

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-58733

Robustné riadenie

Diplomová práca

2015

Bc. Peter Virgul'a

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta chemickej a potravinárskej technológie

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-58733

Robustné riadenie

Diplomová práca

Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve

Číslo študijného odboru: 2621

Názov študijného odboru: 5.2.14. automatizácia

Školiace pracovisko: Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Vedúci záverečnej práce: Ing. Anna Vasičkaninová, PhD.

Bratislava 2015

Bc. Peter Virgul'a



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent: **Bc. Peter Virgul'a**
ID študenta: 58733
Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor: 5.2.14. automatizácia
Vedúca práce: Ing. Anna Vasičkaninová, PhD.

Názov práce: **Robustné riadenie**

Špecifikácia zadania:

Projekt je zameraný na návrh robustných regulátorov pre riadenie vybraného laboratórneho procesu. Vhodné riešenia sa vyberú na základe literárnej rešerše.

Úlohy:

Literárna rešerša zameraná na prehľad metód pre návrh robustných regulátorov.

Návrh regulátorov pre riadenie rôznych typov sústav a ich simulačné overenie.

Návrh a implementácia robustného riadenia pre vybraný laboratórny proces.

Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov.

Rozsah práce: 60 strán

Zoznam odbornej literatúry:

1. Veselý, V. – Harsányi, L. *Robustné riadenie dynamických systémov*. Bratislava: STU v Bratislave, 2008. 126 s. ISBN 978-80-227-2801-0.

Riešenie zadania práce od: 16. 02. 2015

Dátum odovzdania práce: 24. 05. 2015

L. S.

Bc. Peter Virgul'a
študent

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne, pod odborným vedením vedúcej práce Ing. Anny Vasičkaninovej, PhD. a použil som literatúru, ktorú uvádzam v zozname.

V Trnave, 17. 5. 2015

.....

Pod'akovanie

Ďakujem mojej vedúcej práce Ing. Anne Vasičkaninovej, PhD., za jej odborné vedenie, metodickú pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytla pri vypracovávaní diplomovej práce. Zároveň sa chcem poďakovať aj doktorandom a pracovníkom Ústavu informatizácie, automatizácie a matematiky FCHPT.

Abstrakt

Obsahom diplomovej práce je aplikácia vybraných metód syntézy robustných regulátorov, ktoré by zabezpečili robustnosť spätnoväzbového systému a overenie robustnej stability a kvality uzavretého regulačného obvodu s navrhnutými regulátormi. Prvá časť je stručným úvodom k návrhu robustných regulátorov navrhnutých metódou malého zosilnenia, metódou D-rozkladu a riešením optimalizačného problému H_∞ zmiešanej citlivosti. Pomocou uvedených metód boli navrhnuté a simulačne overené regulátory pre riadenie troch zásobníkov kvapaliny a pre riadenie nestabilného systému. Tieto metódy boli použité aj pri návrhu regulátorov pre riadenie laboratórneho procesu zásobníkov kvapaliny AMIRA DTS 200. Navrhnuté regulátory boli porovnané z hľadiska náročnosti návrhu a ukazovateľov kvality regulácie.

Kľúčové slová: neurčité systémy, H_∞ zmiešaná citlivosť, metóda malého zosilnenia, PI/PID regulátor, metóda D-rozkladu

Abstract

The content of this diploma thesis is the application of selected methods of synthesis of robust controllers that ensure robustness of the feedback system and verify the robust stability and quality of closed control loop with the designed controllers. The first part is a brief introduction to robust controllers design using small gain theorem method, D-decomposition technique, and H_∞ mixed-sensitivity synthesis method. The robust controllers were designed using mentioned methods for control of three tanks and unstable system. These methods were also used in the controllers design for control of a Laboratory Setup Three - Tank – System DTS 200. The controllers were compared based on control quality specifications and in terms of complex design.

Keywords: uncertain systems, H_∞ mixed-sensitivity, small gain theorem, PI/PID controller, D-decomposition method

Obsah

Úvod	14
1 Prehľad súčasného stavu problematiky	15
2 Neurčitosti systémov	17
2.1 Dynamické neurčitosti	17
2.2 Parametrické neurčitosti	18
3 Teória malého zosilnenia	20
4 Teória D-rozkladu s použitím Charitonovovej vety	24
5 H_∞ riadenie	28
5.1 Citlivostná a komplementárna citlivostná funkcia	29
5.2 Syntéza H_∞ regulátora pomocou zmiešanej citlivosti	30
6 Simulačné príklady riadenia rôznych typov systémov	33
6.1 Riadenie zásobníkov kvapaliny	33
6.1.1 Návrh robustného PID regulátora teóriou malého zosilnenia	36
6.1.2 Návrh robustného PI regulátora metódou D-rozkladu	42
6.1.3 Návrh robustného regulátora pomocou H_∞ zmiešanej citlivosti	47
6.1.4 Porovnanie metód syntézy regulátorov	52
6.2 Riadenie nestabilného systému metódou H_∞ zmiešanej citlivosti	58
7 Riadenie laboratórneho procesu AMIRA DTS 200	60
7.1 Opis riadeného systému	61
7.2 Identifikácia systému	62
7.3 Riadenie sústavy PI regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia	67
7.4 Riadenie sústavy PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu	70
7.5 Riadenie sústavy polynomičným regulátorom navrhnutým metódou H_∞ zmiešanej citlivosti	72
7.6 Porovnanie navrhnutých regulátorov	73
Záver	79
Zoznam použitej literatúry	80

Zoznam skratiek a značiek

URO	uzavretý regulačný obvod
ORO	otvorený regulačný obvod
SISO	single-input and single-output
MIMO	multiple-input and multiple-output
LFT	lineárna zlomková transformácia
IAE	integral absolute value of error
$G(s)$	prenos systém
$G_0(s)$	prenos nominálneho systému
$\Delta(s)$	trieda neurčitosti
$G_{\Delta A}(s)$	prenos systému s aditívnou poruchou
$W_A(s)$	váhová funkcia aditívneho modelu
$\Delta_A(s)$	prenosová funkcia aditívneho modelu
$W_M(s)$	váhová funkcia multiplikatívneho modelu
$\Delta_M(s)$	prenosová funkcia multiplikatívneho modelu
q	vektor neurčitých parametrov
$G(s, q)$	prenos s neurčitými parametrami
b_k	koeficienty neurčitých parametrov čitateľa
a_k	koeficienty neurčitých parametrov menovateľa
a_k^-, a_k^+	dolná / horná hranica neurčitých koeficientov
$L(s)$	prenos otvoreného regulačného obvodu
$B_0(s)$	čitateľ prenosu nominálneho modelu
$A_0(s)$	menovateľ prenosu nominálneho modelu
$G_k(s)$	prenosové funkcie rodiny systému
$T(s)$	komplementárna citlivostná funkcia
$S(s)$	citlivostná funkcia
$C(s)$	prenos regulátora
$G_R(s)$	prenos regulátora
K_p	koeficient P zložky regulátora
K_i	koeficient I zložky regulátora
ω_0	približná šírka pásma regulácie
ω	frekvencia $rad s^{-1}$

t	čas	s
y	riadený výstup	
u	radiaca veličina	
e	regulačná odchýlka	
H_{∞}	nekonečno norma v Hardyho priestore	
$P(s)$	prenos zovšeobecného systému	
w	referencia alebo porucha	
z	poruchový signál	
$\bar{\sigma}$	maximálne singulárne číslo matice	
F_l	dolná lineárna transformácia	
γ	gama	
$W(s)$	tvárovacie váhy	
k	konštanty ventilov	$m^{2,5}s^{-1}$
F	vnútorné plochy zásobníkov	m^2
$h(t)$	výška hladiny	m
$q(t)$	prietok kvapaliny	m^3s^{-1}
PB	pracovný bod	
TRO	trvalá regulačná odchýlka	

Úvod

Klasická lineárna teória riadenia pri návrhu regulátora predpokladá idealizovaný matematický model, ktorý je tvorený na základe zjednodušenia, teda model neopisuje úplne reálne zariadenie. Problémom teda je, či regulátor navrhnutý pre tento systém dokáže zachovať stabilitu systému a iné kvalitatívne vlastnosti pre celú rodinu modelov, ktoré sú v okolí nominálneho systému. Jednou z možností, ako takéto systémy riadiť, je navrhnuť adaptívny regulátor, ktorý sa prispôsobuje zmenám správania systému tým, že mení svoje parametre a štruktúru. Druhým z prístupov je robustná teória riadenia, ktorá zahŕňa tieto rozdiely/neurčitosti s použitím neurčitých modelov. Cieľom takéhoto prístupu je navrhnuť jeden pevný regulátor, ktorý zachováva stabilitu a kvalitu systému v celom rozsahu zmien parametrov systému. V práci sa zameriavame práve na druhý z prístupov.

V teoretickej časti diplomovej práce sa čitateľ oboznámi s neurčitostami systémov, ich vznikom a typmi neurčitostí. Následne ukážeme, ako tieto neurčitosti zahrnúť do modelov neurčitostí pre rôzne metódy návrhu robustných regulátorov.

V ďalšej časti sú uvedené tri metódy návrhu regulátorov teória malého zosilnenia, metóda D-rozkladu a syntéza polynomických regulátorov metódou H_∞ zmiešanej citlivosti.

V časti simulačných príkladov sú všetky tri metódy aplikované na modelovom príklade troch zásobníkov kvapaliny. Každou metódou bolo navrhnutých niekoľko regulátorov, z ktorých bol vybraný jeden regulátor, ktorý vyhovoval zvoleným kritériám kvality. Metóda D-rozkladu a metóda H_∞ syntézy regulátora boli simulačne overené pre návrh parametrov regulátorov pre riadenie nestabilného systému.

V poslednej kapitole boli všetky tri uvedené metódy aplikované na riadenie laboratórneho zariadenia AMIRA DTS 200. Pomocou ukazovateľov kvality a priebehov riadených a riadiacich veličín je posúdená vhodnosť uvedených metód návrhu parametrov regulátorov pre riadenie systému zásobníkov kvapaliny DTS 200.

1 Prehľad súčasného stavu problematiky

Problematika robustného riadenia zaznamenala najväčší rozmach od 40. rokov dvadsiateho storočia a v súčasnosti sa považuje za veľmi rozsiahlu a preskúmanú oblasť. Metódy študujúce neurčité systémy možno rozdeliť medzi metódy robustnej analýzy a robustnej syntézy regulátorov. Robustnou analýzou sa skúma robustná stabilita URO pomocou nutných a postačujúcich (prípadne len postačujúcich) podmienok stability, ktoré sú potom využívané pri syntéze robustných regulátorov.

Jednou z metód syntézy robustných regulátorov pre systémy s neštruktúrovanou neurčitosťou je princíp malého zosilnenia (Small Gain Theorem) s použitím H_∞ normy (Doyle a kol. (1992), Barmish (1994), Green – Limebeer (1994)). Inou skupinou neurčitostí, ktoré sa v systémoch vyskytujú, sú parametrické neurčitosti. Práve Charitonovova veta (The Kharitonov Theorem) sa považuje za základ pre metódy analýzy týchto neurčitostí (Kharitonov (1978)), čím sa vytvoril priestor pre analýzu zložitejších štruktúr parametrických neurčitostí. Medzi tieto patrí Veta o stabilite systému na hrane kvádra neurčitosti (The Edge Theorem), v ktorej sa skúma množina polynómov s meniacimi sa koeficientmi v ľubovoľnom polytope (Barlett a kol. (1988)), Veta o 16 procesoch (Sixteen Plant Theorem) (Barmish (1989)), Veta o 32 hranách (The Thirty-Two Edge Theorem), zovšeobecnená Charitonovova veta (The Generalized Kharitonov Theorem) používaná pre systémy s afinne lineárnou neurčitou štruktúrou (Chapellat – Bhattacharyya (1989)). Pre multilineárne závislosti neurčitých parametrov sa používa Veta o zobrazení (Mapping Theorem) (Barmish (1994), Bhattacharyya a kol. (1995)).

V praxi sa najviac využívajú tradičné návrhy PI/PID regulátorov. Najpoužívanjšie nastavenia týchto regulátorov zosumarizovali Åström a Hägglund (Åström a Hägglund (1995)). Ďalšími klasickými metódami návrhu regulátorov sú napr. experimentálna metóda Zieglerova – Nicholsova, analytická metóda Naslinova a experimentálna metóda Cohenova – Coonova. Alternatívou k týmto metódam návrhu regulátorov je algebraický prístup, v ktorom sa používa diofantická rovnica a Youlova – Kučerova parametrizácia (Kučera (1993)) alebo metódy využívajúce lineárne maticové nerovnosti v polynomicom prístupe (Henrion a kol. (2003)) alebo v prístupe založenom na stavovom opise (Veselý (2001), Veselý (2003)).

Metódam návrhu PI/PID regulátorov a ich aplikácii na systémy s intervalovými neurčitosťami sa venovala skupina autorov Ho a kol. (1997). Prístup vykresľujúci hranice

stabilných regiónov v priestore pre PI regulátor opísali Tan – Kaya (2003). Alternatívnou metódou s využitím Nyquistovho grafu sa zaoberali Munro a Söylemez (2000).

Jedným z novších prístupov je napr. návrh robustného H_∞ optimálneho regulátora, kde bola zavedená štruktúrovaná singulárna hodnota pre tzv. μ -analýzu (Doyle (1982)) a metóda zmiešanej citlivosti (Doyle (1984), Kwakernaak (2002), Scherer 2006)).

2 Neurčitosti systémov

Pod pojmom neurčitosť rozumieme rozdiel medzi identifikovaným modelom a skutočným reálnym systémom. Neurčitosti vznikajú v systémoch kvôli tomu, že reálne procesy nie sú identifikované úplne presne. Analytické modely sú tvorené pomocou zjednodušení ako je linearizácia nelineárnych členov, zanedbanie rýchlej dynamiky, nepresností meraní alebo dopravného oneskorenia. Ďalším problémom sú fyzikálne parametre, ktoré presne nepoznáme alebo sa menia v závislosti od prevádzkového bodu, v ktorom sa zariadenie nachádza. Neurčitosti môžeme rozdeliť do dvoch základných skupín: dynamické a parametrické [1], [3].

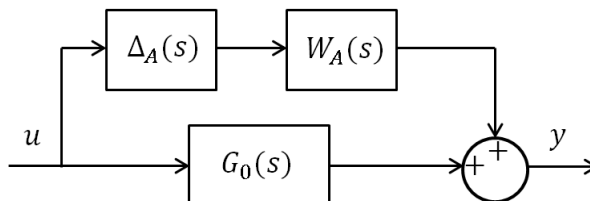
2.1 Dynamické neurčitosti

Dynamické/neštruktúrované neurčitosti vznikajú zanedbaním dynamických zložiek v lineárnom modeli alebo z odchýlok v dynamickom správaní systému počas riadenia, ktoré nie je možné určiť. Inými zdrojmi takýchto neurčítostí sú napr. nemerateľné poruchy a šumy signálov. Tieto zdroje neurčítostí je potom nutné združiť do modelu poruchy tak, že sa k nominálnemu modelu pridá tzv. nemodelová časť, ktorej štruktúra nie je známa. Pri dynamických neurčitostiach rozoznávame dva základné modely – aditívny a multiplikatívny. Vyjadrujú vzťah medzi nominálnym prenosom $G_0(s)$ a triedou neurčitosti $\Delta(s)$ [1], [3].

Pre prenosovú funkciu modelu s aditívnou neurčitosťou (obr. 2.1) platí

$$G(s) = G_0(s) + W_A(s)\Delta_A(s), \quad (2.1)$$

kde $W_A(s)$ predstavuje stabilnú prenosovú funkciu aditívneho prídavku a $\Delta_A(s)$ je stabilná prenosová funkcia, ktorej modul $|\Delta_A(j\omega)|$ je menší alebo rovný jednej pre všetky frekvencie $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$.

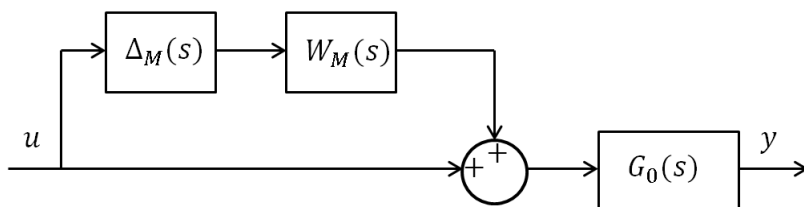


Obr. 2.1 Schéma zapojenia aditívnej poruchy k nominálnemu modelu

Prenosová funkcia systému s multiplikatívnym modelom neurčitosti (obr. 2.2) je daná vzťahom

$$G(s) = G_0(s)[1 + W_M(s)\Delta_M(s)], \quad \|\Delta_M\|_\infty \leq 1, \quad (2.2)$$

kde $W_M(s)$ vyjadruje stabilnú prenosovú funkciu multiplikatívneho prídavku a $\Delta_M(s)$ je stabilná prenosová funkcia, ktorej modul $|\Delta_A(j\omega)|$ je menší alebo rovný jednej pre všetky frekvencie $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$.



Obr. 2.2 Schéma zapojenia multiplikatívnej poruchy k nominálneho modelu

Vzťah medzi multiplikatívnym a aditívnym modelom poruchy možno vyjadriť rovnicou

$$|W_M(j\omega)\Delta_M(j\omega)| = \frac{|W_A(j\omega)\Delta_A(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|}. \quad (2.3)$$

2.2 Parametrické neurčitosti

Parametrické/štruktúrované neurčitosti sú neurčitosti, ktorých štruktúru poznáme, ale nepoznáme presné hodnoty parametrov. Perturovaný model má rovnakú štruktúru ako nominálny a hodnoty parametrov sa nachádzajú v určitom intervale spodnej a hornej hranice hodnoty parametrov. Podľa toho, či sa menia alebo nemenia intervaly parametrickej neurčitosti počas procesu, rozlišujeme časovo premenné a nemenné modely. Vo všeobecnosti parametrické neurčitosti definujeme ako vektor neurčitých parametrov systému q . Ak je počet neurčitostí rovný l , potom vektor neurčitostí možno definovať vzťahom [1], [3]

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_l), \quad q \in \mathbf{R}^l. \quad (2.4)$$

Všeobecný opis systému je v tvare

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.5)$$

kde $B(s)$, $A(s)$ sú polynómy čitateľa a menovateľa systému závislé od q

$$B(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k, \quad (2.6)$$

$$A(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k. \quad (2.7)$$

Podľa toho, ako neurčitosti vstupujú do parametrov systému, rozlišujeme päť základných typov neurčitostí:

- s jedným parametrom,
- intervalové,
- afinné lineárne štruktúry,
- multilineárne štruktúry,
- nelineárne (polynomicke) štruktúry neurčitostí [2], [3].

Systémy s intervalovými neurčitosťami

Intervalové neurčitosti sú špeciálnym prípadom parametrickej neurčitosti, kde je závislosť parametrov q komplikovaná a nelineárna. V niektorých prípadoch je nevyhnutné poznať štruktúru komplikovaných neurčitostí a matematickou analýzou získať informácie o robustnosti systému. Model riadeného systému sa uvádza v tvare prenosovej funkcie (2.8). Každý koeficient prenosovej funkcie je neurčitý a nadobúda hodnoty z intervalu, ktorý je charakteristický svojou najmenšou a najväčšou prípustnou hodnotou nezávisle od hodnôt ostatných koeficientov [1], [3].

Pri všeobecnom modeli prenosovej funkcie systému s intervalovou neurčitosťou je dôležité, aby menovateľ a čitateľ prenosu mali nezávislú štruktúru neurčitosti [3]

$$G_I(s, a, b) = \frac{[b_0^-, b_0^+] + [b_1^-, b_1^+]s + \dots + [b_m^-, b_m^+]s^m}{[a_0^-, a_0^+] + [a_1^-, a_1^+]s + \dots + [a_n^-, a_n^+]s^n}. \quad (2.8)$$

Polynómy čitateľa a menovateľa možno zapísať v skrátenom tvare

$$B(s, b) = \sum_{k=0}^n [b_k^-, b_k^+] s^k, \quad (2.9)$$

$$A(s, a) = \sum_{k=0}^n [a_k^-, a_k^+] s^k. \quad (2.10)$$

3 Teória malého zosilnenia

Pri návrhu robustného regulátora budeme vychádzať z frekvenčných kritérií stability systémov s neštruktúrovanými neurčitostami a podmienky stability vyplývajúcej z teórie malého zosilnenia [1].

Majme neurčitý lineárny spojitý systém opísaný rodinou stabilných prenosových funkcií $G(s)$ a regulátor $G_R(s)$. Potom prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu ORO pre multiplikatívny model neurčitosti (2.2) je daná ako

$$\begin{aligned} L(s) &= G(s)G_R(s) = G_0(s)(1 + W_M(s)\Delta_M(s))G_R(s) = \\ &= L_0(s) + L_0(s)W_M(s)\Delta_M(s). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Uzavretý regulačný obvod URO je robustne stabilný v zmysle Nyquistovho kritéria stability vtedy a len vtedy, ak Nyquistova krivka $L(j\omega)$ zanecháva bod $(-1, 0j)$ pri zvyšovaní frekvencie ω zľava (obr. 3.1). Vzdialenosť d_h medzi bodom $(-1, 0j)$ a $L_0(j\omega_h)$ je daná vzťahom [1]

$$d_h = |(-1 + 0j) - L_0(j\omega_h)| = |1 + L_0(j\omega_h)| \quad (3.2)$$

a polomer kružnice r_h

$$r_h = |W_M(j\omega_h)L_0(j\omega_h)|. \quad (3.3)$$

Podmienku robustnej stability vyplývajúcu z obr. 3.1 a rovníc (3.2) a (3.3) možno definovať nasledovne: URO je robustne stabilný vtedy a len vtedy, ak polomer r_h je menší ako polomer d_h . Túto podmienku možno vyjadriť vzťahom [1]

$$\frac{|W_M(j\omega)L_0(j\omega)|}{|1 + L_0(j\omega)|} < 1. \quad (3.4)$$

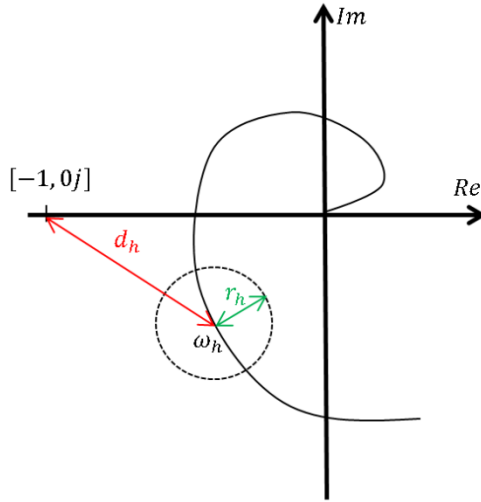
Zavedme substitúciu, kde $\frac{|L_0(j\omega)|}{|1 + L_0(j\omega)|} = |T_0(j\omega)|$. Potom pre rovnicu (3.4) a amplitúdovú funkciu URO $|T_0(j\omega)|$ platí vzťah

$$|T_0(j\omega)| < \frac{1}{|W_M(j\omega)|} \quad (3.5)$$

a pre aditívny model neurčitosti z rovníc (3.5) a (2.3) vyplýva nasledujúca podmienka robustnej stability

$$|T_0(j\omega)| < \frac{|G_0(j\omega)|}{|W_A(j\omega)|} = |M_0(j\omega)|. \quad (3.6)$$

Z uvedenej formulácie je zrejmé, že ak je zabezpečená robustná stabilita, je zabezpečená aj nominálna stabilita systému v URO.



