

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-63859

**Prediktívne riadenie inverzného
kyvadla**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2018

Bc. Petra Artzová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-63859

**Prediktívne riadenie inverzného
kyvadla**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor:	5.2.14. automatizácia
Školiace pracovisko:	Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky
Vedúci záverečnej práce:	doc. Ing. Michal Kvasnica, PhD.

2018

Bc. Petra Artzová



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Petra Artzová**
ID študenta: 63859
Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor: 5.2.14. automatizácia
Vedúci práce: doc. Ing. Michal Kvasnica, PhD.

Názov práce: **Prediktívne riadenie inverzného kyvadla**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Cieľom práce je navrhnuť a implementovať riadiaci systém na ovládanie polohy inverzného kyvadla založený na princípoch prediktívneho riadenia. Takýto typ riadiacich algoritmov je založený na optimalizácii a dokáže priamo v návrhu riadenia zohľadniť procesné ohraničenia ako i požiadavky na kvalitu riadenia. Študent najskôr zostrojí matematický model inverzného kyvadla, následne navrhne prediktívny regulátor, tento overí simulačne a nakoniec ho implementuje v prostredí Simulink a verifikuje jeho správnu funkčnosť na reálnom zariadení.

Rozsah práce: 50

Riešenie zadania práce od: 12. 02. 2018

Dátum odovzdania práce: 13. 05. 2018

Bc. Petra Artzová
študentka

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Pod'akovanie

Rada by som sa pod'akovala vedúcemu mojej diplomovej práce doc. Ing. Michalovi Kvasnicovi, PhD. a konzultantovi Ing. Petrovi Bakaráčovi za všetky cenné rady, pripomienky a odborné vedenie pri písaní a koordinácii mojej diplomovej práce. Ďalej d'akujem za všestrannú pomoc a podporu celému kolektívu Ústavu informatizácie, automatizácie a matematiky.

Abstrakt

V tejto diplomovej práci je prezentované riadenie inverzného kyvadla. Keďže ide o nelineárny systém, na riadenie sú použité dva regulátory. Prvý je založený na nelineárnom matematickom modeli kyvadla a slúži na jeho vyšvihnutie do okolia hornej nestabilnej ustálenej polohy. Po dosiahnutí tohto okolia sa riadiaci systém prepne na stabilizačný regulátor, úlohou ktorého je stabilizovať uhol náklonu kyvadla, ako i jeho rýchlosť v hornej polohe. V práci je uvedené porovnanie dvoch regulátorov na vyšvihnutie (tzv. energetický regulátor a regulátor založený na minimalizácii času) a troch stabilizačných regulátorov (PID, LQR a MPC - prediktívne riadenie). Ako najlepší sa ukazuje práve MPC regulátor, ktorý má schopnosť predikovať budúce správanie sa procesu a optimalizovať akčné zásahy vzhľadom k ohraničeniam na polohu a rýchlosť. MPC regulátor je navyše zostrojený v tzv. explicitnom tvare, čo umožňuje jeho jednoduchú a rýchlu implementáciu. V práci sú prezentované simulačné a experimentálne výsledky pri použití jednotlivých regulátorov.

Kľúčové slová:

Inverzné kyvadlo, PID, LQR, prediktívne riadenie, energetický regulátor, stabilita

Abstract

This diploma thesis presents a control design procedure for an inverted pendulum. Since the system is nonlinear, the control system consists of two controllers. The first one is based on a nonlinear mathematical description of the pendulum and serves to swing the pendulum to a neighborhood of the upper unstable equilibrium. Once this neighborhood is reached, the control system switches to a stabilization controller, whose task is to stabilize the pendulum's angle and speed. Two swing-up controllers are presented in the thesis - a so-called energy controller and a minimum-time controller - as well as three stabilization approaches (PID, LQR, and MPC - model predictive control). Among these, MPC shows to be the best one due its ability to predict the future behavior of the controlled system and to optimize the control inputs while taking speed and position constraints into account. The MPC controller was constructed in the so-called explicit form, which allows for a simple and fast implementation. The thesis presents simulation and experimental results obtained for individual control strategies.

Keywords:

Inverted pendulum, PID, LQR, model predictive control, energy controller, stability

Obsah

1	Úvod	1
2	Prediktívne riadenie	3
2.1	Princíp prediktívneho riadenia	3
2.2	Model procesu	5
2.2.1	Lineárne dynamické modely	5
2.2.2	Vstupno-výstupné modely	6
2.2.3	Diskrétné modely	7
2.2.4	Nelineárne dynamické modely	7
2.3	Typy účelových funkcií	8
2.3.1	Všeobecná formulácia MPC	8
2.3.2	Regulácia výstupov	9
2.3.3	Sledovanie trajektórie	10
2.3.4	Riadenie za najmenší počet krokov	11
2.4	Ohraničenia	11
2.5	Kvadratické programovanie	12
2.6	Explicitné prediktívne riadenie (EMPC)	13
2.6.1	Princíp explicitného MPC	14

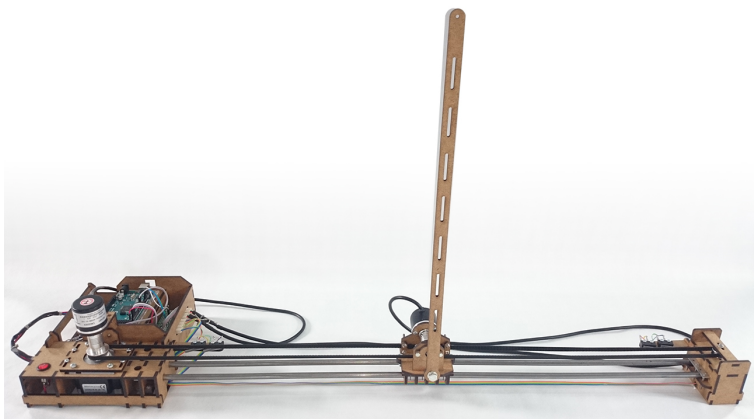
2.6.2	Multi-parametrické programovanie	15
2.6.3	Konštrukcia riešenia EMPC (Off-line fáza)	16
2.6.4	Implementácia riešenia EMPC (On-line fáza)	18
3	Laboratórne inverzné kyvadlo	21
3.1	Opis laboratórneho inverzného kyvadla	21
3.2	Komponenty inverzného kyvadla	22
3.3	Programové rozhranie	22
3.4	Matematický model inverzného kyvadla	23
3.4.1	Linearizácia modelu	26
3.4.2	Stabilita systému	28
4	Riadenie inverzného kyvadla	31
4.1	Stabilizácia inverzného kyvadla	32
4.1.1	Stabilizácia pomocou PID regulátora	32
4.1.2	Stabilizácia pomocou LQ regulátora	35
4.1.3	Stabilizácia pomocou explicitného MPC regulátora	37
4.1.4	Odhad stavov	42
4.2	Nábeh inverzného kyvadla	42
4.2.1	Prediktívne riadenie za najmenší počet krokov	43
4.2.2	Energetický regulátor	45
5	Záver	55
	Literatúra	57

Pre proces inverzného kyvadla, ktorý je znázornený na obr. 1.1, je cieľom stanoviť zákon riadenia, ktorý vyšvihne a stabilizuje kyvadlo v hornej nestabilnej polohe tak, aby umožnilo vozíku pohybovať sa pri stabilizovaní vo vzpriamenej zvislej polohe pričom nesmie naraziť na svoje ohraničenia. Význam tohto systému vyplýva z jeho teoretickej i praktickej aplikácie.

Teoretická hodnota inverzného kyvadla vychádza z toho, že ide o nelineárny systém, čo znamená, že jeho pohybové rovnice sú nelineárne diferenciálne rovnice. To spôsobuje, že výpočet vhodného zákona riadenia je náročná a zdĺhavá úloha. Okrem toho môže byť model za určitých okolností zjednodušený do lineárneho systému okolo rovnovážneho bodu umiestneného vo zvislej vertikálnej polohe, čo umožňuje, aby sa použili lineárne metódy na stabilizáciu. Táto flexibilita robí tento systém skvelým príkladom pre štúdium lineárnych i nelineárnych prístupov riadenia, pretože sa prostredníctvom nej môžu prezentovať rôzne teórie a metódy.

Mnohé praktické aplikácie inverzného kyvadla robia jeho štúdium ešte zaujímavejším a dôležitejším. V robotike sa balancovacie systémy vyvíjajú pomocou inverzných kyvadiel. Tieto systémy nájdu uplatnenie v dopravných prostriedkoch, ktoré potrebujú stabilizovať objekty, systémy, ktoré podporujú chôdzu pre pacientov, roboty, ktoré sa používajú na domáce a priemyselné účely a na prepravu predmetov pomocou dronov. Napokon jedna z najslávnejších aplikácií inverzného kyvadla, ktoré je komerčne dostupné, je Segway (obr. 1.2).

Uvedené aplikácie spolu s mnohými ďalšími robia inverzné kyvadlo systémom veľkého významu. To je hlavný dôvod, prečo je inverzné kyvadlo často vybrané na testovanie nových riadiacich metód. Existuje veľký počet metód používaných pri riadení inverzného kyvadla. Medzi tieto metódy patrí optimálne riadenie, PID riadenie, fuzzy riadenie, riadenie prostredníctvom neurónových sietí, prediktívne riadenie alebo dokonca hybridné metódy, ktoré sú kombináciou vyššie uvedených metód.



Obr. 1.1: Laboratórne inverzné kyvadlo



Obr. 1.2: Osobný transportér Segway

Prediktívne riadenie

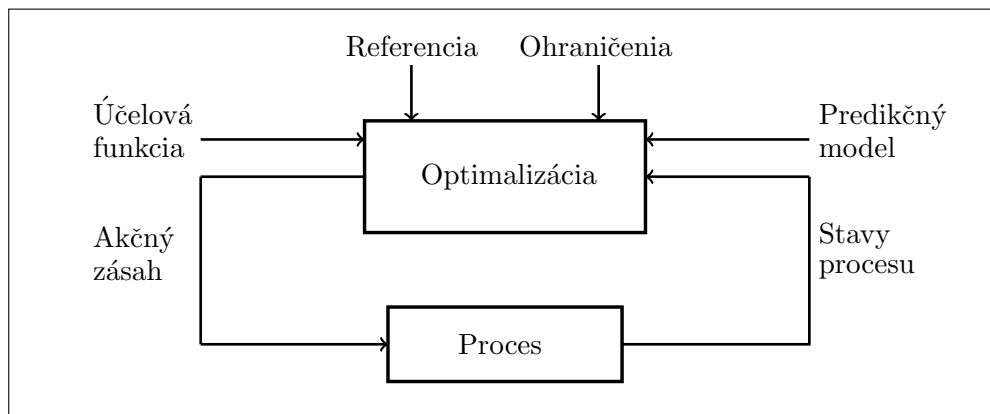
Prediktívne riadenie (angl.: *Model Predictive Control*, MPC) je v súčasnosti dôležitou pokročilou metódou riadenia procesov s viacerými vstupnými alebo výstupnými veličinami. V počiatkoch jeho vzniku sa využívalo najmä v petrochemickom priemysle, v súčasnosti sa jeho využitie rozšírilo aj do iných oblastí priemyslu, kde si získalo veľkú popularitu. Hlavným dôvodom jeho úspechu v priemysle je to, že algoritmus berie do úvahy aj obmedzenia akčných členov, prípadne aj iné obmedzenia procesu, ktoré môžu byť vo forme vstupných alebo výstupných obmedzení. Uvažovanie obmedzení má pozitívny dopad na rôzne ukazovatele prevádzky, keďže zariadenia dokážu pracovať na ohraničeníach a využíva sa tak celý ich potenciál a ukázalo sa, že prevádzka je naziskovejšia práve vtedy, keď proces prebieha na svojich obmedzeniach [14].

Medzi také výstupné obmedzenia môžeme zaradiť napríklad kvalitu produktu, spotrebu energie, prípadne minimalizáciu výrobných nákladov. Vstupným ohraničením je napríklad maximálny výkon motora, minimálna rýchlosť, otvorenie ventilu a iné.

Ďalším dôležitým dôvodom prečo je vhodné uvažovať obmedzenia je aj fakt, že regulátor pozná vstupné obmedzenia a nikdy nevygeneruje akčné zásahy také, aby narušili tieto obmedzenia. Tento problém sa vyskytuje v prípade menej pokročilých riadiacich algoritmov, ktoré nedokážu pracovať s obmedzeniami.

2.1 Princíp prediktívneho riadenia

Základný koncept prediktívneho riadenia možno zhrnúť takto. Predpokladajme, že chceme riadiť proces s viacerými vstupmi a viacerými výstupmi a zároveň uspokojovať obmedzenia v tvare nerovnosti na vstupných a výstupných premenných. Výpočty prediktívneho riadenia sú založené na aktuálnych meraniach a predikcií budúcich hodnôt výstupov [17]. Cieľom výpočtov prediktívneho riadenia je určiť optimálne akčné zásahy tak, aby sa predikovaná odozva optimálne približovala k žiadanej hodnote.

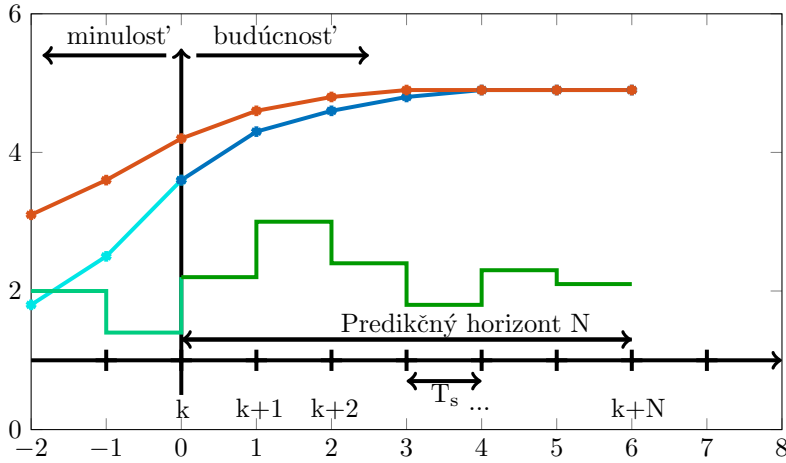


Obr. 2.1: Reprezentácia MPC.

