjiman a kol., 1998).

Cieľom globálnej optimalizácie je nájsť najlepšie, t.j. optimálne riešenie úlohy. Globálna optimalizácia rieši nekonvexné optimalizačné problémy, ktoré sa vyznačujú prítomnosťou viacerých lokálnych extrémov. Účelová funkcia nadobudne najnižšiu hodnotu v bode, ktorý sa nazýva globálne minimum. V tomto bode je účelová funkcia vlastne minimalizovaná.

Metódy globálnej optimalizácie sa delia na deterministické a stochastické. V diplomovej práci sú rozobraté deterministické metódy, pretože zaručujú ε -konvergenciu ku globálnemu riešeniu, a to konkrétne metóda vetiev a hraníc (Branch and Bound), ktorá rieši problémy globálnej optimalizácie.

Prvá kapitola diplomovej práce pojednáva konkrétne o danej problematike s najjednoduchším vysvetlením. Je tu opísaná metóda vetiev a hraníc a táto je založená na princípe konvexnej relaxácie pôvodného nekonvexného problému. Princípom metódy vetiev a hraníc je vytváranie horných a dolných ohraničení účelovej funkcie. Alfa je parameter určujúci mieru nekonvexnosti a je funkciou vlastných čísel intervalového Hessiánu funkcie. Ďalej sú tu opísané iteračné metódy, ktoré sa používajú na nájdenie vlastných čísel intervalového Hessiánu, na základe, ktorých sa určí konvexná relaxácia problému. Tieto metódy sa rozdeľujú na dve skupiny, a to na metódy, kde je potrebné poznať iba jednu alfa hodnotu a na metódy na výpočet odlišných alfa hodnôt.

Druhá kapitola sa zameriava na aplikovanie vybranej deterministickej metódy globálnej optimalizácie s použitím iteračných metód. Je praktizovaná na vzorových príkladoch, kde je vysvetlený α BB algoritmus. Na týchto príkladoch je otestovaná

správna funkčnosť vytvorených funkcií v prostredí MATLAB, ktoré sú teoreticky opísané v tejto práci. Príklady sú riešené sčasti analyticky a sčasti numericky v programovom prostredí MATLAB.

Cieľom diplomovej práce je implementácia algoritmov na nájdenie minimálnych vlastných čísel intervalových matic pre riešenie problémov globálnej optimalizácie a taktiež aj na nájdenie odlišných alfa hodnôt.

1 GLOBÁLNA OPTIMALIZÁCIA

Globálne optimalizačné metódy hľadajú riešenia nekonvexných optimalizačných problémov, t.j. problémov, ktoré vykazujú niekoľko lokálnych extrémov (Adjiman a kol., 1998). Znamená to, že štandardné optimalizačné metódy často poskytujú suboptimálne riešenia, čo viedlo k rozvoju globálnej optimalizácie (Repčíková, 2009).

Metódy globálnej optimalizácie zo základného hľadiska môžeme rozdeliť na deterministické a stochastické. Jednou z najviac využívaných deterministických metód je metóda vetiev a hraníc (Branch-and-Bound, BB). Rozšírenie pôvodnej metódy je priestorová metóda vetiev a hraníc (Spatial Branch-and-Bound, sBB) (Adjiman a kol., 1998). Priestorová metóda vetiev a hraníc pracuje na princípe konvexnej relaxácie (Repčíková, 2009).

1.1 Priestorová metóda vetiev a hraníc

Daná metóda sa nazýva priestorová metóda, pretože delí Euklidovský priestor, kde je definovaný problém postupne na menšie a menšie oblasti. Riešenie problému spočíva vo vytváraní konvergentných postupností horných a dolných ohraničení účelovej funkcie (Repčíková, 2009), čiže základ tejto metódy spočíva v nájdení hornej a dolnej medze (Hirmajer, 2001).

Priestorová metóda vetiev a hraníc môže slúžiť aj na riešenie celočíselných problémov pomocou postupnej optimalizácie úloh lineárneho (LP) alebo nelineárneho programovania (NLP) (Prokop, 1985).

1.1.1 Formulácia NLP problému

Formulácia NLP problému je nasledovná:

$$\min_x J(x) \tag{1.1.1}$$

$$h(x) = 0 \tag{1.1.2}$$

$$g(x) \leq 0 \tag{1.1.3}$$

kde $x \in R^n$ n –rozmerový priestor reálnych čísel. Funkcia $J(x)$ predstavuje optimalizačné kritérium, $h(x)$ je vektor obmedzení typu rovnosti a $g(x)$ je vektor obmedzení typu nerovnosti. Dané funkcie musia patriť do C^2 , čo znamená, že funkcie musia mať spojité druhé derivácie (Adjiman a kol., 1998).

1.1.2 Algoritmus alphaBB

Algoritmus α BB môže byť použitý na riešenie problémov, ktoré patria do širokej triedy NLP, čiže bol navrhnutý na vyriešenie nekonvexných minimalizačných problémov. Jeho teoretické vlastnosti zaručujú nájdenie globálneho optima daného problému s konečnou ε -konvergenciou (Adjiman a kol., 1998).

Algoritmus vetiev a hraníc začína s relaxáciou pôvodného nekonvexného problému, čo vedie k získaniu nového konvexného problému. Pri riešení relaxovaného problému získame dolnú hranicu riešenia, čo je v porovnaní s riešením originálneho problému oveľa jednoduchšie. Relaxovaný problém je v skutočnosti konvexný optimalizačný problém, ktorého účelová funkcia podhodnocuje nekonvexnú účelovú funkciu na určitom intervale. Pretože každé lokálne minimum takéhoto problému je súčasne globálnym minimom, štandardné NLP algoritmy určené na hľadanie lokálnych extrémov sú schopné túto dolnú hranicu nájsť spoľahlivo. Horná hranica je získaná ako lokálne riešenie pôvodného nekonvexného problému na danom intervale (Adjiman a kol., 1998).

Ak dolná a horná hranica nie sú vo vzájomnej vzdialenosti s určitou ε presnosťou, potom interval bude rozdelený jednou zo stratégií vetvenia. Týmto spôsobom sa získali dva nové subproblémy. Ak je dolná hranica na nejakom subintervale väčšia ako súčasná horná hranica, tak na tomto subintervale neexistuje globálne riešenie, a preto je vylúčený z ďalšieho výpočtu. Takáto operácia sa nazýva fathoming (Adjiman a kol., 1998).

Celý tento proces vetvenia a ohraničenia sa opakuje, až kým sa dolná hranica nebude približovať aktuálnej hornej hranici s požadovanou presnosťou ε (Adjiman a kol., 1998). Relatívna presnosť vyjadruje mieru konvergenzie algoritmu globálnej optimalizácie ku globálnemu optimu, a preto môže byť na základe predchádzajúcich vlastností priestorovej metódy vetiev a hraníc

vyjadrená, ako podiel rozdielu najlepšej (najmenšej) hornej hranice a najlepšej (najväčšej) dolnej hranice ku hodnote najväčšej dolnej hranice. Na základe tohto podielu je možné určiť mieru konverencie optimalizačného algoritmu v každej iterácii. Z praktického pohľadu je potom možné hovoriť o epsilon-globálnom minime, ak je relatívna presnosť menšia ako zvolená hodnota epsilon.

1.2 Konvexná relaxácia

Predpokladá sa, že funkcia J a g_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n_p$, $j = 1, 2, \dots, s_i$ môže byť rozložená na sumu členov, kde každý člen môže byť klasifikovaný ako lineárny člen (LT), konvexný člen (CT), bilineárny člen (BT), trilineárny člen (TT), zlomkový člen (FT), zlomkový trilineárny člen (FTT) alebo jednorozmerný konkávny člen (UT) (Paulen, 2010). Lineárny a konvexný člen nie je potrebné podhodnocovať. Na takomto princípe pracujú BB algoritmy (Adjiman a kol., 1998). Všetky nasledujúce vzťahy obmedzení typu nerovnosti sú analogické ako pre účelovú funkciu.

Prvým krokom konvexnej relaxácie je rozdelenie jednotlivých členov na sumu špeciálnych nekonvexných členov (STNT) a všeobecných nekonvexných členov (ATNT). Na základe tohto členenia účelová funkcia $f(x)$ nadobúda nasledovný tvar (Adjiman a kol., 1998) :

$$J(x) = STNT(x) + ATNT(x) \quad (1.2.1)$$

pričom

$$STNT(x) = LT(x) + CT(x) + \sum_{i=1}^{n_{BT}} b_i x_{BTi,1} x_{BTi,2} + \sum_{i=1}^{n_{TT}} t_i x_{TTi,1} x_{TTi,2} x_{TTi,3} + \sum_{i=1}^{n_{FT}} f_i \frac{x_{FTi,1}}{x_{FTi,2}} + \sum_{i=1}^{n_{FTT}} f t_i \frac{x_{FTTi,1} x_{FTTi,2}}{x_{FTi,3}} + \sum_{i=1}^{n_{UT}} UT_i(x_{UTi}) \quad (1.2.2)$$

$$ATNT(x) = \sum_{i=1}^{n_{NT}} NT_i(x) \quad (1.2.3)$$

kde n_{BT} je počet bilineárnych členov,

$x_{BTi,1}$ a $x_{BTi,2}$ sú dve premenné vystupujúce v i -tom bilineárnom člene;

b_i je jeho koeficient;

n_{TT} je počet trilineárnych členov;

$x_{TTi,1}, x_{TTi,2}$ a $x_{TTi,3}$ označujú tri premenné vystupujúce v i -tom trilineárnom člene;

t_i je jeho koeficient;

n_{FT} je počet zlomkových členov;

$x_{FTi,1}$ a $x_{FTi,1}$ sú dve premenné vystupujúce v i-tom zlomkovom člene;
 f_i je jeho koeficient;
 n_{FTT} je počet zlomkových trilineárnych členov;
 $x_{FTTi,1}$, $x_{FTTi,2}$ a $x_{FTTi,3}$ sú tri premenné vystupujúce v i-tom zlomkovom trilineárnom člene;
 x_{FTi} je jeho koeficient;
 n_{UT} je počet jednorozmerných konkávných členov;
 x_{UTi} označuje premennú, ktorá v ňom vystupuje;
 n_{NT} je počet všeobecných nekonvexných členov;
 $NT_i(x)$ je i-tý všeobecný nekonvexný člen.