Obr. 3.1 Reprezentácia Nyquistovej robustnej stability

Pre identifikáciu aditívneho modelu neurčitosti postupujeme nasledovne: predpokladajme, že prenosová funkcia $G(s)$ zo vzťahu (2.1) je vytvorená zo všetkých možných kombinácií koeficientov polynómov prenosov hraničných systémov a je daná vzťahom

$$G_k(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}, \quad (3.7)$$

kde $B_m(s)$ je polynóm čitateľa s počtom koeficientov m a $A_n(s)$ je polynóm menovateľa s počtom koeficientov n . Nominálny model, ktorého koeficienty sú dané zo stredných hodnôt koeficientov polynómov hraničných systémov, je

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)}. \quad (3.8)$$

Pre model aditívnej poruchy (2.1) po zavedení vzťahu (3.7) platí

$$G_k(s) - G_0(s) = W_A(s)\Delta_A(s), \quad |\Delta_A(j\omega)| \leq 1 \text{ pre } \omega \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (3.9)$$

Prenosovú funkciu $W_A(s)$ potom nájdeme tak, že nájdeme maximálnu hodnotu modulov podľa rovnice

$$\max_{G(j\omega)} |G_k(j\omega) - G_0(j\omega)| = l_A(j\omega), \quad \omega \in \langle 0, \infty \rangle \quad (3.10)$$

a pre modul prenosovej funkcie $W_A(s)$ platí

$$|W_A(j\omega)| \geq l_A(j\omega), \quad \omega \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (3.11)$$

Ak platí podmienka (3.11), potom podmienka (3.6) je nutnou a postačujúcou podmienkou robustnej stability [1].

Pri výpočte prenosovej funkcie regulátora vychádzame z nasledujúceho vzťahu:

$$\begin{aligned} T_0(s) &= \frac{G_0(s)G_R(s)}{1 + G_0(s)G_R(s)} = \frac{T_{0,\check{c}}(s)}{T_{0,m}(s)} = \frac{G_{0,\check{c}}(s)G_{R,\check{c}}(s)}{G_{0,m}(s)G_{R,m}(s) + G_{0,\check{c}}(s)G_{R,\check{c}}(s)} = \\ &= \frac{G_{0,\check{c}}(s)}{\frac{G_{0,m}(s)}{G_{R,\check{c}}(s)}G_{R,m}(s) + G_{0,\check{c}}(s)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde

$$T_{0,\check{c}}(s) = G_{0,\check{c}}(s), \quad (3.13)$$

$$T_{0,m}(s) = \frac{G_{0,m}(s)}{G_{R,\check{c}}(s)}G_{R,m}(s) + G_{0,\check{c}}(s). \quad (3.14)$$

Podobne vyjadríme prenos regulátora z prvej rovnosti (3.12)

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{T_0(s)}{(1 - T_0(s))G_0(s)} = \frac{G_{R,\check{c}}(s)}{G_{R,m}(s)} = \frac{\frac{T_{0,\check{c}}(s)}{T_{0,m}(s)}}{\left(1 - \frac{T_{0,\check{c}}(s)}{T_{0,m}(s)}\right)\frac{G_{0,\check{c}}(s)}{G_{0,m}(s)}} = \\ &= \frac{T_{0,\check{c}}G_{0,m}(s)}{(T_{0,m}(s) - T_{0,\check{c}}(s))G_{0,\check{c}}(s)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Všeobecná prenosová funkcia PID regulátora s voliteľným koeficientom K má tvar

$$G_R(s) = \frac{1}{K} \frac{C(s)}{s} = \frac{1}{K} \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s}. \quad (3.16)$$

Zavedením substitúcie

$$D_{0,m} = \frac{G_{0,m}(s)}{G_{R,\xi}(s)} \quad (3.17)$$

a jej porovnaním s rovnicou všeobecného tvaru regulátora (3.16) dostávame predpis pre určenie neznámych koeficientov

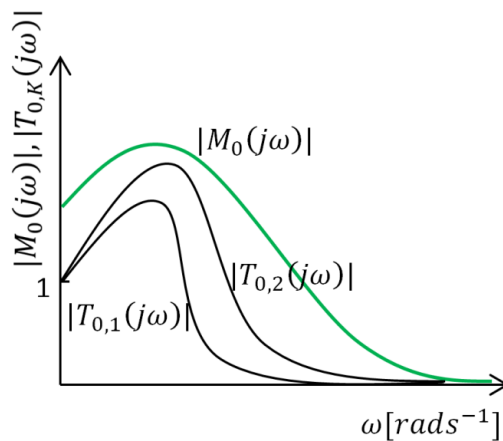
$$G_{0,m}(s) = D_{0,m}(s)G_{R,\xi}(s) = D_{0,m}(s)(c_2s^2 + c_1s + c_0) . \quad (3.18)$$

Stupeň polynómov pravej a ľavej strany rovnice (3.18) musí byť rovný, preto sa polynóm $D_{0,m}(s)$ volí tak, aby jeho stupeň dopĺňal stupeň navrhovaného regulátora na stupeň polynómu $G_{0,m}(s)$.

Prenosovú funkciu URO $T_0(s)$ dostaneme porovnaním rovníc (3.12) a (3.16)

$$T_0(s) = \frac{G_{0,\xi}(s)}{G_{0,\xi}(s) + D_{0,m}(s)Ks} . \quad (3.19)$$

Jediným voliteľným parametrom v rovnici prenosovej funkcie (3.19) je koeficient K , ktorý volíme tak, aby prenosová funkcia $T_0(s)$ spĺňala podmienku robustnej stability (3.6) ako je znázornené na obr. 3.2.



Obr.3.2 Moduly charakteristik $|M_0(j\omega)|$, $|T_{01}(j\omega)|$, $|T_{02}(j\omega)|$

4 Teória D-rozkladu s použitím Charitonovovej vety

Metóda D-rozkladu je jednou z metód, ktorá umožňuje sledovať vplyv parametrov systému na jeho stabilitu. Ide o grafickú metódu založenú na rozklade priestoru sledovaných parametrov na oblasti s rôznymi rozloženiami koreňov charakteristickej rovnice systému. Metódou teda hľadáme hranicu parametrov, pre ktoré je systém stabilný [6].

Vyjadriť si charakteristickú rovnicu systému v tvare

$$A(s) = Z(s) + pR(s) = 0, \quad (4.1)$$

kde $Z(s)$, $R(s)$ sú polynómy menovateľa a p je sledovaný parameter. Pravú a ľavú časť polroviny koreňov rozdeľuje imaginárna os, kde $s = j\omega$ pre $\omega \in (-\infty, \infty)$. Potom hranice D-rozkladu pre rovnicu (4.1) môžeme vyjadriť v tvare [6]

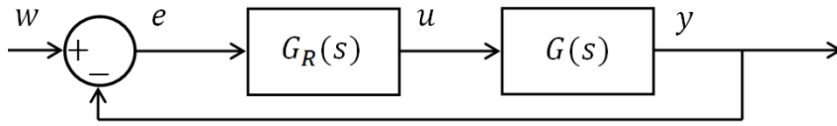
$$Z(j\omega) + pR(j\omega) = 0, \quad (4.2)$$

odkiaľ osamostatnením sledovaného parametra p môžeme písať podmienku pre hranice stability (4.3), kde komplexné číslo p je závislé od ω a platí $p = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$,

$$p = -\frac{Z(j\omega)}{R(j\omega)}. \quad (4.3)$$

Hranicu D-rozkladu zostrojíme vykreslením závislosti imaginárnej zložky $\text{Im}(\omega)$ od reálnej zložky $\text{Re}(\omega)$. Potom návrh robustného PI regulátora je založený na vykreslení hraníc stability URO v K_p, K_i rovine. Voľbou koeficientov zo stabilnej oblasti experimentálne vyberieme vhodné parametre, ktoré stabilizujú systém (4.4) a dosahujú požadované kvalitatívne vlastnosti. Predpokladajme URO systému, ktorý je znázornený na obr. 4.1. Prenosovú funkciu riadeného systému s intervalovými neurčitostami (2.8), možno zapísať v skrátrenom tvare [6]

$$G_I(s, a, b) = \frac{B(s, b)}{A(s, a)}. \quad (4.4)$$



Obr. 4.1 Spätnoväzbový uzavretý regulačný obvod

Majme prenosovú funkciu PI regulátora $G_R(s)$ v tvare

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (4.5)$$

a charakteristická rovnica URO je

$$1 + G_I(s, a, b)G_R(s) = 0. \quad (4.6)$$

Definujme si Charitonovov systém [1], [6]

$$G_{i,l}(s) = \frac{B_i(s)}{A_l(s)}, \quad i, l = 1, 2, 3, 4, \quad (4.7)$$

kde $B_i(s)$, $A_l(s)$ sú Charitonovove polynómy čitateľa a menovateľa intervalového systému (4.4) a platia pre ne nasledovné rovnice

$$\begin{aligned} B_1(s) &= b_0^- + b_1^- s + b_2^+ s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^- s^4 + b_5^- s^5 + \dots \\ B_2(s) &= b_0^+ + b_1^+ s + b_2^- s^2 + b_3^- s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^+ s^5 + \dots \\ B_3(s) &= b_0^+ + b_1^- s + b_2^- s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^- s^5 + \dots \\ B_4(s) &= b_0^- + b_1^+ s + b_2^+ s^2 + b_3^- s^3 + b_4^- s^4 + b_5^+ s^5 + \dots, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} A_1(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + \dots \\ A_2(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + \dots \\ A_3(s) &= a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + \dots \\ A_4(s) &= a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + \dots. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Charitonovova veta hovorí, že pri sledovaní stability nie je nutné testovať stabilitu všetkých možných hraničných kombinácií koeficientov polynómov v URO (obr. 4.1) bez ohľadu na počet neurčitých parametrov. Polynóm (2.10) je robustne stabilný vtedy a len vtedy, ak sú stabilné štyri Charitonovove polynómy (4.9) a regulátor (4.5) stabilizuje intervalový systém (4.4) v URO (4.6), ak stabilizuje všetkých 16 Charitonovových procesov vytvorených z kombinácií menovateľa a čitateľa intervalového prenosu (4.4) v URO (4.10) [1, 6].

Charakteristická rovnica URO pre Charitonovov systém (4.7) je

$$1 + G_{i,l}(s)G_R(s) = 0. \quad (4.10)$$

Potom pre teóriu D-rozkladu s použitím Charitonovovej vety platí, že zavedením substitúcie $s = j\omega$ do rovnice (4.7) a rozdelením menovateľa a čitateľa na reálnu/imaginárnu časť (resp. párnú/nepárnú časť) dostaneme vzťah [6]

$$G_{i,l}(j\omega) = \frac{B_{i,re}(-\omega^2) + j\omega B_{i,im}(-\omega^2)}{A_{l,re}(-\omega^2) + j\omega A_{l,im}(-\omega^2)} \quad (4.11)$$

a charakteristická rovnica URO (4.10) po dosadení vzťahov (4.5) a (4.11) nadobúda tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(K_p, K_i, \omega) + j\operatorname{Im}(K_p, K_i, \omega) &= \\ &= [K_i B_{i,re}(-\omega^2) - K_p \omega^2 B_{i,im}(-\omega^2) - \omega^2 A_{l,im}(-\omega^2)] = \\ &= +j[K_p \omega B_{l,re}(-\omega^2) + K_i \omega B_{i,im}(-\omega^2) + \omega A_{l,re}(-\omega^2)] = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Z rovnice (4.12) platí, že imaginárna aj reálna časť musia byť rovné nule. Získame tým dve rovnice o dvoch neznámych, kde neznámymi parametrami sú koeficienty PI regulátora [6]

$$K_i B_{i,re}(-\omega^2) - K_p \omega^2 B_{i,im}(-\omega^2) = \omega^2 A_{l,im}(-\omega^2) \quad (4.13)$$

$$K_p B_{i,re}(-\omega^2) + K_i \omega B_{i,im}(-\omega^2) = -A_{l,re}(-\omega^2). \quad (4.14)$$

Kvôli zjednodušeniu sa pre rovnice (4.13) a (4.14) zavádzajú substitúcie

$$\begin{aligned} M(\omega) &= -\omega^2 B_{i,im}(-\omega^2) \\ N(\omega) &= B_{i,re}(-\omega^2) \\ O(\omega) &= \omega^2 A_{l,im}(-\omega^2) \\ P(\omega) &= B_{i,im}(-\omega^2) \\ R(\omega) &= -A_{l,re}(-\omega^2) \\ E(\omega) &= B_{i,re}(-\omega^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Zjednodušené rovnice (4.13) a (4.14) potom nadobudnú tvar

$$K_i N(\omega) + K_p M(\omega) = O(\omega) \quad (4.16)$$

$$K_i P(\omega) + K_p E(\omega) = R(\omega). \quad (4.17)$$

Vyjadrením neznámych koeficientov K_p , K_i z rovníc (4.16) a (4.17) získame koeficienty PI regulátora v tvare (4.5) ako

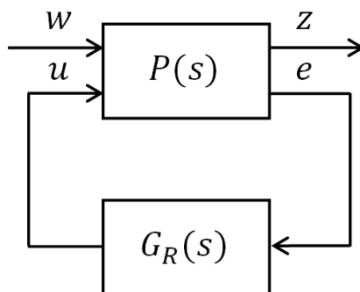
$$K_p = \frac{O(\omega)P(\omega) - R(\omega)N(\omega)}{M(\omega)P(\omega) - N(\omega)E(\omega)} \quad (4.18)$$

$$K_i = \frac{R(\omega)M(\omega) - O(\omega)E(\omega)}{M(\omega)P(\omega) - N(\omega)E(\omega)}. \quad (4.19)$$

Vykreslením hranice stability *URO* v K_p, K_i rovine získame stabilné a nestabilné regióny koeficientov PI regulátora pre všetkých 16 Charitonovových procesov. Parametre regulátora volíme z prieniku stabilných oblastí Charitonovových procesov.

5 H_∞ riadenie

Návrh H_∞ regulátora vychádza z riešenia všeobecného LFT modelu (Linear Fractional Transformation – lineárna zlomková transformácia). Preto je výhodné štruktúru klasického URO (obr. 4.1) previesť na štruktúru zovšeobecneného URO (obr. 5.1) so systémom $P(s)$, ktorý má vnútorný vstup u , vonkajší vstup w , ktorý reprezentuje referenciu alebo poruchy vstupujúce do systému. Vonkajšie výstupy z predstavujú poruchový signál, ktorý má byť minimalizovaný v zmysle sledovania kvality regulácie a vnútorného výstupu e [4].



Obr. 5.1 Zovšeobecnený regulačný obvod

Pre URO na obr. 5.1 platí

$$\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{ew}(s) & P_{eu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Cieľom H_∞ riadenia je minimalizovať H_∞ normu prenosovej funkcie medzi vonkajšími výstupmi z a vonkajšími vstupmi w . Regulátor $G_R(s)$ na základe meraných výstupov e zo systému $P(s)$ generuje akčný zásah u , ktorý minimalizuje vplyv vonkajších vstupov w na vonkajšie výstupy z a tým minimalizuje normu prenosu medzi z a w [4], [9].

Vzťah medzi z a w v URO možno vyjadriť

$$z = \left[P_{zw}(s) + P_{zu}(s)G_R(s)(I - P_{eu}G_R(s))^{-1}P_{ew} \right] w = F_{zw}w, \quad (5.2)$$

kde

$$P_{zw}(s) + P_{zu}(s)G_R(s)(I - P_{eu}(s)G_R(s))^{-1}P_{ew}(s) = F_l(P(s), G_R(s)) = F_{zw}(s).$$

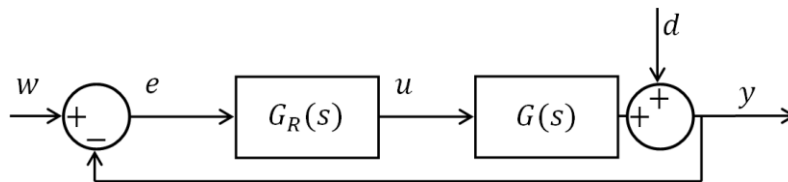
Cieľom H_∞ návrhu je nájsť prenos stabilizujúceho regulátora $G_R(s)$, ktorý minimalizuje prevýšenie maximálneho singulárneho čísla prenosu $|F_{zw}(j\omega)| = F_l(P(j\omega), G_R(j\omega))$. Potom formuláciu H_∞ problému možno zapísať v tvare

$$\|F_l(P, G_{R,OPT})\|_\infty = \min\{\bar{\sigma}[F_l(P, G_R)(j\omega)]\} < \gamma. \quad (5.3)$$

Jedným z takýchto prístupov je syntéza regulátora pomocou zmiešanej citlivosti [4].

5.1 Citlivostná a komplementárna citlivostná funkcia

Aby sme získali funkcie, ktoré majú zásadný vplyv pre výsledné vlastnosti URO, uvažujme schému zapojenia klasického URO s jedným stupňom voľnosti a s poruchou d (obr. 5.2).



Obr. 5.2 Schéma regulačného obvodu

Pre výstup na obr. 5.2 možno napísať

$$y = (I + G(s)G_R(s))^{-1} G(s)G_R(s)w + (I + G(s)G_R(s))^{-1} d. \quad (5.4)$$

Zo vzťahu (5.4) je zrejmé, že porucha je ovplyvňovaná členom $(I + G(s)G_R(s))^{-1}$. Tento výraz nazývame citlivostnou funkciou systému a po zavedení substitúcie $L(s) = G(s)G_R(s)$ získame citlivostnú funkciu v tvare

$$S(s) = (I + L(s))^{-1}. \quad (5.5)$$

Amplitúdová charakteristika citlivostnej funkcie má tvar hornofrekvenčnej priepustnosti a hovorí o schopnosti systému potlačiť vplyv poruchy. Ak $|S(j\omega)| = 1(0dB)$, poruchu nezosilňuje ani nezoslabuje. V oblasti, kde $|S(j\omega)| < 1$, dochádza k potlačeniu vplyvu poruchy, a naopak, v oblasti $|S(j\omega)| > 1$ vplyv poruchy narastá. Vhodným upravením tejto funkcie môžeme doceliť

potlačenie vplyvu poruchy v určitom frekvenčnom pásme a je žiaduce, aby to bolo do najväčších možných frekvencií. Dôsledkom je, že v iných frekvenciách sa vplyv poruchy zosilní.

Člen, ktorý hovorí o schopnosti regulačného obvodu sledovať žiadanú veličinu w má charakter dolnofrekvenčnej priepustnosti a nazýva sa komplementárnou citlivostnou funkciou $T(s)$. Výhodné sa javia nízke frekvencie ω , kde amplitúdová charakteristika $|T(j\omega)| = 1$. Po zavedení substitúcie $L(s) = G(s)G_R(s)$ v rovnici (5.4) má funkcia $T(s)$ tvar

$$T(s) = (I + L(s))^{-1} L(s) . \quad (5.6)$$

Keďže platí

$$T(s) + S(s) = I , \quad (5.7)$$

nie je možné ovplyvňovať jednu vlastnosť obvodu tak, aby sme neovplyvnili druhú.

Nájsť vhodný kompromis medzi rýchlosťou obvodu a potlačením nežiaducich vplyvov nie je vždy jednoduché.

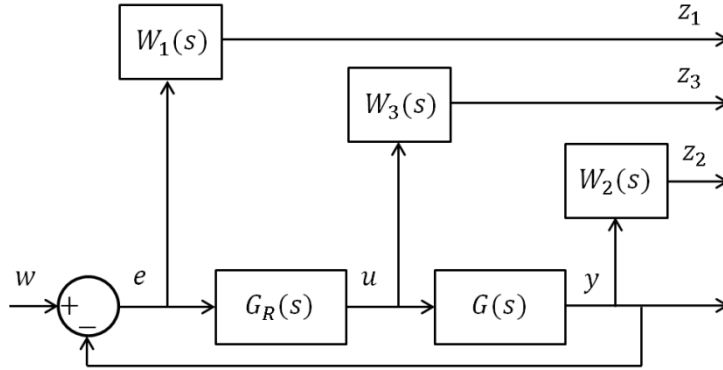
5.2 Syntéza H_∞ regulátora pomocou zmiešanej citlivosti

Pri návrhu regulátorov pomocou zmiešanej citlivosti je možné sledovať a zaistiť niekoľko požiadaviek na priebeh riadenia, ako je potlačenie vplyvu poruchy, stabilita, rýchlosť sledovania žiadanej hodnoty a obmedzenie akčného zásahu. Problém zmiešanej citlivosti spočíva v tvarovaní frekvenčných charakteristík citlivostnej funkcie $|S(j\omega)|$, komplementárnej citlivostnej funkcie $|T(j\omega)|$ a tvarovaní akčného zásahu $|G_R(j\omega)S(j\omega)|$, čím vymedzíme priestor, v ktorom sa musia frekvenčné charakteristiky nachádzať. Na obr. 5.3 vidíme typické zapojenie systému s váhovými funkciami. Tento model sa prevedie pomocou LFT na všeobecnú formu zodpovedajúcu obr. 5.1 [4].

Pre systém na (obr. 5.3) v maticovom zovšeobecnenom tvare platí

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s) & -W_1(s)G(s) \\ 0 & W_3(s) \\ 0 & W_2(s)G(s) \\ I & -G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} , \quad (5.1)$$

kde $W_1(s), W_2(s), W_3(s)$ sú váhové funkcie ktoré tvarujú príslušné funkcie.



Obr. 5.3 Spätnoväzbový regulačný obvod s váhovými funkciami

Vyjadrením závislosti výstupov z_1, z_2, z_3 od vstupu w dostávame vzťah

$$\begin{aligned}
 F_l(P, G_R(s)) &= \begin{bmatrix} W_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_1(s)G(s) \\ W_3(s) \\ W_2(s)G(s) \end{bmatrix} G_R(s)(I + G(s)G_R(s))^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) \\ W_3(s)G_R(s)S(s) \\ W_2(s)T(s) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Cieľom návrhu H_∞ regulátora je minimalizácia nekonečno normy vo frekvenčnej oblasti

$$\|T_{zw}\|_\infty = \|F_l(P, G_R)(j\omega)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1(j\omega)S(j\omega) \\ W_3(j\omega)G_R(j\omega)S(j\omega) \\ W_2(j\omega)T(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_\infty. \tag{5.3}$$

Váhová funkcia $W_1(s)$ tvaruje citlivosťnú funkciu $S(s)$ tak, aby sme vhodne eliminovali vplyv poruchy. Na zabezpečenie robustnej stability sa hľadá vhodná váhová funkcia $W_3(s)$. Ak chceme obmedziť veľkosť akčného zásahu u vstupujúceho do systému, volíme aj váhovú funkciu $W_2(s)$. Voľbou týchto váh docielime požiadavky na systém, pričom dosiahneme určitý kompromis medzi rýchlosťou regulačného obvodu, robustnosťou a veľkosťou akčného zásahu [4], [9].

Váhové funkcie je odporúčané voliť v tvare

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{\frac{s}{M} + \omega_0}{s + \omega_0 A} \\
 W_2 &= \frac{s + \frac{\omega_0}{M}}{As + \omega_0}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$W_3 = 0.01 ,$$

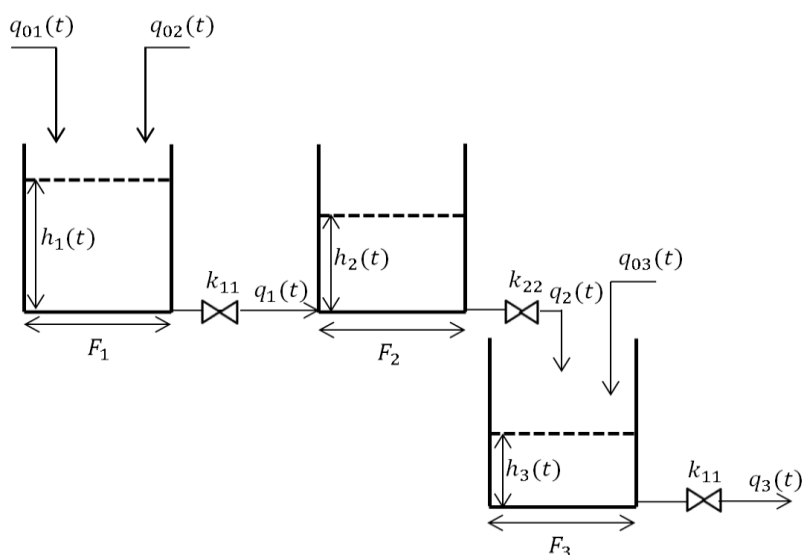
kde M je prechyt citlivostnej funkcie, ω_0 približná šírka pásma regulácie a A regulačná odchýlka.