Prediktívne riadenie je často formulované ako kvadratické programovanie (angl.: *Quadratic programming*, QP) a to z dôvodu, že takéto problémy sa dajú ľahko vyriešiť numericky alebo parametricky. Prediktívne riadenie je založené na optimalizácii účelovej funkcie, ktorá je najčastejšie vo forme kvadratickej účelovej funkcie s lineárnymi ohraničeniami v tvare rovnosti alebo nerovnosti. Riešením problémov kvadratického programovania je optimálna sekvencia akčných zásahov v otvorenej slučke v predikčnom horizonte. V prípade spätnoväzbového riadenia máme záujem iba o prvú vzorku tejto sekvenie. Dôvodom je to, že celá sekvencia akčných zásahov je založená iba na predikcii, ktorá vo väčšine prípadov nezohľadňuje rôzne vplyvy porúch na proces [14]. Približná reprezentácia prediktívneho riadenia je zobrazená na obr. 2.1.

Táto stratégia prediktívneho riadenia sa nazýva ako tzv. pohyblivý horizont (angl.: *receding horizon approach*). Napriek tomu, že v každej perióde vzorkovania T_s sa vypočíta sekvencia akčných zásahov do procesu, implementovaný je skutočne iba prvý krok k z celej vypočítanej sekvenie $k + N$. Potom sa v ďalšej perióde vzorkovania vypočíta nová sekvencia a znova sa implementuje iba prvý krok vstupu. Tento postup sa opakuje v každej perióde vzorkovania T_s . Zvolený predikčný horizont N zostáva konštantný počas celého trvania riadenia. Grafické znázornenie postupu výpočtu akčných zásahov na základe meraní do času k a referenčnej trajektórie do času $k + N$ je znázornený na obr. 2.2.

Existuje veľa matematických formulácií problémov riadenia, ktoré vedú napríklad k lineárnemu programovaniu (LP) alebo dokonca k nelineárnemu programovaniu. Výhodou nelineárneho modelu a teda nelineárneho MPC regulátora je to, že dokáže opísať správanie sa procesu presnejšie v porovnaní s lineárnym modelom.



Obr. 2.2: Princíp prediktívneho riadenia

—•— referenčná trajektória, —•— predikovaný výstup, —•— meraný výstup,
 — predikovaný akčný zásah, — minulý akčný zásah

2.2 Model procesu

Model systému možno opísať ako matematické vyjadrenie správania sa procesu a používa sa na predikciu budúceho vývoja procesu. Tento model by mal dobre opisovať dynamické vlastnosti procesu. V riadení procesov existuje mnoho modelov, ktoré môžu byť použité na formuláciu optimalizačného problému [16]. Na výber máme z viacerých možností:

- lineárne modely (prenosová funkcia, stavový opis, impulzná odozva, a iné)
- nelineárne modely (stavový opis, neurónové siete, fuzzy, a iné)
- hybridné modely (kombinácia spojitkej dynamiky a diskkrétnej logiky)

2.2.1 Lineárne dynamické modely

Časovo variantné modely (angl.: *Time-varying model*) sú najčastejšie využívané lineárne modely v tvare stavového opisu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.1b)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.1c)$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je stav, $u \in \mathbb{R}^m$ je vstup, $y \in \mathbb{R}^p$ je výstup a $t \in \mathbb{R}$ je čas. Počiatočná podmienka špecifikuje hodnotu stavu x v čase $t = t_0$ a hľadáme riešenie diferenciálnej rovnice pre čas väčší ako t_0 , $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$.

Časovo invariantné modely (angl.: *Time-invariant model*) uvažujú, že matice A, B, C a D sú časovo invariantné, potom lineárny model sa zredukuje na

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.2b)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.2c)$$

Hlavnou výhodou používania lineárnych modelov na aproximáciu správania sa systémov je jednoduchosť riešenia.

Z rovnice (2.2a - 2.2c) vieme získať

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

kde $e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Riešenie je konvolučný integrál správania sa celého $u(t)$ váženého exponenciálnou maticou At . Vlastné hodnoty A určujú, či minulý akčný zásah $u(t)$ má väčší účinok alebo menší účinok na aktuálnu hodnotu $x(t)$ s rastúcim časom.

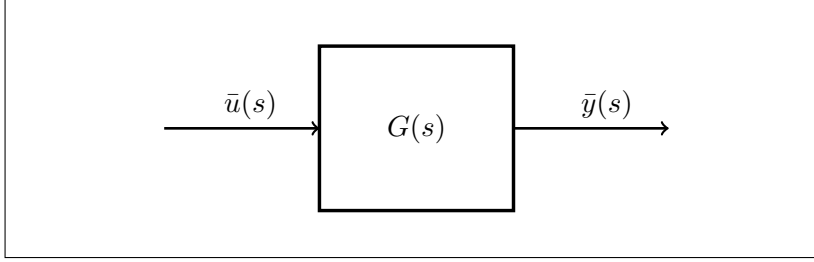
2.2.2 Vstupno-výstupné modely

Ak modelovaný proces nepoznáme presne a vieme len málo o jeho vnútornej štruktúre, tak môžeme použiť iný prístup návrhu modelu. Tento prístup je založený na potláčaní stavov systému, a teda zameriavame sa na manipulovateľné vstupy a merateľné výstupy [17]. Bloková schéma vstupno-výstupného modelu (obr. 2.3) zobrazuje prepojenie medzi u a y . Manipuláciou akčných zásahov u a meraním výstupu y získame prenosovú funkciu G .

Bloková schéma vyjadruje matematický vzťah medzi vstupnými a výstupnými veličinami v tvare

$$\bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s) \quad (2.4)$$

kde $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$ je matica prenosovej funkcie. Z rovnice (2.4) je možné vidieť, že v nej nevystupujú stavy procesu a teda matematický model je závislý len od vstupov a výstupov. Ak chceme získať prenosovú funkciu $G(s)$ zo stavového opisu, tak môžeme použiť vzťah $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ za predpokladu, že $x(0) = 0$ je ako počiatočná podmienka.



Obr. 2.3: Bloková schéma vstupno-výstupného modelu.

2.2.3 Diskrétne modely

Ak sa perióda vzorkovania T_s zvolí správne, tak správanie sa medzi jednotlivými periódami vzorkovania sa dá ignorovať a model popisuje výlučne správanie v čase periódy vzorkovania.

Lineárny, časovo invariantný, diskretný model je v tvare

$$x(t + T_s) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.5b)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.5c)$$

kde $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ je nenegatívna hodnota vyjadrujúca číslo vzorky, ktorá je prepojená s časom $t = kT_s$, kde T_s vyjadruje periódu vzorkovania a k krok riadenia.

Lineárny diskretný model je lineárna diferenciálna rovnica. Keďže model je lineárny, analytické riešenia sú ľahko odvodené. Riešením pre (2.5a) je

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} A^{t-j-1} Bu(j) \quad (2.6)$$

kde x_0 vyjadruje počiatočný stav.

2.2.4 Nelineárne dynamické modely

Nelineárne dynamické modely môžu byť vyjadrené v spojitý časovej oblasti ako

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (2.7)$$

alebo môžu byť vyjadrené aj v diskkrétnej časovej oblasti ako

$$x(t + T_s) = f(x(t), u(t)) \quad (2.8)$$

Použitím nelineárneho modelu dokážeme zvýšiť kvalitu riadenia a to najmä v prípade procesov s rýchlou dynamikou. Goniometrické funkcie alebo exponenciálne funkcie sú typická nelinearita v matematických modeloch. Dynamická charakteristika nelineárneho systému je opísaná nelineárnymi diferenciálnymi rovnicami, ktoré sú modelom pre riešenie problematiku.

2.3 Typy účelových funkcií

Charakteristickou črtou prediktívneho riadenia je jeho všeobecnosť. Preto v závislosti od cieľu riadenia je možné aplikovať prediktívne riadenie na rôzne typy účelových funkcií [12].

Uvažujme diskretný lineárny stavový opis, na základe ktorého chceme vypočítať optimálne akčné zásahy, je v tvare

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.9)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matica $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, n_x vyjadruje počet stavov a n_u vyjadruje počet vstupov. Ďalej $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ reprezentuje stavy a $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ reprezentuje akčné zásahy, k hovorí o kroku riadenia, $k = 0, \dots, N - 1$.

2.3.1 Všeobecná formulácia MPC

Prediktívne riadenie sa skladá z účelovej funkcie a ohraničení. Všeobecná formulácia optimalizačného problému je v tvare [14]:

$$\min \|Q_N x_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|Q_x x_k\|_p + \|Q_u u_k\|_p \right) \quad (2.10a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (2.10b)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.10c)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (2.10d)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (2.10e)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.10f)$$

kde rovnica (2.10a) je účelovou funkciou, ktorá minimalizuje súčet N členov p -normy súčinu váhovej funkcie stavov $Q_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, resp. vstupov $Q_u \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ a vektora stavov x_k , resp. vstupov u_k a taktiež minimalizuje terminálnu penalizáciu s váhovou funkciou $Q_N \in \mathbb{R}^{n_N \times n_N}$ na posledný predikovaný stav. Rovnica (2.10d) vyjadruje množinu stavov, rovnica (2.10e) množinu vstupov a rovnica (2.10f) terminálnu množinu.

N je označenie pre predikčný horizont, ktorý môže mať dva významy. *Problém riadenia na konečnom horizonte* pre konečnú hodnotu N , ak uvažujeme nekonečný horizont, tak je to *problém riadenia na nekonečnom horizonte*, teda $N \rightarrow \infty$ [18].

V prípade, že použijeme 2-normu, tak z rovnice (2.10a) vznikne kvadratická účelová funkcia:

$$\min x_N^\top Q_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\top Q_x x_k + u_k^\top Q_u u_k) \quad (2.11a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.11b)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.11c)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.11d)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.11e)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.11f)$$

Účelová funkcia (2.11a) je kvadratická a ohraňovania (2.11b - 2.11f) sú lineárne za predpokladu, že množiny $\mathbb{X}$, $\mathbb{U}$ a $\mathbb{T}$ sú polyhedrony.

2.3.2 Regulácia výstupov

Regulácia výstupov, (angl.: *Regulation*), je typ riadenia, ktorého cieľom je penalizácia odchýlky výstupu od nuly a taktiež cieľom je minimalizovať akčné zásahy a neporušiť pritom žiadne zo zadaných ohraňovní.

Matematická formulácia:

$$\min \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|Q_y y_k\|_p + \|Q_u u_k\|_p \right) \quad (2.12a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.12b)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.12c)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.12d)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.12e)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.12f)$$

$$y_k \in \mathbb{Y}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.12g)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.12h)$$

Účelová funkcia (2.12a) minimalizuje súčet N členov p -normy súčinu váhovej funkcie stavov $Q_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, resp. vstupov $Q_u \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ a vektora výstupov y_k , resp. vstupov

u_k . Ohraničenia sú v rovniciach (2.12b - 2.12h), kde rovnica (2.12e) vyjadruje množinu stavov, rovnica (2.12f) množinu vstupov, rovnica (2.12g) množinu výstupov a rovnica (2.12h) terminálnu množinu.

2.3.3 Sledovanie trajektórie

Sledovanie trajektórie, (angl.: *Tracking*), je typ riadenia, ktorého cieľom je minimalizovať vzdialenosť medzi predikovaným výstupom y_k a referenčným výstupom y_{ref} , cieľom je aj minimalizovať akčné zásahy.

Matematická formulácia:

$$\min \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|Q_y(y_k - y_{\text{ref}})\|_p + \|Q_u u_k\|_p \right) \quad (2.13a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.13b)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.13c)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.13d)$$

$$y_k \in \mathbb{Y}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.13e)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.13f)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.13g)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.13h)$$

Rozdiel prediktívneho riadenia so sledovaním trajektórie oproti regulácii je formulácia účelovej funkcie. V rovnici (2.13a) je oproti rovnici (2.12a) zmena taká, že sa penalizuje rozdiel aktuálneho výstupu od referenčného výstupu, ktorý je nezávislý od času k a je nemenný počas celej doby riadenia.

Analogicky vieme napísať optimalizačný problém pre sledovanie trajektórie stavov.

Matematická formulácia:

$$\min \|Q_N(x_N - x_{\text{ref}})\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \left(\|Q_x(x_k - x_{\text{ref}})\|_p + \|Q_u u_k\|_p \right) \quad (2.14a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.14b)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.14c)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.14d)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.14e)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.14f)$$

Zmenou v účelovej funkcii (2.14a) oproti (2.13a) je to, že teraz sa sleduje zmena aktuálneho stavu od referenčného stavu. Ohraničenia pre sledovanie trajektórie stavov sú v rovniciach (2.14b - 2.14f).

2.3.4 Riadenie za najmenší počet krokov

Riadenie za najmenší počet krokov, (angl.: *Minimum time control*), je typ riadenia, ktorého cieľom je minimalizovať počet krokov riadenia k na dosiahnutie požadovaného cieľa, resp. minimalizovať predikčný horizont N , za ktorý proces dosiahne referenciu a neporuší pritom žiadne z ohraničení systému.

Matematická formulácia:

$$\min N \quad (2.15a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.15b)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.15c)$$

$$x_0 = x(t) \quad (2.15d)$$

$$y_k \in \mathbb{Y}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.15e)$$

$$u_k \in \mathbb{U}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.15f)$$

$$x_k \in \mathbb{X}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.15g)$$

$$x_N \in \mathbb{T} \quad (2.15h)$$

Účelová funkcia (2.15a) minimalizuje počet krokov riadenia vzhľadom na ohraničenia (2.15b - 2.15h).

2.4 Ohraničenia

Akčné zásahy procesov (napr. rýchlosť, zrýchlenie, poloha ventilu a iné) sú vo väčšine fyzických systémov ohraničené [17]. Tieto ohraničenia vieme vložiť do lineárnych nerovností v tvare

$$Eu_k \leq e, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad (2.16)$$

v ktorej

$$E = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} u_{\max} \\ -u_{\min} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

opisujú ohraničenia v tvare

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad (2.18)$$

V niektorých prípadoch je potrebné uvažovať aj ohraničenia na stavy alebo výstupy, a to hlavne ak ide o bezpečnosť prevádzky, kvalita produktu a iné. Toto môže byť vyjadrené ako

$$Fx_k \leq f, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad (2.19)$$

Je vhodné v niektorých aplikáciách obmedziť rýchlosť zmeny vstupu, a to pomocou $u_k - u_{k-1}$. Ak chceme zachovať stavovú podobu modelu, môžeme tento stav rozšíriť

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Rozšírený model systému je

$$\tilde{x}^+ = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \quad (2.21a)$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} \quad (2.21b)$$

kde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0] \quad (2.22)$$

Ak sa obmedzí rýchlosť zmeny budúcich prírastkov riadenia, tak je to definované ako

$$\Delta u_{\min} \leq u_k - u_{k-1} \leq \Delta u_{\max}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad (2.23)$$

tak potom

$$F\tilde{x}_k + Eu_k \leq e \quad (2.24)$$

kde

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ -\Delta u_{\min} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

kde I je jednotková matica, Δu je rozdiel aktuálneho akčného zásahu a predošlého akčného zásahu.