Podhodnocovať musíme všetky členy, okrem lineárneho a konvexného, ale bližšie si rozoberieme tie, ktoré sú použité vo vzorových príkladoch (Repčíková, 2009).

1.2.1 Podhodnocovanie bilineárnych členov

V prípade bilineárnych členov xy získame konvexné dolné ohraničenie na oblasti $[x^L, x^U] \times [y^L, y^U]$ zavedením novej premennej w_{BT} , ktorá nahrádza všetky výskyty xy v danom probléme a pridaním štyroch lineárnych obmedzení typu nerovnosti (Adjiman a kol., 1998):

$$w_{BT} \geq x^L y + x y^L - x^L y^L \quad (1.2.4)$$

$$w_{BT} \geq x^U y + x y^U - x^U y^U \quad (1.2.5)$$

$$w_{BT} \leq x^L y + x y^U - x^L y^U \quad (1.2.6)$$

$$w_{BT} \leq x^U y + x y^L - x^U y^L \quad (1.2.7)$$

1.2.2 Podhodnocovanie jednorozmerových konkávných členov

Jednorozmerné konkávne členy sa podhodnocujú ich linearizáciou na nižšie viazané premenné. Podhodnotiteľ konkávnej funkcie UT na intervale $[x^L, x^U]$ nadobúda tvar lineárnej funkcie premennej x (Adjiman a kol., 1998):

$$UT(x^L) + \frac{UT(x^U) - UT(x^L)}{x^U - x^L} (x - x^L) \quad (1.2.8)$$

1.2.3 Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov

Nekonvexné členy ľubovoľného typu sú podhodnocované na celej oblasti $[x^L, x^U]$ funkciou $L_\alpha(x)$, ktorá je definovaná ako:

$$L_\alpha(x) = NT_i(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i^U - x_i)(x_i^L - x_i) \quad (1.2.9)$$

kde $\alpha_i \geq 0$ zodpovedá členom $i = 1, \dots, n_{NT}$. Všetky nekonvexnosti v pôvodnej funkcii $NT_i(x)$ môžu byť relaxované konvexným kvadratickým členom vzhľadom na dostatočne veľké hodnoty α_j parametrov. Keď suma v predchádzajúcom vzťahu (1.2.9) je určite záporná na celej oblasti $[x^L, x^U]$, $L_\alpha(x)$ je podhodnotiteľom funkcie $NT_i(x)$ (Adjiman a kol., 1998).

1.2.4 Celkový konvexný podhodnotiteľ

Výsledný podhodnotiteľ $L(x)$ k funkcii $J(x)$ nadobúda tvar:

$$\begin{aligned} L(x) = & LT(x) + CT(x) + \sum_{i=1}^{n_{BT}} b_i w_{BTi} + \sum_{i=1}^{n_{FT}} f_i w_{FTi} + \sum_{i=1}^{n_{FTT}} f t_i w_{FTTi} \\ & + \sum_{i=1}^{n_{UT}} \left[UT_i(x_{UTi}^L) + \frac{UT_i(x_{UTi}^U) - UT_i(x_{UTi}^L)}{x_{UTi}^U - x_{UTi}^L} (x_i - x_{UTi}^L) \right] \\ & + \sum_{i=1}^{n_{NT}} \left[NT_i(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j^U - x_j)(x_j^L - x_j) \right] \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

kde α_{ij} zodpovedá i -temu všeobecnému nekonvexnému členu a j -tej premennej a premenné w_{BTi} , w_{FTi} , w_{FTTi} musia spĺňať príslušné obmedzenia (Adjiman a kol., 1998).

1.2.5 Podhodnocovanie obmedzenia typu rovnosti

V prítomnosti konvexných, všeobecne nekonvexných alebo jednorozmerových konkávnych členov musí byť pôvodná rovnosť $h(x) = 0$ prepísaná ako dve nerovnosti s opačnými znamienkami (Adjiman a kol., 1998),

$$\begin{aligned} h(x) &\leq 0 \\ -h(x) &\leq 0 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Tieto dve nerovnosti musia byť podhodnocované nezávisle. Jednorozmerové konkávne členy sa javia v nekonvexnej rovnosti ako konvexné v jednej z dvoch nerovností, kým konvexné členy zostávajú nekonvexné a všeobecne nekonvexné členy zostávajú konvexné (Adjiman a kol., 1998).

1.3 Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov

Nekonvexné členy ľubovoľného typu sú podhodnocované na celej oblasti $[x^L, x^U]$ funkciou $L_\alpha(x)$, ktorá je definovaná ako (Adjiman a kol., 1998):

$$L_\alpha(x) = f(x) + \alpha_i \sum_{i=1}^n (x_i^U - x_i)(x_i^L - x_i) \quad (1.3.1)$$

Pre triedu metód na výpočet minimálnych vlastných čísel je podhodnocovanie preformulované, tak aby sa používala len jedna hodnota α :

$$L_\alpha(x) = f(x) + \alpha \sum_i (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i) \quad (1.3.2)$$

Funkcia $L(x)$ je konvexný podhodnotiteľ účelovej funkcie $f(x)$ ak:

$$\alpha \geq \left(0, -\frac{1}{2} \min_{i, x^L \leq x \leq x^U} \lambda_i(x)\right) \quad (1.3.3)$$

kde λ_i sú vlastné čísla matice $H_f(x)$ a Hessova matica je účelová funkcia $f(x)$ (Adjiman a kol., 1998).

Medzi metódy podhodnocovania všeobecných nekonvexných členov patria analytické a iteračné metódy. Táto trieda metód umožňuje výpočet odlišných α hodnôt pre premenné v podhodnotiteľovi, ktorý má nasledovný tvar (Adjiman a kol., 1998):

$$L_\alpha(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i^U - x_i)(x_i^L - x_i) \quad (1.3.4)$$

Minimalizačný problém, ktorý je uvedený v rovnici (1.3.4) môže byť písaný nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{x, \lambda} \lambda \\ H_f(x) - \lambda I = 0 \\ x \in [x^L, x^U] \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

kde I je jednotková matica (Adjiman a kol., 1998).

Daný problém môže byť nekonvexný, a preto sa na nájdenie najmenšieho vlastného čísla Hessiánu funkcie $f(x)$ na intervale $[x^L, x^U]$ použije intervalový Hessián skonštruovaný na takomto intervale (Adjiman a kol., 1998).

Vlastné čísla matice $H_f(x)$ sú nezáporné, ak je účelová funkcia $f(x)$ konvexná, potom z predchádzajúceho vzťahu (1.3.3) vyplýva, že $\alpha = 0$ a pôvodná funkcia sa nemení (Adjiman a kol., 1998).

Ak máme intervalovú Hessovu maticu $[H_f] \subseteq \{H_f(x), x \in [x^L, x^U]\}$, potom postačujúca podmienka konvexnosti podmodnotiteľa (1.3.5) je daná ako:

$$\alpha \geq \left(0, -\frac{1}{2} \lambda_{\min}([H_f])\right) \quad (1.3.6)$$

kde $\lambda_{\min}$ je minimálna hodnota vlastných čísel intervalovej matice $[H_f]$ (Adjiman a kol., 1998).

Nasledujúce podkapitoly sa zameriavajú na efektívne hľadanie minimálnych vlastných čísel intervalových matíc.

1.3.1 Geršgorinova metóda

Táto metóda je jednoduché rozšírenie Geršgorinovej teórie intervalových matíc. Zatiaľ čo jej výpočtová zložitosť je iba n^2 , hranice, ktoré stanovuje na vlastné čísla sú často voľné (Adjiman a kol., 1998).

Pre reálnu maticu $A = (a_{ij})$ poznáme teóriu, ktorá uvádza, že vlastné čísla sú ohraničené nižšie podľa λ_{min} . Nadobúdajú nasledovný tvar (Adjiman a kol., 1998):

$$\lambda_{min} = \min_i \left(a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) \quad (1.3.7)$$

Pre intervalovú maticu platí nasledovný vzťah (Adjiman a kol., 1998):

$$\lambda_{min} \geq \min_i \left[\underline{a}_{ii} - \sum_{j \neq i} \max(|\underline{a}_{ij}|, |\overline{a}_{ij}|) \right] \quad (1.3.8)$$

1.3.2 Metóda E-matic

Táto metóda je rozšírenie teórií, ktoré formulovali Deif (1991) a Rohn (1996) pre výpočet dolnej hranice všetkých vlastných čísel intervalovej matice. Kým oni získali výrazy pre reálne a imaginárne časti matic, iba reálne časti sú zaujímavé pre symetrické matice, ktoré sa tu uvažujú (Adjiman a kol., 1998).