Prvé hodnoty môžu byť zvolené: $A = 0.01$ (= -40dB), $M = 2$ (= 6dB) a $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ [4], [9].

6 Simulačné príklady riadenia rôznych typov systémov

6.1 Riadenie zásobníkov kvapaliny

Na obr. 6.1 sú znázornené tri zásobníky kvapaliny. Úlohou je riadiť výšku hladiny h_3 v treťom zásobníku prietokom q_{01} . Prietok q_{02} , ktorého hodnoty sú z určitého známeho intervalu, predstavuje poruchu systému.



Obr. 6.1 Schéma zapojenia zásobníkov kvapaliny

Hodnoty parametrov procesu sú

$$\begin{aligned} q_{01} &= 0.8 - 1.2m^3s^{-1}, & k_{11} &= 1.5s^{-1}, & F_1 &= 1.8m^2, \\ q_{02} &= 0.2 - 0.3m^3s^{-1}, & k_{22} &= 1.2m^{2.5}s^{-1}, & F_2 &= 1.8m^2, \\ q_{03} &= 0.2m^3s^{-1}, & k_{33} &= 1.2m^{2.5}s^{-1}, & F_3 &= 1.8m^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dynamický matematický model systému (DMM) tvoria tri diferenciálne rovnice jednotlivých zásobníkov

$$q_{01}(t) + q_{02}(t) = k_{11}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + F_1 \frac{dh_1(t)}{dt}, \quad h_1(0) = h_1^s$$

$$k_{11}\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} = k_{22}\sqrt{h_2(t)} + F_2 \frac{dh_2(t)}{dt}, \quad h_2(0) = h_2^s \quad (6.2)$$

$$k_{22}\sqrt{h_2(t)} + q_{03}(t) = k_{33}\sqrt{h_3(t)} + F_3 \frac{dh_3(t)}{dt}, \quad h_3(0) = h_3^s.$$

Matematický model v ustálenom stave tvoria rovnice (6.3). Z týchto rovníc vyjadríme výšky hladín v ustálenom stave (6.4).

$$\begin{aligned} q_{01}^s(t) + q_{02}^s(t) &= k_{11}\sqrt{h_1^s(t) - h_2^s(t)} \\ k_{11}\sqrt{h_1^s(t) - h_2^s(t)} &= k_{22}\sqrt{h_2^s(t)} \\ k_{22}\sqrt{h_2^s(t)} + q_{03}^s(t) &= k_{33}\sqrt{h_3^s(t)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} h_1^s &= \left(\frac{q_{01}^s + q_{02}^s}{k_{11}} \right)^2 + h_2^s = 2.56m \\ h_2^s &= \left(\frac{q_{01}^s + q_{02}^s}{k_{22}} \right)^2 = 1.56m \\ h_3^s &= \left(\frac{q_{01}^s + q_{02}^s + q_{03}^s}{k_{33}} \right)^2 = 2.01m \end{aligned} \quad (6.4)$$

Rovnakým spôsobom dostaneme výšky hladín v ustálenom stave pre všetky hraničné kombinácie prietokov q_{01}^s, q_{02}^s .

Pre výpočet prenosových funkcií definujeme odchýlkové veličiny

$$\begin{aligned} x_1(t) &= h_1(t) - h_1^s, & u_1(t) &= q_{01}(t) - q_{01}^s, & y_1(t) &= x_1(t), \\ x_2(t) &= h_2(t) - h_2^s, & u_2(t) &= q_{02}(t) - q_{02}^s, & y_2(t) &= x_2(t), \\ x_3(t) &= h_3(t) - h_3^s, & u_3(t) &= q_{03}(t) - q_{03}^s, & y_3(t) &= x_3(t), \end{aligned} \quad (6.5)$$

kde $x(t)$ sú stavové, $y(t)$ výstupné a $u(t)$ vstupné veličiny.

Rozdielom DMM a DMMUS, aproximáciou nelineárnych členov Taylorovým rozvojom, ich dosadením a dosadením odchýlkových veličín (6.5) získame lineárny stavový opis zásobníkov v tvare

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} u_1(t) + \frac{1}{F_1} u_2(t) - \frac{K_1}{F_1} x_1(t) + \frac{K_1}{F_1} x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{K_1}{F_2}x_1(t) - \frac{(K_1 + K_2)}{F_2}x_2(t) \quad (6.6)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{K_2}{F_3}x_2(t) - \frac{K_3}{F_3}x_3(t) + \frac{1}{F_3}u_3(t) ,$$

kde

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{k_{11}}{2\sqrt{h_1^s - h_2^s}} \\ K_2 &= \frac{k_{22}}{2\sqrt{h_2^s}} \\ K_3 &= \frac{k_{33}}{2\sqrt{h_3^s}} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Matice stavového opisu zásobníkov sú

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{K_1}{F_1} & \frac{K_1}{F_1} & 0 \\ \frac{K_1}{F_2} & -\frac{K_1}{F_2} - \frac{K_2}{F_2} & 0 \\ 0 & \frac{K_2}{F_3} & -\frac{K_3}{F_3} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_1} & \frac{1}{F_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_3} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.11)$$

Transformáciou stavového opisu pre hraničné hodnoty prietokov q_{01} , q_{02} sme získali dve prenosové funkcie závislosti výšky hladiny v treťom zásobníku od vstupného prietoku q_{01}

$$G_{q_{01}^+, q_{02}^+}(s) = \frac{0.062}{s^3 + 1.335s^2 + 0.370s + 0.026} \quad (6.12)$$

$$G_{q_{01}^-, q_{02}^-}(s) = \frac{0.1389}{s^3 + 1.983s^2 + 0.8s + 0.083} . \quad (6.13)$$

6.1.1 Návrh robustného PID regulátora teórie malého zosilnenia

Úlohou bolo navrhnuť robustný PID regulátor $G_R(s)$, ktorý stabilizuje rodinu systému $G_k(s)$ vytvorenú zo systémov (6.12), (6.13).

Nominálny model vytvorený zo stredných hodnôt koeficientov prenosov (6.12) a (6.13) je daný vzťahom

$$G_0(s) = \frac{2.014}{25.128s^3 + 37.434s^2 + 11.8756s + 1}. \quad (6.14)$$

Podľa vzťahov (3.10), (3.11) sme určili prenosovú funkciu $W_A(s)$, ktorá zahŕňa sústavy z rodiny $G_k(s)$. Grafické riešenie je na obr. 3.2.

$$W_A(s) = \frac{36s^3 + 49.6s^2 + 13.4s + 0.3858}{302s^6 + 952s^5 + 180s^4 + 555s^3 + 147s^2 + 18s + 1} \quad (6.15)$$

Pre splnenie podmienky robustnej stability (3.6) sme najprv vypočítali prenosovú funkciu $M_0(s)$

$$M_0(s) = \frac{607.4s^6 + 1917s^5 + 2175s^4 + 1119s^3 + 295.1s^2 + 39.03s + 2.014}{908s^6 + 2598s^5 + 2621s^4 + 1136s^3 + 223.1s^2 + 17.98s + 0.3858}. \quad (6.16)$$

Porovnaním stupňov polynómov pravej a ľavej strany rovnice (3.18) a za predpokladu, že pre riadenie navrhujeme PID regulátor, rovnica (3.18) nadobúda tvar

$$25.128s^3 + 37.434s^2 + 11.8756s + 1 = (d_1s + 1)(c_1s^2 + c_0s + 1). \quad (6.17)$$

Vypočítané koeficienty rovnice (6.17) sú

$$c_1 = 3.54, \quad c_0 = 7.1, \quad d_1 = 4.8. \quad (6.18)$$

Následne sme hľadali prenosové funkcie $T_0(s)$ pre voliteľný koeficient K , ktoré spĺňajú podmienku robustnej stability (3.6) a ležia pod funkciou $M_0(s)$ (obr. 3.2). Uvažovaná prenosová funkcia $T_0(s)$ podľa vzťahu (3.19) nadobúdala tvar

$$T_{0,K}(s) = \frac{2.014}{4.8Ks^2 + Ks + 2.014}. \quad (6.19)$$

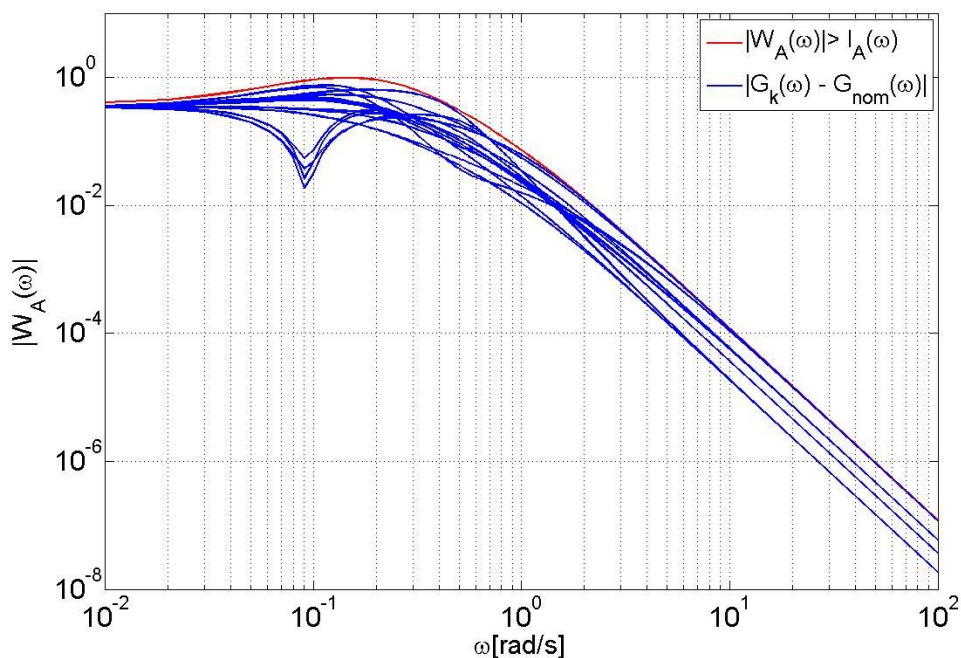
Z grafického riešenia na obr. 6.3 vidíme, že funkcia (6.19) spĺňa podmienku robustnej stability (3.6) pre zvolené koeficienty $K = 10, 15, 20, 30$.

Prenosová funkcia uvažovaného regulátora $G_R(s)$ podľa vzťahu (3.16) má tvar

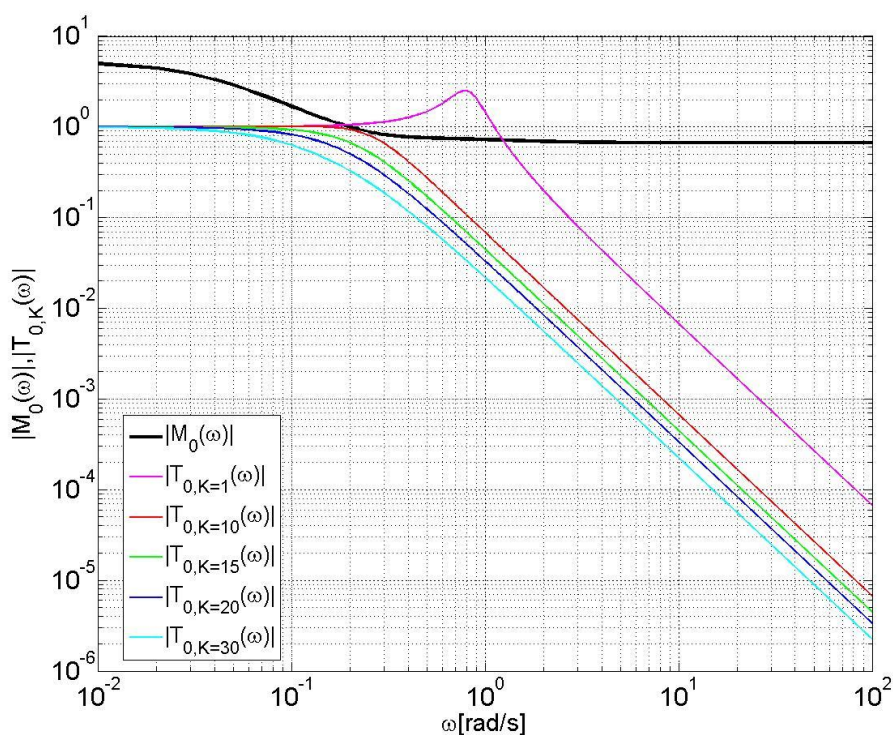
$$G_R(s) = \frac{1}{K} \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s}. \quad (6.20)$$

Potom navrhnuté regulátory $G_R(s)$ v tvare (6.20), ktoré stabilizujú rodinu $G_k(s)$ sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} G_{R,10}(s) &= \frac{1}{10} \frac{3.54s^2 + 7.1s + 1}{s} = 0.71 + 0.1 \frac{1}{s} + 0.354s \\ G_{R,15}(s) &= 0.47 + 0.067 \frac{1}{s} + 0.236s \\ G_{R,20}(s) &= 0.355 + 0.05 \frac{1}{s} + 0.177s \\ G_{R,30}(s) &= 0.237 + 0.033 \frac{1}{s} + 0.118s. \end{aligned} \quad (6.21)$$



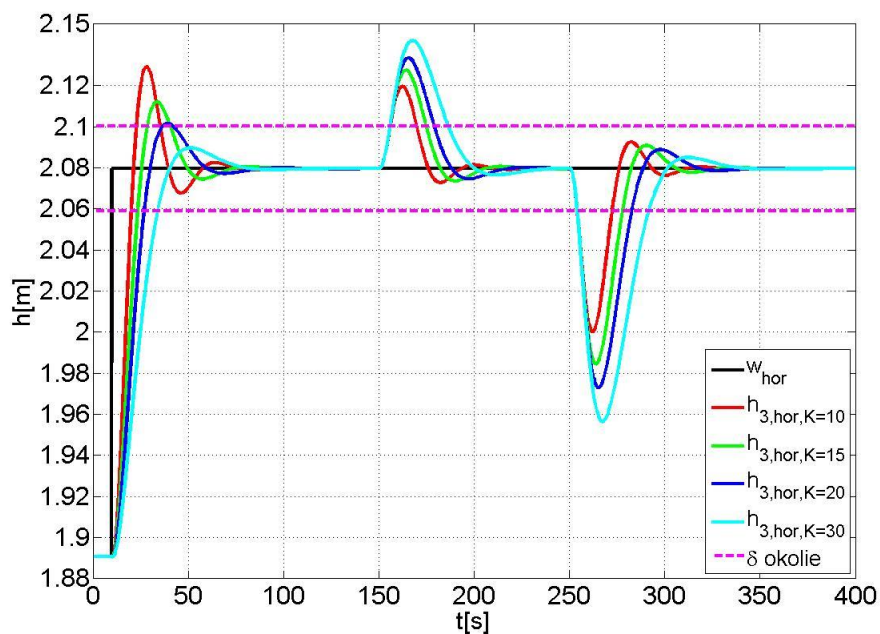
Obr. 6.2 Amplitúdové charakteristiky $|G_k(j\omega) - G_0(j\omega)|$, $|W_A(j\omega)|$



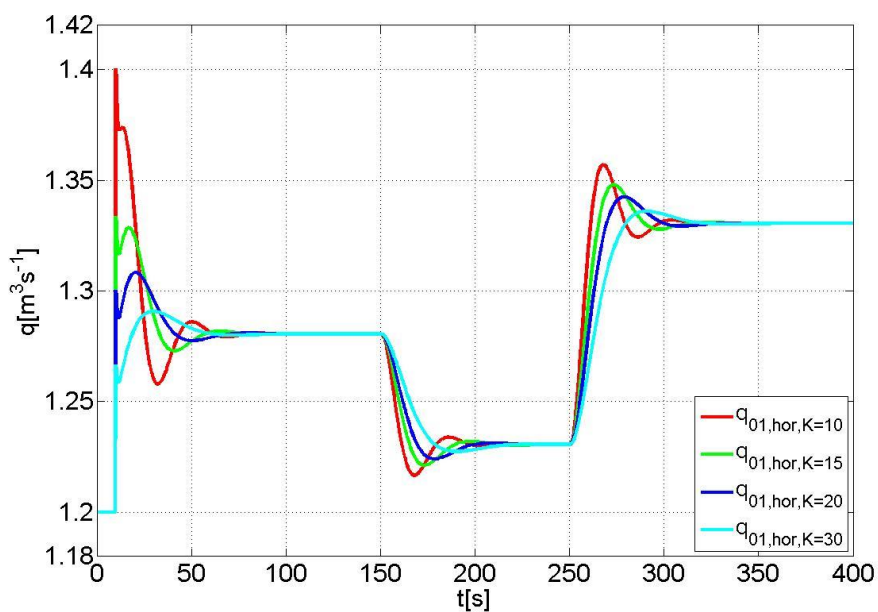
Obr. 6.3 Amplitúdové charakteristiky $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ pre rôzne hodnoty koeficienta K

Simuláciu riadenia sme vykonali v okolí troch pracovných bodov (PB) ustálených hodnôt výšok hladín. Žiadaná hodnota je o 10 % väčšia ako pôvodná ustálená hodnota riadenej veličiny h_3 . Delta okolie predstavuje $\pm 3\%$ žiadanej hodnoty w . Prvá porucha nastala v čase $t = 150$ s, keď sa prietok q_{02} zmenil z hodnoty $0.25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ na hodnotu $0.3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Druhá zmena prietoku poruchovej veličiny nastala v čase $t = 250$ s s hodnotou $q_{02} = 0.2 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

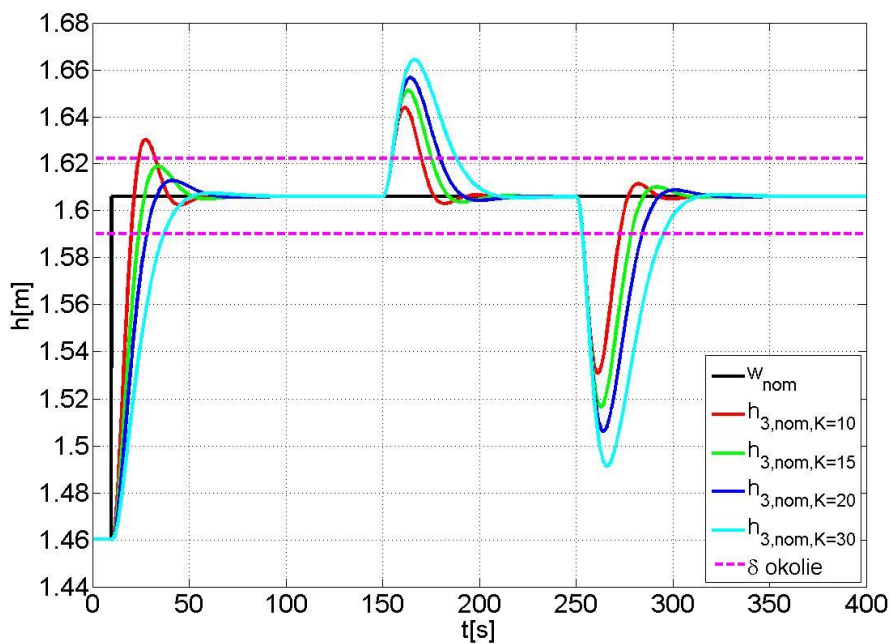
Z porovnania priebehov riadenej a riadiacej veličiny na obr. 6.4 – 6.9 možno povedať, že navrhnuté regulátory dokázali riadiť celú rodinu $G_k(s)$. So zvyšujúcim koeficientom K priebehy riadenej veličiny q_{01} vykazujú menšiu hodnotu maximálneho preregulovania pri riadení na žiadanú hodnotu, ale vplyv poruchy na systém narastal.



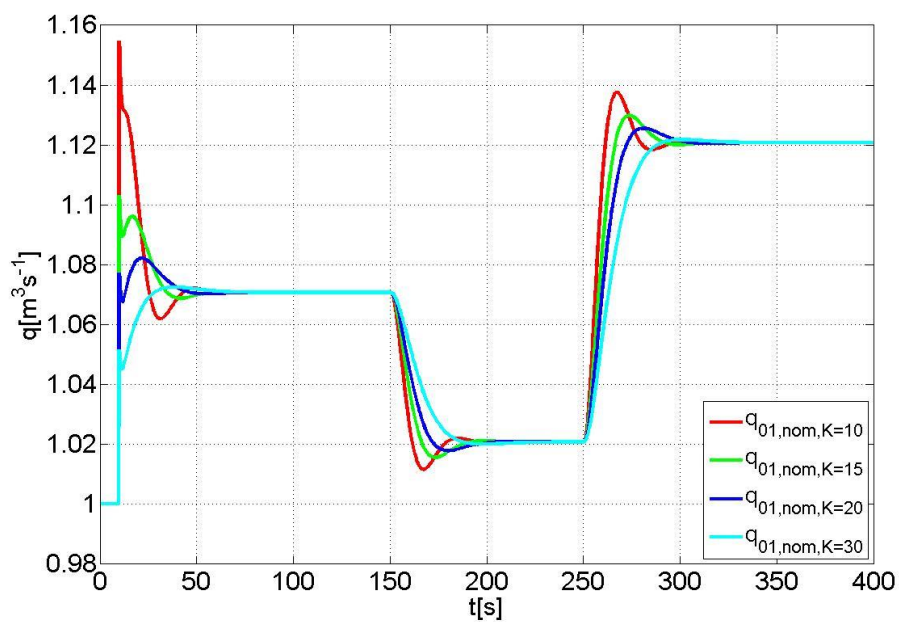
Obr. 6.4 Priebehy h_3 v okolí PB_{hor} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K



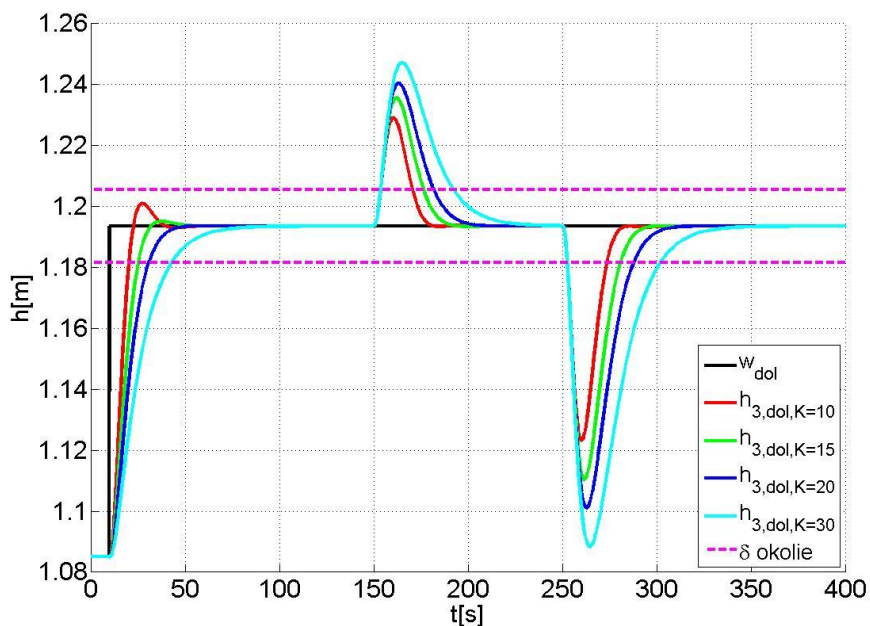
Obr. 6.5 Priebehy q_{01} v okolí PB_{hor} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K



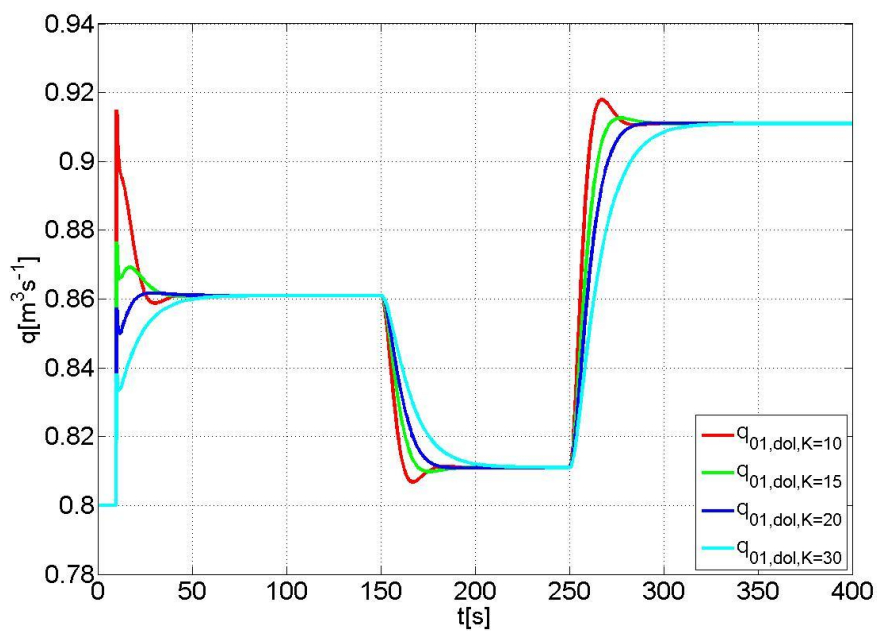
Obr. 6.6 Priebehy h_3 v okolí PB_{nom} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K



Obr. 6.7 Priebehy q_{01} v okolí PB_{hor} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K



Obr. 6.8 Priebehy h_3 v okolí PB_{dol} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K



Obr. 6.9 Priebeh riadiacej veličiny q_{01} v okolí PB_{hor} riadenej PID regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K

6.1.2 Návrh robustného PI regulátora metódou

D-rozkladu

Nech prenosové funkcie riadeného systému (6.12), (6.13) sú vyjadrené ako prenosová funkcia s intervalovými neurčitostami v tvare (2.8)

$$G_I(s) = \frac{[1.7; 2.36]}{[12; 38.3]s^3 + [23.8; 51.1]s^2 + [9.6; 14.1]s + 1}. \quad (6.22)$$

Pre daný intervalový prenos $G_I(s)$ (6.22) možno podľa vzťahov (4.8), (4.9) vyjadriť štyri Charitonovove polynómy menovateľa a dva Charitonovove polynómy čitateľa. Keďže máme v čitateli iba jeden neurčitý koeficient, celkovo možno vyjadriť osem Charitonovových systémov ako kombináciu koeficientov čitateľa a menovateľa podľa (4.7) pre $i = 1, 2$ a $l = 1, 2, 3, 4$.