2.5 Kvadratické programovanie

Jeden zo spôsobov ako získať sekvenciu optimálnych akčných zásahov pre problémy opísané v rovniciach (2.10) - (2.15) je riešiť tento problém numericky pre konkrétnu hodnotu počiatočnej podmienky ako kvadratický program.

Riešenie optimalizačných problémov často vyžaduje pokročilé matematické techniky. Kvadratické programovanie (QP) je jednou z techník, ktorá umožňuje riešenie optimalizačného problému s kvadratickou účelovou funkciou a za prítomnosti lineárnych ohraničení v tvare rovností alebo aj nerovností [7].

Mnoho oblastí, ako je procesný priemysel, elektrotechnika, poľnohospodárstvo, alebo aj ekonomické oblasti si vyžadujú do určitej miery optimalizovať výrobu, zisky, náklady a iné ukazovatele. Vzhľadom na široké uplatnenie kvadratického programovania je komplexné pochopenie tohto problému cenným nástrojom.

Vo všeobecnosti tento optimalizačný problém môže byť vyjadrený ako

$$\min_x x^\top P x + q^\top x + r \quad (2.26a)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b \quad (2.26b)$$

$$A_e x = b_e \quad (2.26c)$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor optimalizovaných premenných a P je symetrická a pozitívne definitná matica, $q \in \mathbb{R}^n$, $A_e \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b_e \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$. Označenie m , p hovorí o počte ohraničení v tvare rovností, prípadne v tvare nerovností.

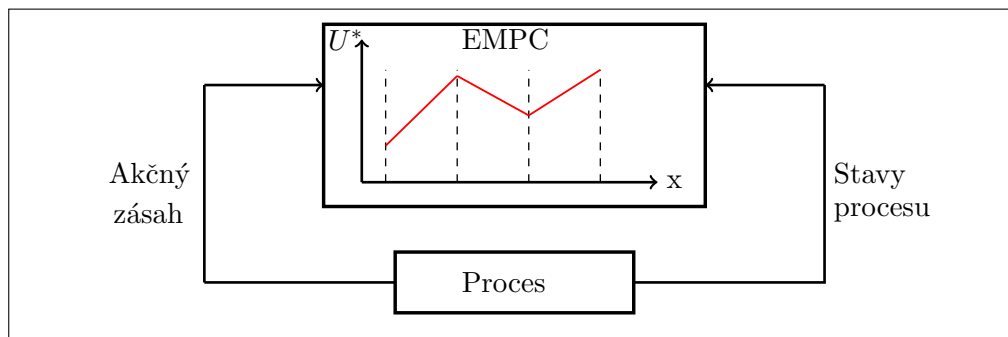
Riešením akéhokoľvek optimalizačného problému chceme získať práve jedno unikátne a najmä optimálne riešenie.

Na riešenie kvadratického programovania existuje niekoľko metód. Medzi tie najpoužívannejšie metódy patria:

- Metóda aktívnych množín
- Metóda vnútorného bodu
- Bariarová metóda

2.6 Explicitné prediktívne riadenie (EMPC)

Predošlé časti sa zaoberali všeobecnou formuláciou prediktívneho riadenia a jeho potrebných náležitostí na vyriešenie optimalizačného problému. Avšak tým, že pri riešení sa zohľadňujú aj rôzne fyzické či matematické ohraničenia procesu, zvyšuje sa výpočtová náročnosť takéhoto prístupu. Na zníženie výpočtovej náročnosti sa preto zaviedol tzv. explicitný prediktívny regulátor (angl.: *Explicit Model Predictive Control*, EMPC).



Obr. 2.4: Reprezentácia EMPC.

Hlavným problémom klasického MPC (On-Line prístupu) je, že na dosiahnutie optimálneho akčného zásahu je potrebné vyriešiť daný optimalizačný problém v každej perióde vzorkovania. V každej perióde vzorkovania sa odmerajú stavy systému, následne sa použijú namerané stavy ako počiatočná podmienka pre optimalizačný problém, vyriešime optimalizačný problém a získame sekvenciu predikovaných akčných zásahov a z tejto sekvencie použijeme prvý prvok, ktorý pôjde späť do systému a opäť prepočítame optimalizačný problém (obr. 2.1). Znamená to, že máme jednu periódu vzorkovania na vyriešenie optimalizačného problému.

Preto klasické MPC sa nie vždy dá použiť na vyriešenie optimalizačného problému, hlavne ak ide o procesy s veľmi rýchlou dynamikou, ktorých perióda vzorkovania je v milisekundách, prípadne v mikrosekundách.

2.6.1 Princíp explicitného MPC

Cieľom explicitného prediktívneho riadenia (tzv. Off-Line prístupu) je predpočítať optimálne riešenie, tým pádom nie je potrebné riešiť optimalizačný problém v každej perióde vzorkovania, a preto sa výpočtová náročnosť použitím takéhoto prístupu môže znížiť [12].

Pod pojmom predpočítať riešenie máme na mysli vytvoriť tzv. tabuľku (angl.: *Look Up table*) všetkých možných hodnôt počiatočných stavov s príslušnou afínnou funkciou, na základe ktorej získame optimálny akčný zásah. A teda, tak ako to bolo v prediktívnom riadení, na obr. 2.1 sa blok s optimalizačným problémom zamení v explicitnom prediktívnom riadení za tabuľku, tak ako to zobrazuje obr. 2.4.

Riešením parametrického programovania získame tzv. tabuľku, ktorá má na x-osi počiatočné podmienky. Ak chceme vedieť, aká je hodnota optimálneho akčného zásahu,

je potrebné zistiť v ktorom z regiónov sa nachádza počiatočná podmienka a potom sa pozrieť na príslušnú funkciu, ktorá je lineárna. Vyhodnotením tejto funkcie získame optimálny akčný zásah U^* .

2.6.2 Multi-parametrické programovanie

Majme kvadratickú účelovú funkciu s ohraničeniami v tvare nerovností:

$$\min_U \frac{1}{2} U^\top H U \quad (2.27a)$$

$$\text{s.t. } GU \leq W + Sx_0 \quad (2.27b)$$

Cesta, ktorou dokážeme vyriešiť optimalizačný problém s ohraničeniami je použiť Lagrangeovu metódu a vyriešiť Karush-Kuhn-Tucker (KKT) podmienky [10]. Na vyriešenie KKT podmienok je potrebné zostrojiť ako prvé Lagrangian:

$$L(U, \lambda) = \frac{1}{2} U^\top H U + \lambda^\top (GU - W - Sx_0) \quad (2.28)$$

KKT podmienky sú nasledovné:

1. *Stacionarita* - hovorí o tom, kde sa nachádza minimum Lagrangianu

$$\frac{\partial L}{\partial U} = HU^* + G^\top \lambda^* = 0 \quad (2.29)$$

2. *Primárna zlučiteľnosť* - môžeme získať iba také akčné zásahy, ktorú sú v súlade s originálnymi ohraničeniami

$$GU - W - Sx_0 \leq 0 \quad (2.30)$$

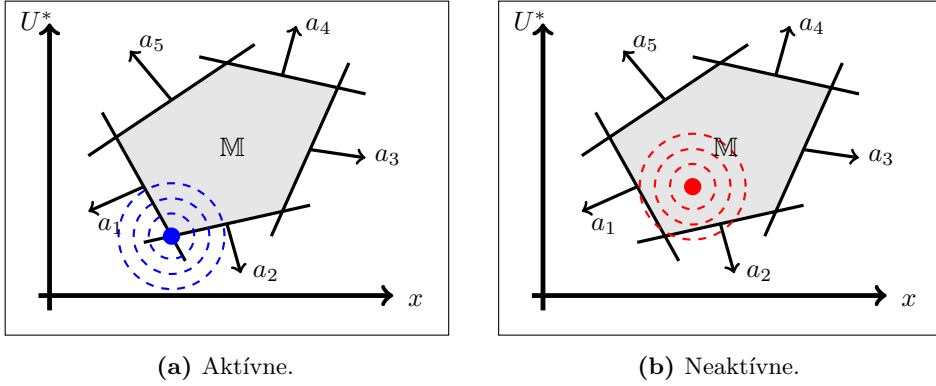
3. *Duálna zlučiteľnosť* - hovorí o tom, že Lagrangianove násobiče musia byť nenegatívne

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad (2.31)$$

4. *Doplnková voľnosť* - hovorí, že príspevok tohto výrazu v účelovej funkcii musí zmiznúť v optime, čo znamená, že ak máme nejaké U a máme nejaký vektor λ , potom ak U a λ spĺňajú všetky tieto podmienky, môžeme bezpečne vyhlásiť, že je to optimálne riešenie pôvodného problému

$$\lambda_i^* (G_i U^* - W_i - S_i x_0) = 0 \quad (2.32)$$

Lagrangianove násobiče tiež hovoria o tom, ktoré z ohraničení je aktívne a ktoré je neaktívne.



Obr. 2.5: Aktívne a neaktívne ohraničenia

1. Aktívne ohraničenie

$$G_i U^* - W_i - S_i x_0 = 0; \lambda_i^* \geq 0 \quad (2.33a)$$

2. Neaktívne ohraničenie

$$G_i U^* - W_i - S_i x_0 < 0; \lambda_i^* = 0 \quad (2.33b)$$

Z obr. 2.5 je možné vidieť, že obr. 2.5a zobrazuje aktívne ohraničenia $A = \{a_1, a_2\}$ a obr. 2.5b nemá aktívne ani jedno z ohraničení, $A = \{\}$, pretože červený bod neleží na ohraničení.

2.6.3 Konštrukcia riešenia EMPC (Off-line fáza)

1. Vyjadrenie lokálneho zákona riadenia U^*

Uvažujme, že sú aktívne ohraničenia indexované množinou A , potom z derivácie Lagrangianu (2.29) vyjadríme U^*

$$U^* = -H^{-1} G^\top \lambda^* \quad (2.34a)$$

kde do (2.33a) dosadíme (2.34a)

$$-G_A H^{-1} G^\top \lambda^* = W_A + S_A x_0 \quad (2.34b)$$

Vyjadením λ^* z (2.34b) získame

$$\lambda^* = -(G_A H^{-1} G^\top)^{-1} (W_A + S_A x_0) \quad (2.35a)$$

$$\lambda^* = M_A x_0 + \ell_A \quad (2.35b)$$

kde $\ell = -(G_A H^{-1} G^\top)^{-1}$. Cieľom však nie je získať λ^* , ale akčný zásah U^* , preto (2.35b) dosadíme do (2.34a)

$$U^* = -H^{-1} G^\top L - H^{-1} G^\top M x_0 \quad (2.36a)$$

$$U^* = F_A x_0 + g_A \quad (2.36b)$$

Na to, aby sme získali akčné zásahy, je potrebné zistiť, ktoré z ohraňení je aktívne, pretože L závisí od konkrétnych aktívnych ohraňení. Preto je potrebné vyčíslit' všetky možné kombinácie aktívnych ohraňení a to využitím podmienok KKT, konkrétne primárnej a duálnej zlučiteľnosti.

2. Určenie regiónu platnosti lokálneho zákona riadenia

$$\text{Duálna zlučiteľnosť: } \lambda_i^* \geq 0 \quad (2.37a)$$

$$\text{Primárna zlučiteľnosť: } GU^* \leq W + Sx_0 \quad (2.37b)$$

Dosadením (2.35b) do (2.37a) a (2.36b) do (2.37b) získame

$$M_A x_0 + \ell_A \geq 0 \quad (2.38a)$$

$$G(F_A x_0 + g_A) \leq W + Sx_0 \quad (2.38b)$$

Úpravou týchto rovníc dostaneme

$$-M_A x_0 \leq \ell_A \quad (2.39a)$$

$$(GF_A - S)x_0 \leq W - Gg_A \quad (2.39b)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -M_A \\ GF_A - S \end{bmatrix} x_0}_{Ax_0} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_A \\ W - Gg \end{bmatrix}}_b \quad (2.39c)$$

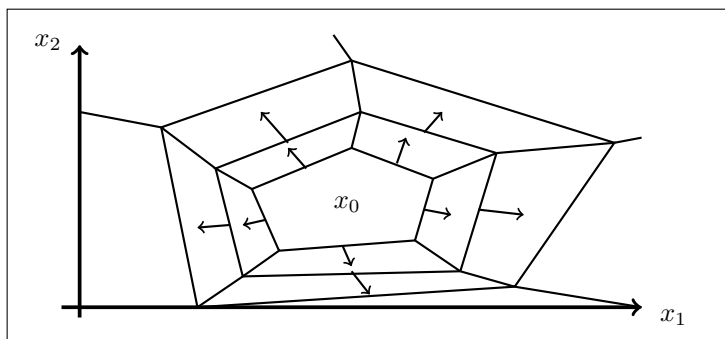
kde rovnica (2.39c) vyjadruje polytop v okolí optimálneho riešenia, kde sú splnené ohraňenia.

Riešením vyššie spomenutých rovníc však získame iba jeden región. Ďalšie polytopy a teda aj kompletnú konštrukciu EMPC môžeme získať:

- Geometricky
- Enumericky

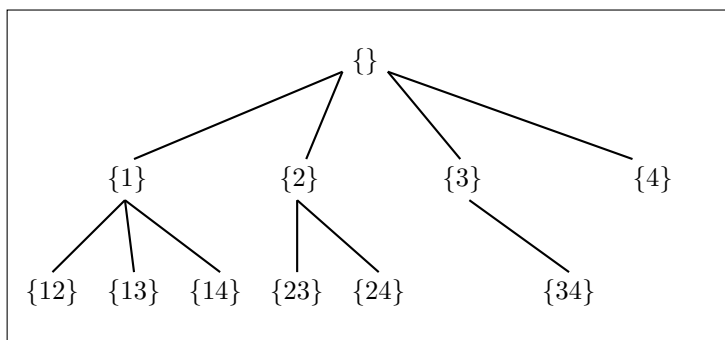
Geometrická metóda spočíva v tom, že nové regióny sa získavajú využitím geometrie existujúcich regiónov. Napríklad pre obr. 2.6 máme polytop s počiatočným x_0 . Daný

polytop má 5 ohraničení, z ktorých geometricky určíme stred, a naše x_0 posunieme kúsok vyššie, vyšetříme nové podmienky optimality a získame ďalší región [5].



Obr. 2.6: Geometrická metóda.