Intervalová matica $[A]$ s prvkami $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$,

- je polomer matice

$$\Delta A = (\Delta a_{ij}), \text{ ak } \Delta a = \left(\frac{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})}{2} \right) \quad (1.3.9)$$

- je modifikovaný polomer matice

$$\widetilde{\Delta A} = (\widetilde{\Delta a}_{ij}), \text{ keď } \widetilde{\Delta a}_{ij} = 0 \text{ ak } i = j$$

$$\widetilde{\Delta a}_{ij} = \Delta a_{ij}$$

(1.3.10)

- je stred matice

$$A_M = (a_{M,ij}) \text{ ak } a_{M,ij} = \frac{(\overline{a_{ij}} - \underline{a_{ij}})}{2} \quad (1.3.11)$$

- je modifikovaný stred matice

$$\widetilde{A}_M = (\overline{a_{M,ij}}), \text{ keď } \widetilde{a_{M,ij}} = a_{-ij}, \text{ ak } i = j$$

$$\widetilde{a_{M,ij}} = \overline{a_{ij}} \quad (1.3.12)$$

- je vrcholová matica

$$A_v = (a_{v,ij}), \text{ ak } a_{v,ij} = a_{-ij} \text{ alebo } a_{v,ij} = \overline{a_{ij}} \quad (1.3.13)$$

Minimálna hodnota vlastných čísel je vypočítateľná nasledovne :

$$\lambda_{min}(A) = \lambda_{min}(\overline{A_M} + E) - \rho(\widetilde{\Delta A} + |E|) \quad (1.3.14)$$

kde $\rho(M)$ je maximálna absolútna hodnota vlastných čísel a $|E|$ je absolútna hodnota matice uvažovaná po prvkoch, ktorá môže nadobúdať hodnoty (Adjiman a kol., 1998) :

- $E=0$
- $E = diag(\Delta A)$

1.3.3 Mori a Kokame metóda

Mori a Kokame (1994) navrhli použitie dolnej a hornej vrcholovej matice za účelom získať dolnú hranicu minimálnej hodnoty vlastných čísel intervalovej matice (Adjiman a kol., 1998) .

Minimálna hodnota vlastných čísel intervalovej matice je daná ako:

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_{\min}(\underline{A}) - \rho(\bar{A} - \underline{A}) \quad (1.3.15)$$

kde $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ je dolná hranica intervalovej matice ,

$\bar{A} = (\overline{a}_{ij})$ je horná hranica intervalovej matice.

1.3.4 Metóda relaxovaného Hessiánu

Táto metóda sa používa na riešenie dolnej hranice minimálnych vlastných čísel intervalovej Hessovej matice. Použitie nevyhnutnej a dostačujúcej podmienky konvexnosti dokázal Stephens (1997), ohraničenie Hessiánu môže byť definované z hľadiska vlastnosti jeho kvadratickej podoby (Adjiman a kol., 1998) .

Intervalová Hessova matica $[A]$ má nasledovný tvar:

$$[A] = \left(\left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right] \right) \quad (1.3.16)$$

Pre intervalovú maticu $[A]$ platí, že relaxovaný Hessián L (reálna symetrická matica) dáva $x^T L x \leq x^T A x$ pre každé $Ax \in R^n$ a všetky prvky A intervalovej matice $[A]$ (Adjiman a kol., 1998).

Reálna symetrická matica $L(x)$, kde:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \underline{a}_{ii} + \sum_{k \neq i} \frac{\underline{a}_{ik} - \overline{a}_{ik}}{2} & i = j \\ l_{ij} &= \frac{\underline{a}_{ij} + \overline{a}_{ij}}{2} & i \neq j \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

je dolné ohraničenie Hessovej matice $[A]$ (Adjiman a kol., 1998) .

1.3.5 Kharitonova metóda

Kharitonova teória (Kharitonov, 1979) sa využíva na určenie intervalovej polynómovej množiny $P(\lambda)$. Množina je definovaná nasledovne (Adjiman a kol., 1998):

$$P(\lambda) = [a_0^L, a_0^U] + [a_1^L, a_1^U]\lambda + \dots [a_{n-1}^L, a_{n-1}^U]\lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (1.3.18)$$

kde $a_i^L \leq a_i^U, \forall i$.

Polynóm $P_4(\lambda)$ označuje predmet tejto množiny, ktorý obsahuje nasledovné štyri reálne polynómy (Kharitonove polynómy) (Adjiman a kol., 1998) :

$$\begin{aligned} K_1(f, X, \lambda) &= a_0^L + a_1^L \lambda + a_2^U \lambda^2 + a_3^U \lambda^3 + a_4^L \lambda^4 + a_5^L \lambda^5 + a_6^U \lambda^6 + \dots \\ K_2(f, X, \lambda) &= a_0^U + a_1^U \lambda + a_2^L \lambda^2 + a_3^L \lambda^3 + a_4^U \lambda^4 + a_5^U \lambda^5 + a_6^L \lambda^6 + \dots \\ K_3(f, X, \lambda) &= a_0^U + a_1^L \lambda + a_2^L \lambda^2 + a_3^U \lambda^3 + a_4^U \lambda^4 + a_5^L \lambda^5 + a_6^L \lambda^6 + \dots \\ K_4(f, X, \lambda) &= a_0^L + a_1^U \lambda + a_2^U \lambda^2 + a_3^L \lambda^3 + a_4^L \lambda^4 + a_5^U \lambda^5 + a_6^U \lambda^6 + \dots \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Potom $P(\lambda)$ a $P_4(\lambda)$ majú rovnaké λ_{min, Re^+} (Adjiman a kol., 1998) .

Nasledujúci postup potom možno použiť na výpočet dolnej hranice minimálnych vlastných čísel Hessovej matice $H(x)$ (Adjiman a kol., 1998) :

1.) Determinant $H(x) - \lambda I$ (1.3.20)

kde I je jednotková matica.

2.) Determinant $H(x) - \lambda I$ je rovný nule. Riešenie polynómu má podobu:

$$P(x, \lambda) = a_0(x) + a_1(x)\lambda + a_2(x)\lambda^2 + a_3(x)\lambda^3 + \dots \quad (1.3.21)$$

3.) Použitie intervalovej aritmetiky na získanie intervalovej polynómovej množiny

$P(\lambda)$, ktorá obsahuje $P(x, \lambda)$.

4.) Výpočet dolnej hranice minimálnych vlastných čísel Hessiánu $H(x)$.

1.3.6 Hertzova metóda

Táto metóda opisuje nájdenie dolnej hranice minimálnych vlastných čísel intervalovej Hessovej matice alebo najmenšiu reálnu časť koreňov intervalového charakteristického polynómu.

Hertzova metóda predstavuje algoritmus pre výpočet minimálnych vlastných čísel $n \times n$ rozmerových symetrických matíc. Na to, aby sa našlo minimálne vlastné číslo intervalovej matice sa musí zostrojiť 2^{n-1} symetrických vrcholových matíc, kde n je počet riadkov matice (Jury, E. I, 1989).

Matica $[A] = \left([a_{ij}], \overline{a_i} \right)$ musí byť symetrická matica, čiže symetrická intervalová Hessova matica. Potom 2^n sú možné kombinácie pre označenie $x_i x_j$, v ktorom sú zachované znamienka prvkov vektora x (Jury, E. I, 1989).

Vrcholová matica $A_k \in [A]$ je definovaná ako $A_k[a_{ij}^k]$, kde

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= \underline{a_{ij}} \text{ ak } i = j \\ a_{ij}^k &= \underline{a_{ij}} \text{ ak } x_i x_j \geq 0, i \neq j \\ a_{ij}^k &= \overline{a_{ij}} \text{ ak } x_i x_j < 0, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

Potom najmenšie vlastné číslo zo všetkých matíc $\{A_k\}$ je minimálne vlastné číslo vrcholovej matice $[A]$ (Adjiman a kol., 1998).

1.3.7 Váňovaná Geršgorinova metóda

Táto metóda je jednoduché rozšírenie Geršgorinovej teórie intervalových matíc. Používa sa na výpočet odlišných α hodnôt. Pre každý vektor $d > 0$ a symetrickú intervalovú maticu $[A]$ je definovaný vektor α , ktorý sa vypočíta z nasledujúcej rovnice (Adjiman a kol., 1998):

$$\alpha_i = \max \left\{ 0, -\frac{1}{2} \left(\underline{a_{ii}} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{d_j}{d_i} \right) \right\}$$

(1.3.23)

kde $|a|_{ij} = \max \left\{ \left| \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right| \right\}$

Potom pre všetky $A \in [A]$, matica $A_\alpha = A + 2\Delta$ s $\Delta = \text{diag}(\alpha_i)$ je pozitívne semidefinitná matica (Adjiman a kol., 1998).