Úlohou je nájsť parametre robustného PI regulátora v tvare (4.5), ktoré stabilizujú všetky Charitonovove systémy (4.7) v URO.

Uvažujme jeden Charitonovov systém z intervalového prenosu (6.22) pre $i = 2, l = 1$

$$G_{2,1} = \frac{2.36}{38.3s^3 + 23.8s^2 + 9.6s + 1}. \quad (6.23)$$

Potom CHR URO pre Charitonovov systém (6.23) a regulátor v tvare (4.5) je daná vzťahom

$$1 + \frac{2.36}{38.3s^3 + 23.8s^2 + 9.6s + 1} \frac{K_p s + K_i}{s} = 0. \quad (6.24)$$

Substitúciou za $s = j\omega$ do vzťahu (6.23) a rozdelením členov podľa (4.12) možno písať rovnice pre reálnu a imaginárnu časť

$$Re: \quad 38.3\omega^4 - 9.6\omega^2 + 2.36K_i = 0 \quad (6.25)$$

$$Im: \quad -26.8\omega^3 + \omega + 2.36K_p\omega = 0. \quad (6.26)$$

Z rovníc (6.25), (6.26) dostaneme vzťahy závislosti koeficientov regulátora od ω

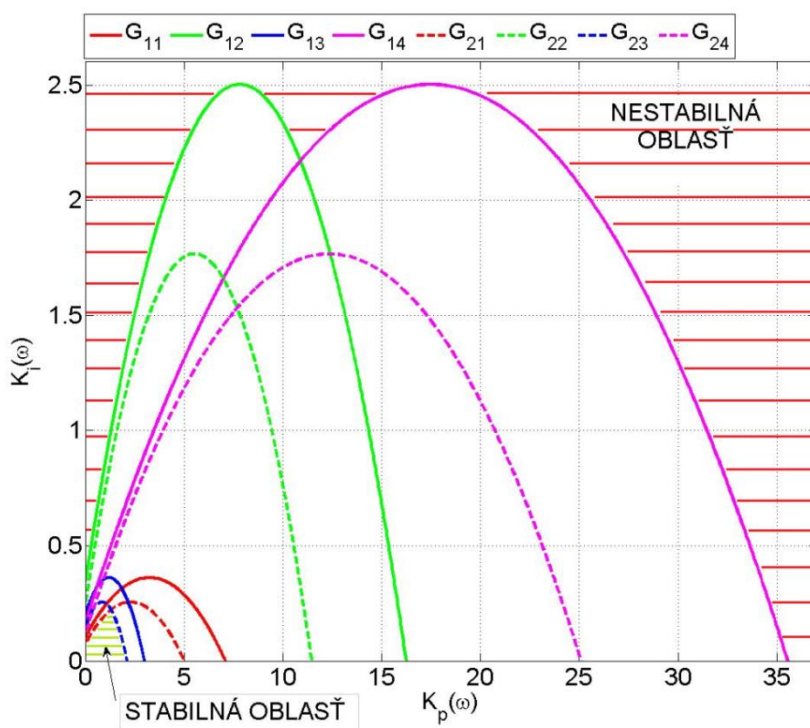
$$K_p = \frac{23.8\omega^2 - 1}{2.36} \quad (6.27)$$

$$K_i = \frac{9.6\omega^2 - 38.3\omega^4}{2.36}. \quad (6.28)$$

Vykreslením závislosti koeficientov K_p od K_i , kde $\omega \in (0,3)$ pre všetky Charitonovove systémy získame hranice stability koeficientov regulátora ôsmich Charitonovových systémov v URO. Oblasť prípustných parametrov robustného PI regulátora je daná prienikom prenosových funkcií $G_{2,1}(s)$, $G_{2,3}(s)$ v URO tak, ako je ukázané na obr. 6.10.

Prenosové funkcie PI regulátorov v tvare (4.5) pre vybrané stabilné koeficienty K_p , K_i majú predpisy

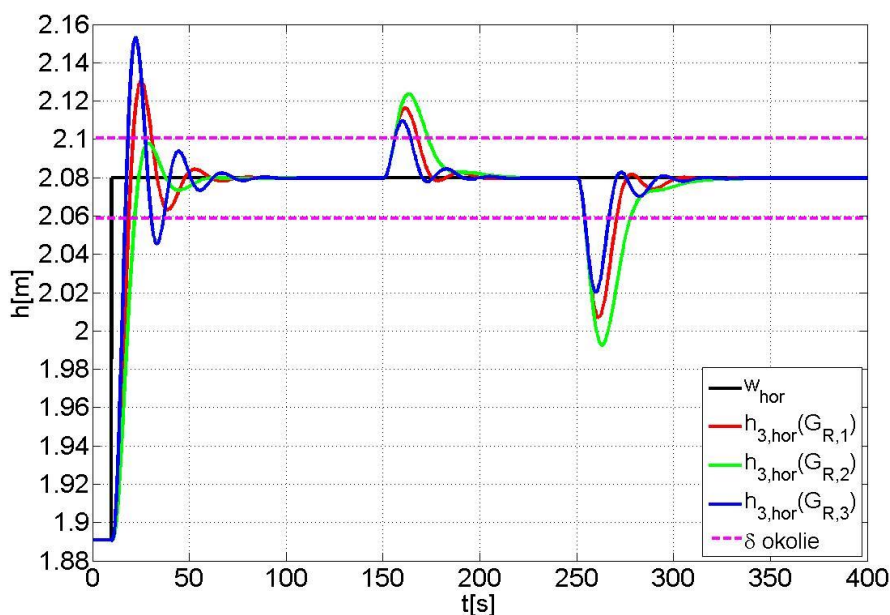
$$\begin{aligned} G_{R,1}(s) &= \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{1s + 0.1}{s} \\ G_{R,2}(s) &= \frac{0.7s + 0.06}{s} \\ G_{R,3}(s) &= \frac{1.5s + 0.14}{s}. \end{aligned} \quad (6.29)$$



Obr. 6.10 Oblasť prípustných koeficientov PI regulátora

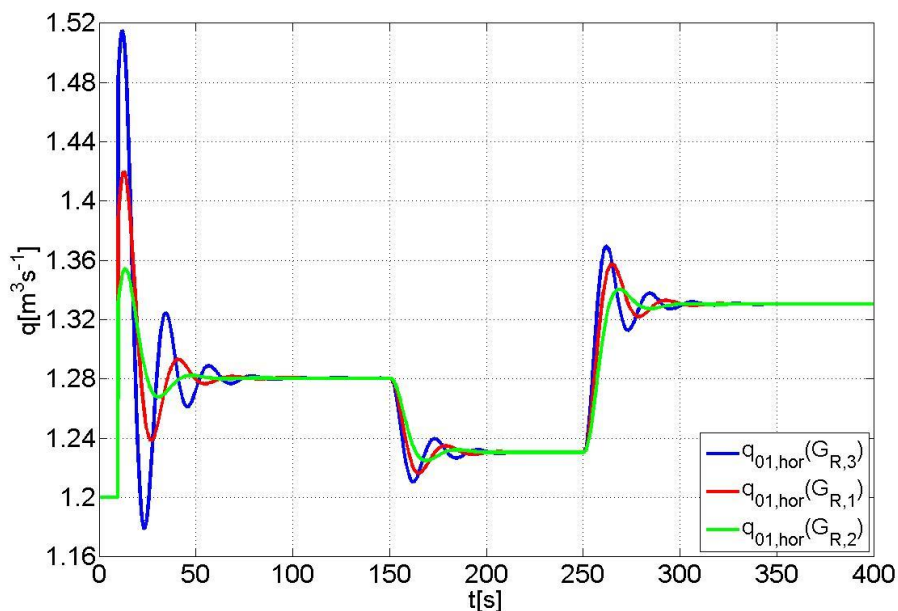
Priebehy riadenej a riadiacej veličiny s použitím regulátorov (6.29) sú na obr. 6.12 – 6.17. Regulátor $G_{R,2}(s)$, ktorého parametre sú zvolené ďalej od hranice stability, vykazoval najmenšie hodnoty maximálneho preregulovania, ale len pri riadení na žiadanú hodnotu. Nakoľko akčné zásahy boli menšie, vplyv poruchy na systém bol väčší. Naopak, čím sme koeficienty regulátora

volili bližšie k hranici stability, tým skôr dokázal regulátor odstrániť vplyv poruchy a jej vplyv na systém bol menší, ale maximálne preregulovanie pri riadení na žiadanú hodnotu bolo najväčšie.

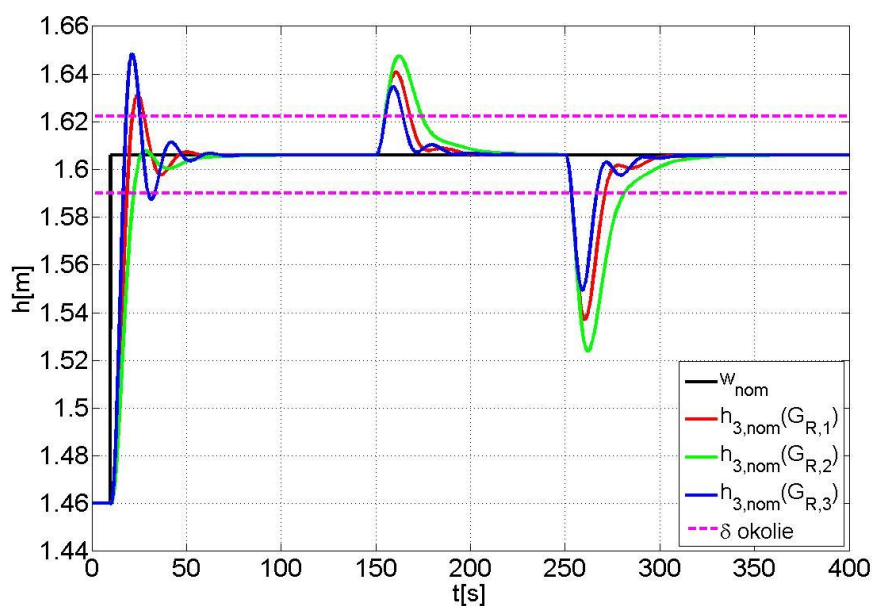


Obr.

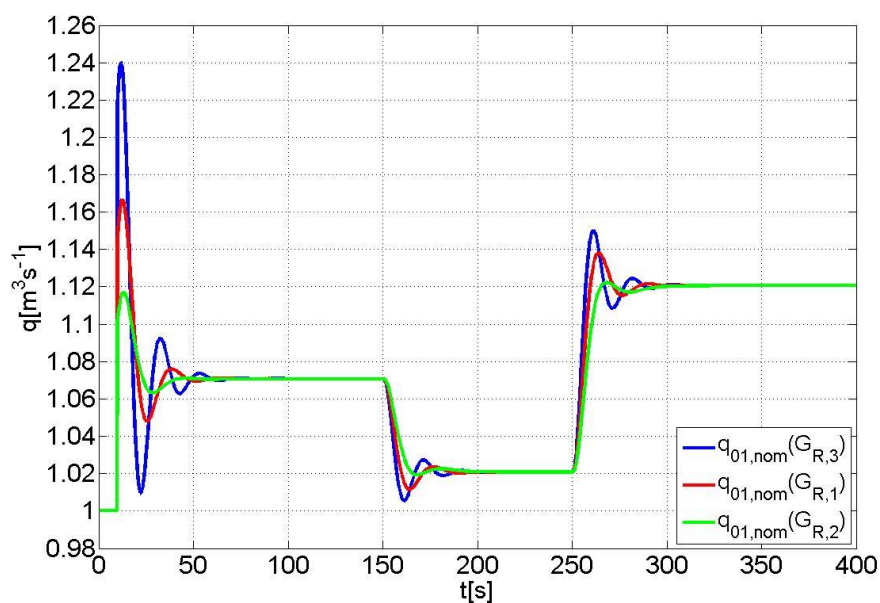
6.12 Priebeh h_3 v okolí PB_{hor} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$



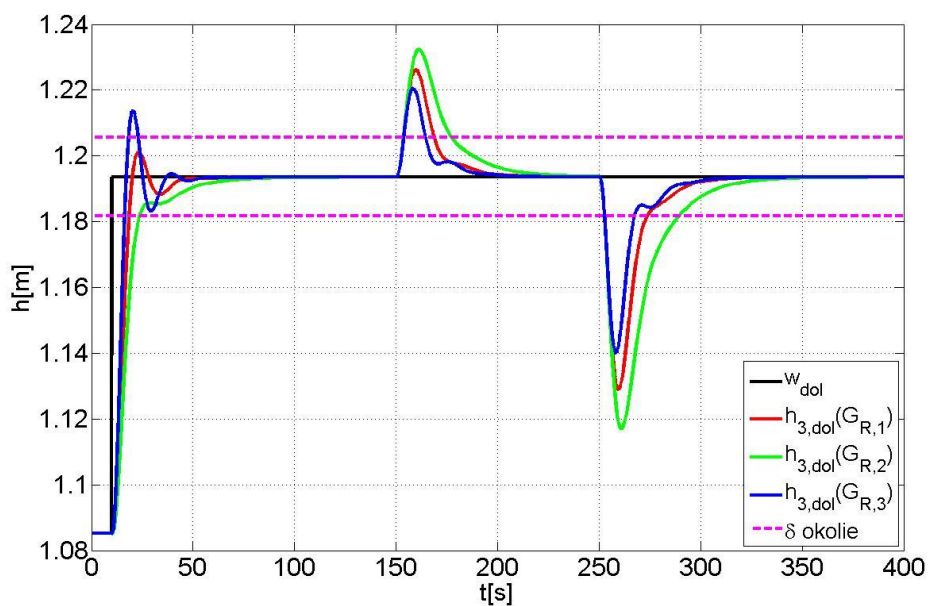
Obr. 6.13 Priebeh q_{01} v okolí PB_{hor} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$



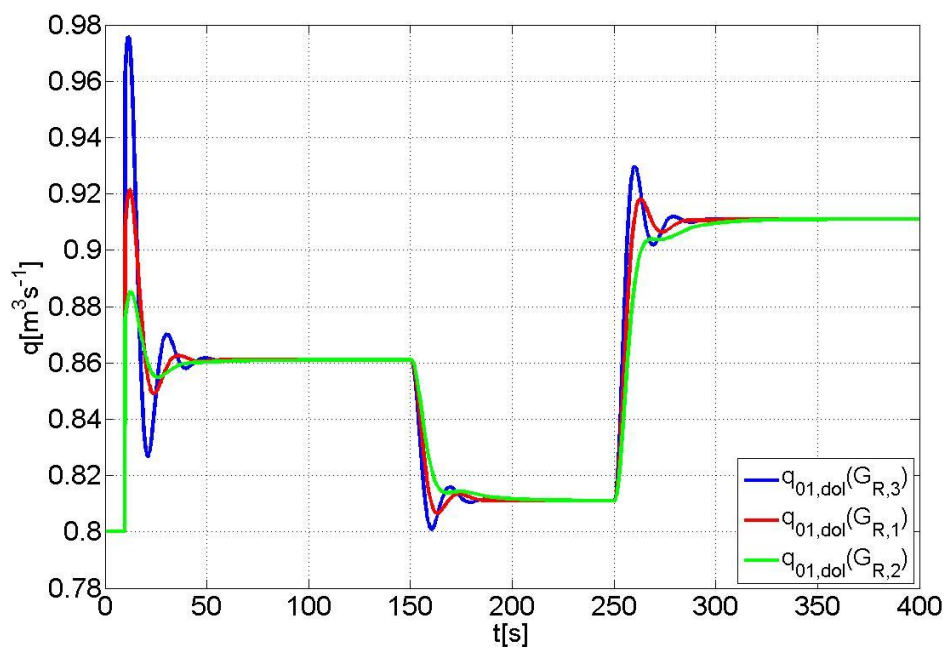
Obr. 6.14 Pribeh h_3 v okolí PB_{nom} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$



Obr. 6.15 Pribeh q_{01} v okolí PB_{nom} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$



Obr. 6.16 Priebeh h_3 v okolí PB_{dol} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$



Obr. 6.17 Priebeh q_{01} v okolí PB_{dol} riadenej PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu pre konkrétne hodnoty K_p , K_i regulátorov $G_{R,1}$, $G_{R,2}$, $G_{R,3}$

6.1.3 Návrh robustného regulátora pomocou H_∞ zmiešanej citlivosti

Syntézu H_∞ regulátora sme uskutočnili prostredníctvom príkazu *mixsyn* v prostredí MATLAB vzhľadom k nominálnemu modelu (6.14). Pred samotnou syntézou sme definovali váhové funkcie $W_1(s)$, $W_2(s)$, kde $W_1(s)$ tvaruje citlivostnú funkciu a $W_2(s)$ komplementárnu citlivostnú funkciu. Podrobnejšie informácie sú uvedené v kapitole 5. Váhové funkcie sme volili pre návrh troch robustných regulátorov $G_{R,1,2,3}(s)$.

Optimalizačný problém H_∞ regulátora zmiešanej citlivosti spočíva v nájdení stabilizačného regulátora, ktorý minimalizuje normu $\left\| \begin{matrix} W_1(j\omega)S(j\omega) \\ W_2(j\omega)T(j\omega) \end{matrix} \right\|_\infty$.

Pre váhové funkcie (6.30) je navrhnutý regulátor $G_{R,1}(s)$

$$\begin{aligned} W_{1,1}(s) &= \frac{\left(\frac{s}{2} + 0.5\right)}{440s + 0.0008} \\ W_{2,1}(s) &= 0.01 \\ G_{R,1}(s) &= \frac{0.19s^3 + 0.28s^2 + 0.089s + 0.0075}{s^4 + 1.705s^3 + 0.81s^2 + 0.166s} \\ \gamma_1 &= 0.0165. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Pre váhové funkcie (6.31) je navrhnutý regulátor $G_{R,2}(s)$

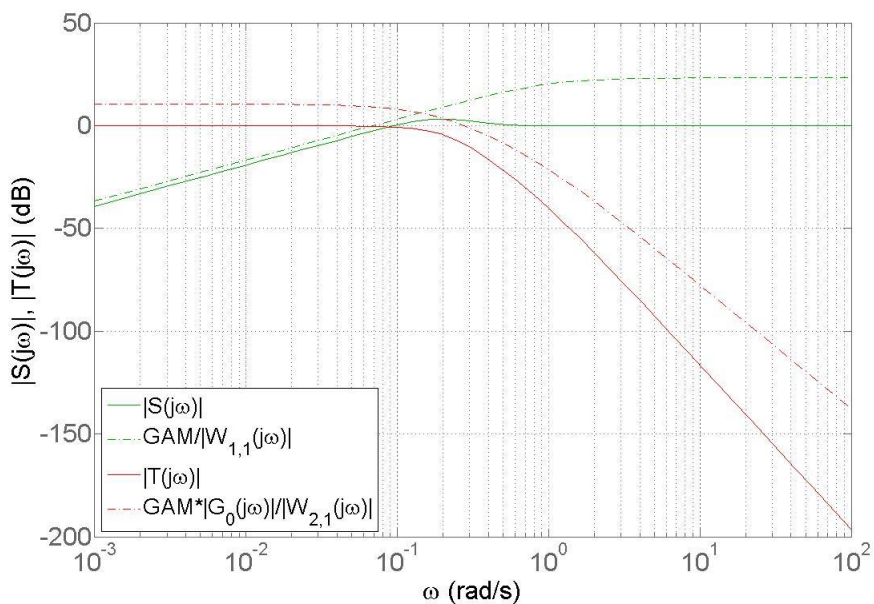
$$\begin{aligned} W_{1,2}(s) &= \frac{\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{200s + 0.0008} \\ W_{2,2}(s) &= 0.01 \\ G_{R,2}(s) &= \frac{1.68s^3 + 2.5s^2 + 0.7921s + 0.067}{s^4 + 2.34s^3 + 1.94s^2 + 0.75s} \\ \gamma_2 &= 0.0297. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Pre váhové funkcie (6.32) je navrhnutý regulátor $G_{R,3}(s)$

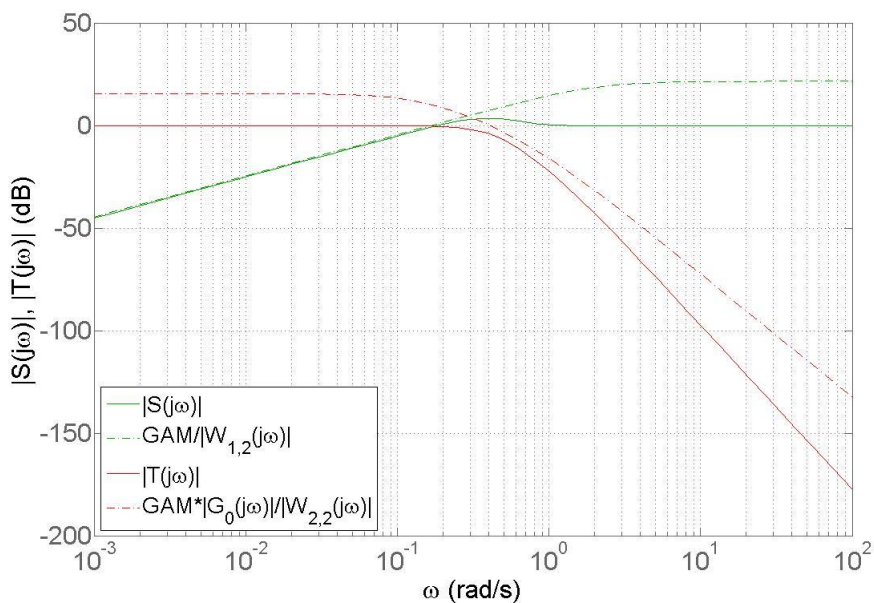
$$\begin{aligned} W_{1,3}(s) &= \frac{\left(\frac{s}{2} + 4\right)}{200s + 0.0008} \\ W_{2,3}(s) &= 0.01 \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$G_{R,3}(s) = \frac{134.1s^3 + 199.8s^2 + 63.37s + 5.336}{s^4 + 23.59s^3 + 46.83s^2 + 33.46s}$$