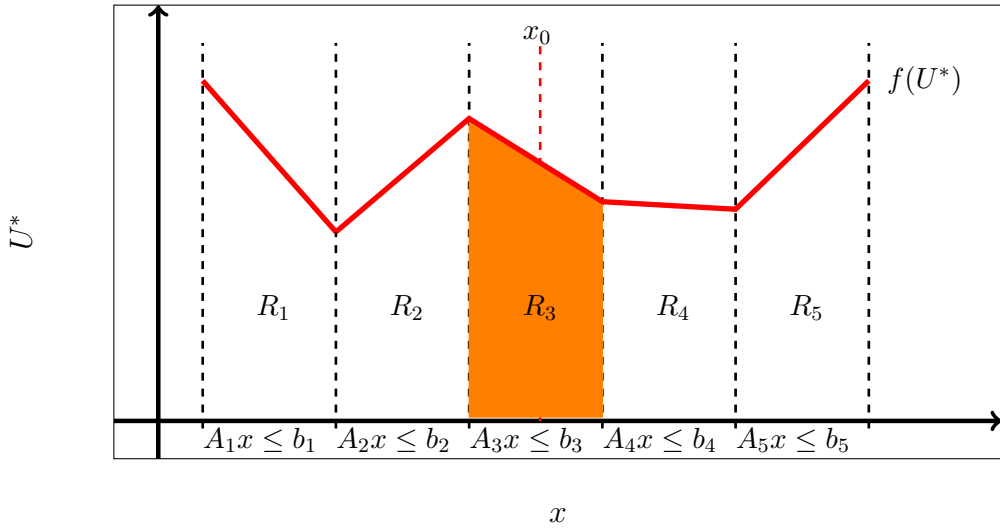
Enumeračná metóda nevyžaduje geometriu, iba prehľadáva strom aktívnych ohraničení. Vytvorením kombinácií sa zostroja rovnice (2.35b) a (2.36b) a k nim aj korešpondujúce polytopy [9]. Príklad enumeračnej metódy je graficky zobrazený na obr. 2.7.



Obr. 2.7: Enumeračná metóda.

2.6.4 Implementácia riešenia EMPC (On-line fáza)

V závislosti od počiatočného výberu x_0 a vyriešením kvadratického problému, z ktorého získame λ , ktoré hovoria, ktoré z ohraničení je aktívne v danom partikulárnom riešení, vieme získať všetky matice, ktoré závisia od aktívnych ohraničení A a tak nájdeme región platnosti (obr. 2.8). Regióny $R_1 - R_5$ patria afinnej funkcii v danom regióne, ktorej riešením v danom partikulárnom bode získame optimálny akčný zásah U^* .



Obr. 2.8: Výber regiónu.

Výhodami explicitného MPC je ľahká implementácia v uzavretej slučke, rýchle on-line riešenie a taktiež bezpečná implementácia, keďže pri výpočtoch sa nepoužíva delenie a tým pádom sa predchádza deleniu nulou, čo by mohlo viesť ku katastrofálnym následkom [11]. Nevýhodou explicitného MPC je to, že počet regiónov, ktoré treba prejsť môže byť veľký a tým pádom on-line riešenie nemusí byť dostatočne rýchle. Počet regiónov je tým väčší, čím väčší je počet stavov, taktiež to závisí aj od veľkosti predikčného horizontu.

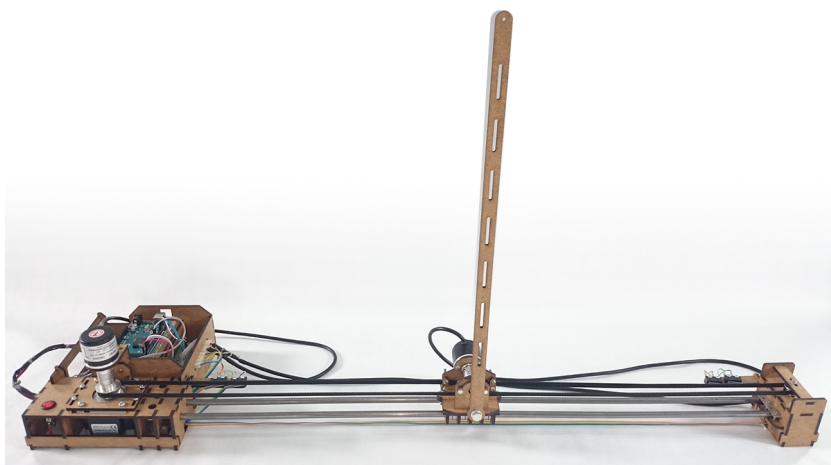
Laboratórne inverzné kyvadlo

Táto kapitola sa zaoberá problematikou laboratórneho inverzného kyvadla, opisom procesu a jeho využitím v praxi. Ďalej sa venuje stručnému opisu častí laboratórneho inverzného kyvadla a matematickým modelom tohto procesu.

3.1 Opis laboratórneho inverzného kyvadla

Inverzné kyvadlo vo všeobecnosti je štandardným problémom v oblasti radiacích systémov. V súčasnosti sa princíp inverzného kyvadla a radiacích algoritmov využíva v osobnom transportéri, tzv. segway, v raketách a iných technických či dopravných prostriedkoch. Princíp inverzného kyvadla je často užitočný na demonštráciu lineárnych radiacích algoritmov, ako je napríklad stabilizácia nestabilných systémov. Keďže správanie sa systému je silne nelineárne, tak proces inverzného kyvadla je tiež vhodným systémom na ilustráciu myšlienok v nelineárnom riadení.

Laboratórne inverzné kyvadlo (obr. 3.1) je proces, pri ktorom sa pripevnený vozík s kyvadlom pohybuje po vodiach tyčiach. Za pomoci ozubeného remeňa sa prenáša sila rotačného pohybu motora na vozík, ktorý sa následne hýbe doľava alebo doprava. Kyvadlo sa následne pohybom vozíka rozkmitá, až sa dostane do vertikálnej polohy zo spodnej časti do vrchnej. Taktiež sa pohybom vozíka udržiava kyvadlo v nestabilnej vertikálnej polohe vo vrchnej časti tak, aby nespadlo nadol. Inverzné kyvadlo má tak prakticky dve rovnováhy, z ktorých jedna je stabilná, zodpovedajúca dolnej polohe kyvadla v pokoji, zatiaľ čo druhá je nestabilná. V prípade, že absentuje akákoľvek regulačná sila, tak kyvadlo spadne a vráti sa do stabilnej polohy [2].



Obr. 3.1: Laboratórne inverzné kyvadlo

3.2 Komponenty inverzného kyvadla

Inverzné kyvadlo je zostrojené z viacerých častí, ako je konštrukcia na uchytenie motora, motor, vodiace tyče pre pohyb vozíka, samotný vozík s kyvadlom, senzory a mikroovládač.

Cieľom tohto procesu je na základe pohybu vozíka udržať kyvadlo vo svojej prirodzene nestabilnej polohe a to vo zvislej polohe nahor. Na to, aby sa vozík hýbal je potrebný akčný člen, krokový motor, ktorý rotačným pohybom pohybuje remeňom a tak sa vozík pohybuje po vodiacich tyčiach. Na obr. 3.1 je motor znázornený na ľavej strane konštrukcie [2].

Ďalším komponentom inverzného kyvadla je senzor, rotačný enkóder, ktorý v procese slúži na meranie uhla otočenia kyvadla a polohy vozíka.

3.3 Programové rozhranie

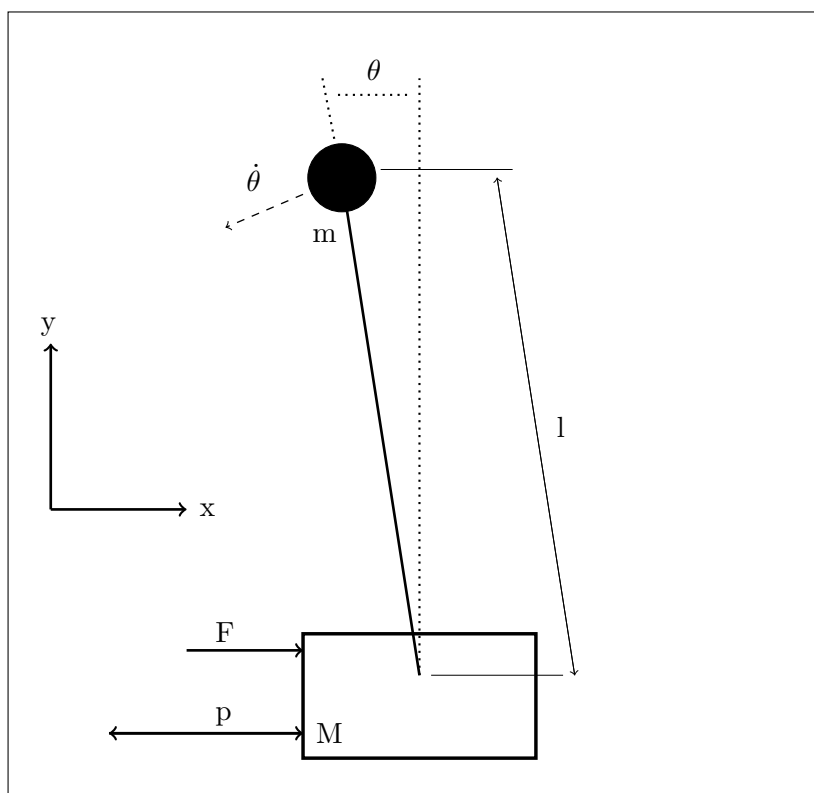
Programovateľný mikroovládač Arduino Mega 2560 je dôležitou časťou inverzného kyvadla, ktorý je využitý ako riadiaca jednotka procesu.

Navrhnuté riadiace algoritmy sú naprogramované v prostredí MATLAB a následne implementované do mikroovládača, Arduino Mega 2560. Signály prijaté z rotačných

enkóderov sa ďalej spracujú, to znamená, že sa vyhodnotí napríklad uhol otočenia kyvadla, poloha vozíka a následne sú tieto signály pripravené na ďalšie spracovanie v riadiacich algoritmoch. Teda úlohou mikroovládača ATmega2560 je spracovať pokyny z MATLAB, vykonať ich a poslať získané, resp. požadované informácie späť do počítača. Riadiace algoritmy môžu byť aplikované priamo v mikroovládači alebo v počítači pomocou MATLAB.

Použitý mikroovládač s mikroprocesorom ATmega2560 má k dispozícii 248kB pamäte využiteľnej na nahrávanie kódu od koncového užívateľa a 8kB pamäte pre uloženie premenných použitých v programe.

3.4 Matematický model inverzného kyvadla



Obr. 3.2: Inverzné kyvadlo - schéma

Pri odvádzaní matematického modelu uvažujme model inverzného kyvadla tak, ako je zobrazené na obrázku 3.2 kde:

veličina	jednotka	popis
m	[kg]	hmotnosť závažia
M	[kg]	hmotnosť vozíka
l	[m]	dĺžka kyvadla
F	[kg.m.s ⁻²]	vonkajšia sila pôsobiaca na vozík
g	[m.s ⁻²]	gravitačné zrýchlenie
p	[m]	poloha vozíka
$\dot{p}$	[m.s ⁻¹]	rýchlosť vozíka
$\ddot{p}$	[m.s ⁻²]	zrýchlenie vozíka
θ	[rad]	uhol otočenia kyvadla
$\dot{\theta}$	[rad.s ⁻¹]	uhlová rýchlosť
$\ddot{\theta}$	[rad.s ⁻²]	uhlové zrýchlenie

Matematický model laboratórneho inverzného kyvadla bol odvodený použitím Lagrangeovej metódy a využitím Lagrangeovej funkcie L v tvare [2].:

$$L = E_k - E_p \quad (3.1)$$

Potenciálna energia E_p a kinetická energia E_k inverzného kyvadla je vyjadrená ako:

$$E_p = mgl\cos(\theta) \quad (3.2a)$$

$$E_k = \frac{1}{2}M\dot{p}^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 \quad (3.2b)$$

kde v_p je súčet rýchlostí kyvadla v smere osi x a v smere osi y . Rovnicu (3.2b) vieme teda rozpísať na jednotlivé smery.

$$E_k = \frac{1}{2}M\dot{p}^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \quad (3.3)$$

$$v_p = l\dot{\theta} \quad (3.4a)$$

$$v_x = l\dot{\theta}\cos(\theta) - \dot{p} \quad (3.4b)$$

$$v_y = l\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (3.4c)$$

Úpravou a dosadením predošlých rovníc dostaneme:

$$E_k = \frac{1}{2}(M + m)\dot{p}^2 + \frac{1}{2}m(-2\dot{p}l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2) \quad (3.5)$$

Lagrangeovu funkciu systému získame dosadením kinetickej a potenciálnej energie:

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m (-2\dot{p}l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2) - mgl\cos(\theta) \quad (3.6a)$$

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{p}^2 - m\dot{p}l\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) \quad (3.6b)$$

Využitím Eulerovej-Lagrangeovej rovnice získame matematický model inverzného kyvadla:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.7)$$

kde q_i sú všeobecné koordináty systému a Q_i všeobecná sila systému.

$q_1 = p$ a $Q_1 = F$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} = F \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = (M + m) \dot{p} - ml\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (3.8b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = (M + m) \ddot{p} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (3.8c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad (3.8d)$$

$$(M + m) \ddot{p} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = F \quad (3.8e)$$

$q_2 = \theta$ a $Q_2 = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -ml\dot{p}\cos(\theta) + ml^2\dot{\theta} \quad (3.9b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -ml\ddot{p}\cos(\theta) + ml\dot{p}\dot{\theta}\sin(\theta) + ml^2\ddot{\theta} \quad (3.9c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml\dot{p}\dot{\theta}\sin(\theta) + gml\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (3.9d)$$

$$-ml\ddot{p}\cos(\theta) + ml^2\ddot{\theta} - gml\dot{\theta}\sin(\theta) = 0 \quad (3.9e)$$

Získaný všeobecný matematický model inverzného kyvadla má tvar:

$$F(t) = (M + m)\ddot{p}(t) - ml\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) + ml\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) \quad (3.10)$$

$$0 = -\ddot{p}(t)ml\cos(\theta(t)) + ml^2\ddot{\theta}(t) - gml\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t)) \quad (3.11)$$

V prípade laboratórneho inverzného kyvadla postačuje využiť rovnicu (3.11), pretože je možné riadiť priamo zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$. Avšak je potrebné do rovnice (3.11) vložiť

moment zotrvačnosti, pretože laboratórne inverzné kyvadlo neuvažuje na svojom konci hmotný bod, tzv. závažie.