1.3.8 Metóda H-matice

Daná metóda patrí medzi iteračné metódy. V tejto metóde sa využívajú vlastnosti H-matic a metóda H-matice sa používa na identifikáciu zodpovedajúcej diagonálnej matice Δ pre intervalovú maticu $[A]$ s použitím $G = A + 2\Delta$. Matica Δ je štvorcová matica, ktorá má na diagonále hodnoty α . Modifikovaný stred matice $[G]$ je potom $A_M + \Delta$, kde $\widetilde{A}_M$ je modifikovaný stred matice $[A]$. Podmienky pre pozitívnu definítnosť intervalovej matice $[A] + \Delta$ sú potom (Adjiman a kol., 1998):

1. $\widetilde{A}_M + \Delta$ je pozitívne definitná
2. pre porovnávaciu maticu platí, že matica $(C[A] + 2\Delta)$ je H-matica, kde $(C = \widetilde{A}_M + \Delta)^{-1}$.

Porovnávacia matica $\langle A \rangle$ na intervalovej matici $[A] = \left(\left| \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right| \right)$ je $\langle A \rangle_{ij}$

$$= 0 \text{ ak } i = j \text{ a } 0 \in \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right]$$

$$= \min \left\{ \left| \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right| \right\} \text{ ak } i = j \text{ a } 0 \notin \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right]$$

$$= -|a|_{ij} \text{ ak } i \neq j$$

(1.3.24)

kde $|a|_{ij} = \max \left\{ \left| \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right| \right\}$.

Štvorcová intervalová matica $[A]$ je H-matica, keď porovnávacia matica $\langle A \rangle$ je M-matica. Štvorcová matica A je M-matica, keď všetky nediagonálne prvky sú nepozitívne a existuje reálny pozitívny vektor u (prvky vektora sú reálne čísla), a tak platí: $Au > 0$.

Iteračný postup používa výpočet matice Δ , ktorá zabezpečí vyššie uvedené podmienky (Adjiman a kol., 1998).

1.3.9 Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti

Táto metóda patrí medzi iteračné metódy. Maximálna separačná vzdialenosť je najväčšia vzdialenosť medzi pôvodnou funkciou $f(x)$ a jej podhodnotiteľom $L(x)$ (Adjiman a kol., 1998) .

$$d_{max} = \mu = \max_{x^L \leq x \leq x^U} (f(x) - L(x)) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i^U - x_i^L)^2 \quad (1.3.25)$$

Pomocou optimalizačného algoritmu sa nájdu také prvky matice delta (Δ), ktoré minimalizujú:

$$\min (x^U - x^L)^T \Delta (x^U - x^L) \quad (1.3.26)$$

pričom musí platiť nasledovná podmienka:

$$L + 2\Delta \geq 0 \quad (1.3.27)$$

Pomocou konvexnej optimalizácie, konkrétne pomocou semidefinitného programovania hľadajú prvky diagonálnej matice Δ , ktoré budú maximalizovať separačnú vzdialenosť (Adjiman a kol., 1998) .

2 VZOROVÉ PŘÍKLADY

2.1 Vzorový příklad 1

Na znázornenie α BB algoritmu uvažujeme nekonvexný optimalizačný problém:

$$\begin{aligned}\min_x J(x) &= x_1 + x_2 \\ x_1, x_2 &\in [-2; 2]\end{aligned}\tag{2.1}$$

a jej obmedzenia sú typu nerovnosti:

$$g_1: -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0 \tag{2.2}$$

$$g_2: x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \tag{2.3}$$

$$g_3: x_1 - x_2 - 1 \leq 0 \tag{2.4}$$

$$g_4: -x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \tag{2.5}$$

Úlohou je nájsť globálne minimum účelovej funkcie pomocou α BB algoritmu (Visweswaran a kol., 1990).

Riešenie:

Prvým krokom je rozdelenie jednotlivých členov účelovej funkcie a jej obmedzení podľa typov:

➤ **Účelová funkcia**

x_1 - lineárny člen (LT)

x_2 - lineárny člen (LT)

➤ **Obmedzenia**

$-x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0$ - dva konkávne členy (ATNT)

$x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$ - konvexné členy (CT)

$x_1 - x_2 - 1 \leq 0$ - lineárne členy (LT)

$-x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ - lineárne členy (LT)

Vidíme, že je potrebné podhodnocovať iba prvé obmedzenie, pretože iba toto obmedzenie sa správa ako nekonvexný člen a ostatné ostávajú nezmenené. Podhodnotiteľ nekonvexného člena môže byť vytvorený tromi rôznymi spôsobmi:

➤ **1. spôsob – Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov:**

- Funkcia má tvar: $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe vzťahu (1.2.9)

$$\begin{aligned} L_a(x) &= ATNT(x) + \alpha(x^U - x)(x^L - x) \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + 1 + \alpha[(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Celkový podhodnotiteľ potom podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda tvar:

$$\begin{aligned} L(x) &= L_a(x) + CT(x) + LT(x) \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + 1 + \alpha[(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vo vzťahu (2.7) máme jedinou neznámu a tou je parameter α , ktorý vypočítame nasledovne:

- Je treba poznať Hessovu maticu $H_j(x)$ funkcie $g(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -2x_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = -2 \\ \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= -2x_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -2 \\ \frac{\partial^2 g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$H_j(x) = g_1''(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

⇒ Hessián je negatívne definitívna matica.

- Hodnotu parametra α môžeme vypočítať z nasledovného vzťahu

$$\alpha \geq \left(0, -\frac{1}{2}\lambda_{\min}([H_j])\right) \quad (2.10)$$

- Výpočet vlastných čísel pomocou príkazu v Matlabe: **eig(H)**

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\alpha \geq \left(0, -\frac{1}{2}(-2)\right) = \max(0; 1) \Rightarrow \alpha \geq 1 \quad (2.11)$$

Po dosadení hodnoty parametra α do vzťahu (2.7), celkový podhodnotiteľ funkcie $g_1(x)$ pre $x_1, x_2 \in [-2; 2]$ nadobúda tvar :

$$\begin{aligned} L(x) &= L_a(x) + CT(x) + LT(x) \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + 1 + [(2 - x_1)(-2 - x_1) + (2 - x_2)(-2 - x_2)] \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + 1 - 4 - 2x_1 + 2x_1 + x_1^2 - 4 - 2x_2 + 2x_2 + x_2^2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 + 1 + (x_1^2 + x_2^2 - 8) \\ &= -7 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ďalším krokom je určenie dolnej a hornej hranice riešenia problému, čiže nájdenie lokálneho minima účelovej funkcie a jej hodnoty. Riešenie spočíva v implementácii α BB algoritmu v prostredí MATLAB a toto sa používa vo vzorových príkladoch.

Spustením α BB algoritmu dostávame nasledovné hodnoty:

CPU = 0.1092
P_OPT = -1.4142
-1.4142
JU = -2.8284
ITERACIA = 0

kde **cpu** je čas výpočtu v sekundách;

p_opt je optimálna hodnota optimalizovaných premenných;

Ju je nájdené globálne optimum účelovej funkcie;

iteracia je počet iterácií, za ktoré algoritmus skonvergoval ku globálnemu optimu.

Dané označenie je anologické aj pri ďalších dvoch spôsoboch.

➤ **2. spôsob – Podhodnocovanie jednorozmerových konkávných členov:**

- Funkcia má tvar: $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe vzťahu (1.2.8)

$$UT(x^L) + \frac{UT(x^U) - UT(x^L)}{x^U - x^L} (x - x^L)$$

Celkový podhodnotiteľ potom podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda nasledovný tvar:

$$L(x) = L_a(x) + CT(x) + LT(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$$

$$\text{kde } x_1 = -(x_1^L)^2 + \frac{-(x_1^U)^2 - (x_1^L)^2}{x_1^U - x_1^L} (x_1 - x_1^L)$$

$$x_2 = -(x_2^L)^2 + \frac{-(x_2^U)^2 - (x_2^L)^2}{x_2^U - x_2^L} (x_2 - x_2^L)$$

potom

$$\begin{aligned} L(x) &= -(x_1^L)^2 + \frac{-(x_1^U)^2 - (x_1^L)^2}{x_1^U - x_1^L} (x_1 - x_1^L) - (x_2^L)^2 + \frac{-(x_2^U)^2 - (x_2^L)^2}{x_2^U - x_2^L} (x_2 - x_2^L) + 1 \\ &= -(-2)^2 + \frac{-(2)^2 - (-2)^2}{2 - (-2)} (x_1 - (-2)) - (-2)^2 + \frac{-(2)^2 - (-2)^2}{2 - (-2)} (x_2 - (-2)) + 1 \\ &= -17 - 2(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Riešenie získané pomocou α BB algoritmu v prostredí MATLAB:

```
CPU = 0.0780
P_OPT = -1.4142
      -1.4142
JU = -2.8284
ITERACIA = 0
```

➤ **3. spôsob - Podhodnocovanie bilineárnych členov:**

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe vzťahov (1.2.4) až (1.2.7), čiže k celkovému podhodnotiteľovi sa pridajú štyri lineárne obmedzenia typu nerovnosti:

- pre $x_1 \in \langle -2; 2 \rangle$

$$\begin{aligned}
 w_1 &\geq -x_1^U x_1 - x_1 x_1^L + x_1^U x_1^L \\
 w_1 &\geq -x_1^L x_1 - x_1 x_1^U + x_1^L x_1^U \\
 w_1 &\leq -x_1^U x_1 - x_1 x_1^U - x_1^U x_1^U \\
 w_1 &\leq -x_1^L x_1 - x_1 x_1^L - x_1^L x_1^L
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

- pre $x_2 \in \langle -2; 2 \rangle$

$$\begin{aligned}
 w_2 &\geq -x_2^U x_2 - x_2 x_2^L + x_2^U x_2^L \\
 w_2 &\geq -x_2^L x_2 - x_2 x_2^U + x_2^L x_2^U \\
 w_2 &\leq -x_2^U x_2 - x_2 x_2^U - x_2^U x_2^U \\
 w_2 &\leq -x_2^L x_2 - x_2 x_2^L - x_2^L x_2^L
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Celkový podhodnotiteľ potom podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda nasledovný tvar:

$$L(x) = L_a(x) + CT(x) + LT(x) = w_1 + w_2 + 1 \quad (2.16)$$

Výpočet lokálneho minima pomocou α BB algoritmu v prostredí MATLAB:

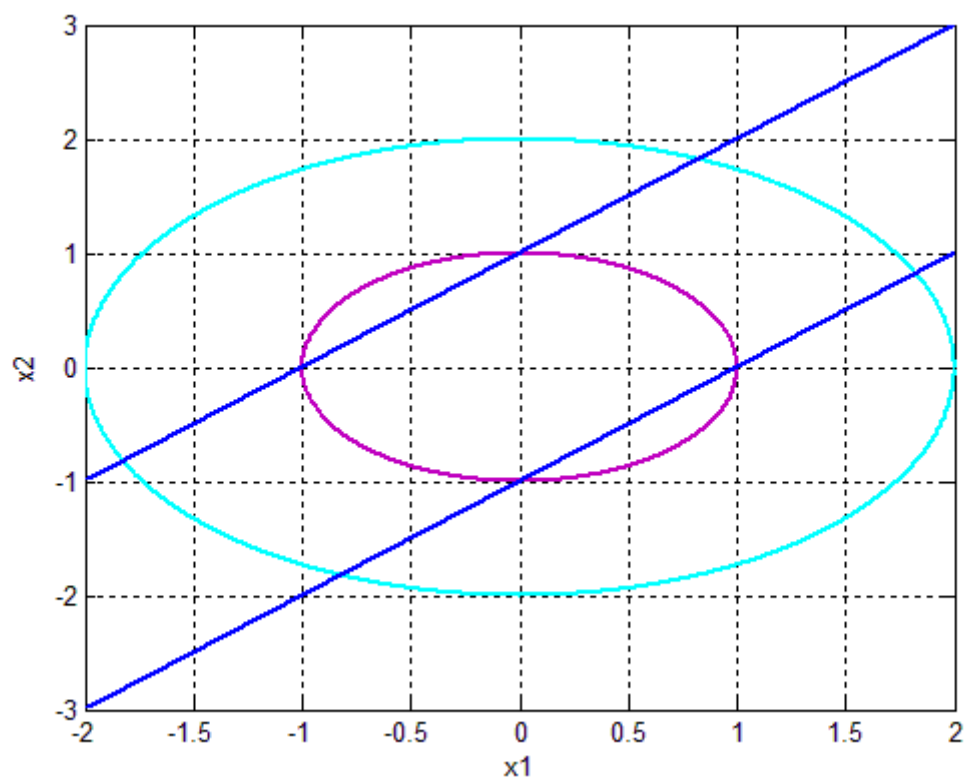
CPU = 0.1404
P_OPT = -1.4142
-1.4142
JU = -2.8284
ITERACIA = 1

Matematický zápis globálneho minima účelovej funkcie:

$$\min J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \min J(-1, 4142; -1, 4142) = -2, 8284$$

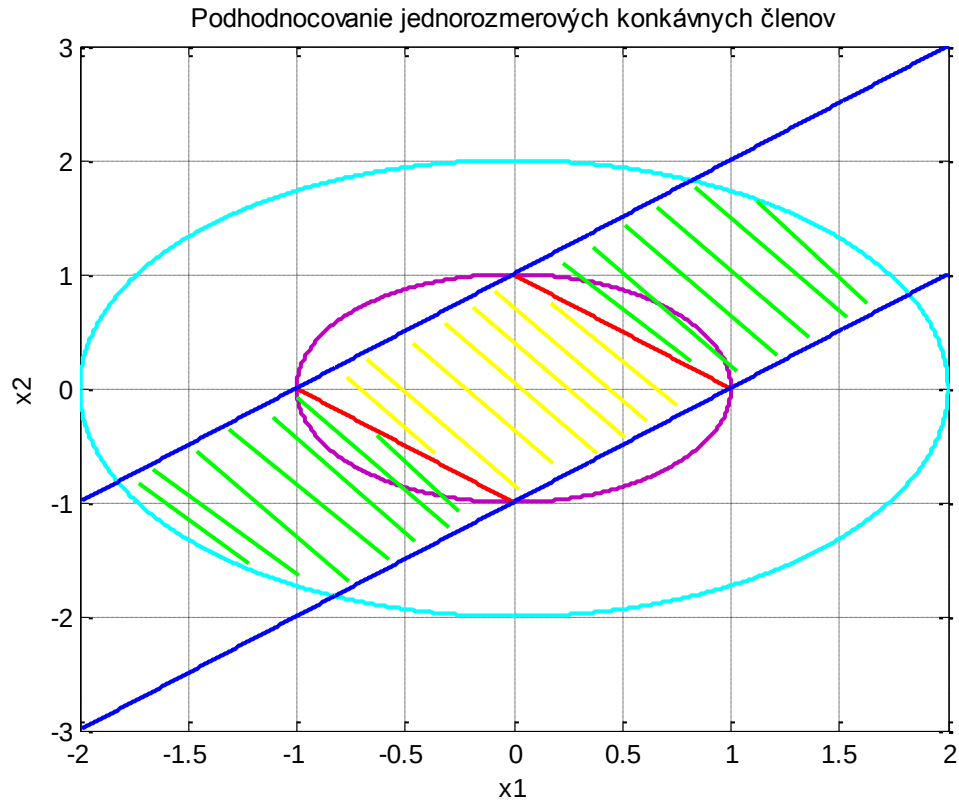
Ako môžeme vidieť z riešenia, tak pri rôznom podhodnocovaní nekonvexných členov je rozdielny čas výpočtu. Najvýhodnejšie je použiť podhodnocovanie jednorozmerových konvexných členov, pretože pri tejto metóde je najkratší čas výpočtu a to v dôsledku najmenšieho počtu obmedzení.

Globálne optimum bolo nájdené v prvých dvoch metódach po nulte iterácii a v poslednej po prvej iterácii (delení intervalu).



Obr. 1 Obmedzenia pôvodného nekonvexného problému

Na Obr. 1 sú znázornené obmedzenia pôvodného nekonvexného problému, čiže naša dovolená oblasť, ktorú sme podhodnocovali.



Obr. 2 Konvexifikovaná dovolená oblasť

kde tyrkysovou farbou je znázornené obmedzenie typu nerovnosti vyjadrujúci

vzťah (2.2);

fialovou farbou je znázornená dovolená oblasť, ktorú vymedzuje obmedzenie typu nerovnosti podľa vzťahu (2.3);

modré priamky vyjadrujú vzťah (2.4) a (2.5);

červené priamky vyjadrujú celkového podhodnotiteľa jednorozmerových konkávnych členov.

Podhodnocované je obmedzenie typu nerovnosti (2.6), pretože účelová funkcia je lineárna. Na Obr. 2 sú zobrazené podhodnotitele nekonvexného obmedzenia po prvom vetvení intervalu x_1 . Z obr. 2 vidíme, že v prvej iterácii bude dovolený (konvexifikovaný) priestor vyznačený zelenou a žltou farbou. V druhej iterácii je dovolený priestor vyznačený zelenou farbou, čiže algoritmus alphaBB rozdelí interval x_1 na intervaly $[-2,0]$ a $[0,2]$.

2.2 Vzorový príklad 2

V tejto kapitole sa zaoberáme príkladom dvojrozmernej optimalizácie v prítomnosti explicitných obmedzení na optimalizačné premenné x a y .

Účelová funkcia má tvar:

$$\min_x f = \cos x \sin y - \frac{x}{y^2+1} \quad (2.17)$$

$$x \in [-1; 2]$$

$$y \in [-1; 1]$$

Riešenie spočíva v nájdení globálneho minima účelovej funkcie pomocou α BB algoritmu využitím metód, ktoré sú opísané teoreticky v tejto práci (Adjiman a kol., 1998).