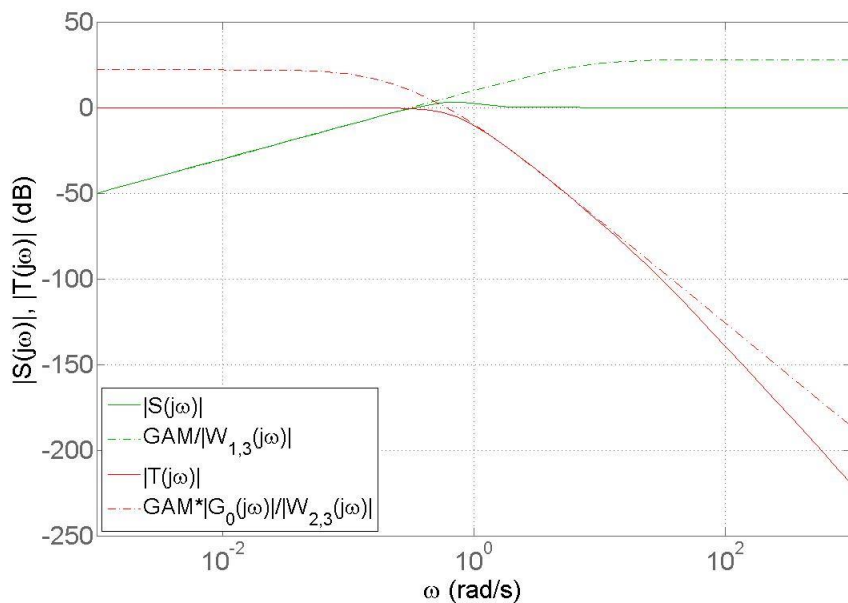
$$\gamma_3 = 0.0625.$$



Obr. 6.18 Amplitúdové charakteristiky $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ pre navrhnutý regulátor $G_{R,1}(s)$

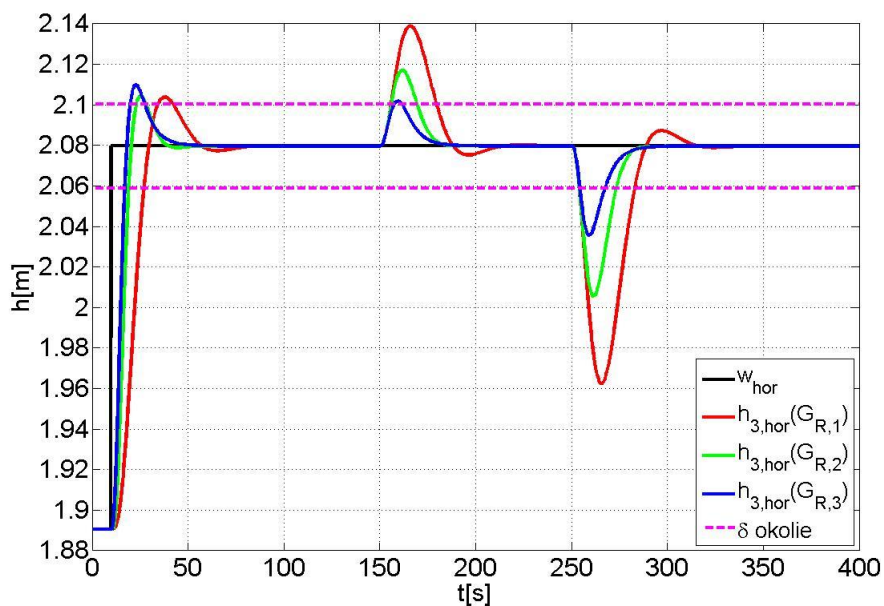


Obr. 6.19 Amplitúdové charakteristiky $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ pre navrhnutý regulátor $G_{R,2}(s)$

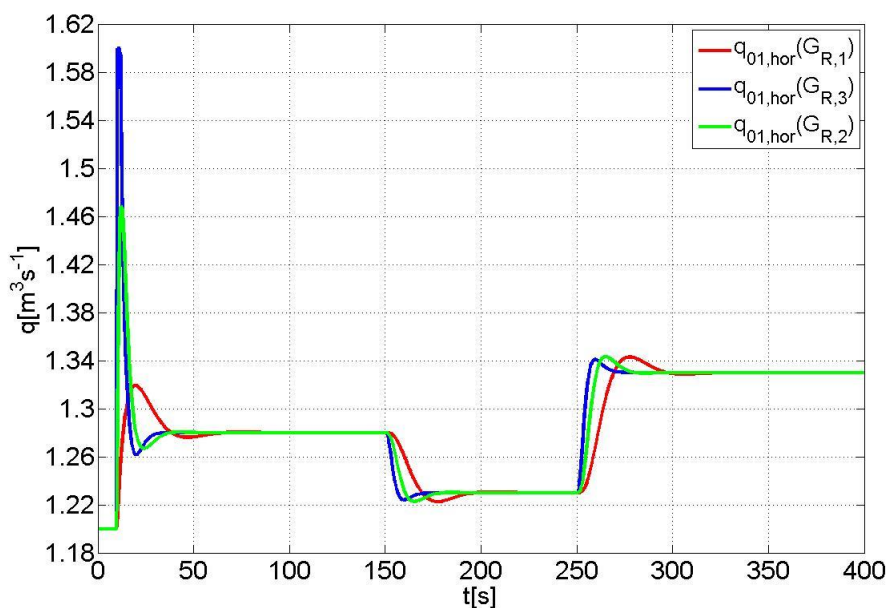


Obr. 6.20 Amplitúdové $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$ pre navrhnutý regulátor $G_{R,3}(s)$

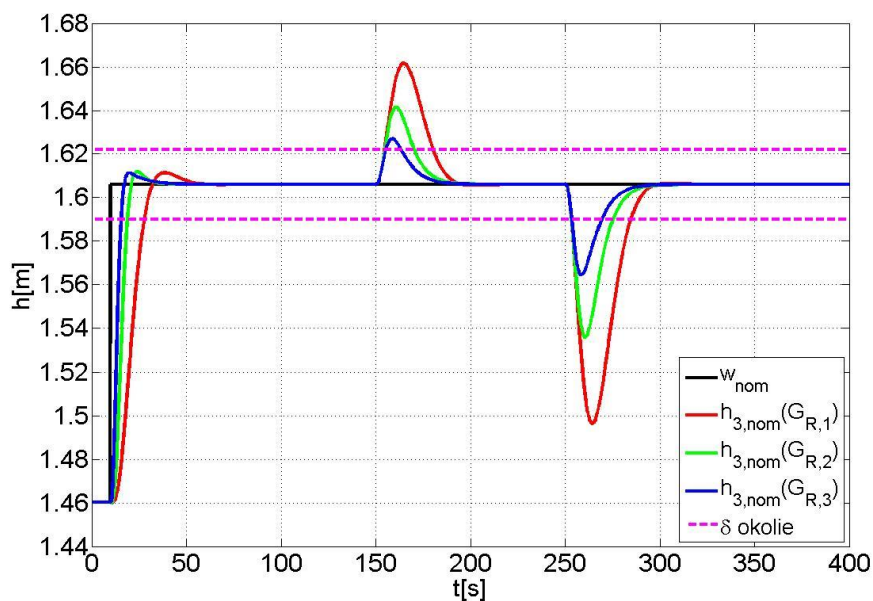
Priebehy riadenej a riadiacej veličiny sú na obr. 6.21 – 6.26.



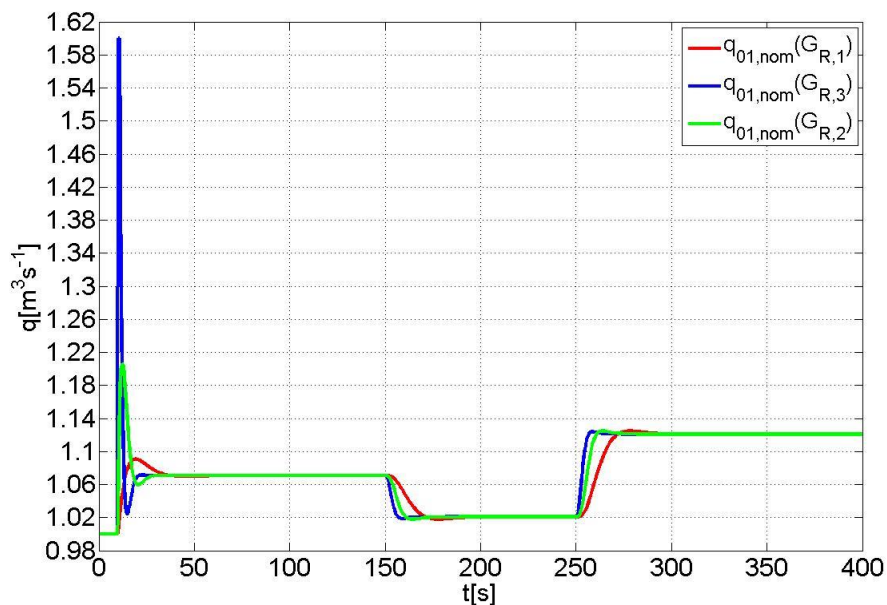
Obr. 6.21 Priebeh h_3 v okolí PB_{hor} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,3}(s)$ navrhnutými metódou H_∞ zmiešanej citlivosti



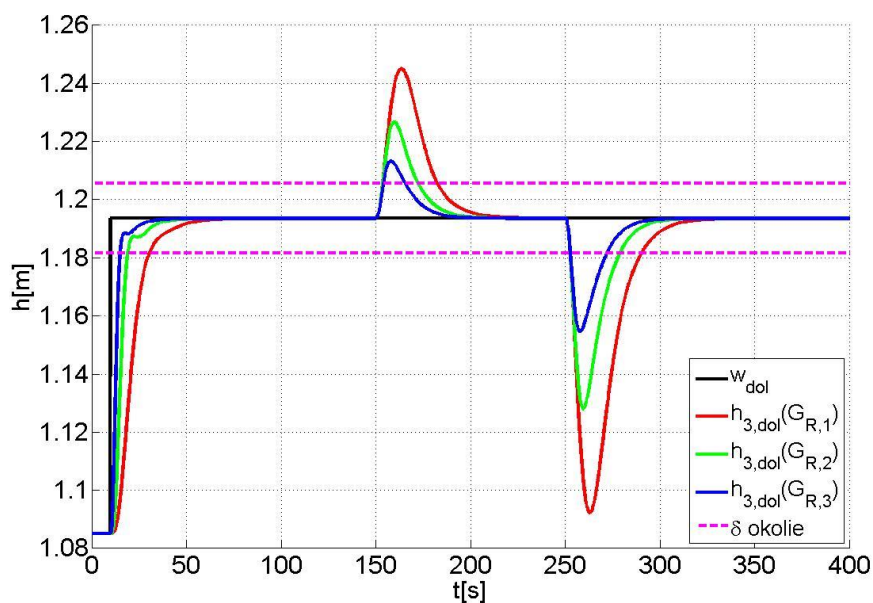
Obr. 6.22 Priebeh q_{01} v okolí PB_{hor} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,2}(s)$ navrhnutými metódou H_{∞} zmiešanej citlivosti



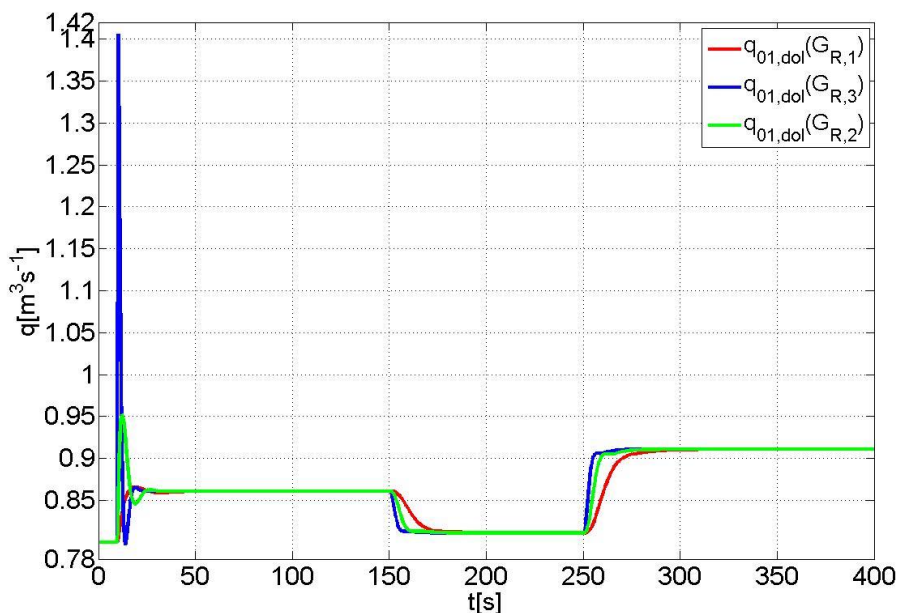
Obr. 6.23 Priebeh h_3 v okolí PB_{nom} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,3}(s)$ navrhnutými metódou H_{∞} zmiešanej citlivosti



Obr. 6.24 Pribeh q_{01} v okolí PB_{nom} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,3}(s)$ navrhnutými metódou H_{∞} zmiešanej citlivosti



Obr. 6.25 Pribeh h_3 v okolí PB_{dol} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,3}(s)$ navrhnutými metódou H_{∞} zmiešanej citlivosti



Obr. 6.26 Priebeh q_{01} v okolí PB_{dol} riadenej regulátormi $G_{R,1,2,3}(s)$ navrhnutými metódou H_∞ zmiešanej citlivosti

6.1.4 Porovnanie metód syntézy regulátorov

Pre porovnanie kvality navrhnutých regulátorov boli použité vybrané ukazovatele kvality:

Čas regulácie

Čas regulácie t_{reg} predstavuje hodnotu času, kedy sa riadená veličina dostane do δ -okolia žiadanej veličiny a toto okolie neopustí.

Maximálne preregulovanie

Maximálne preregulovanie σ_{max} udáva veľkosť maximálnej regulačnej odchýlky v percentách

$$\sigma_{max} = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty - y_0} 100. \quad (6.33)$$

Trvalá regulačná odchýlka (TRO)

Trvalá regulačná odchýlka predstavuje rozdiel medzi žiadanou hodnotou výstupu a výstupnou riadenou veličinou v ustálenom stave

$$e_{\infty} = w_{\infty} - y_{\infty} . \quad (6.34)$$

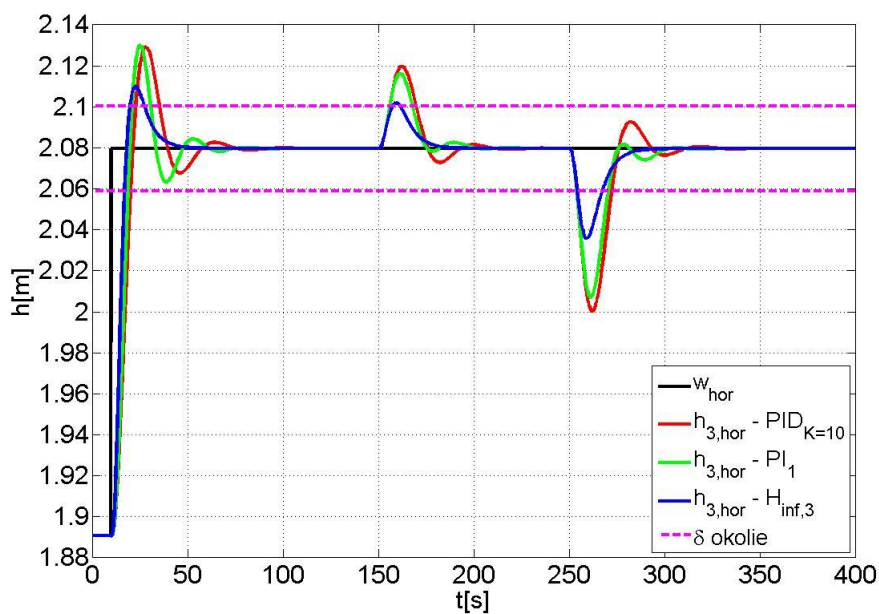
Integral absolute value of error (IAE)

IAE vyjadruje plochu medzi žiadanou hodnotou a priebehom riadenej veličiny a je daná vzťahom

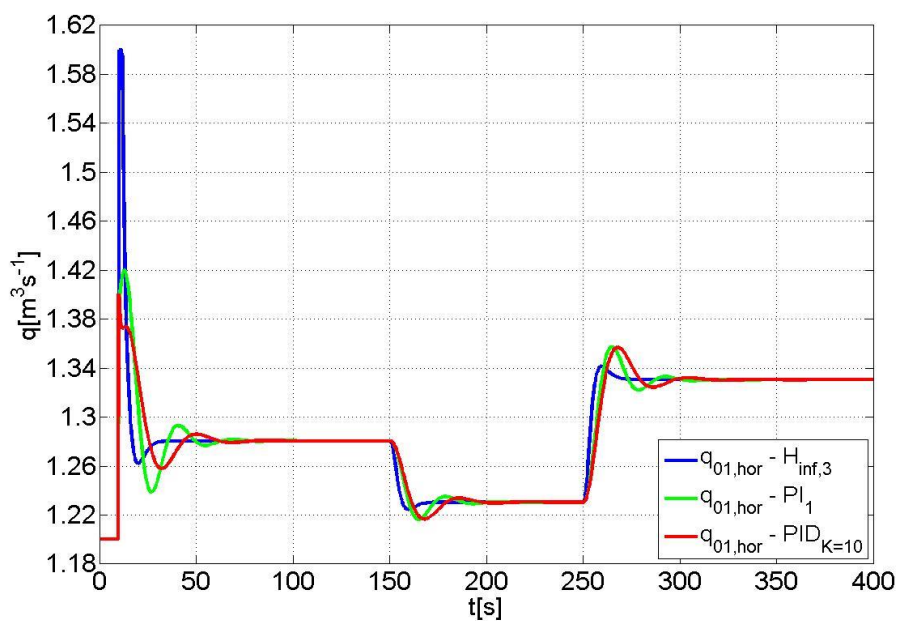
$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt . \quad (6.35)$$

Aby sme porovnali rôzne metódy návrhu regulátorov, vybrali sme z každej metódy najvhodnejší regulátor tak, aby bol čo najodolnejší voči vplyvu poruchy, ale s prihliadnutím na maximálne preregulovanie a čas regulácie pri riadení na žiadanú hodnotu. Z regulátorov navrhnutých metódou malého zosilnenia sme vybrali $G_{R,10}(s)$, ktorý síce mal väčšie maximálne preregulovanie pri riadení na žiadanú hodnotu, ale najrýchlejšie odstraňoval poruchu a s najmenším maximálnym preregulovaním. Z metódy D-rozkladu sme vybrali regulátor $G_{R,1}(s)$ a z metódy H_{∞} zmiešanej citlivosti regulátor $G_{R,3}(s)$.

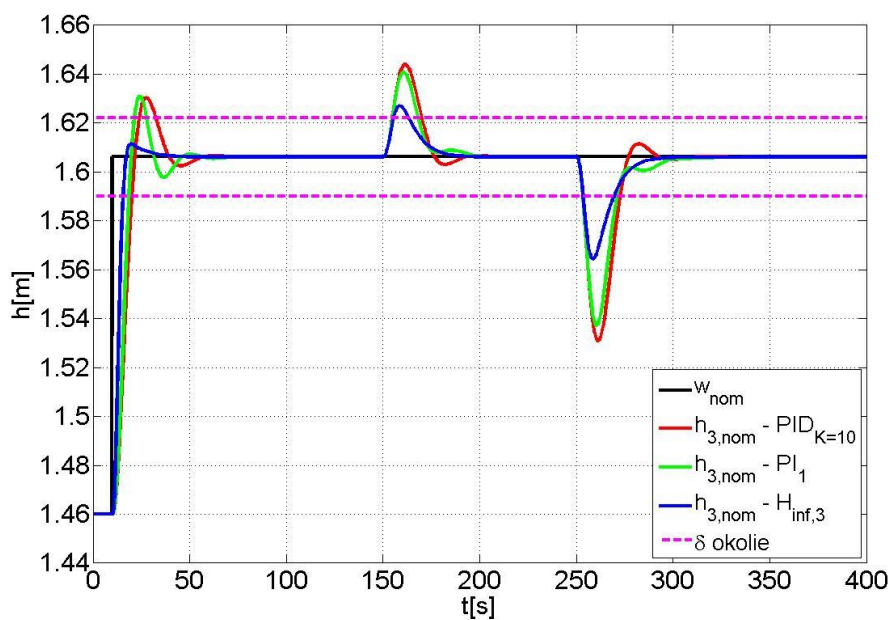
Z priebehov riadenej a riadiacej veličiny na obr. 6.24 – 6.29 a tabuliek hodnôt ukazovateľov kvality (Tabuľka 1, 2, 3) možno povedať, že všetky regulátory dokázali riadiť systém na požadovanú hodnotu riadenej veličiny bez trvalej regulačnej odchýlky. Riadenie systému pomocou regulátora navrhnutého metódou H_{∞} zmiešanej citlivosti vykazovalo najkratší čas regulácie, najmenšie hodnoty absolútnej integračnej odchýlky a najmenšie hodnoty maximálneho preregulovania pri riadení na žiadanú hodnotu aj pri odstránení vplyvu poruchy. Systém bol najmenej náchylný na pôsobenie poruchy, ale vykazoval najväčšie hodnoty akčného zásahu, ktorý pri riadení systému v okolí horného a nominálneho PB dosiahol horné obmedzenie. Riadenie systému PID regulátorom bolo najpomalšie, porucha mala najväčší vplyv na zmenu riadenej veličiny, ale hodnoty ukazovateľov kvality v porovnaní s PI regulátorom sú veľmi podobné.