Matematický model po pridaní momentu zotrvačnosti:

$$0 = -\ddot{p}(t)ml\cos(\theta(t)) + (I + ml^2)\ddot{\theta}(t) - gml\sin(\theta(t)) \quad (3.12)$$

kde:

$$I = \frac{ml^2}{3}, [\text{kg.m}^2] \text{ moment zotrvačnosti kyvadla,}$$

l , [m] polovica dĺžky kyvadla.

Dynamický matematický model inverzného kyvadla:

$$\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \frac{3}{4l}\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)) + \frac{3g}{4l}\sin(\theta(t)) - b\dot{\theta}(t) \quad (3.13)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami.

Vstupom do systému je zrýchlenie vozíka $\ddot{p}(t)$ a výstupom je uhol otočenia kyvadla $\theta(t)$. Koeficient trenia b vzniká pri rotačnom pohybe kyvadla v ložiskách.

Výsledný nelineárny model inverzného kyvadla v tvare diferenciálnych rovníc je

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \quad (3.14a)$$

$$\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \frac{3}{4l}\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)) + \frac{3g}{4l}\sin(\theta(t)) - b\dot{\theta}(t) \quad (3.14b)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \dot{p}(t) \quad (3.14c)$$

$$\frac{d\dot{p}(t)}{dt} = \ddot{p}(t) \quad (3.14d)$$

kde θ je uhol otočenia kyvadla, $\dot{\theta}$ je uhlová rýchlosť, p je poloha vozíka, $\dot{p}$ je rýchlosť vozíka a $\ddot{p}$ je zrýchlenie vozíka.

3.4.1 Linearizácia modelu

Získaný dynamický matematický model (3.13) obsahuje goniometrické funkcie a tým pádom je model nelineárny. Keďže viaceré riadiace prístupy, ktoré budú využité v tejto práci vyžadujú lineárny model, je potrebné ho linearizovať v ustálenom stave. Inverzné kyvadlo má dva rovnovážne body, $\theta=0$ rad, keď je kyvadlo v dolnej stabilnej polohe a $\theta=\pi$ rad, keď je kyvadlo v hornej nestabilnej polohe. Pre potreby linearizácie a následného návrhu regulátora na stabilizáciu je za ustálený stav považovaná situácia,

keď je kyvadlo v rovnovážnej nestabilnej polohe [2].

$$\left(\frac{d^2 p(t)}{dt^2}\right)^s = \ddot{p}^s = 0 \quad \text{m.s}^{-2} \quad (3.15)$$

$$\theta^s = 0 \quad \text{rad} \quad (3.16)$$

Pomocou Taylorovho rozvoja do prvého rádu sa odstránia nelinearity:

$$\begin{aligned} \ddot{p}(t)\cos(\theta(t)) &\approx \ddot{p}^s\cos(\theta^s) + \left.\frac{d(\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)))}{d\ddot{p}(t)}\right|_{\ddot{p}^s, \theta^s} (\ddot{p}(t) - \ddot{p}^s) + \\ &+ \left.\frac{d(\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)))}{d\theta(t)}\right|_{\ddot{p}^s, \theta^s} (\theta(t) - \theta^s) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)) \approx 0 + 1(\ddot{p}(t) - 0) + 0 = \ddot{p}(t) \quad (3.18a)$$

$$\sin(\theta(t)) \approx \sin(\theta^s) + \left.\frac{d\sin(\theta(t))}{d\theta(t)}\right|_{\theta^s} (\theta(t) - \theta^s) = \theta(t) \quad (3.18b)$$

Linearizáciou bola získaná lineárna diferenciálna rovnica inverzného kyvadla:

$$\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \frac{3}{4l}\ddot{p}(t) + \frac{3g}{4l}\theta(t) - b\dot{\theta}(t) \quad (3.19)$$

Linearizovaný model má dva stavy:

$$x_1(t) = \theta(t) \quad (3.20)$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (3.21)$$

Stavový opis procesu získaný transformáciou rovnice (3.19):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{4l} & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = [0] \quad (3.22)$$

Z diferenciálnej rovnice (3.19) vieme získať priamo aj prenosovú funkciu a to nasledovným spôsobom:

Vstupom do systému je zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ a uhol otočenia kyvadla θ je výstup z procesu. Úpravou rovnice (3.19) po dosadení a úprave vstupných a výstupných parametrov získame rovnicu v tvare:

$$\ddot{y}(t) = \frac{3}{4l}u(t) + \frac{3g}{4l}y(t) - b\dot{y}(t) \quad (3.23a)$$

$$\frac{3}{4l}u(t) = \ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) - \frac{3g}{4l}y(t) \quad (3.23b)$$

Využitím Laplaceovej transformácie získame:

$$\frac{3}{4l}U(s) = \left(s^2 + s - \frac{3g}{4l}\right)Y(s) \quad (3.24a)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{3}{4l}}{s^2 + s - \frac{3g}{4l}} \quad (3.24b)$$

Laboratórne inverzné kyvadlo s uniformným tvarom bez závažia má ťažisko v jeho strede, preto je uvažovaná polovičná dĺžka kyvadla, $l = 0.21\text{m}$. Koeficient trenia bol experimentálne zvolený na hodnotu $b = 1$.

Prenosová funkcia po dosadení parametrov systému:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.57}{s^2 + s - 35.02} \quad (3.25)$$

Takto získaná prenosová funkcia môže byť použitá pre návrh regulátora.

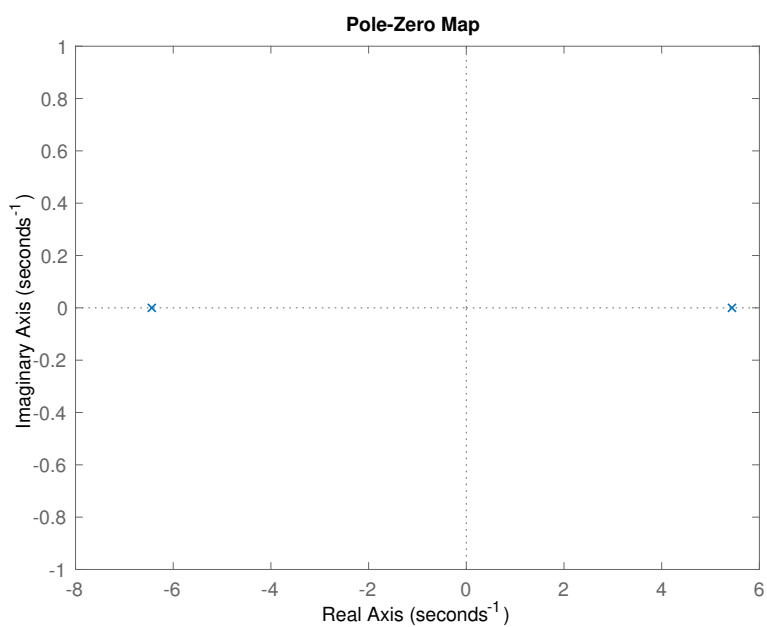
3.4.2 Stabilita systému

Vyšetrovanie stability dynamických systémov je veľmi dôležitým krokom pred samotným riadením procesu. To, ako sa daný systém správa opisujú póly a nuly prenosových funkcií systémov.

Póly, korene menovateľa prenosu, hovoria o stabilite dynamických systémov. Dynamický systém je stabilný, ak všetky jeho póly majú zápornú reálnu časť. Ak je aspoň jeden reálny pól nulový, tak systém je na hranici stability. V prípade, ak má aspoň jeden pól s kladnou reálnou časťou, hovoríme o nestabilnom systéme [4].

Póly prenosovej funkcie tiež definujú periodicitu systému. Systém je periodický, ak má komplexné póly, avšak ak má systém len reálne póly, je aperiodický.

Získaná prenosová funkcia laboratórneho inverzného kyvadla (3.25) obsahuje póly $s_1 = 5.4392$ a $s_2 = -6.4392$, to znamená, že systém je nestabilný a aperiodický. Grafické zobrazenie pólov je možné vidieť na obr. 3.3.



Obr. 3.3: Poloha pólov prenosovej funkcie inverzného kyvadla.

Riadenie inverzného kyvadla

Balancovanie inverzného kyvadla zrýchlením vozíka pozdĺž vodorovnej trate je klasickým problémom v oblasti riadenia. Tieto systémy sú často použité na demonštráciu konceptov v lineárnom riadení, ako je stabilizácia nestabilných systémov. Keďže systém inverzného kyvadla je nelineárny, je taktiež užitočný pri ilustrácii niektorých myšlienok v nelineárnom riadení. Inverzné kyvadlo má v podstate dva rovnovážne stavy, z ktorých jeden je stabilný, zatiaľ čo ten druhý je nestabilný. Stabilný rovnovážny bod zodpovedá stavu, v ktorom je kyvadlo zavesené, to znamená, že sa nachádza v dolnej polohe. Pri absencii akejkoľvek regulačnej sily sa systém prirodzene vráti do tohto stavu. Nestabilná poloha zodpovedá stavu, v ktorom kyvadlo smeruje nahor, a preto si vyžaduje riadiacu silu na udržanie tejto polohy.

Táto kapitola bude opisovať dve metódy vyšvihnutia kyvadla z počiatočnej dolnej polohy do hornej polohy a zachovanie tohto stavu stabilizovaním kyvadla. Nelineárny prediktívny regulátor a energetický regulátor boli implementované na reálny proces, aby sa kyvadlo vyšvihlo do zvislej nestabilnej polohy. Po tom, ako sa kyvadlo vyšvihlo, boli implementované rôzne stabilizačné regulátory na stabilizovanie kyvadla v hornej nestabilnej pozícii.

Nelineárnym prediktívnym regulátorom sa získala optimálna trajektória pomocou ktorej sa kyvadlo vyšvihne do stabilizačnej polohy. Energetický regulátor pridáva do systému inverzného kyvadla primerané množstvo energie, aby sa dosiahol požadovaný energetický stav zodpovedajúci hornej nestabilnej polohe. Stabilizačné regulátory sú založené na linearizovanom modeli okolo vzpriamenej polohy a sú účinné, keď je kyvadlo blízko rovnovážneho stavu.

4.1 Stabilizácia inverzného kyvadla

Úlohou stabilizácie inverzného kyvadla je udržanie kyvadla v jeho prirodzene nestabilnej hornej polohe. Na stabilizáciu inverzného kyvadla bolo navrhnutých viacero radiacích algoritmov, ktoré vhodným aplikovaním akčného zásahu, zrýchlením vozíka $\ddot{p}$, stabilizujú kyvadlo v hornej nestabilnej polohe. Na stabilizáciu inverzného kyvadla postačuje využiť linearizovaný model v ustálenom stave, ktorý zodpovedá uhlu otočenia kyvadla v hornej nestabilnej polohe, $\theta = 0$ rad alebo $\theta = 2\pi$ rad. Preto nasledovné radiacie algoritmy tejto časti uvažujú lineárny model.

4.1.1 Stabilizácia pomocou PID regulátora

Stabilizačný regulátor bol navrhnutý metódou umiestnenia pólov. Jeho hlavnou ideou je vnútiť charakteristickej rovnici uzavretého regulačného obvodu určité póly, a tým tak predurčiť dynamické správanie sa uzavretého regulačného obvodu, ktoré priamo súvisí s voľbou pólov. Prioritou pri voľbe pólov je stabilita uzavretého regulačného obvodu, periodicitá, ale aj rýchlosť regulačného pochodu [3]. V prípade inverzného kyvadla sa snažíme práve o stabilitu, pretože úlohou riadenia je stabilizovať kyvadlo vo vertikálnej nestabilnej polohe.

Metódou umiestnenia pólov tak navrhujeme regulátor pre riadenie procesu, ktorý je opísaný prenosom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.57}{s^2 + s - 35.02} \quad (4.1)$$

tak, aby uzavretý regulačný obvod bol rýchlejší ako pôvodný proces a stabilný. Póly prenosovej funkcie patriacej inverznému kyvadlu sú $s_1 = 5.4392$ a $s_2 = -6.4392$. Pól s_1 poukazuje na nestabilitu procesu, pretože hodnota pólu je kladná a spolu s pólom s_2 je zrejmé, že je to proces nekmitavý, pretože neobsahuje imaginárne zložky.

Navrhnuté póly sú záporné a ďalej od nuly, $s = [-6.5 \ -7 \ -7.8]$.

Následne sa z týchto pólov zostrojil polynóm v tvare:

$$0 = (s + 6.5)(s + 7)(s + 7.8) \quad (4.2a)$$

$$0 = s^3 + 21.3s^2 + 150.8s + 354.9 \quad (4.2b)$$

Všeobecný tvar polynómu je:

$$0 = s^3 + K_2s^2 + K_3s + K_4 \quad (4.3)$$

Všeobecný tvar prenosovej funkcie inverzného kyvadla je:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + s - a} \quad (4.4)$$

Prenos PID regulátora, ktorý je zložený z 3 zložiek, a to zložky proporcionálnej, integračnej a derivačnej je v tvare:

$$G_R(s) = Z_r \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4.5)$$

Po dosadení všeobecných tvarov prenosu inverzného kyvadla a prenosu PID regulátora do charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu v tvare

$$1 + G(s)G_R(s) = 0 \quad (4.6)$$

získame finálny tvar rovnice na základe ktorej si odvodíme vzťahy pre výpočet parametrov regulátora pomocou metódy porovnania koeficientov. A teda finálny tvar rovnice je:

$$s^3 + (1 + bZ_r T_d)s^2 + (a + bZ_r)s + \frac{bZ_r}{T_i} = 0 \quad (4.7)$$

Získané parametre regulátora sú:

$$Z_r = \frac{K_3 - a}{b} = 52.0307 \quad (4.8a)$$

$$T_i = \frac{bZ_r}{K_4} = 1.2323 \quad (4.8b)$$

$$T_d = \frac{K_2 - 1}{bZ_r} = 0.1092 \quad (4.8c)$$

Po získaní parametrov regulátora si bolo potrebné zvoliť formu riadenia. Riadenie bolo realizované pomocou inkrementálnej diskkrétnej formy PID regulátora. Princípom takto zvoleného regulátora je to, že je potrebné v každej perióde vzorkovania poznať uhol náklonu kyvadla, vypočítať regulačnú odchýlku a taktiež vypočítať akčný zásah do systému, kde akčným zásahom je zrýchlenie vozíka [2].