Na začiatok je potrebné urobiť analýzu jednotlivých členov účelovej funkcie:

➤ **Účelová funkcia**

$\cos x \sin y$ - nekonvexné členy (ATNT)

$\frac{x}{y^2+1}$ - nekonvexné členy (ATNT)

Z analýzy jednotlivých členov je zrejmé, že je treba podhodnocovať obidva členy účelovej funkcie, pretože sa správa ako nekonvexný člen. Podhodnotiteľ nekonvexného člena je vytvorený nasledovným spôsobom :

➤ **Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov pre prípad použitia metód na výpočet jednej hodnoty α :**

- Funkcia má tvar: $f(x) = \cos x \sin y - \frac{x}{y^2+1}$

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe už spomínaného vzťahu (1.3.2) :

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha}(x) &= ATNT(x) + \alpha \sum_i (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i) \\
 &= \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1} + \alpha [(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Celkový podhodnotiteľ potom podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda tvar:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= L_a(x) + CT(x) + LT(x) \\
 &= \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1} + \alpha [(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

➤ **Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov pre prípad použitia metód na výpočet odlišných hodnôt α :**

- Funkcia má tvar: $f(x) = \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1}$

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe vzťahu (1.3.4) :

$$\begin{aligned}
 L_a(x) &= ATNT(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i^U - x_i)(x_i^L - x_i) \\
 &= \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1} + \alpha_1 [(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1)] + \alpha_2 [(x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Celkový podhodnotiteľ podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= L_a(x) + CT(x) + LT(x) \\
 &= \cos x \sin y - \frac{x}{y^2 + 1} + \alpha_1 [(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1)] + \alpha_2 [(x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Vo vzťahu (2.20) a (2.21) sú dve neznáme a to je parameter α_1 a α_2 , ktoré vypočítame nasledovne:

- Potrebujeme poznať Hessovu maticu $H_f(x)$ funkcie $f(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= -\sin x \sin y - \frac{1}{y^2 + 1} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= -\cos x \sin y \\
\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -\cos x \cos y + \frac{2xy}{(y^2 + 1)^2} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= -\cos x \sin y + \frac{2x(y^2 + 1)^2 - 8xy^2(y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^4} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= -\sin x \cos y + \frac{2y}{(y^2 + 1)^2} \\
\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= -\sin x \cos y + \frac{2y}{(y^2 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos x \sin y & -\sin x \cos y + \frac{2y}{(y^2 + 1)^2} \\ -\sin x \cos y + \frac{2y}{(y^2 + 1)^2} & -\cos x \sin y + \frac{2x(y^2 + 1)^2 - 8xy^2(y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^4} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

- Vyčíslená Hessova matica :

$$H_f(x, y) \subseteq [H_f] = \begin{pmatrix} [-0,84148 & 0,84148] & [-3,00000 & 2,84148] \\ [-3,00000 & 2,84148] & [-40,84148 & 32,84148] \end{pmatrix}$$

- Hodnotu parametrov α_1, α_2 môžeme vypočítať z nasledovného vzťahu

$$\alpha_i \geq \left(0, -\frac{1}{2} \lambda_{\min}([H_j])\right) \tag{2.24}$$

Na výpočet $\lambda_{\min}([H_j])$ resp. α_i sa používajú metódy opísané teoreticky vyššie.

Ďalším krokom je nájdenie globálneho optima. Riešenie spočíva v implementácii α BB algoritmu v prostredí MATLAB pomocou metód, ktoré sú opísané v tejto práci.

Spustením α BB algoritmu dostávame nasledovné hodnoty:

	CPU	P_OPT	JU	ITERACIA
Geršgorinova metóda	35.9738	2.0000, 0.1058	-2.0218	20
Metóda E-matice ($E = 0$)	34.2890	2.0000, 0.1058	-2.0218	20
Metóda E-matice ($E = \text{diag}(\Delta A)$)	39.9831	2.0000, 0.1058	-2.0218	21
Mori a Kokame metóda	51.7143	2.0000, 0.1058	-2.0218	30
Metóda relaxovaného Hessiánu	33.6806	2.0000, 0.1058	-2.0218	20
Kharitonova metóda	103.6159	2.0000, 0.1058	-2.0218	20
Hertzova metóda	33.0722	2.0000, 0.1058	-2.0218	19

Tab. 1 Výsledky pre vzorový príklad 2 získané pomocou α BB algoritmu použitím metód na výpočet jednej α hodnoty

kde **cpu** je čas výpočtu v sekundách;

p_opt je optimálna hodnota optimalizovaných premenných;

Ju je nájdené globálne optimum účelovej funkcie;

iteracia je počet iterácií, za ktoré algoritmus skonvergoval ku globálnemu optimu.

Dané označenie je analogické aj pri ďalších tabuľkách s výsledkami.

V Tab. 1 vidíme hodnoty, ktoré sme získali pomocou algoritmu α BB použitím metód na výpočet jednej hodnoty parametra α . Zo získaných výsledkov môžeme usúdiť, že najkratší čas výpočtu má Hertzova metóda a najdlhšie konverguje ku globálnemu optimu Kharitonova metóda. Najnižší počet iterácií sa dosiahne opäť pri Hertzovej metóde, pri Mori a Kokame metóde konvergencia trvala za najväčšieho počtu iterácií, a to konkrétne sa približovala k požadovanému výsledku v priebehu 30 iterácií.

	CPU	P_OPT	JU	ITERACIA
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	12,1681	2,0000 0,1058	-2,0218	15
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	11,9653	2,0000 0,1058	-2,0218	15
Metóda H-matice	603,5055	2,0000 0,1058	-2,0218	27
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	25,5374	2,0000 0,1058	-2,0218	15

Tab. 2 Výsledky pre vzorový príklad 2 získané pomocou α BB algoritmu použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt

V Tab. 2 sme získali výsledky pomocou α BB algoritmu použitím metód na výpočet odlišných hodnôt parametra α v prostredí MATLAB. Ako môžeme vidieť, najkratší čas výpočtu dosiahla Váhová Geršgorinova metóda pre prípad $d_i = x_i^U - x_i^L$ a najdlhšie sa ku globálnemu optimu približovala metóda H-matice, o čom svedčí aj najväčší počet iterácií.

Matematický zápis globálneho minima účelovej funkcie:

$$\min f(x_1, x_2) = \min J(2; 0.1058) = -2,0218$$

Ako môžeme vidieť z riešenia, tak pri rôznych metódach na nájdenie globálneho minima je rozdielny čas výpočtu. Najvýhodnejšie je použiť metódu, kde je najkratší čas výpočtu, čiže konkrétne Váhovanú Geršgorinovu metódu pre prípad $(d_i = x_i^U - x_i^L)$.

Aplikácia metód podhodnocovania všeobecných nekonvexných členov je zhrnutá v Tab. 3 a v Tab. 4. Výpočet minimálnych vlastných čísel funkcie zobrazuje Tab. 3, kde sme použili metódy na výpočet jednej alfa hodnoty. Výsledky v Tab. 4 zobrazujú použitie metód na výpočet odlišných alfa hodnôt, čo je veľmi účinný spôsob ako znížiť počet iterácií a maximálnu separačnú vzdialenosť medzi funkciou f a jej podhodnotiteľom.

METÓDY	HODNOTA α
Geršgorinova metóda	21,9208
Metóda E-matice pre prípad $E = 0$	21,8812
Metóda E-matice pre prípad $E = \text{diag}(\Delta A)$	21,8812
Mori a Kokame metóda	57,6095
Metóda relaxovaného Hessiánu	21,8812
Kharitonova metóda	21,3493
Hertzova metóda	20,5326

Tab. 3 Výsledky pre vzorový príklad 2 použitím metód na výpočet jednej α hodnoty

Z Tab. 3 vidíme, že všetky metódy majú približne rovnaké alfa hodnoty, okrem Mori a Kokame metódy, čo môže byť podmienené vyšším počtom iterácií ako môžeme vidieť v Tab. 2.

METÓDY	HODNOTA α
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	1,9207 21,9207
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	1,4207 22,6707
Metóda H-matice	21,8812 21,8812
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	1,9075 21,9406

Tab. 4 Výsledky pre vzorový príklad 2 použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt

Ako môžeme vidieť z výsledkov v Tab. 4, je len jediná metóda na výpočet odlišných hodnôt parametra α , ktorá má obidve alfa hodnoty rovnaké a to je metóda H-matice.

2.3 Vzorový príklad 3

Účelová funkcia má nasledovný tvar (Floudas a kol., 1990):

$$\min_x f = -x_1 - x_2 \quad (2.25)$$

$$x_1 \in [0; 3]$$

$$x_2 \in [0; 4]$$

Cieľom je nájsť globálne minimum účelovej funkcie pomocou α BB algoritmu využitím metód konvexného podhodnocovania nekonvexnej funkcie.