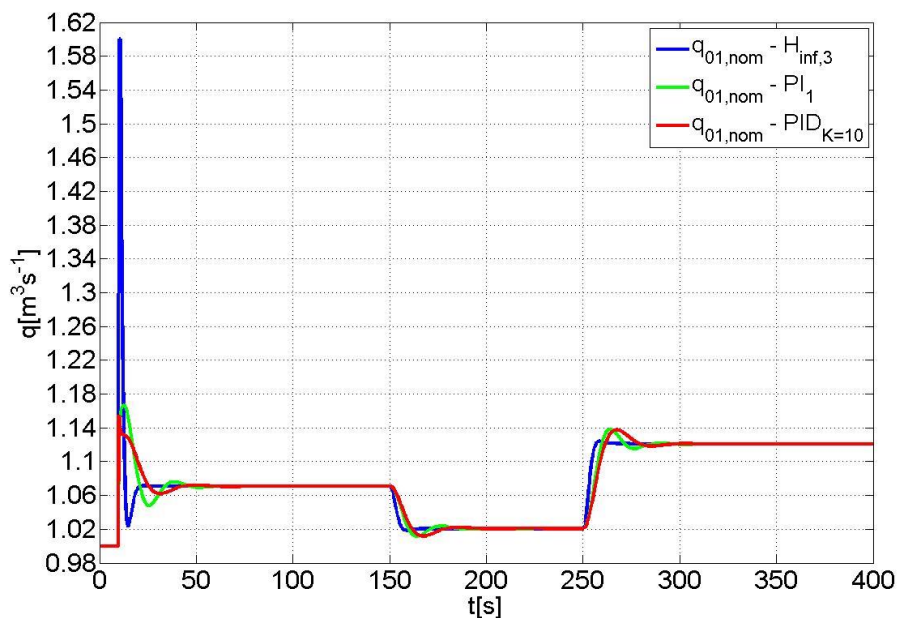
Obr. 6.24 Priebehy riadenej veličiny h_3 pre vybrané regulátory v okolí PB_{hor}



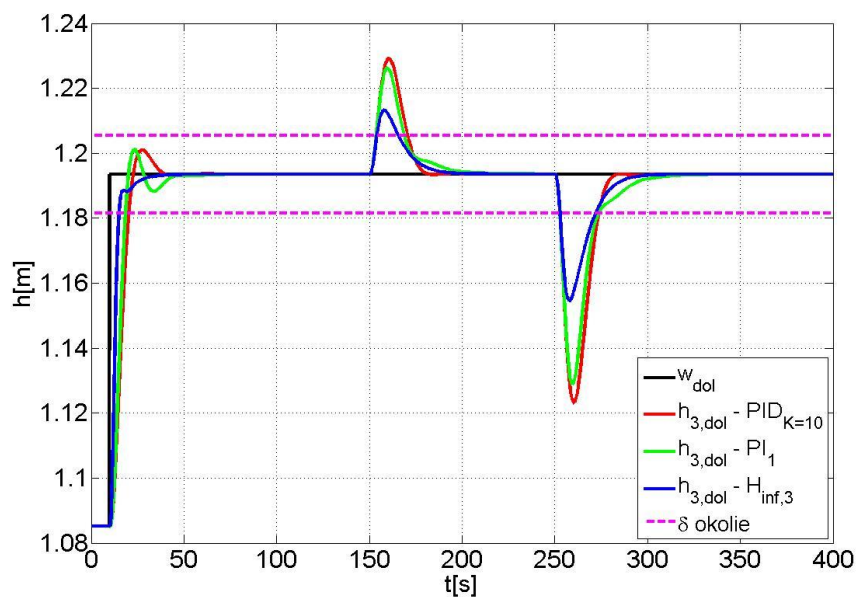
Obr. 6.25 Priebehy riadiacej veličiny q_{01} pre vybrané regulátory v okolí PB_{hor}



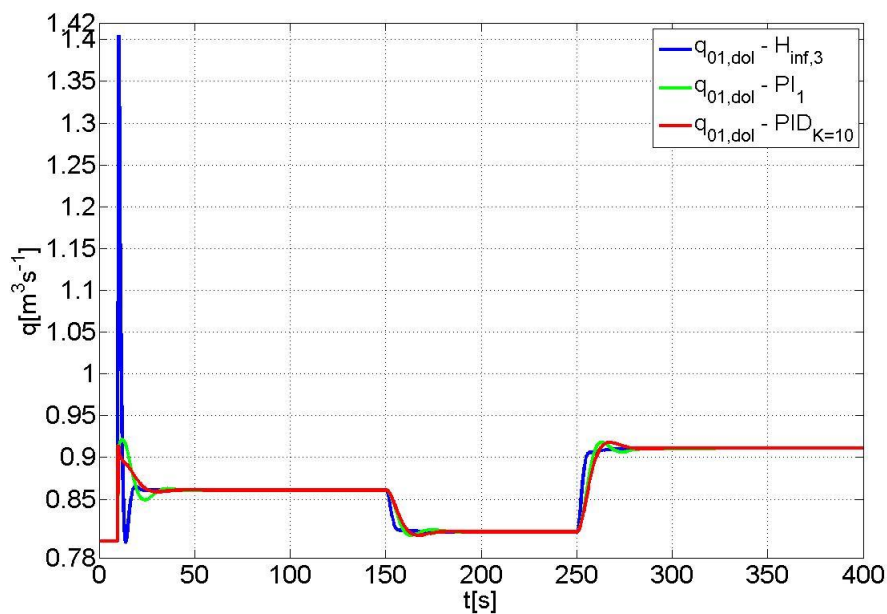
Obr. 6.26 Priebehy riadenej veličiny h_3 pre vybrané regulátory v okolí PB_{nom}



Obr. 6.27 Priebehy riadiacej veličiny q_{01} pre vybrané regulátory v okolí PB_{nom}



Obr. 6.28 Priebėhy riadenej veličiny h_3 pre vybrané regulátory v okolí PB_{dol}



Obr. 6.29 Priebėhy riadiacej veličiny q_{01} pre vybrané regulátory okolí PB_{dol}

Tabuľka 1 Porovnanie ukazovateľov kvality pre vybrané regulátory v okolí PB_{nom}

PB_{nom}	$q_{02} = 0.25[m^3 s^{-1}]$			$q_{02} = 0.3[m^3 s^{-1}]$			$q_{02} = 0.2[m^3 s^{-1}]$		
	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]
PID	22.3	1.22	16.6	20	26	0.56	22.6	1.1	51.6
PI	17.5	1.09	17.1	18	23.7	0.5	21	1	47.2
H_{∞}	5.5	0.56	3.6	13.2	14.33	0.31	19.2	0.63	28.5

Tabuľka 2 Porovnanie ukazovateľov kvality pre vybrané regulátory v okolí PB_{hor}

PB_{hor}	$q_{02} = 0.25[m^3/s]$			$q_{02} = 0.3[m^3 s^{-1}]$			$q_{02} = 0.2[m^3 s^{-1}]$		
	t_{reg} [s]	AIO	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	AIO	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	AIO	σ_{max} [%]
PID	25	1.96	26.2	19.7	0.66	21.3	22.4	1.29	42.1
PI	20.5	1.74	26.6	17.8	0.52	19.2	20.6	1.02	38.4
H_{∞}	7	1.21	16	11.3	0.31	11.7	17.5	0.63	23.3

Tabuľka 3 Porovnanie ukazovateľov kvality pre vybrané regulátory v okolí PB_{nom}

PB_{dol}	$q_{02} = 0.25[m^3 s^{-1}]$			$q_{02} = 0.3[m^3 s^{-1}]$			$q_{02} = 0.2[m^3 s^{-1}]$		
	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]	t_{reg} [s]	IAE	σ_{max} [%]
PID	10.3	0.75	6.8	20.6	0.5	32.7	23.6	1	64.9
PI	8.5	0.69	6.9	18.7	0.5	30.1	23.7	1	59.6
H_{∞}	5	0.38	0	15.6	0.31	18.1	22	0.63	36.1

6.2 Riadenie nestabilného systému metódou H_∞ zmiešanej citlivosti

Nestabilný systém je opísaný prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{s+1}{s-1}. \quad (6.36)$$

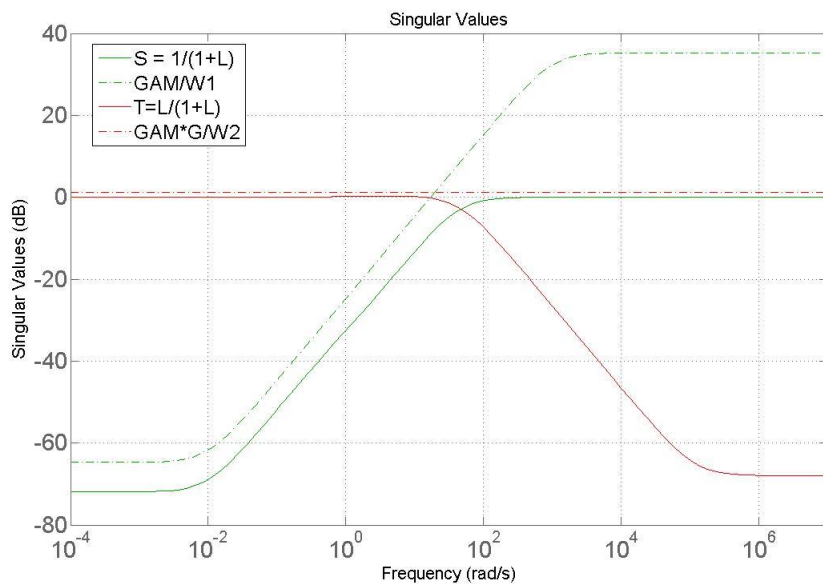
Váhové funkcie $W_1(s)$, $W_2(s)$ sú v tvare

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{0.1(s+1000)}{100s+0.001} \\ W_2(s) &= 0.05. \end{aligned} \quad (6.37)$$

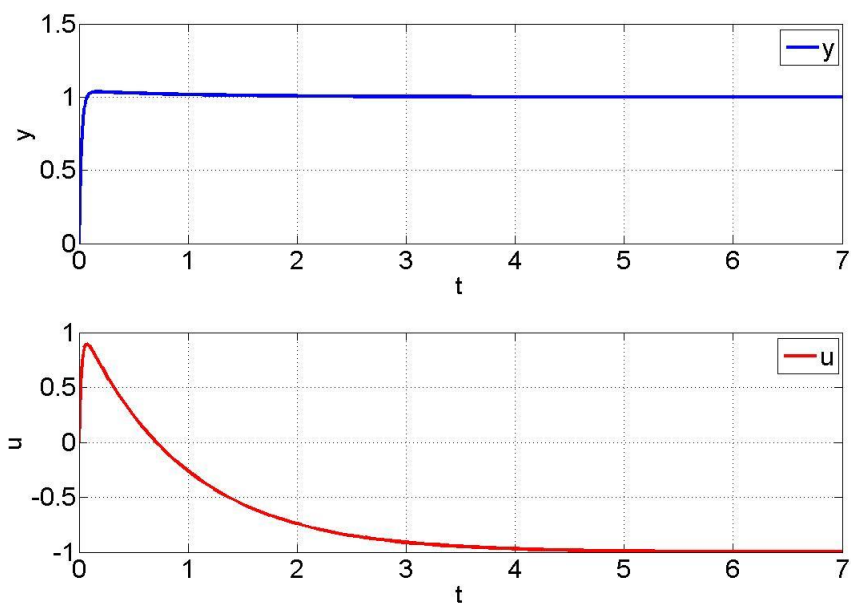
Syntézu H_∞ regulátora sme uskutočnili prostredníctvom príkazu *mixsyn*. Polynomický regulátor, ktorý stabilizuje daný systém, je určený prenosovou funkciou

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{0.0004s^2 + 47.33s + 39.59}{s^2 + 1.01s + 0.01} \\ \gamma &= 0.0580 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Overenie robustnej stability a kvality regulácie je znázornené na obr. 6.30. Z priebehu riadenej veličiny (obr. 6.31) vidíme, že regulátor riadil výstup na žiadanú hodnotu.



Obr. 6.30 Frekvenčné charakteristiky $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$



Obr. 6.31 Priebeh riadenej a riadiacej veličiny nestabilného systému riadenej regulátorom navrhnutým metódou H_∞ zmiešanej citlivosti

7 Riadenie laboratórneho procesu

AMIRA DTS 200

Obsahom praktickej časti diplomovej práce je návrh robustných regulátorov pre riadenie laboratórneho procesu sústavy zásobníkov kvapaliny AMIRA DTS200.



Obr. 7.1 Laboratórny systém troch zásobníkov kvapaliny s interakciou

Riadený systém na obr. 7.1 je sústava troch valcových zásobníkov s rovnakým priemerom a výškou. Obsahuje šesť ventilov, z čoho štyri slúžia na vypúšťanie kvapaliny a dva na ich sériové prepojenie. Kvapalina z rezervoáru sa do zásobníkov dopraví pomocou dvoch čerpadiel. Zo zásobníkov vyteká do rezervoára alebo do iného zásobníka, preto hovoríme o uzavretom recirkulačnom zariadení.

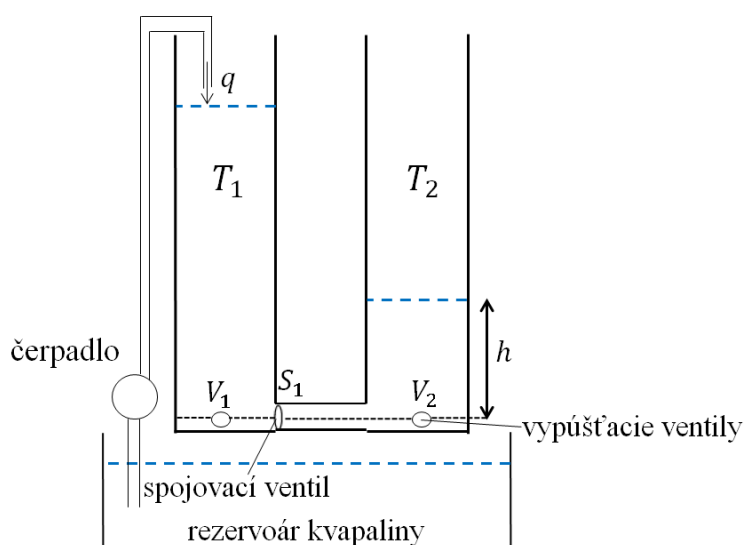
Prvkami riadeného systému sú dva ovládacie panely (obr. 7.2). Modrou farbou je zvýraznená časť panela, ktorá nám umožňuje nastaviť čerpadlá do manuálneho/automatického režimu. Svetelné diódy označené oranžovou farbou v druhom paneli signalizujú polohu ventilov otvorený/uzavretý a činnosť otvárania/zatvárania. Ventily je možné riadiť automaticky alebo manuálne. Ovládanie sústavy je vykonávané v programovom prostredí MATLAB-Simulink. Komunikáciu medzi programom a reálnym zariadením zabezpečuje RealTime Toolbox.



Obr. 7.2 Ovládacie panely

7.1 Opis riadeného systému

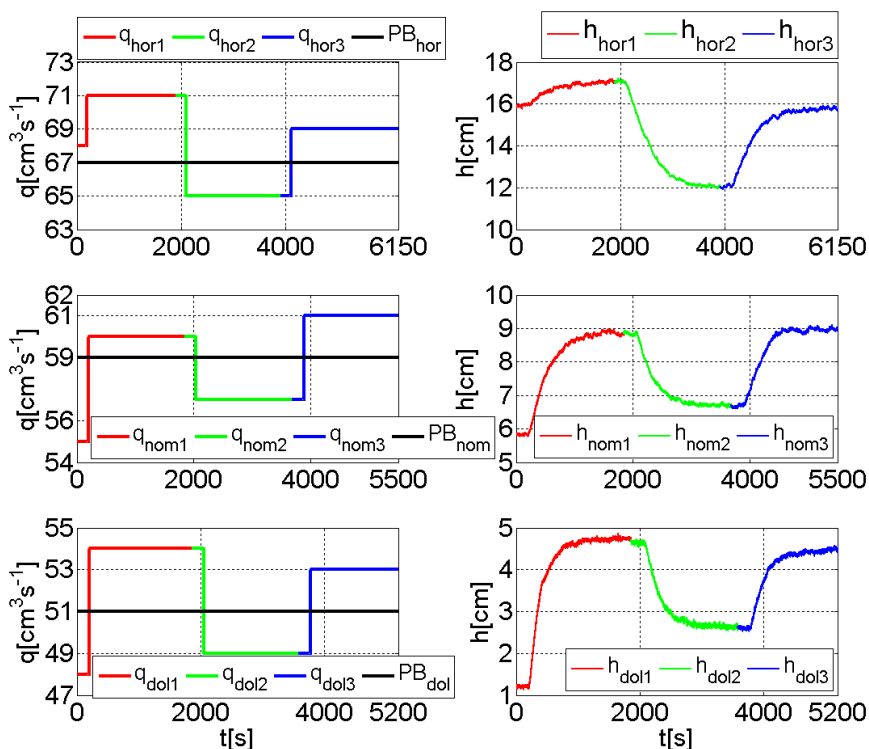
Obr. 7.3 ilustruje zjednodušený riadený systém dvoch zásobníkov. Úlohou bolo riadiť výšku hladiny kvapaliny v druhom zásobníku h v okolí troch pracovných bodov pomocou prietoku kvapaliny q . Ventily boli nastavené nasledovne: V_1 zatvorený, spojovací ventil S_1 otvorený, ventil V_2 otvorený na 50%.



Obr. 7.3 Riadený systém zásobníkov

7.2 Identifikácia systému

Pre identifikáciu systému boli vykonané skokové zmeny vstupného prietoku q v okolí troch PB. Grafické priebehy skokových zmien vstupnej veličiny a odozvy systému na tieto skokové zmeny sú znázornené na obr. 7.4.



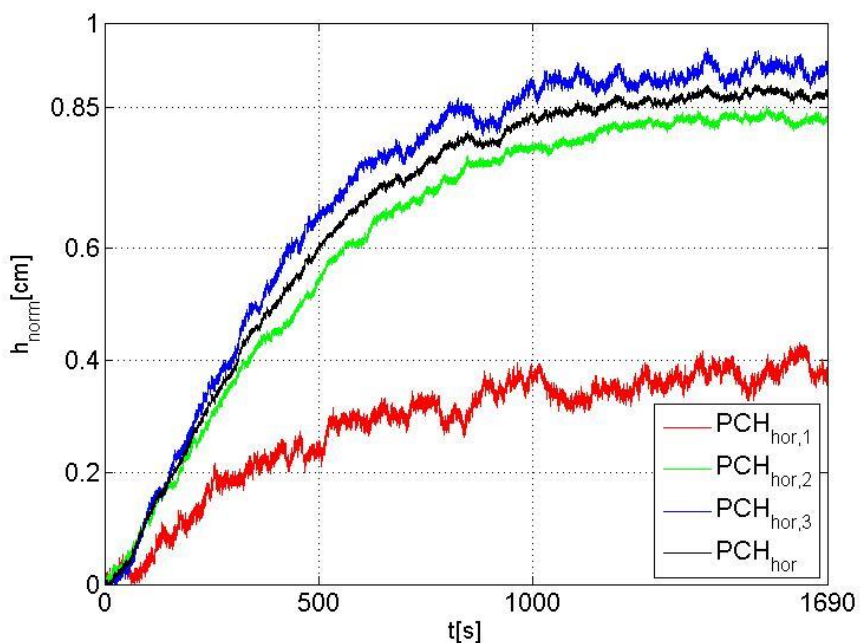
Obr. 7.4 Skokové zmeny vstupov v okolí PB a odozvy systému na uvedené skokové zmeny vstupov v okolí PB

Normované odozvy systému v PB a priemerné PCH sú na obr. 7.5 – 7.7. Výslednú PCH v troch PB sme vypočítali ako aritmetický priemer troch normovaných PCH vzťahom

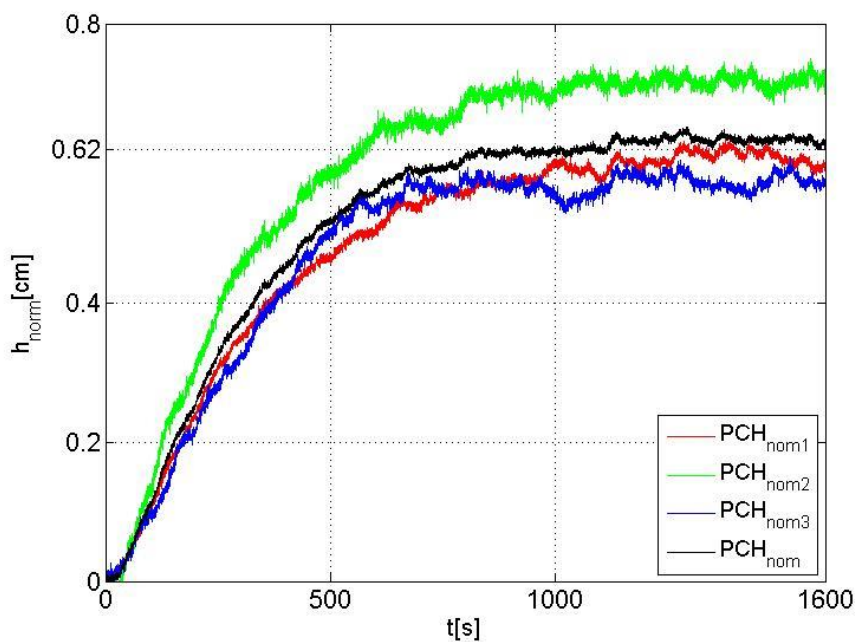
$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{k=1}^N y_{ik}}{N}, \quad (7.1)$$

kde $\hat{y}_i$ je aritmetický priemer výstupov v každom bode, y_{ik} sú namerané výstupy v každom bode pre tri merania a N je počet meraní.

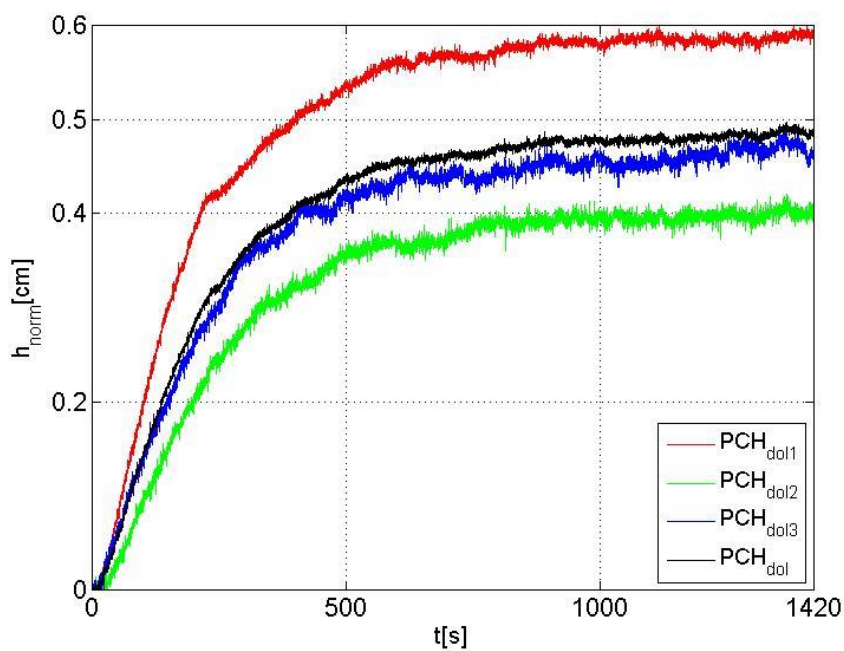
Z grafických priebehov PCH možno povedať, že prvá PCH v hornom pracovnom bode ($PCH_{hor,1}$) sa od $PCH_{hor,2}$ a $PCH_{hor,3}$ príliš odlišuje a preto sme s ňou pri ďalších výpočtoch nepočítali. Šum bol spôsobený kmitaním povrchu kvapaliny.