Na výpočet akčného zásahu sa použila rovnica v tvare:

$$u_k = u_{k-1} + Z_r \left[\left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) e_k + \left(-1 - \frac{2T_d}{T_s} \right) e_{k-1} + \frac{T_d}{T_s} e_{k-2} \right] \quad (4.9)$$

kde:

$k = 1, 2, \dots, N$ - krok opakovania výpočtu

e_k - regulačná odchýlka, ktorá sa vypočíta ako $w - y_k$

w - žiadaná poloha kyvadla

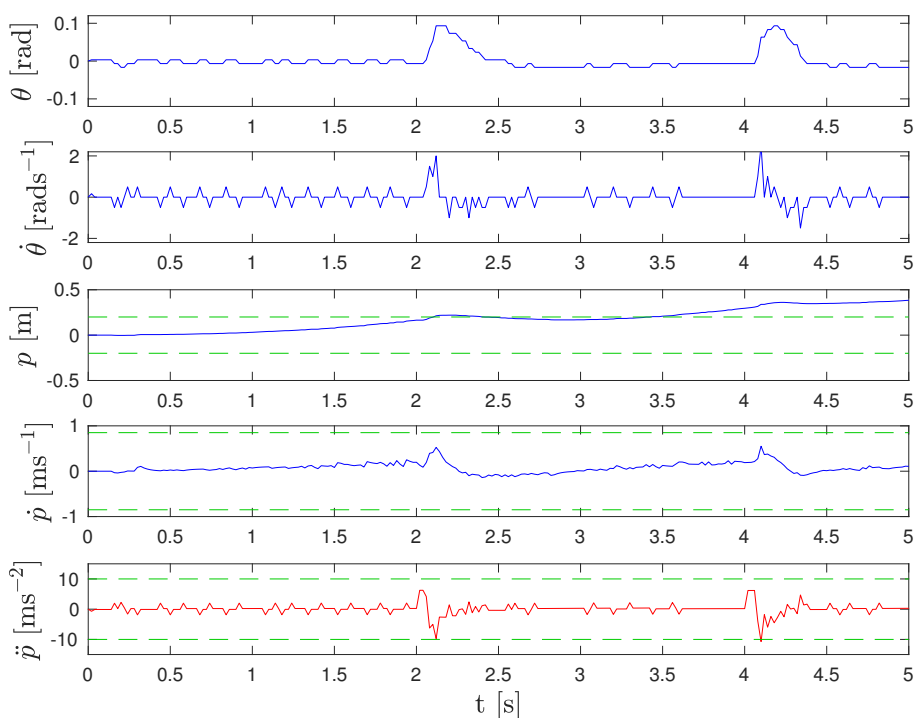
y_k - uhol otočenia kyvadla

u_k - akčný zásah do procesu

T_s - perióda vzorkovania 20ms

Z_r, T_i, T_d - parametre regulátora

Riadenie stabilizácie inverzného kyvadla PID regulátorom, kde uhol otočenia kyvadla θ je riadená veličina a akčný zásah je zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ je znázornené na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Priebeh riadenia procesu PID regulátorom.

PID regulátor riadi jeden výstup jedným vstupom a preto jeho hlavnou nevýhodou v prípade stabilizácie je to, že riadi iba uhol otočenia kyvadla, čo bola jeho hlavná riadená veličina a tým pádom sa o zvyšné stavy nestará. Z obr. 4.1 je možné vidieť, že poloha vozíka prekročila ohraničenie systému a tým pádom tento regulátor nie je vyhovujúci pre úlohu stabilizácie kyvadla. Z obr. 4.1 je možné si taktiež všimnúť,

že v časoch 2 s a 4 s kyvadlo vykonalo väčší akčný zásah, ako čas predtým. Bolo to spôsobené tým, že sa vykonala manuálna porucha, kde sa rukou buchlo do kyvadla, ukázalo sa tak, že sa kyvadlo dokáže aj napriek malej poruche naďalej stabilizovať.

4.1.2 Stabilizácia pomocou LQ regulátora

LQR riadenie (angl.: *Linear Quadratic Regulator*) je optimálne riadenie založené na minimalizácii kvadratického kritéria s lineárnym systémom [16].

Kvadratické kritérium je dané ako účelová funkcia v tvare:

$$J = \min \int_0^{\infty} \left[x^{\top}(t)Qx(t) + u^{\top}(t)Ru(t) \right] dt \quad (4.10a)$$

$$\text{s.t. } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.10b)$$

kde Q je reálna symetrická kladne semidefinitná váhová matica a R je reálna symetrická kladne definitná váhová matica.

Riešenie optimalizačného problému, t.j. minimalizáciu účelovej funkcie (4.11) pre každé x_0 zabezpečí stavová spätná väzba

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.11)$$

kde

$$K = R^{-1}B^{\top}P \quad (4.12)$$

pričom P je symetrické kladne semidefinitné riešenie maticovej Riccatiho rovnice

$$PA + A^{\top}P - PBR^{-1}B^{\top}P = -Q \quad (4.13)$$

Vzt'ah (4.11) vyjadruje zákon riadenia, ktorý má spätnoväzbové vlastnosti. Jeho úlohou je zabezpečiť stabilitu spätnoväzbového systému a minimalizovať kvadratické kritérium. Matica K je matica zosilnení, resp. konštánt, a teda spätnoväzbový optimálny regulátor je proporcionálneho typu.

Získaný stavový model pre inverzné kyvadlo je v tvare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{4l} & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = [0] \quad (4.14)$$

Nevýhodou stavového opisu (4.14) je to, že uvažuje iba jeden vstup a jeden výstup a teda správanie sa regulátora bude podobné ako v prípade riadenia PID regulátorom a to tak, že sa bude zaujímať iba o jeden stav, uhol otočenia inverzného kyvadla.

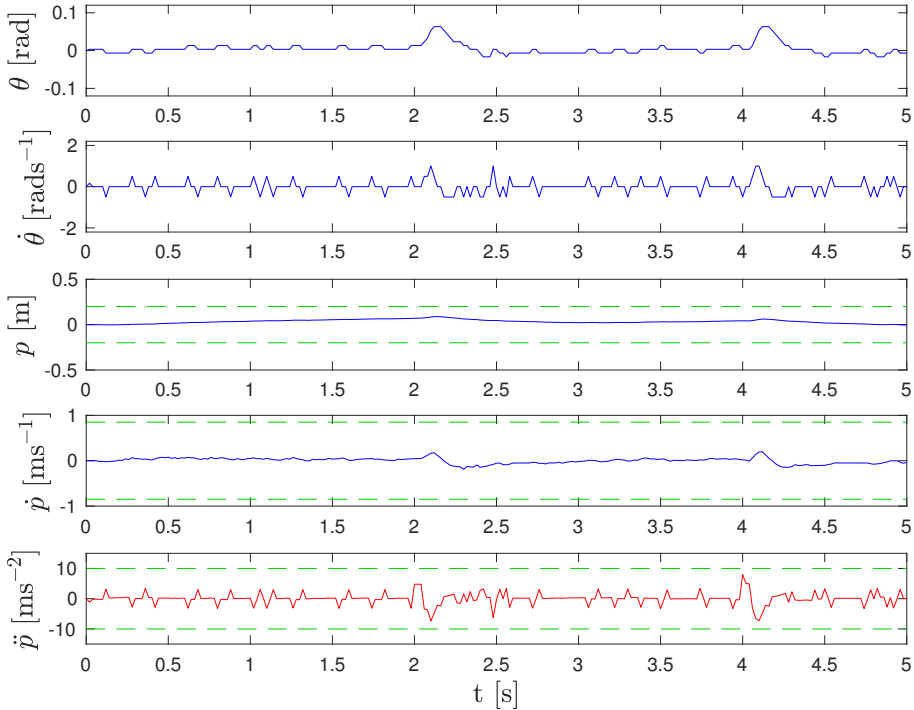
Keďže proces inverzného kyvadla má celkovo štyri stavy, $x = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]$, vieme rozšíriť stavový opis aj o sledovanie a reguláciu polohy vozíka. Stavový opis po rozšírení v tvare matíc A , B a C je nasledovný:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g}{4l} & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Riešením týchto rovníc pomocou prostredia MATLAB a príkazu *dlqr()* bolo získané optimálne riadenie v tvare:

$$u = -[42.2888 \ 8.4959 - 8.635 - 7.611]x \quad (4.16)$$

Experimentálne získané riadenie stabilizácie inverzného kyvadla LQ regulátorom je znázornené na obr. 4.2.



Obr. 4.2: Priebeh riadenia procesu LQ regulátorom.

Oproti riadeniu PID regulátorom z obr. 4.1, riadenie LQ regulátorom zvyšuje kvalitu riadenia stavov a odstraňuje najmä problém s polohou vozíka, ktorá je teraz riadená spolu s uhlom otočenia kyvadla. Aj napriek tomu, že návrh LQ regulátora pri výpočte nezohľadňuje fyzikálne vlastnosti procesu, tak inverzné kyvadlo neporušilo žiadne z ohraničení. Opäť z obr. 4.1 je možné si všimnúť, že v časoch 2 s a 4 s kyvadlo vykonalo väčší akčný zásah, čo spôsobila manuálna porucha. Aj napriek tejto poruche sa kyvadlo dokázalo stabilizovať. Na základe vyššie spomenutého je použitie LQ regulátora na stabilizáciu inverzného kyvadla vhodné.

4.1.3 Stabilizácia pomocou explicitného MPC regulátora

Explicitné prediktívne riadenie (angl.: *Explicit Model Predictive Control*, EMPC) bolo aplikované na proces inverzného kyvadla. Explicitné riešenie ohraničených lineárnych prediktívnych regulátorov môže byť vypočítané riešením multi-parametrického kvadratického programovania. Riešením je čiastková afinná funkcia, ktorá môže byť vyhodnotená v každej perióde vzorkovania, aby sa získal optimálny akčný zásah. Výpočtové úsilie explicitného riadenia je tým pádom obmedzené na vyhľadávanie v tabuľke. To umožňuje realizáciu na nízkonákladovom hardvéri pri veľkých periódach vzorkovania a pri reálnych procesoch s rýchlou dynamikou.

Štandardné prediktívne riadenie (angl.: *Model Predictive Control*, MPC) spočíva v riešení optimalizačného problému v každej perióde vzorkovania na základe hodnôt vektora aktuálnych stavov. Z tohto dôvodu je tento prístup prediktívneho riadenia vhodný najmä pre procesy s pomalou dynamikou. Jeho komplexnosť je stále nevhodná pre procesy s rýchlou dynamikou a počítače s nízkou výkonnosťou. Pre tieto dôvody bol implementovaný práve explicitný prediktívny regulátor pre daný rozsah prevádzkových podmienok, ktorý rieši problém optimalizácie off-line.

Optimalizačný problém návrhu EMPC sa skladá z účelovej funkcie a z ohraničení. Účelová funkcia minimalizuje odchýlku výstupných, alebo stavových veličín od žiadanej hodnoty a minimalizuje sa aj veľkosť akčných zásahov, alebo ich prírastkov od počiatku.

Na riadenie bola použitá kvadratická účelová funkcia v tvare:

$$\min_u \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\top Q x_k + u_k^\top R u_k) \quad (4.17a)$$

$$\text{s.t. } x_{k+1} = A x_k + B u_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.17b)$$

$$x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.17c)$$

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.17d)$$

kde N je dĺžka predikčného horizontu, x je vektor stavov systému, u je vstup do systému. Vektory $u_{\min}$, $u_{\max}$ a $x_{\min}$, $x_{\max}$ sú obmedzenia na akčné zásahy a stavy systému.

Uvažovaná matica stavov A a matica výstupov B je v tvare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g}{4l} & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

V skutočnosti sa ale v rovnici (4.17b) nepoužíva priamo (4.18), ktoré sú v spojitnej časovej oblasti, ale používame model pre diskretnú časovú oblasť.

V účelovej funkcii je dôležité vhodne nastaviť váhovú maticu Q , ktorá penalizuje kvadratickú odchýlku stavov od počiatku od danej referencie a váhovú maticu R , ktorá penalizuje akčné zásahy (4.17a). Keďže účelová funkcia minimalizuje vstup do systému u , tak čím väčší váhový koeficient zvolíme, tým viac nám záleží na tom, aby sa daná veličina dostala blízko žiadanej hodnoty.

Inverzné kyvadlo je opísané pomocou 4 stavov, $x = [\theta, \dot{\theta}, p, \dot{p}]$, preto váhová matica stavov Q má 4 hodnoty a zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ je akčný zásah do procesu, preto váhová matica R má jednu hodnotu.

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4), \quad R = r \quad (4.19)$$

Vzhľadom na to, že je dôležité, aby uhol kyvadla θ bol 0 rad, tak hodnota q_1 má veľkú váhu. Ďalším dôležitým stavom je aj poloha vozíka p , ktorý má menšiu dôležitosť oproti uhlu kyvadla, ale nesmie sa zanedbať, preto hodnota q_3 má vyššiu váhu. Váha na uhlovú rýchlosť a rýchlosť vozíka má pre riadenie menej podstatný význam, preto ich hodnoty sú najnižšie.

$$q_1 = 1 \cdot 10^4, \quad q_2 = 1 \cdot 10^0, \quad q_3 = 1 \cdot 10^2, \quad q_4 = 1 \cdot 10^0, \quad r = 1 \cdot 10^1 \quad (4.20)$$

Predikčný horizont N bol stanovený na základe predpokladov, že veľké hodnoty vedú k zvýšenému výpočtovému úsiliu a nízke hodnoty vytvárajú nepresné riadenie. Zvolená hodnota predikčného horizontu bola $N = 5$.

Ohraničenia závisia od riadeného procesu a formulácie optimalizačného problému. Hlavným ohraničením je to, ako sa daný systém správa, teda model procesu. Ďalej je potrebné uvažovať aj fyzikálne vlastnosti procesu, ktoré preniesieme do obmedzení.