Najprv spravíme analýzu jednotlivých členov účelovej funkcie a jej obmedzení:

➤ **Účelová funkcia**

x_1 - lineárny člen (LT)

x_2 - lineárny člen (LT)

➤ **Obmedzenia**

$x_2 - 2x_1^4 + 8x_1^3 - 8x_1^2 - 2 \leq 0$ - nekonvexné členy (ATNT)

$x_2 - 4x_1^4 + 32x_1^3 - 88x_1^2 + 96x_1 - 36 \leq 0$ - nekonvexné členy (ATNT)

Z analýzy jednotlivých členov je zrejmé, že je treba podhodnocovať obidve obmedzenia, pretože sa správajú ako nekonvexné členy. Podhodnotiteľ nekonvexného člena vytvoríme nasledovným spôsobom :

➤ **Podhodnocovanie všeobecných nekonvexných členov:**

- Funkcie majú tvar:

$$g_1(x) = x_2 - 2x_1^4 + 8x_1^3 - 8x_1^2 - 2$$

$$g_2(x) = x_2 - 4x_1^4 + 32x_1^3 - 88x_1^2 + 96x_1 - 36$$

Podhodnotiteľ bol vytvorený na základe už spomínaného vzťahu (1.3.2) :

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha_1}(x) &= ATNT(x) + \alpha \sum_i (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i) \\
 &= x_2 - 2x_1^4 + 8x_1^3 - 8x_1^2 - 2 + \alpha_1[(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + \\
 &\quad + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha_2}(x) &= ATNT(x) + \alpha \sum_i (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i) \\
 &= x_2 - 4x_1^4 + 32x_1^3 - 88x_1^2 + 96x_1 - 36 + \alpha_2[(x_1^U - x_1)(x_1^L - x_1) + \\
 &\quad + (x_2^U - x_2)(x_2^L - x_2)]
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Celkový podhodnotiteľ podľa vzťahu (1.2.10) nadobúda nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad L(x) &= L_a(x) + CT(x) + LT(x) = -x_1 - x_2 + L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Vo vzťahoch (2.26) máme neznámu parameter α_1 a vo vzťahu (2.27) parameter α_2 .

- Potrebujeme poznať Hessovu maticu $H_{g_1}(x)$ funkcie $g_1(x)$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -8x_1^3 + 24x_1^2 - 16x_1$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 24x_1^2 - 48x_1 - 16$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad (2.29)$$

$$H_{g_1}(x, y) = \begin{bmatrix} 24x_1^2 - 48x_1 - 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

- Potrebujeme poznať Hessovu maticu $H_{g_2}(x)$ funkcie $g_2(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= -16x_1^3 + 96x_1^2 - 176x_1 + 96 \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= -48x_1^2 + 192x_1 - 176 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 1 \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$H_{g_2}(x, y) = \begin{bmatrix} -48x_1^2 + 192x_1 - 176 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Cieľom je nájsť dolnú a hornú hranicu účelovej funkcie a jej hodnotu. Keďže Hessova matica v prípade prvého aj druhého obmedzenia má iba jeden nenulový prvok, tak skoro všetky metódy dávajú rovnakú alfa hodnotu. Výsledky pre vzorový príklad 3 použitím metód, ktoré sú teoreticky opísané vyššie v tejto práci sú nasledovné:

➤ presnosť $\varepsilon = 10^{-1}$

	CPU	P_OPT	JU	ITERACIA
Geršgorinova metóda	164.0975	2.3295, 3.1785	-5.5080	17
Metóda E-matice ($E = 0$)	163.7542	2.3295, 3.1785	-5.5080	17
Metóda E-matice ($E = \text{diag}(\Delta A)$)	116.7667	2.3295, 3.1785	-5.5080	17
Mori a Kokame metóda	453.7445	2.3295, 3.1785	-5.5080	25
Metóda relaxovaného Hessiánu	164.1911	2.3295, 3.1785	-5.5080	17
Hertzova metóda	168.3875	2.3295, 3.1785	-5.5080	17

Tab. 5 Výsledky pre vzorový príklad 3 použitím metód na výpočet jednej α hodnoty

	CPU	P_OPT	JU	ITERACIA
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	162.0226	2.3295 3.1785	-5.5080	17
Váhovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	199.1197	2.3295 3.1785	-5.5080	17
Metóda H-matice	3.1773e+003	2.3295 3.1785	-5.5080	17
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	1.6558e+003	2.3295 3.1785	-5.5080	17

Tab. 6 Výsledky pre vzorový príklad 3 použitím metód na výpočet odlišných α hodnôt

Tab. 5 a Tab. 6 zobrazuje výsledky pre prvú presnosť, avšak pre ďalšie zvolené presnosti sú hodnoty globálneho optima rovnaké, mení sa len čas výpočtu a počet iterácií. V danom príklade algoritmus alphaBB počíta s relatívnou presnosťou.

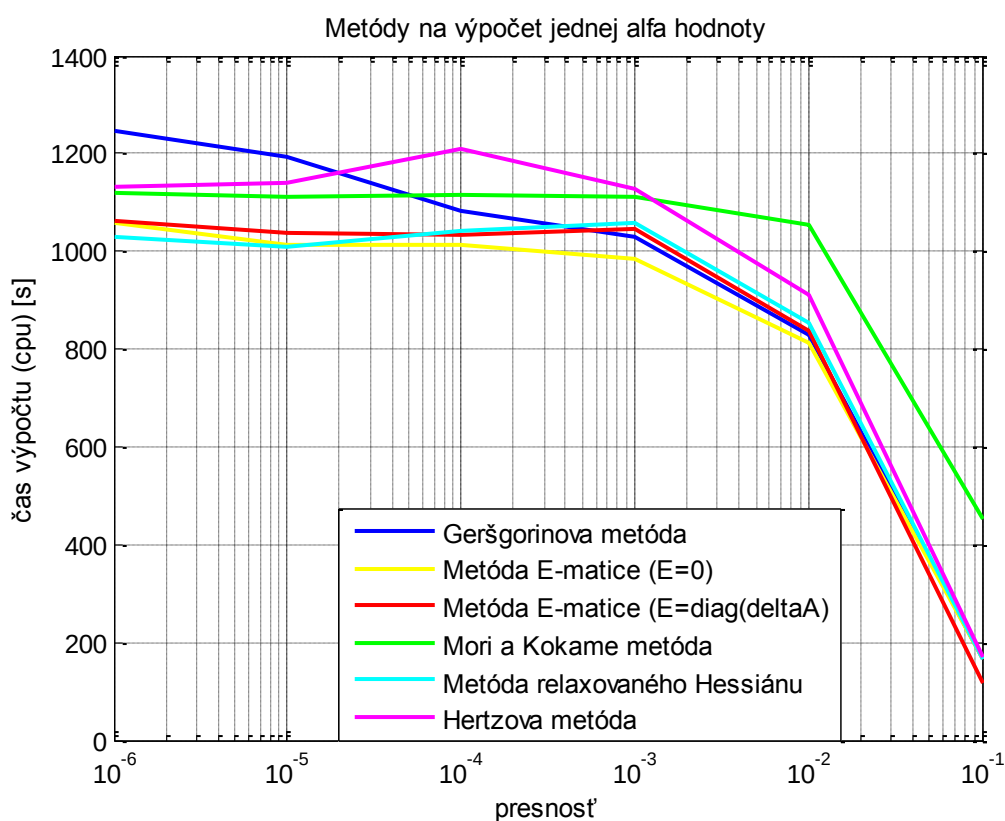
	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$
Geršgorinova metóda	164.0975	827.5853	1.0314e+003
Metóda E-matice ($E = 0$)	163.7542	811.6420	986.2695
Metóda E-matice ($E = \text{diag}(\Delta A)$)	116.7667	838.7082	1.0467e+003
Mori a Kokame metóda	453.7445	1.0531e+003	1.1118e+003
Metóda relaxovaného Hessiánu	164.1911	851.7967	1.0579e+003
Hertzova metóda	168.3875	912.6215	1.1296e+003
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	162.0226	818.0068	1.1033e+003
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	199.1197	1.0292e+003	1.2815e+003
Metóda H-matice	3.1773e+003	1.8520e+004	2.5919e+004
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	1.6558e+003	1.0379e+004	1.3608e+004

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
Geršgorinova metóda	1.0827e+003	1.1932e+003	1.2471e+003
Metóda E-matice ($E = 0$)	1.0146e+003	1.0148e+003	1.0581e+003
Metóda E-matice ($E = \text{diag}(\Delta A)$)	1.0353e+003	1.0364e+003	1.0604e+003
Mori a Kokame metóda	1.1139e+003	1.1123e+003	1.1209e+003
Metóda relaxovaného Hessiánu	1.0401e+003	1.0087e+003	1.0284e+003
Hertzova metóda	1.2108e+003	1.1385e+003	1.1307e+003
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	1.0360e+003	1.0573e+003	1.0701e+003
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	1.2930e+003	1.2610e+003	1.2605e+003
Metóda H-matice	2.2872e+004	2.2878e+004	2.6217e+004
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	1.2974e+004	1.2735e+004	1.2726e+004