Obr. 7.5 Prechodové charakteristiky v okolí PB_{hor}



Obr. 7.6 Prechodové charakteristiky v okolí PB_{nom}



Obr. 7.7 Prechodové charakteristiky v okolí PB_{dol}

Systém dvoch zásobníkov bol identifikovaný ako systém druhého rádu s rovnakými časovými konštantami (7.2)

$$G(s) = \frac{Z}{(Ts + 1)^2} e^{-Ds}. \quad (7.2)$$

Zosilnenie systému Z sme odčítali zo spriemerovanej PCH v okolí troch PB ako hodnotu ustáleného výstupu $y(\infty)$. Pri výpočte časovej konštanty T a dopravného oneskorenia D sme vychádzali z rovnice výstupu v časovej oblasti a dvoch bodov nachádzajúcich sa na krivke PCH. Z rovníc výstupu v časovej oblasti (7.3), (7.4) sme vypočítali časy t_{n1} , t_{n2} [5].

$$y_1(t_1) = Z(1 - e^{-t_{n1}(1 + t_{n1})}) \quad (7.3)$$

$$y_2(t_2) = Z(1 - e^{-t_{n2}(1 + t_{n2})}), \quad (7.4)$$

kde $y_1(t_1)$ a $y_2(t_2)$ sú hodnoty PCH v nami definovanom čase t_1 a t_2 . Pre časy t_{n1} , t_{n2} platia vzťahy [5]

$$t_{n1} = \frac{t_1 - D}{T} \quad (7.5)$$

$$t_{n2} = \frac{t_2 - D}{T}. \quad (7.6)$$

Rozdielom rovníc (7.5), (7.6) dostaneme vzťah pre výpočet časovej konštanty

$$T = \frac{t_2 - t_1}{t_{n2} - t_{n1}}. \quad (7.7)$$

Podielom rovníc (7.5), (7.6) dostaneme vzťah pre výpočet dopravného oneskorenia

$$D = \frac{\frac{t_{n2}}{t_{n1}} t_1 - t_2}{\frac{t_{n2}}{t_{n1}} - 1}. \quad (7.8)$$

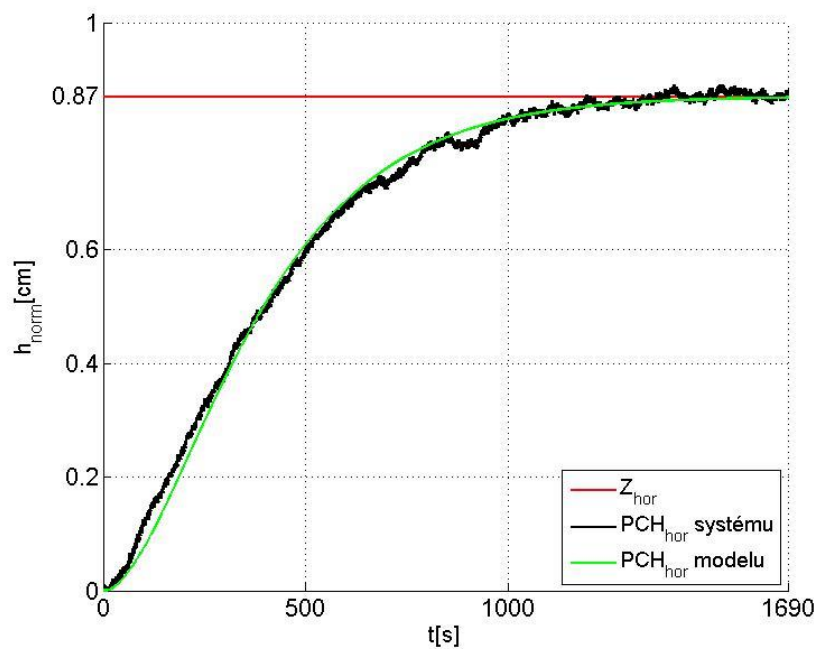
Dopravné oneskorenie vzhľadom k časovej konštante systému bolo zanedbateľne malé. Získané modely systému v troch PB sú opísané prenosovými funkciami

$$G_{\text{hor}}(s) = \frac{0.87}{(205s + 1)^2} \quad (7.9)$$

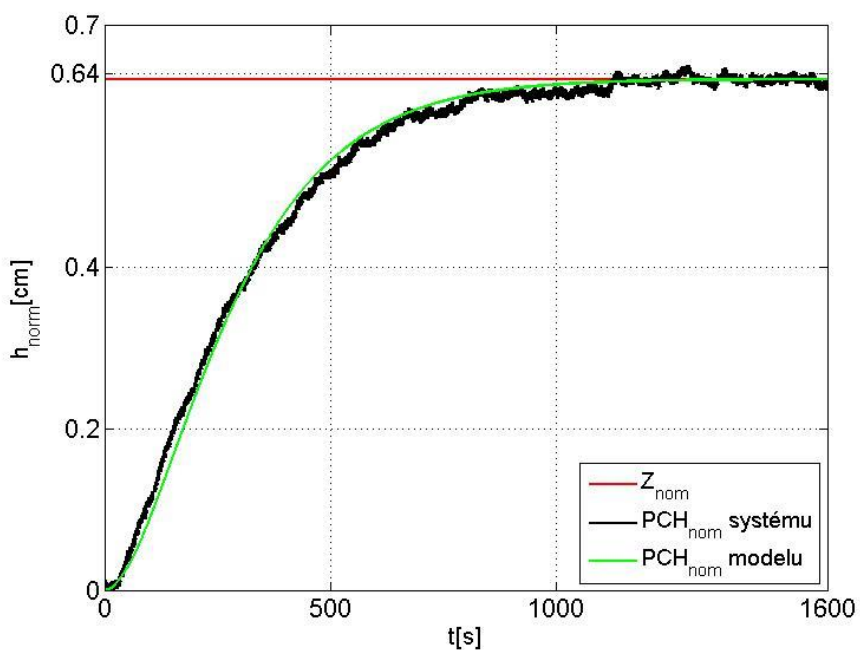
$$G_{\text{nom}}(s) = \frac{0.64}{(153s + 1)^2} \quad (7.10)$$

$$G_{\text{dol}}(s) = \frac{0.486}{(112s + 1)^2}. \quad (7.11)$$

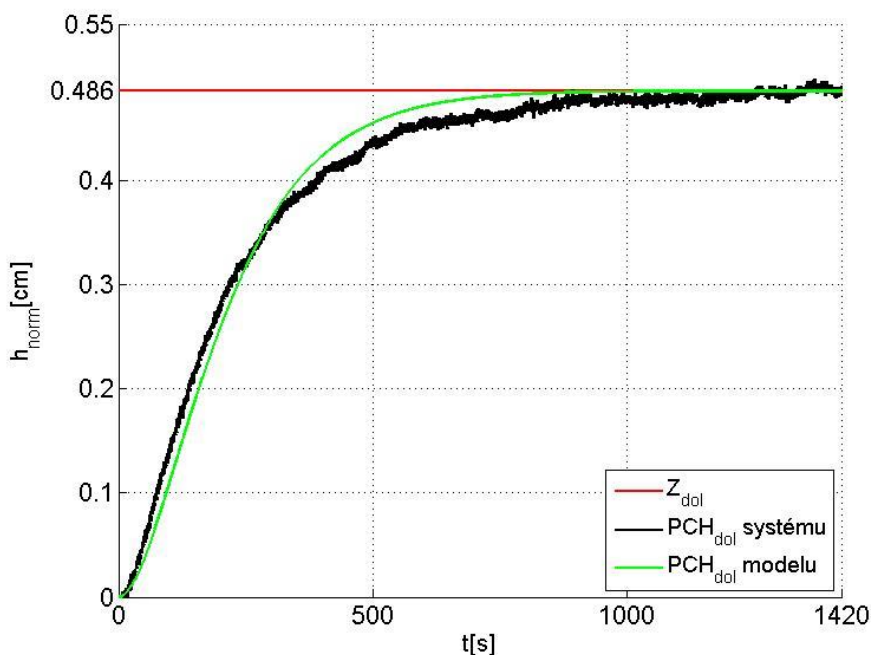
Porovnanie PCH identifikovaného modelu a systému je na obr. 7.8 – 7.10.



Obr. 7.8 Porovnanie PCH systému a modelu v okolí PB_{hor}



Obr. 7.9 Porovnanie PCH systému a modelu v okolí PB_{nom}



Obr. 7.10 Porovnanie PCH systému a modelu v okolí PB_{dol}

7.3 Riadenie sústavy PI regulátorom navrhnutým metódou malého zosilnenia

Úlohou bolo navrhnuť robustný PI regulátor $G_R(s)$ v tvare (3.16), ktorý stabilizuje rodinu systémov $G_k(s)$ vytvorenú zo systémov (8.9), (8.11) a riadi výšku hladiny h v zvolenom intervale.

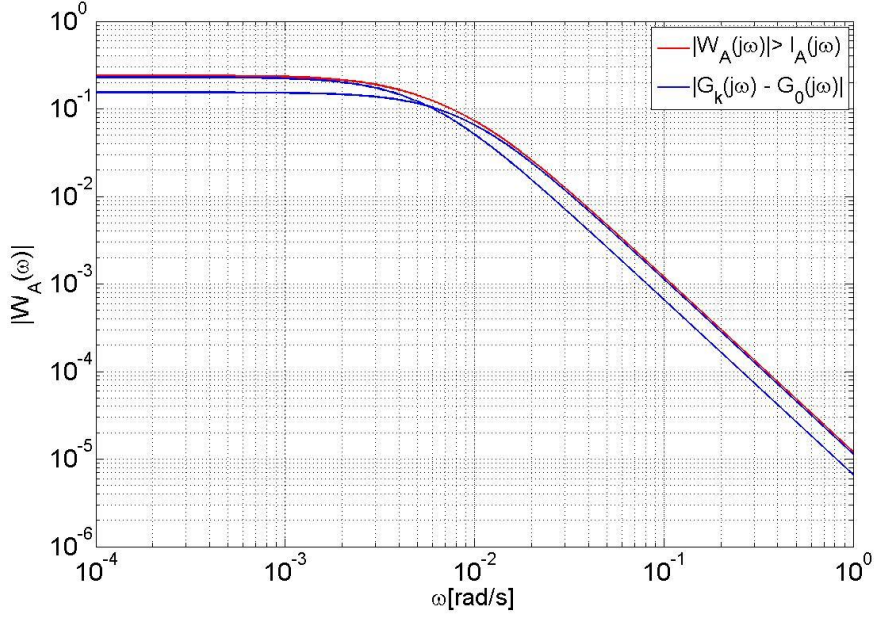
Nominálny model je uvažovaný v tvare (7.12) v okolí PB_{nom}

$$G_0(s) = \frac{0.64}{23409s^2 + 306s + 1} \quad (7.12)$$

Podľa vzťahov (3.10), (3.11) sme určili prenosovú funkciu $W_A(s)$, ktorá podľa vzťahu (2.1) zahŕňa celú rodinu systémov $G_k(s)$. $G_k(s)$ predstavuje prenosové funkcie identifikovaných modelov v okolí PB_{hor} , PB_{dol} (7.9), (7.11)

$$W_A(s) = \frac{6328s^2 + 70.9s + 0.24}{5.22 \cdot 10^8 s^4 + 1.41 \cdot 10^7 s^3 + 140569s^2 + 616s + 1} \quad (7.13)$$

Grafické riešenie vo frekvenčnej oblasti je na obr. 7.11.



Obr. 7.11 Amplitúdové charakteristiky $|G_k(j\omega) - G_0(j\omega)|$, $|W_A(j\omega)|$

Pre splnenie podmienky robustnej stability sme podľa vzťahu (3.6) vypočítali prenosovú funkciu $M_0(s)$

$$M_0(s) = \frac{G_0(s)}{W_A(s)} = \frac{3.34 \cdot 10^8 s^4 + 9.01 \cdot 10^6 s^3 + 9 \cdot 10^4 s^2 + 394.2s + 0.64}{1.48 \cdot 10^8 s^4 + 3.6 \cdot 10^6 s^3 + 3.36 \cdot 10^4 s^2 + 144.3s + 0.24}. \quad (7.14)$$

Porovnaním stupňa polynómu $G_{0,men}(s)$ (7.12) a ľavej strany rovnice (3.18), táto nadobúda tvar

$$23409s^2 + 306s + 1 = (d_1s + 1)(c_1s + 1). \quad (7.15)$$

Vypočítané koeficienty rovnice (7.15) sú potom

$$c_1 = 153, \quad d_1 = 153. \quad (7.16)$$

Pre zabezpečenie robustnej stability sme určili funkciu $T_0(s)$ tak, aby bola splnená podmienka (3.6) a pre všetky frekvencie ležala amplitúdová frekvenčná charakteristika $|T_0(j\omega)|$ pod krivkou amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky $|M_0(j\omega)|$ (7.14). Uvažovaná prenosová funkcia $T_0(s)$ podľa vzťahu (3.19) nadobúda tvar

$$T_{0,K}(s) = \frac{0.64}{153Ks^2 + Ks + 0.64}. \quad (7.17)$$

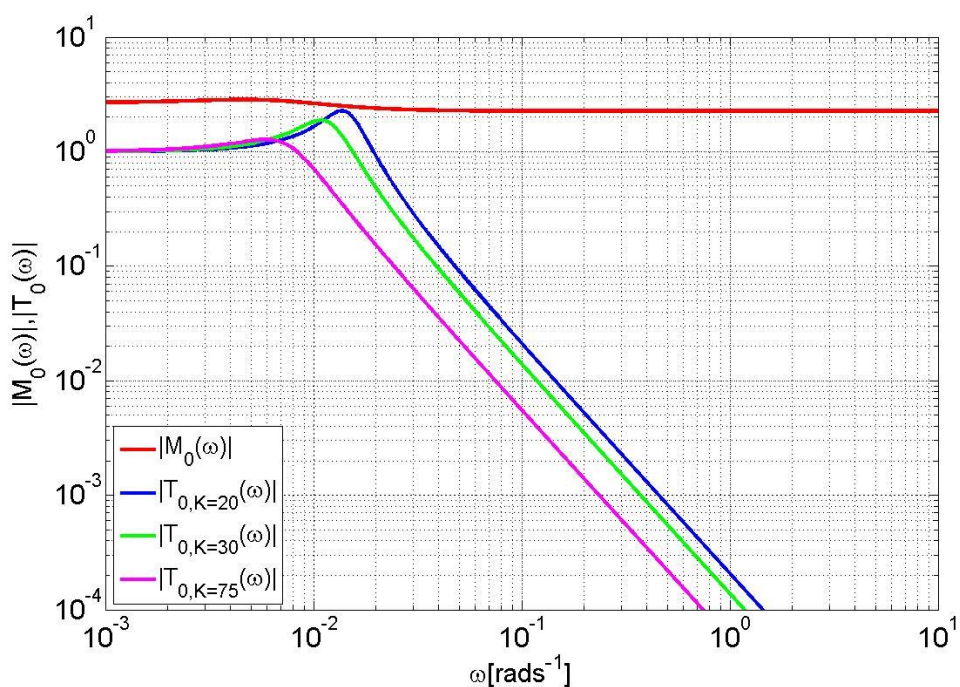
Grafické riešenie podmienky robustnej stability vo frekvenčnej oblasti pre hodnoty koeficientu $K = 20, 30, 75$ je na obr. 7.12.

Pre systém sme navrhli dva regulátory v tvare (3.14) s rôznymi hodnotami K

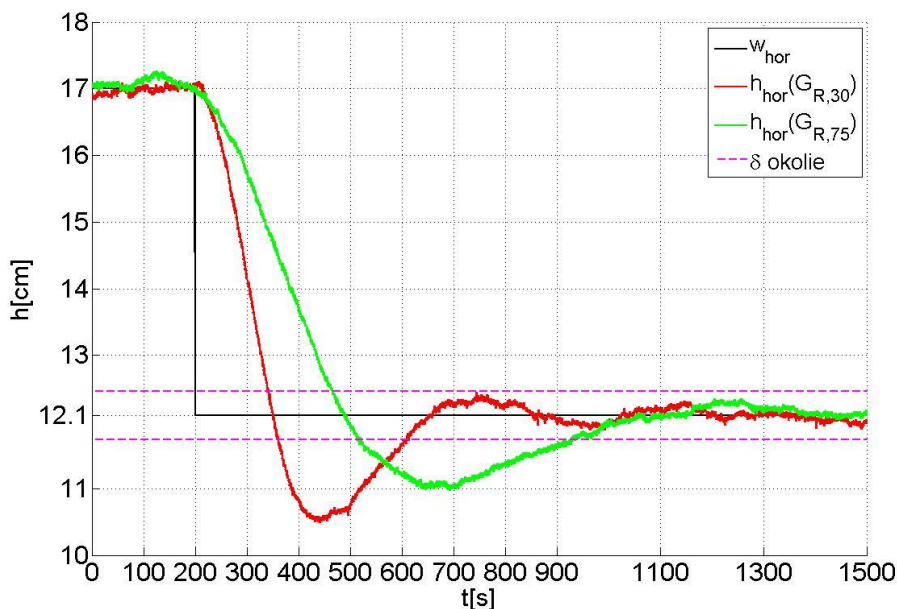
$$G_{R,30}(s) = \frac{1}{30} \frac{153s + 1}{s} = 5.1 + 0.033 \frac{1}{s} \quad (7.18)$$

$$G_{R,75}(s) = 2.04 + 0.0133 \frac{1}{s} \quad (7.19)$$

Z porovnania priebehov riadenej veličiny pre navrhnuté regulátory na obr. 7.13 vidíme, že priebeh riadenej veličiny pre regulátor $G_{R,75}(s)$ vykazoval pomalý priebeh a z pohľadu času regulácie bol takýto návrh neprípustný.



Obr. 7.12 Amplitúdové charakteristiky $|M_0(j\omega)|$, $|T_0(j\omega)|$ pre rôzne hodnoty koeficienta K



Obr. 7.13 Priebeh riadenej veličiny v okolí PB_{hor} – PI regulátormi navrhnutými metódou malého zosilnenia pre rôzne hodnoty koeficienta K

7.4 Riadenie sústavy PI regulátorom navrhnutým metódou D-rozkladu

Pre návrh regulátora metódou D-rozkladu bol systém identifikovaný prenosom

$$G_{hor}(s) = \frac{0.87}{(198s + 1)^2} e^{-10s} \quad (7.20)$$

$$G_{dol}(s) = \frac{0.486}{(101s + 1)^2} e^{-10s}. \quad (7.21)$$

Pre člen s dopravným oneskorením e^{-10s} bola uvažovaná náhrada v tvare $(1 - 10s)$. Prenos s neurčitostami je v tvare

$$G_I(s) = \frac{[-8.7; -4.86]s + [0.486; 0.87]}{[12544; 42025]s^2 + [224; 410]s + 1}. \quad (7.22)$$

Pre daný intervalový prenos $G_I(s)$ (7.23) možno podľa vzťahov (4.8), (4.9) vyjadriť štyri Charitonovove polynómy menovateľa a štyri Charitonovove polynómy čitateľa. Celkovo možno

vyjadriť 16 Charitonovových systémov ako kombináciu koeficientov čitateľa a menovateľa podľa vzťahu (4.7) pre $i, l = 1, 2, 3, 4$.

Uvažujme jeden Charitonovov systém vytvorený z intervalového prenosu (7.23) pre $i = 2, l = 1$

$$G_{2,1}(s) = \frac{-8.7s + 0.87}{39204s^2 + 202s + 1}. \quad (7.23)$$

CHR URO pre Charitonovov systém (7.24) a regulátor v tvare (4.5) podľa rovnice (4.10) je daná vzťahom

$$1 + \frac{-8.7s + 0.87}{39204s^2 + 202s + 1} \frac{K_p s + K_i}{s} = 0. \quad (7.24)$$

Substitúciou $s = j\omega$ do CHR URO (7.25) a rozdelením členov podľa vzťahu (4.12) možno písať rovnice pre reálnu a imaginárnu časť

$$Re: -202\omega^2 + 8.7K_p\omega^2 + 0.87K_i = 0 \quad (7.25)$$

$$Im: 39204\omega^2 - 1 - 0.87K_p + 8.7K_i = 0. \quad (7.26)$$

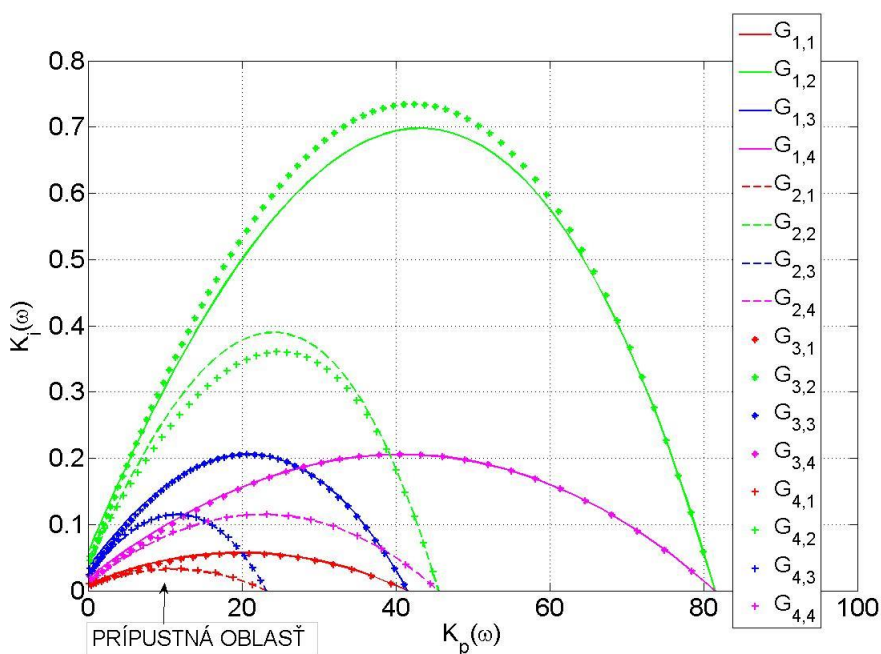
Z rovníc (7.26), (7.27) sme dostali vzťahy závislosti koeficientov regulátora od ω

$$K_p = \frac{35864\omega^2 - 0.87}{0.7569 + 75.69\omega^2} \quad (7.27)$$

$$K_i = \frac{202\omega^2 - 8.7K_p\omega^2}{0.87}. \quad (7.28)$$

Vykreslením závislosti koeficientov K_p od K_i kde $\omega \in \langle 0, 1 \rangle$ pre všetky Charitonovove systémy získame hranice stability koeficientov regulátora pre 16 Charitonovových systémov v URO (7.25). Oblasť prípustných parametrov robustného PI regulátora je daná pod krivkou $G_{2,1}(j\omega)$ (obr. 7.15), z ktorej sme experimentálnym overením na reálnom procese vybrali koeficienty regulátora. Regulátor v tvare (4.5) je potom daný predpisom

$$G_R(s) = 6 + 0.015 \frac{1}{s}. \quad (7.29)$$



Obr. 7.15 Oblasť prípustných parametrov regulátora

7.5 Riadenie sústavy polynomickým regulátorom navrhnutým metódou H_∞ zmiešanej citlivosti

Syntézu H_∞ regulátora sme uskutočnili prostredníctvom príkazu *mixsyn* v prostredí MATLAB vzhľadom k nominálnemu modelu systému (7.10). Váhové funkcie $W_1(s)$, $W_2(s)$ boli získané po viacerých experimentoch

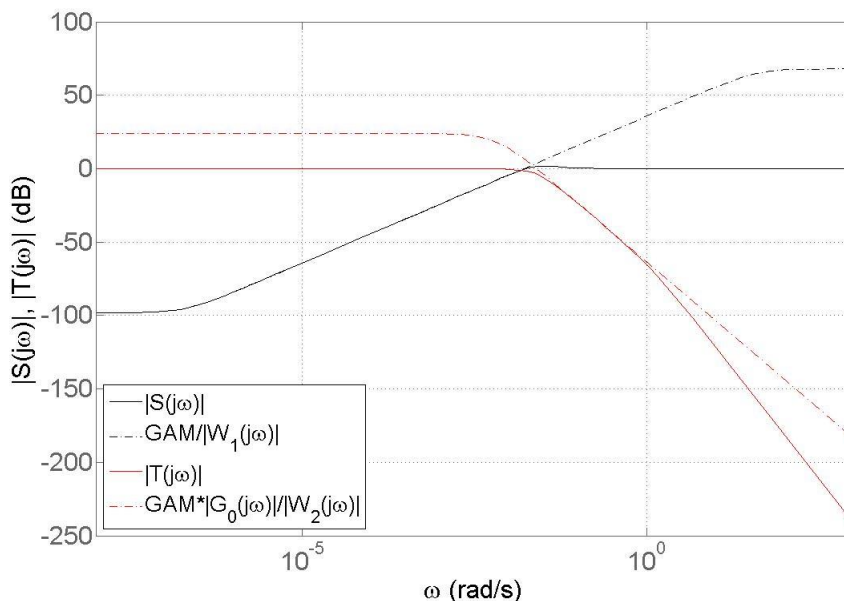
$$W_1(s) = \frac{\left(\frac{s}{2} + 20\right)}{5000s + 0.001} \quad (7.30)$$

$$W_2(s) = 0.01.$$

Prenos H_∞ polynomického regulátora je

$$G_R(s) = \frac{31.5s^2 + 0.41s + 0.0013}{s^3 + 1.31s^2 + 0.053s} \quad (7.31)$$