Uvažované ohraňčenia inverzného kyvadla pre stavy sú napísané v rovniciach (4.21a - 4.21d). Tieto ohraňčenia sa vyhodnocujú a musia byť splnené v každom riadiacom kroku k .

$$-0.1920 \leq \theta_k \leq 0.1920 \quad (4.21a)$$

$$-\pi \leq \dot{\theta}_k \leq \pi \quad (4.21b)$$

$$-0.25 \leq p_k \leq 0.25 \quad (4.21c)$$

$$-0.85 \leq \dot{p}_k \leq 0.85 \quad (4.21d)$$

Na to, aby sa kyvadlo stabilizovalo v hornej nestabilnej polohe je potrebný akčný zásah, ktorý je obmedzený vzhľadom na fyzikálne vlastnosti procesu. Akčným zásahom inverzného kyvadla je zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ s nasledovnými obmedzeniami, ktoré nemôžu byť porušené

$$-10 \leq \ddot{p}_k \leq 10 \quad (4.22)$$

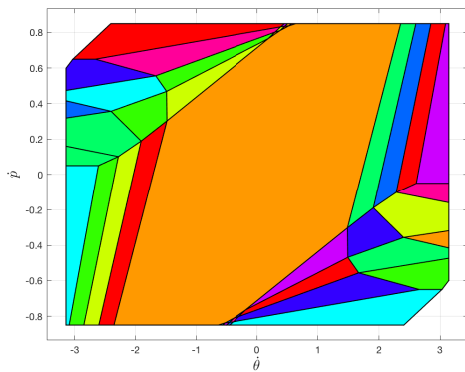
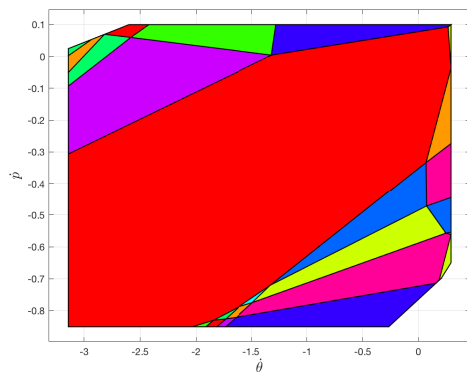
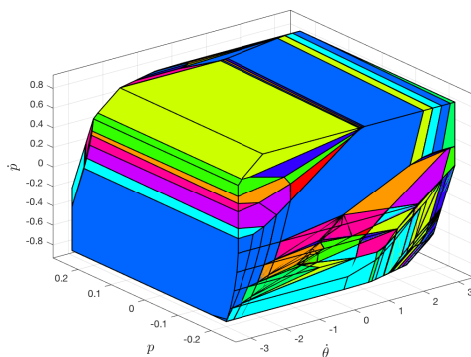
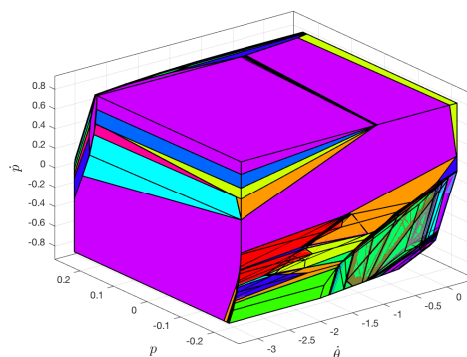
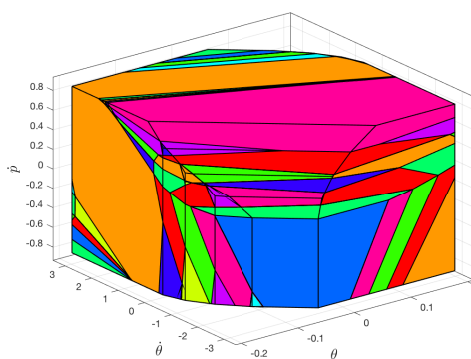
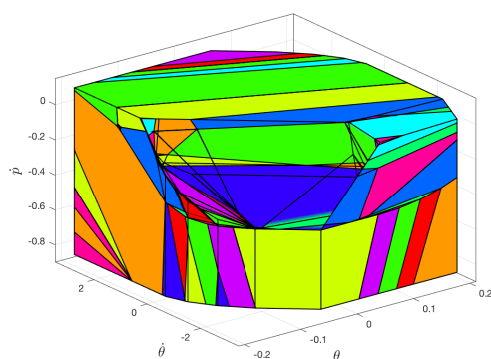
Konštrukcia, ako aj implementácia explicitného prediktívneho regulátora prebiehala na PC¹, pričom nootebook komunikoval s riadiacim mikroovládačom procesu spôsobom, aký je bližšie uvedený v sekcii 3.3.

Optimalizačný problém (4.17) sa vyriešil pomocou multiparametrického toolboxu (skr. MPT) [13] v prostredí MATLAB pri použití predikčného horizontu $N = 5$. Konštrukcia explicitného MPC trvala 27.2 s a získali sme explicitné MPC riešenie, ktoré malo 351 regiónov. Následne sa toto riešenie vyexportovalo do *.mat* súboru a spravila sa analýza, ktorá ukázala, že priemerný výpočtový čas na získanie optimálneho akčného zásahu bol 7.7 ms, najhorší výpočtový čas bol 16.23 ms. Použitá perióda vzorkovania bola nastavená na $T_s = 20$ ms.

Zaujímavou časťou konštrukcie explicitného prediktívneho riadenia je vykreslenie polytopických participácií, ktoré sú zobrazené na obr. 4.3. Tieto polytopické participácie tak graficky zobrazujú správanie sa procesu pre dva prípady:

- Kyvadlo sa nachádza v nestabilnej polohe $\theta = 0$ rad s polohou vozíka v strede dráhy $p = 0$ m.
- Kyvadlo sa nachádza na ohraňčeniach, v nestabilnej polohe $\theta = 0.1920$ rad s polohou vozíka v na ohraňčení $p = 0.25$ m.

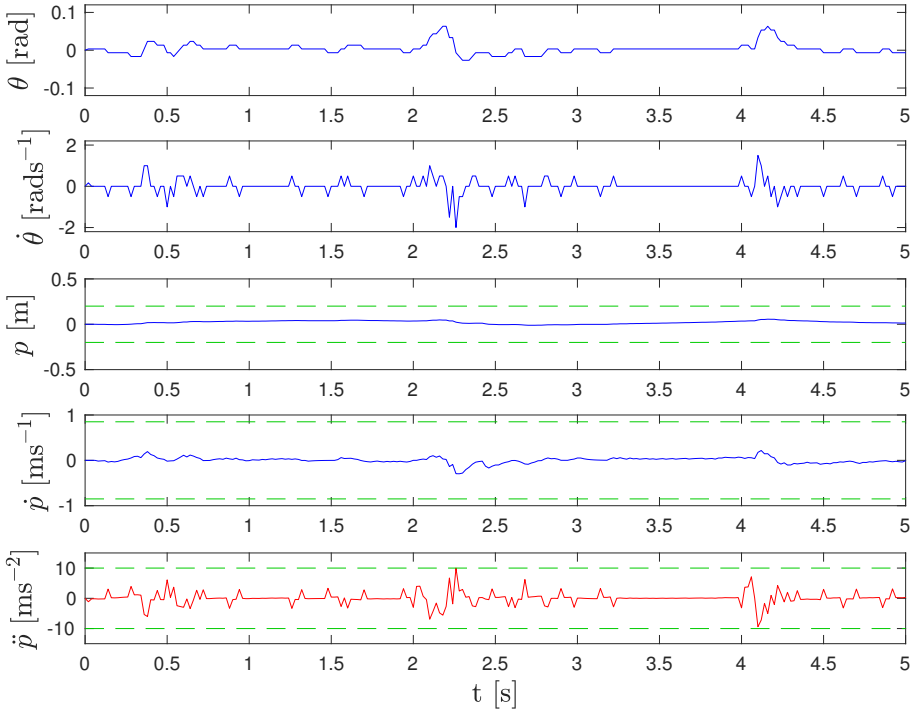
¹MacBook Air, 1,8 GHz Intel Core i5, 8 GB 1600 MHz DDR3.

(a) Pre $\theta = 0$ a $p = 0$ (b) Pre $\theta = 0.1920$ a $p = 0.25$ (c) Pre $\theta = 0$ (d) Pre $\theta = 0.1920$ (e) Pre $p = 0$ (f) Pre $p = 0.25$

Obr. 4.3: Polytopické rozdelenie na základe rôznych podmienok

Obr. 4.3b, 4.3d, 4.3f poukazujú práve na správanie sa kyvadla v prípade, ak je na ohraničeníach. Z obr. 4.3b je možné vidieť, že ak je uhol $\theta = 0.1920$ rad a poloha vozíka $p = 0.25$ m, tak na to, aby kyvadlo nespadlo, je potrebné znížiť rýchlosť vozíka. Na obr. 4.3f je zobrazené, že ak je kyvadlo na ohraničení polohy, $p = 0.25$ m, je potrebné znížiť rýchlosť, resp. pohnúť sa s kyvadlom druhým smerom, aby odišlo z ohraničenia na polohu.

Cieľom riadenia bolo udržanie a stabilizovanie kyvadla v nulovej nestabilnej polohe s ohľadom na ohraničenia procesu. Riadenie inverzného kyvadla explicitným MPC regulátorom je znázornené na obr. 4.4.



Obr. 4.4: Priebeh riadenia procesu MPC regulátorom.

Z obr. 4.4 je možné vidieť, že explicitný prediktívny regulátor stabilizuje uhol kyvadla v okolí nestabilnej polohy zodpovedajúcej uhlu $\theta = 0$ rad. Poloha vozíka a jeho rýchlosť sa počas celej doby riadenia drží v ohraničeníach procesu. Taktiež je možné

vidieť, že akčný zásah, zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ využíva celý potenciál zvolených ohraničení $-10 \leq \ddot{p}_k \leq 10$. Vykonaním manuálnej poruchy v časoch 2 s a 4 s sa ukázalo, že aj napriek malej poruche je kyvadlo schopné sa stabilizovať a nespadnúť do svojej stabilnej polohy.

Porovnaním všetkých implementovaných stabilizačných regulátorov (PID, LQ a MPC) je na stabilizáciu vhodné použiť práve LQ alebo MPC regulátor, pretože neporušujú žiadne z ohraničení.

4.1.4 Odhad stavov

LQ, aj explicitné MPC sú stavové regulátory, ktoré si vyžadujú celý stavový vektor. V našom prípade sme fyzikálne dokázali určiť polohu vozíka a uhol náklonu kyvadla. Na dopočítanie zvyšných stavových veličín (3.14), ktorými sú rýchlosť vozíka a uhlová rýchlosť kyvadla sme použili diferencie týchto stavov. Napríklad na získanie rýchlosti vozíka sme použili derivovanie polohy vozíka.

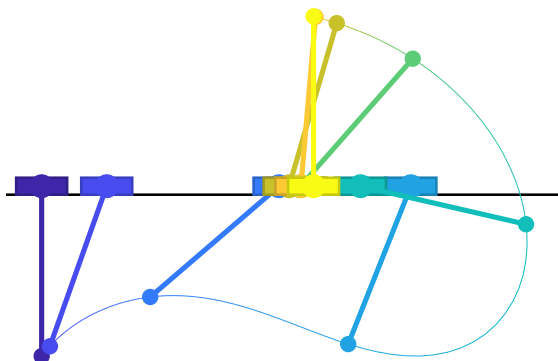
Kvalita výsledkov môže byť ďalej zlepšená tým, že použijeme deterministický odhad stavu, resp. použijeme pozorovač. Pozorovač je označenie pre dynamický systém, ktorý dokáže určiť stav takmer bez šumu či chyby merania [16]. Medzi známe pozorovače stavu patrí napríklad Luenbergerov pozorovač alebo Kalmanov filter, ktorý je špecifickým typom spomenutého Luenbergerovho pozorovača.

4.2 Nábeh inverzného kyvadla

Cieľom nábehu inverzného kyvadla (angl. *Swing up*) je to, aby sa kyvadlo postupným rozkmitaním dostalo z dolnej stabilnej polohy do hornej nestabilnej polohy. Na dosiahnutie tohto cieľa boli implementované dva prístupy riadenia. Prvým z nich je nelineárny prediktívny regulátor, ktorého riešením sa získala optimálna trajektória vyšvihnutia kyvadla. Riešenie optimalizačného problému prediktívneho riadenia bolo získané pomocou užívateľského rozhrania MATLAB a doplnkového programového vybavenia ACADO [1]. Optimálna trajektória bola použitá na vyšvihnutie kyvadla simulačne. Druhým prístupom bola implementácia energetického regulátora priamo na reálny proces, ktorý reguluje množstvo energie v kyvadle. Tento regulátor vkladá energiu do systému inverzného kyvadla až pokým nedosiahne energiu zodpovedajúcu hornej nestabilnej polohe.

V tejto časti chceme dosiahnuť to, že uhol otočenia inverzného kyvadla, ktorý sa na

začiatku riadenia nachádza v dolnej stabilnej polohe, $\theta = \pi$ rad na konci riadenia dosiahne stav $\theta = 0$ rad alebo $\theta = 2\pi$ rad. Schématické riešenie tohto problému je zobrazené na obr. 4.5, kde uhol π rad je fialová farba a uhol 0 rad je žltá farba.



Obr. 4.5: Princíp nábehu inverzného kyvadla.

V oboch prípadoch riadenia nábehu inverzného kyvadla platí, že ak kyvadlo dosiahne hornú nestabilnú polohu, kontrolu prevezme stabilizačný regulátor a stabilizuje kyvadlo.

4.2.1 Prediktívne riadenie za najmenší počet krokov

Cieľom MPC regulátora je riadiť systém na základe predpočítanej trajektórie z jedného bodu do druhého. Optimalizačný problém, ktorý je potrebné vyriešiť je opísaný ako konvexný problém s optimalizáciou, ktorý možno efektívne vyriešiť, aby umožnil implementáciu v reálnom čase [8]. Vzhľadom na to, že dynamika inverzného kyvadla je veľmi rýchla, je potrebné ju čo najlepšie opísať pri riešení optimalizačného problému. Preto pre potreby použitia prediktívneho riadenia za najmenší počet krokov sa využíva nelineárny model v tvare diferenciálnych rovníc (3.14a - 3.14d).

Cieľom optimalizácie je čo najrýchlejšie dosiahnuť nestabilnú polohu, začínajúc z dolnej polohy. Ďalšie obmedzenia zahŕňajú, že vozík by mal začať a končiť na rovnakej pozícii. Rýchlosť vozíka a uhlová rýchlosť kyvadla by mali byť nulové, keď kyvadlo dosiahne hornú polohu. Použitý riadiaci signál, t.j. zrýchlenie vozíka, je obmedzený na

to, aby bol v intervale $\pm 10 \text{ m.s}^{-2}$. Pretože koľaje po ktorých sa vozík pohybuje sú konečné, poloha vozíka musí spĺňať ohraničenie $-0.2 \text{ m} \leq p \leq 0.2 \text{ m}$.

Optimalizačný problém je uvedený matematicky v (4.23a-4.23j)

$$\min N \quad (4.23a)$$

$$\text{s.t. } \theta = \dot{\theta} \quad (4.23b)$$

$$\dot{\theta} = \frac{3}{4l}\ddot{p}\cos(\theta) + \frac{3g}{4l}\sin(\theta) - b\dot{\theta} \quad (4.23c)$$

$$p = \dot{p} \quad (4.23d)$$

$$\dot{p} = \ddot{p} \quad (4.23e)$$

$$|\ddot{p}| \leq 10 \quad (4.23f)$$

$$-0.2 \leq p \leq 0.2 \quad (4.23g)$$

$$-0.85 \leq \dot{p} \leq 0.85 \quad (4.23h)$$

$$\theta(T) = \pi \quad \dot{\theta}(T) = 0 \quad (4.23i)$$

$$p(T) = 0 \quad \dot{p}(T) = 0 \quad (4.23j)$$

kde N je predikčný horizont. Použitá perióda vzorkovania nelineárneho MPC bola zvolená na $T_s = 20 \text{ ms}$ preto, aby dokázala spracovať rýchlu nelineárnu dynamiku procesu.