Tab. 7 Porovnanie času výpočtu daných metód pri rôznej zvolenej presnosti

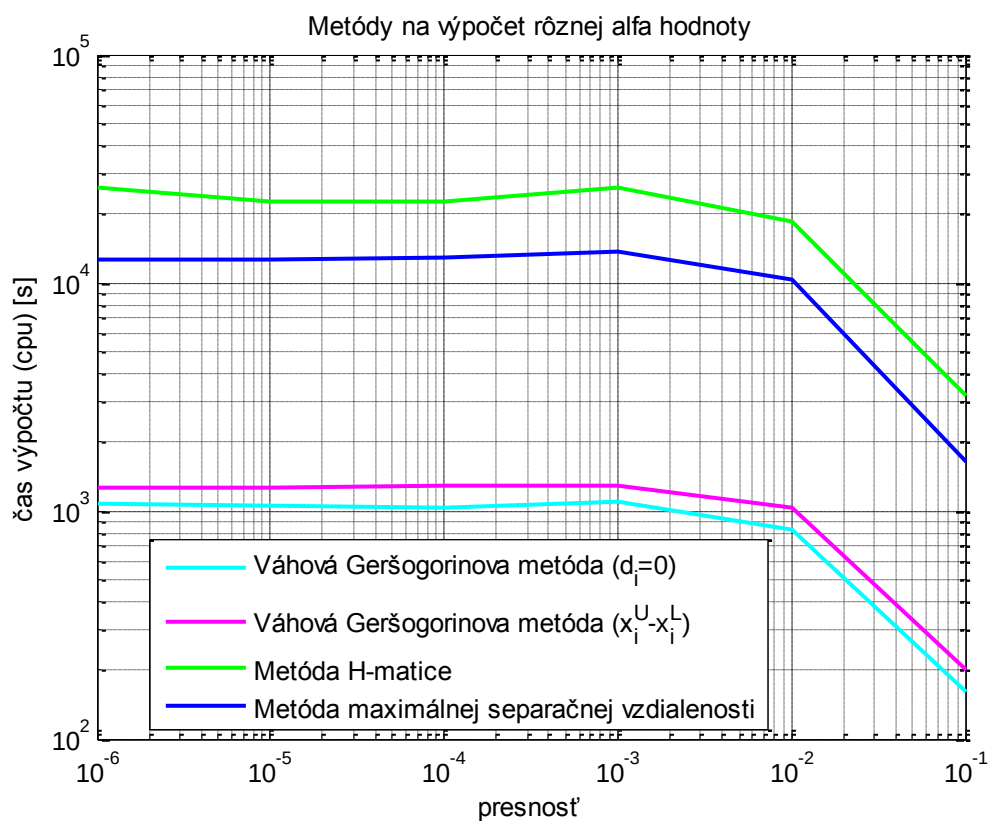
V Tab. 7 sú zobrazené všetky metódy podhodnocovania všeobecných nekonvexných členov, čo môžeme vidieť v riadkoch tabuľky a v stĺpcoch porovnávame čas výpočtu pre rôzne zvolené presnosti. Ako si môžeme všimnúť, tak z dosiahnutých výsledkov je jasné, že najlepší čas výpočtu pri rôzne zvolenej presnosti dosiahne metóda E-matice pre prípad $E = \text{diag}(\Delta A)$, a to konkrétne pre presnosť $\varepsilon = 10^{-1}$. Najdlhší čas výpočtu dosahuje metóda H-matice pri presnosti $\varepsilon = 10^{-6}$, pretože patrí medzi iteračné metódy. Z tohto dôvodu trvá dlhšie, kým algoritmus skonverguje ku globálnemu optimu.

Zaujímavé je, že pri každej tolerancii nájdeme rovnaké globálne optimum. To znamená, že akonáhle je dovolený priestor premenných x_1 a x_2 dostatočne zredukovaný, je možné nájsť skutočne globálne optimum aj s veľmi malou požadovanou presnosťou (veľkou hodnotou tolerancie).



Obr. 3 Porovnanie metód na výpočet jednej alfa hodnoty pri rôzne zvolenej presnosti

Obr. 3 znázorňuje grafické porovnanie času výpočtu metód na výpočet jednej α hodnoty. Ako môžeme vidieť, tak priebeh metódy E-matice pre prípad $E = 0$ a $E = \text{diag}(\Delta A)$, metódy relaxovaného Hessiánu je približne rovnaký.



Obr. 4 Porovnanie metód na výpočet rôznej alfa hodnoty pri rôzne zvolenej presnosti

Z obr. 4 vidíme porovnanie času výpočtu metód na výpočet rôznej alfa hodnoty pri rôzne zvolenej presnosti.

	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
Geršgorinova metóda	17	55	66	68	72	76
Metóda E-matice ($E = 0$)	17	55	66	68	72	76
Metóda E-matice ($E = \text{diag}(\Delta A)$)	17	55	66	68	72	76
Mori a Kokame metóda	25	70	80	84	88	76
Metóda relaxovaného Hessiánu	17	55	66	68	72	
Hertzova metóda	17	55	66	68	72	76
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = 0$)	17	55	66	68	72	76
Váňovaná Geršgorinova metóda ($d_i = x_i^U - x_i^L$)	17	55	66	68	72	76
Metóda H-matice	17	55	66	68	72	76
Metóda maximálnej separačnej vzdialenosti	17	55	66	68	72	76

Tab. 8 Porovnanie počtu iterácií daných metód pri rôznej zvolenej presnosti

V Tab. 8 sú zobrazené v riadkoch metódy pre výpočet jednej alfa hodnoty a taktiež aj metódy pre výpočet odlišných alfa hodnôt a stĺpce reprezentujú počet iterácií. Vidíme, že všetky metódy, okrem metódy Mori a Kokame skonvergujú ku globálnemu optimu za rovnaký počet iterácií pri rôznej hodnote presnosti.

ZÁVER

Cieľom diplomového projektu je implementácia algoritmov na nájdenie minimálnych vlastných čísel intervalových matíc pre riešenie problémov globálnej optimalizácie. Ďalej práca obsahuje knižnicu funkcií na riešenie istej skupiny matematických problémov.

Metódy globálnej optimalizácie je možné rozdeliť na dve veľké skupiny, a to na deterministické metódy a stochastické metódy. Riešenie deterministickej metódy, a to konkrétne metódy vetiev a hraníc je uvedené v kapitole 2, ako aj použitie daných algoritmov. Algoritmy slúžia na hľadanie minimálnych vlastných čísel, kde potrebujeme poznať jednu hodnotu alfy a ďalšie slúžia na hľadanie odlišných α hodnôt. Správna funkčnosť algoritmov a vlastnosti danej triedy iteračných metód boli otestované na konkrétnych príkladoch.

Vo vzorovom príklade číslo 1 sme podhodnocovali obmedzenie typu nerovnosti, pretože účelová funkcia je lineárna. Podhodnotiteľ nekonvexného člena bol vytvorený troma rôznymi spôsobmi.

Vo vzorovom príklade číslo 2 sme otestovali funkčnosť metód podhodnocovania všeobecných nekonvexných členov, ale vo vzorovom príklade číslo 3 sme otestovali dané algoritmy pre viaceré presnosti približovania sa ku globálnemu optimu a to konkrétne pre šesť presností.

Vzorové príklady slúžia na ilustráciu použitia metódy vetiev a hraníc a otestovanie daných funkcií.

Pokračovaním tejto práce môže byť aplikácia existujúcich a vývoj nových stratégií vetvenia. Proces vetvenia v alphaBB algoritme má vplyv na rýchlosť konvergenzie, keďže podhodnotiteľ často závisí od hraníc premennej (Repčíková, 2009).

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

REPČÍKOVÁ, I. 2009. *Úvod do globálnej optimalizácie, Semestrálny projekt II.* Bratislava: FCHPT STU v Bratislave, 2009. 21s.

ADJIMAN, C.S., ANDROULAKIS, I.P., FLOUDAS, C. A., NEUMAIER, A., 1998. *A global optimization method, α BB, for general twice-differentiable NLPs - II. Implementation and computational results.* Computers and Chemical Engineering. 22, 1139-1179.

HIRMAJER, T. 2001. *Solving Problems of Static Optimization, Bakalárska práca.* Bratislava: FCHPT STU v Bratislave. 2001. 47s.

PROKOP, R. 1985. *Teória systémov a Optimalizácia*, 1.vyd. Bratislava: SVŠT , 1985. 79 s. ISBN 85-314-85.

PAULEN R. 2010. *Global Dynamic Optimization of Processes:* FCHPT STU v Bratislave. 2100. 66s.

DEIF, A.S. 1991. *The interval eigenvalue problem.* Z. Angew. Math. Mech 71(1), 61-64.

ROHN, J. 1996. *Bounds on Eigenvalue of Interval Matrices.* Technical Report no. 688, Institute of Computer Science, Academy of Science v Prahe.

MORI, T., KOKAME, H. 1994. *Eigenvalue bounds for a certain class of interval matrices.* IEICE Trans. Fundamentals E77-A(10), 1707-1709.

STEPHENS C. 1997. *Interval and bounding Hessians*. In Bomze I.M et al.(Eds.), *Developments in Global Optimization*, strany 109-199. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht.

KHARITONOV, V.L., *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*. *Differential Equations* 78, 1483-1485.

Jury, E. I. 1989. *Robustness of discrete systems: A review*: Jerusalem, Israel, Mar. 1989.

VISWESWARAN V., FLOUDAS C.A. 1990. *A global optimization algorithm (GOP) for certain classes of nonconvex NLPs-II. Application of theory and test problems*. *Computers and Chemical Engineering*. 14(12):1419-1434.

FLOUDAS C.A., PARDALOS P.M. 1990. *A collection of Test Problems for Constrained Global Optimization Algorithms*, volume 455 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag.

PRÍLOHY

Na priloženom CD sa nachádzajú metódy na výpočet jednej alfa hodnoty a metódy na výpočet rôznej alfa hodnoty. Dané programy pozostávajú zo súborov typu m-file a spúšťajú sa v prostredí MATLAB. Ďalej CD obsahuje všetky vzorové príklady na nájdenie globálneho optima.