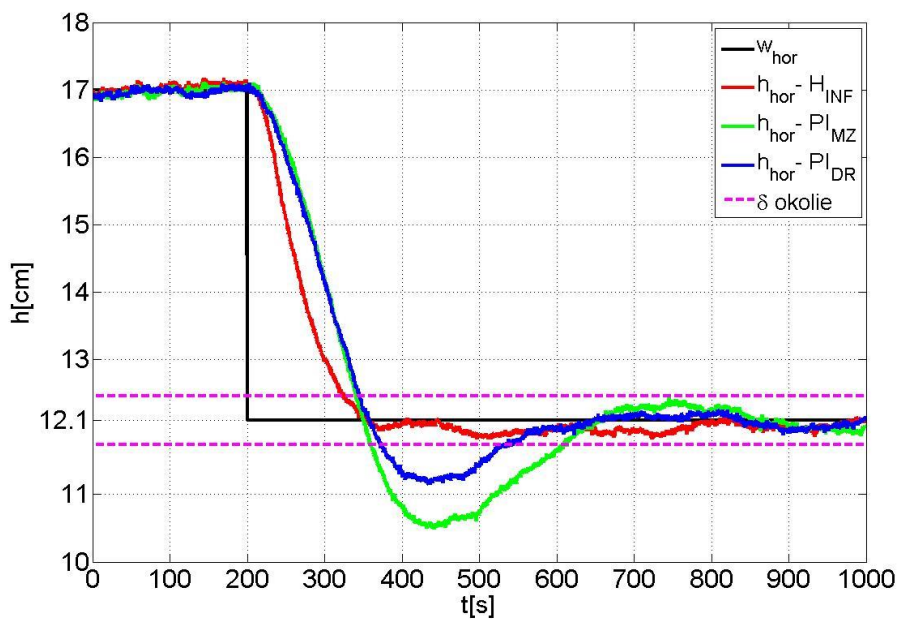
$$\gamma = 0.2474$$



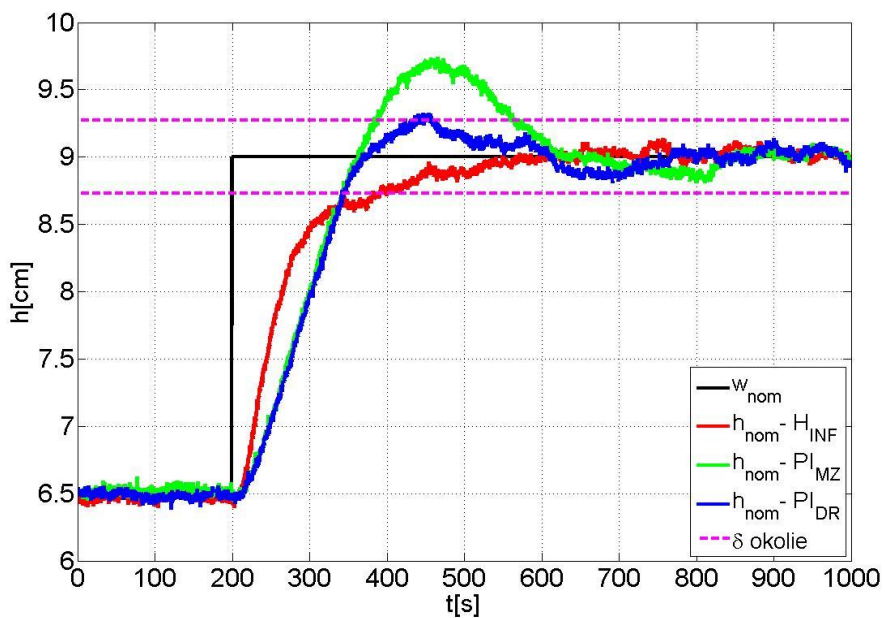
Obr. 7.16 Amplitúdové charakteristiky $|S(j\omega)|$, $|T(j\omega)|$

7.6 Porovnanie navrhnutých regulátorov

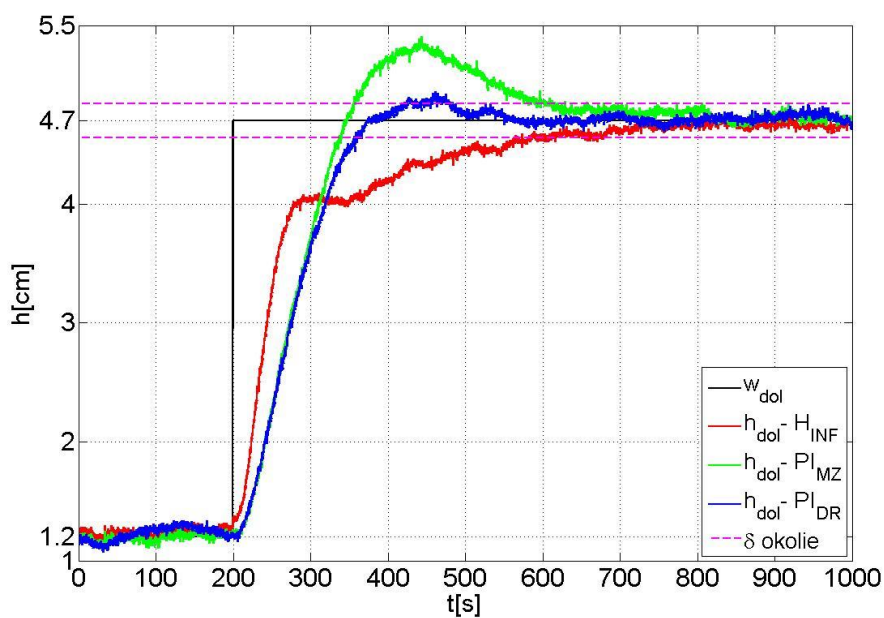
Z priebehov riadenej a riadiacej veličiny (obr. 7.17 – 7.22) a grafov ukazovateľov kvality (graf 1 – 4) možno konštatovať, že všetky navrhnuté regulátory dokázali riadiť systém do δ -okolia žiadanej hodnoty v okolí všetkých PB a tým aj v celom možnom rozsahu zásobníka. Pri riadení systému regulátorom H_{INF} navrhnutým metódou H_∞ zmiešanej citlivosti sme dosiahli najmenší čas regulácie, najmenšie hodnoty maximálneho preregulovania a najmenšie hodnoty absolútnej integračnej odchýlky, ale len v okolí horného a nominálneho PB. V okolí PB_{dol} bol priebeh riadenej veličiny pomalý, s najdlhším časom regulácie $t_{reg} = 482s$. Z priebehov riadiacej veličiny je zrejmé, že regulátor využíval celý rozsah akčných zásahov a dosiahol hranice obmedzení. Najväčšie hodnoty σ_{max} , IAE a t_{reg} vykazoval systém riadený regulátorom PI_{MZ} navrhnutý metódou malého zosilnenia, ale aj tento návrh považujeme za dostačujúci. Systém riadený PI regulátorom PI_{DR} navrhnutým metódou D-rozkladu v porovnaní s PI_{MZ} vykazoval menšie hodnoty všetkých ukazovateľov kvality v okolí všetkých pracovných bodov.



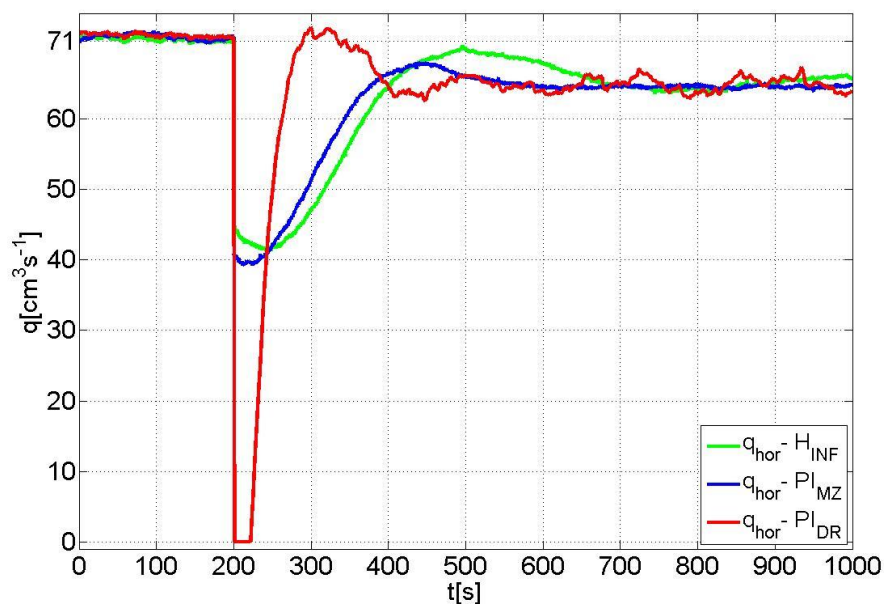
Obr. 8.17 Porovnanie priebehov h v okolí PB_{hor} pre navrhnuté regulátory



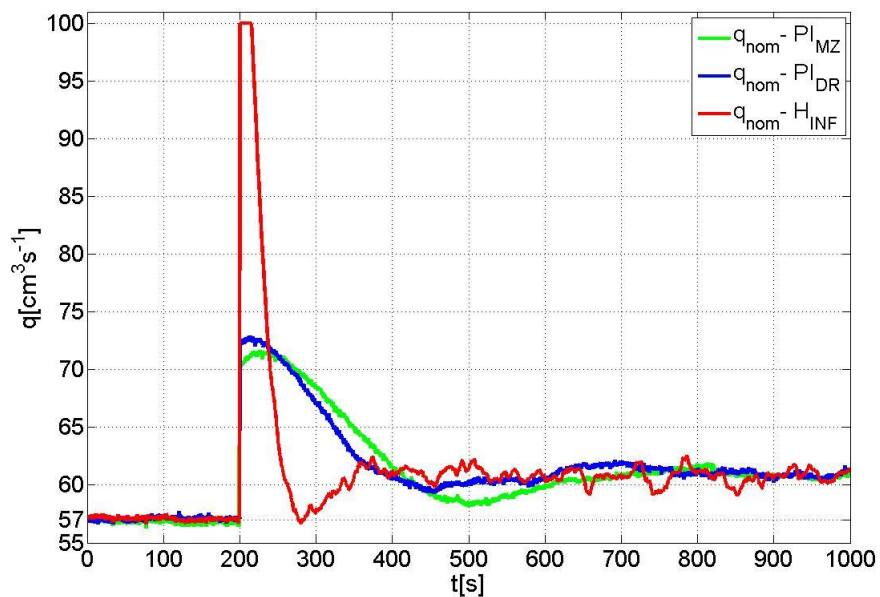
Obr. 7.18 Porovnanie priebehov h v okolí PB_{nom} pre navrhnuté regulátory



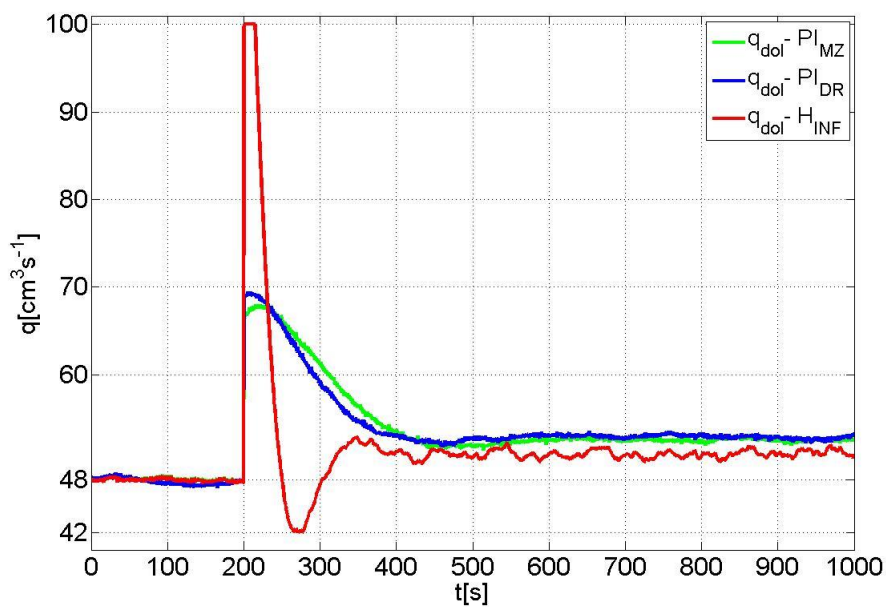
Obr. 7.19 Porovnanie priebehov h v okolí PB_{hor} pre navrhnuté regulátory



Obr. 7.20 Porovnanie priebehov q v okolí PB_{hor} pre navrhnuté regulátory

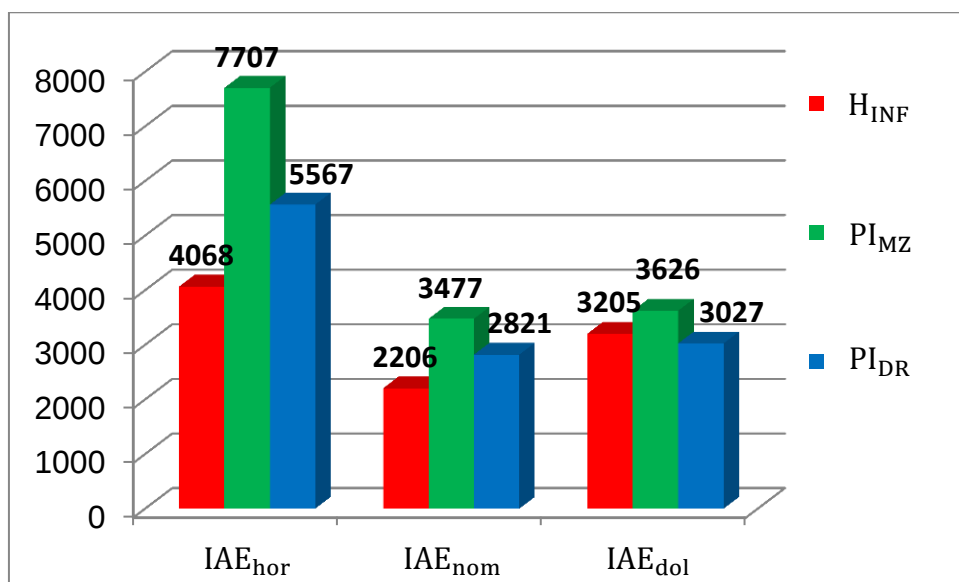


Obr. 7.21 Porovnanie priebehov q v okolí PB_{nom} pre navrhnuté regulátory

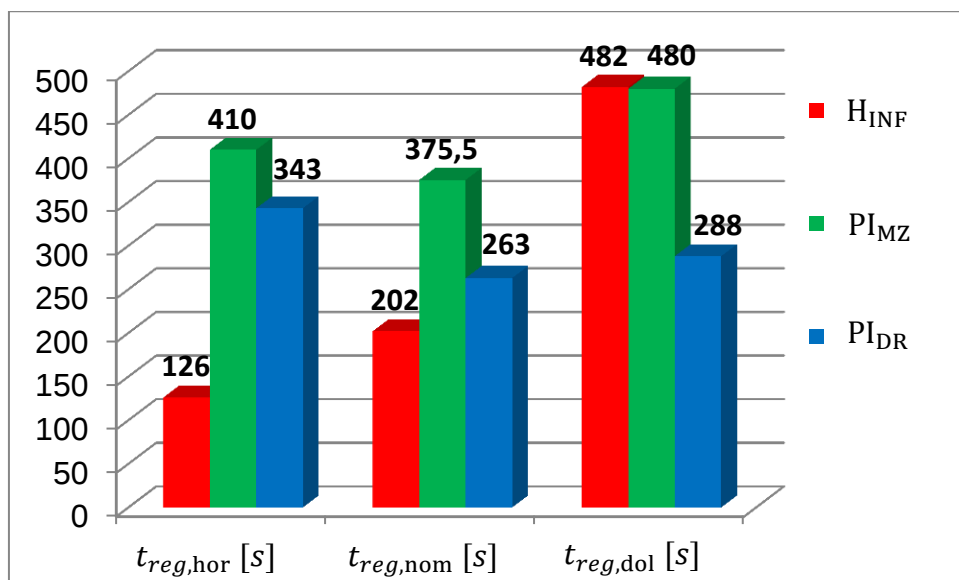


Obr. 7.22 Porovnanie priebehov q v okolí PB_{dol} pre navrhnuté regulátory

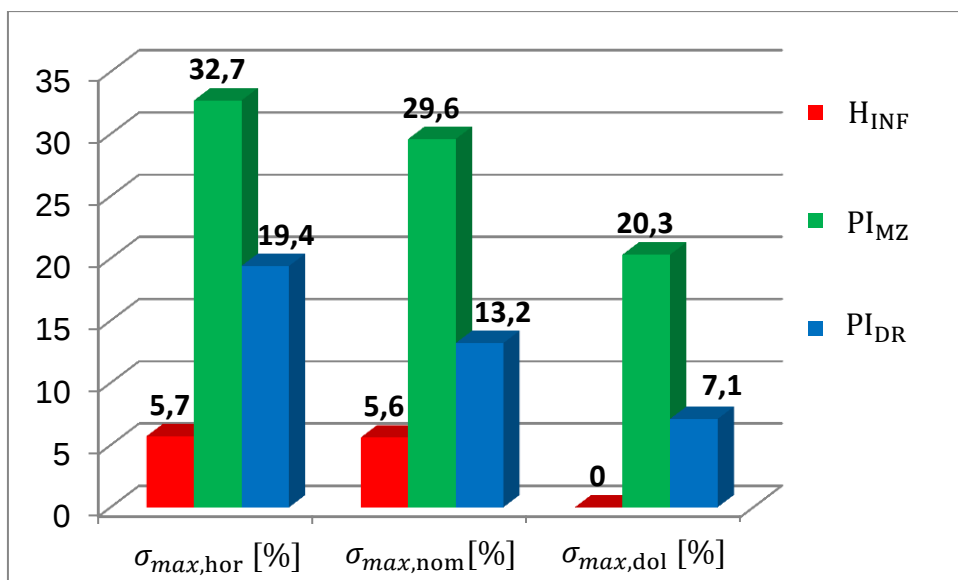
Graf 1 Porovnanie IAE pre navrhnuté regulátory v okolí PB



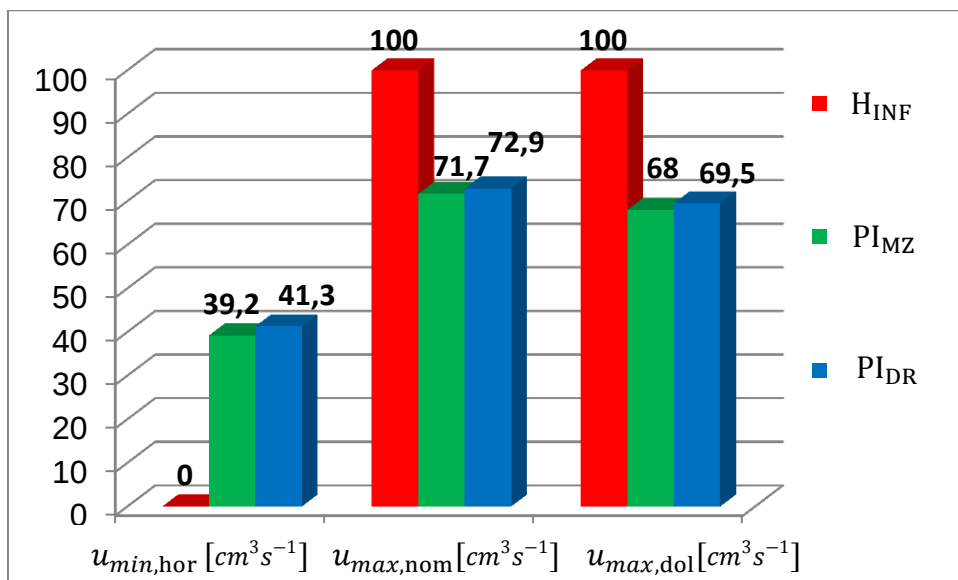
Graf 2 Porovnanie t_{reg} pre navrhnuté regulátory v okolí PB



Graf 3 Porovnanie σ_{max} pre navrhnuté regulátory v okolí PB



Graf 4 Porovnanie $u_{max/min}$ pre navrhnuté regulátory v okolí PB



Záver

V tejto práci sú uvedené tri metódy návrhu robustných regulátorov. Boli opísané druhy neurčitostí, s ktorými sa pri návrhoch stretávame a bolo ukázané, ako tieto neurčitosti zahrnúť pri návrhu regulátorov. Boli opísané postupy návrhu PI/PID regulátorov metódou malého zosilnenia, návrh PI regulátora metódou D-rozkladu a polynomických regulátorov metódou H_∞ zmiešanej citlivosti.

Návrh robustných regulátorov metódou malého zosilnenia spočíva v zahrnutí neurčitostí do aditívneho modelu poruchy, teda v hľadaní prenosovej funkcie $W_A(s)$ tak, aby bola väčšia alebo rovná maximálnej hodnote modulov $l_A(s)$. Potom sme hľadali funkciu $T_0(s)$ tak, aby bola splnená podmienka stability vyplývajúca z podmienky teórie malého zosilnenia (3.6) a Nyquistovho kritéria stability. V simulačných príkladoch sme pre zásobníky kvapaliny navrhli tri regulátory. Pri riadení laboratórneho procesu sme navrhli regulátor pre taký koeficient K , aby čas regulácie bol čo najmenší s prihliadnutím na maximálne preregulovanie riadenej výšky h .

Syntéza robustných regulátorov metódou D-rozkladu je založená na vykreslení hraníc stability URO Charitonovových systémov v rovine parametrov regulátora. Metódu bola aplikovaná na simulačný príklad troch zásobníkov kvapaliny aj na riadenie laboratórneho procesu. Identifikovaný model riadeného laboratórneho procesu bol uvažovaný ako systém 2. rádu s dopravným oneskorením. Z hľadiska výpočtovej náročnosti bola metóda jednoduchá, ale problém spočíval v hľadaní prenosovej funkcie aditívneho modelu $W_A(s)$, ktorá spolu s nominálnym modelom zahŕňala všetky sústavy rodiny $G_k(s)$.

Metóda H_∞ zmiešanej citlivosti vychádzala z minimalizácie H_∞ normy $\left\| \frac{W_1(j\omega)S(j\omega)}{W_2(j\omega)T(j\omega)} \right\|_\infty$ a tvarovaní citlivostnej a komplementárnej citlivostnej funkcie. Pri riadení reálneho procesu bolo hľadanie kombinácie váhových funkcií $W_1(s)$, $W_2(s)$ časovo náročné, pretože správanie modelu s navrhnutým regulátorom a laboratórneho procesu bolo odlišné.

Aj napriek rôznym komplikáciám pri návrhu regulátorov pre riadenie laboratórneho procesu, boli navrhnuté regulátory, ktoré proces úspešne riadili aj so splnením požiadaviek na kvalitu riadenia v celom rozsahu pre výšku hladiny.

Zoznam použitej literatúry

1. VESELÝ, V. – HARSÁNYI, L. *Robustné riadenie dynamických systémov*, Bratislava: STU, 2007, 126 s. ISBN 978-80-227- 2801-0.
2. BAKOŠOVÁ, M. – FIKAR, M. *Riadenie procesov*, Bratislava: STU, 2008, 191 s. ISBN 978-80-227-2841-6.
3. BAKOŠOVÁ, M. *Robustné riadenie*. [online]. [cit: 2015-04-12]. dostupné na internete: <<http://www.kirp.chtf.stuba.sk/moodle/course/view.php?id=308>>.
4. SKOGESTAD, S. – POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Chichester: Wiley, 2005, 608 s. ISBN 0-470-01167-8.
5. FIKAR, M. *Identifikácia*. [online]. [cit: 2015-05-02]. dostupné na internete: <<http://www.kirp.chtf.stuba.sk/moodle/course/view.php?id=43>>.
6. ZÁVACKÁ, J. *Návrh robustných PID regulátorov pre riadenie chemickotechnologických procesov s parametrickými neurčitostami: dizertačná práca*. Bratislava: STU, 2011, 142 s.
7. FIKAR, M. – MIKLEŠ, J. *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov 2*. Bratislava: STU Press, 2004. 260 s. ISBN 80-227-2134-4.
8. PUNA, D. *Robustné riadenie chemických reaktorov: dizertačná práca*. Bratislava: STU, 2009, 132 s.
9. TRNKA, V. *Robustní řízení čtyřvalcové vodárny: diplomová práce*. Praha: ČVUT, 2011, 58 s.