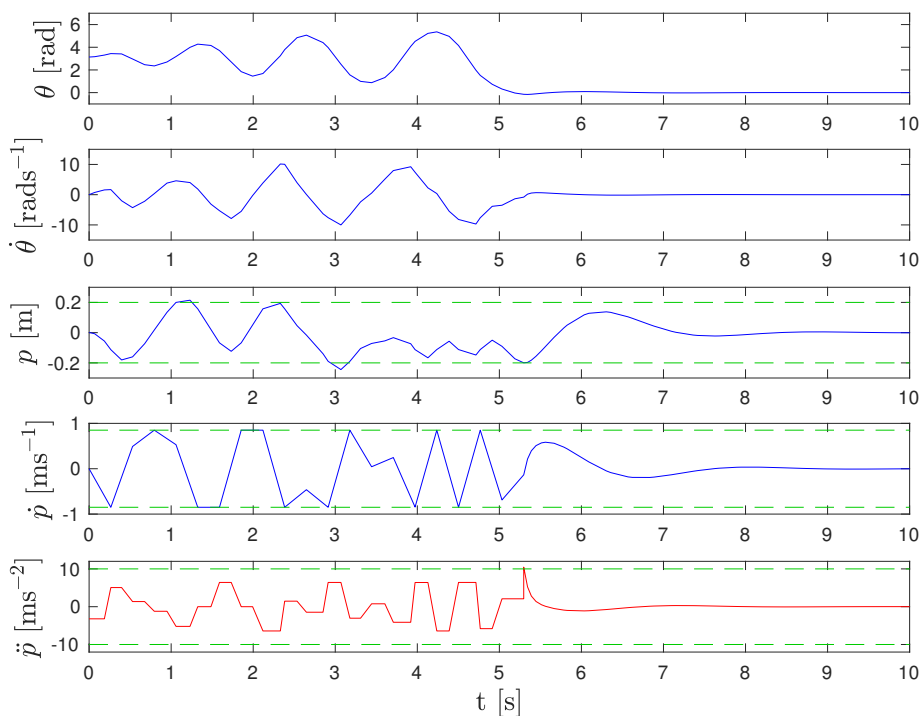
4.2.1.1 Simulácia riadenia nábehu nelineárnym prediktívnym regulátorom na minimalizáciu času

Riešením optimalizačného problému nelineárneho prediktívneho riadenia v prostredí MATLAB s užívateľským programovým rozhraním ACADO sa získala optimálna trajektória vyšvihnutia inverzného kyvadla, ktorá bola implementovaná na reálny proces.

Takéto riadenie je však riadenie v otvorenej slučke, keďže na proces aplikujeme predpočítanú optimálnu trajektóriu v každej perióde vzorkovania, ktorá bola $T_s = 20\text{ms}$, preto správanie sa procesu je pri každom pokuse, resp. riadení iné. Táto odlišnosť správania sa môže byť spôsobená vplyvom rôznych porúch v procese, alebo na proces.

Taktiež je dôležité spomenúť, že počas vyšvihnutia sa táto trajektória neregulovala, to znamená, že nemali sme k dispozícii žiadnu regulačnú silu. Tým pádom nebolo garantované, že táto trajektória vyšvihnutia dosiahne danú hornú nestabilnú polohu. Implementáciou tejto trajektórie na reálny proces sa zistilo, že táto trajektória nedosiahne nestabilnú polohu, pretože do danej pozície prišla v každom pokuse s veľmi veľkou uhlovou rýchlosťou, prípadne sa ani nevyšvihla do danej pozície.

Pre tieto dôvody sa získaná optimálna trajektória vyšvihnutia inverzného kyvadla spracovala simulačne spolu so stabilizačným regulátorom.



Obr. 4.6: Simulácia nábehu kyvadla prediktívnym regulátorom so stabilizačným LQ regulátorom.

Na obr. 4.6 je zobrazená simulácia nábehu a stabilizácie inverzného kyvadla. Na základe vypočítanej optimálnej trajektórie kyvadlo dosiahlo nestabilnú polohu za viac ako 5 sekúnd a to pomocou 9 vyšvihnutí. Následne riadenie prevzal LQ regulátor, ktorý kyvadlo stabilizoval.

4.2.2 Energetický regulátor

Ako je uvedené v predchádzajúcej časti, cieľom riadenia je vyšvihnúť kyvadlo do vertikálnej vzpriamenej polohy z jeho závesnej polohy. Pohybom vozíka sa tak kyvadlo

vychýli zo stabilnej polohy do nestabilnej, kde kontrolu prevezme lineárny stabilizačný regulátor. Pre potreby vyšvihnutia kyvadla preto v tejto časti bude implementovaný energetický regulátor.

Energetický regulátor na vyšvihnutie kyvadla bol navrhnutý a implementovaný na reálny proces v článku Åström a Furuta [19]. Táto metóda vyšvihnutia má svoje výhody aj nevýhody. Na začiatok sa riadi uhol kyvadla, neskôr poloha kyvadla. Avšak tento prístup návrhu regulátora je vhodný len vtedy, ak máme neobmedzenú dĺžku trate, napríklad ako má rotačné kyvadlo. V prípade lineárneho kyvadla, je tento prístup nevyhovujúci.

Metóda uvedená v tejto časti sa zameriava na to, aby sa kyvadlo vyšvihlo zo stabilnej do nestabilnej polohy, s tým, že poloha vozíka sa udržiava v určených limitoch procesu s použitím princípov riadenia energie založených na metóde prezentovanej v príspevku Chatterjee a kolektív [6]. Na dosiahnutie tohto cieľa je zavedených niekoľko rovníc, tzv. energetických prameňov, nielen na sledovanie polohy vozíka, aby sa vozík nevychýlil z obmedzenej dĺžky, ale aj obmedzil rýchlosť vozíka nad určitú hodnotu. Okrem toho, je zavedený aj ďalší vzťah s cieľom dosiahnuť definovanú energetickú hodnotu a keď energia kyvadla nadobudne dostatočnú energiu, kyvadlo prejde do tzv. doplavovacieho módu, s tým, že sa zachová získaná energia. V rámci doplavovacieho módu sa do systému vháňa energia takým spôsobom, že poháňa potenciálnu a rotačnú kinetickú energiu smerom k hodnote, ktorá sa rovná potenciálnej energii kyvadla vo vzpriamenej polohe.

4.2.2.1 Analýza energie

Princíp návrhu energetického regulátora na vyšvihnutie inverzného kyvadla je založený na princípoch Lyapunovej funkcie. Celková mechanická energia inverzného kyvadla použitá v Lyapunovej funkcii je

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta - 1) \quad (4.24)$$

kde E je dané kinetickou a potenciálnou energiou kyvadla. V rovnici (4.24), horná nestabilná poloha $\theta = 0$ rad alebo $\theta = 2\pi$ rad je daná ako referenčný bod pre potenciálnu energiu. Celková energia kyvadla je definovaná ako nulová v hornej nestabilnej polohe.

Zákon riadenia energetického regulátora je možné odvodiť spojením pohybovej rovnice inverzného kyvadla, ktorá bola získaná v časti 3.4 spolu s Lyapunovou funkciou.

Uvažujme pohybovú rovnicu kyvadla v tvare

$$I\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) - \ddot{p}ml\cos(\theta) = 0 \quad (4.25)$$

kde $I = \frac{ml^2}{3}$, moment zotrvačnosti kyvadla.

V skutočnosti, pri vykonávaní energetického riadenia je potrebné pochopiť, ako je energia ovplyvnená zrýchlením kyvadla. Vypočítame deriváciu E s ohľadom na čas a nahradíme $\ddot{\theta}$ z (4.25), získame tak

$$\dot{E} = I\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta}\sin(\theta) = -\ddot{p}ml\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (4.26)$$

Z rovnice (4.26) je vidieť, že riadenie energie je jednoduché, pretože systém je jednoduchým integrátorom s rôznym zosilnením, avšak riaditeľnosť sa stratí, ak pravá strana rovnice (4.26) zmizne. To nastane ak $\theta = \pm\pi/2$, čiže keď je kyvadlo horizontálne alebo ak $\dot{\theta} = 0$. Taktiež na to, aby sa zvýšila energia, zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ by malo byť pozitívne, keď hodnota $\dot{\theta}\cos(\theta)$ je pozitívna, a naopak. Stratégia vyšvihnutia inverzného kyvadla pomocou energetického regulátora môže byť nájdená použitím Lyapunovej metódy a úpravou vyššie spomenutých rovníc [19].

4.2.2.2 Riadenie energie

Metóda energetického regulátora je založená na Lyapunovej funkcii [15]. Uvažujme systém $(\dot{x}) = f(x)$ s x^* fixným bodom (riešenie diferenciálnej rovnice, kde derivácia je nulová) a predpokladajme, že Lyapunova funkcia $V(x)$ môže byť nájdená ako

- V je pozitívne definitné:
 - $V(x) > 0$ pre všetky $x \neq x^*$,
 - $V(x) = 0$ pre všetky $x = x^*$.
- $\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0$ pre všetky $x \neq x^*$.

Ak je takáto funkcia nájdená, x^* je globálne asymptoticky stabilné: $x(0) \rightarrow x^*$ platí pre všetky počiatočné podmienky $x(0)$, $t \rightarrow \infty$. Riadený vstup u je zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$. Lyapunova funkcia spolu so zákonom riadenia je zapísaná ako

$$V = \frac{(E - E_0)^2}{2}. \quad (4.27)$$

$$u = \ddot{p} = k(E - E_0)\dot{\theta}\cos\theta \quad (4.28)$$

kde k je váhový koeficient a E_0 je požadovaná energia. Použitím rovnice (4.26) a zákona riadenia (4.28), deriváciou Lyapunovej funkcie je nájdená

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (E - E_0) \frac{dE}{dt} \\ &= -(E - E_0) ml \ddot{p} \dot{\theta} \cos \theta \\ &= -mlk \left((E - E_0) \dot{\theta} \cos \theta \right)^2\end{aligned}\quad (4.29)$$

Rovnica (4.29) odhaľuje, že Lyapunova funkcia sa bude znižovať tak dlho, ako $\dot{\theta} \neq 0$ a $\cos \theta \neq 0$. Zlepšená stratégia je daná nasledujúcim zákonom riadenia v tvare

$$u = \text{sat}_{\dot{x}_{\max}} \left(k(E - E_0) \text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) \right) \quad (4.30)$$

kde funkcia $\text{sat}_{\dot{x}_{\max}}$ je lineárna funkcia, ktorá saturuje maximálne zrýchlenie vozíka.

Nevýhodou tejto stratégie je to, že neberie do úvahy obmedzenú dráhu pre pohyb vozíka. Preto Chatterjee a kolektív [6] zaviedli úpravu tohto prístupu tak, že dokáže uvažovať maximálnu dĺžku trate a maximálnu rýchlosť vozíka.

Základnou stratégiou energetického regulátora, ktorý bol navrhnutý pomocou Chatterjee a kolektívu je pohybovať vozíkom takým spôsobom, aby sa energia postupne pridávala do kyvadla. Energia v procese inverzného kyvadla môže byť riadená na požadovanú hodnotu pomocou riadenia v spätnej väzbe. Ďalej je potrebné, aby vozík bol umiestnený v požadovaných hraniciach systému. Je dôležité, aby bol tento pohyb vozíka synchronizovaný s výkyvmi kyvadla. V dôsledku porúch a neurčitostí v systéme, akýkoľvek spôsob predpočítania trajektórie a jeho implementácia na procese nemusí pracovať správne. Namiesto toho je potrebná riadiaca metóda, ktorá reaguje na aktuálny stav systému a zodpovedajúcim spôsobom predpisuje polohu vozíka.

Jednotlivé zložky energetického regulátora pre výpočet akčného zásahu do procesu, zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ sa vypočíta ako

$$U_{\text{swing_up}} = -K_{\text{su}} \text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (4.31)$$

$$U_{\text{cart_well}} = K_{\text{cw}} \text{sgn}(p) \log \left(1 - \frac{|p|}{L} \right) \quad (4.32)$$

kde K_{su} a K_{cw} sú váhové koeficienty, $K_{\text{su}}, K_{\text{cw}} > 0$. Tieto váhové koeficienty majú za úlohu upravovať zrýchlenie vozíka a to vzhľadom na aktuálnu polohu obmedzenú na $[-L, L]$, kde L je dĺžka trate kyvadla. Celková uvažovaná dĺžka trate je 0.4m. Zrýchlenie vozíka sa tak zmení, akonáhle sa priblíži k uvažovanej hranici polohy vozíka.

Ďalej je potrebné definovať ďalší vstup, ktorý vychádza zo zákona riadenia definovaný ako

$$U_{\text{velocity_well}} = K_{\text{vw}} \text{sgn}(\dot{p}) \log\left(1 - \frac{|\dot{p}|}{\dot{p}_{\text{max}}}\right) \quad (4.33)$$

kde K_{vw} je váhový koeficient na obmedzenie rýchlosti vozíka, p_{max} je maximálna rýchlosť vozíka. $U_{\text{velocity_well}}$ zmení rýchlosť vozíka, akonáhle sa rýchlosť vozíka priblíži k jeho maximálnej povolenej rýchlosti.

Nakoniec je potrebné definovať posledný vstup do procesu, ktorý definuje energetickú podmienku pre systém.

$$U_{\text{energy_maint}} = K_{\text{em}}(\exp|E_{\text{rp}} - \eta E_{\text{up}}| - 1) \text{sgn}(E_{\text{rp}} - E_{\text{up}}) \text{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (4.34)$$

kde K_{em} je váhový koeficient riadenia energie vstupu. Tento parameter je rozhodujúci pre dosiahnutie vyšvihnutia kyvadla, pretože zmena tejto hodnoty mení aj rýchlosť vháňania energie do procesu. η je parameter, ktorý zabezpečuje stabilitu v Lyapunovom zmysle, táto hodnota by mala byť väčšia ako jeden. Táto časť rovnice zabezpečí to, aby kyvadlo prišlo do nestabilnej polohy s relatívne nízkou uhlovou rýchlosťou, aby to stabilizačný regulátor dokázal stabilizovať.

Keď spojíme všetky komponenty zrýchlenia, prichádzame s konečným výrazom pre akceleračný vstup do procesu, na základe ktorého dosiahneme vyšvihnutie kyvadla s uvažovaním všetkých ohrazení procesu:

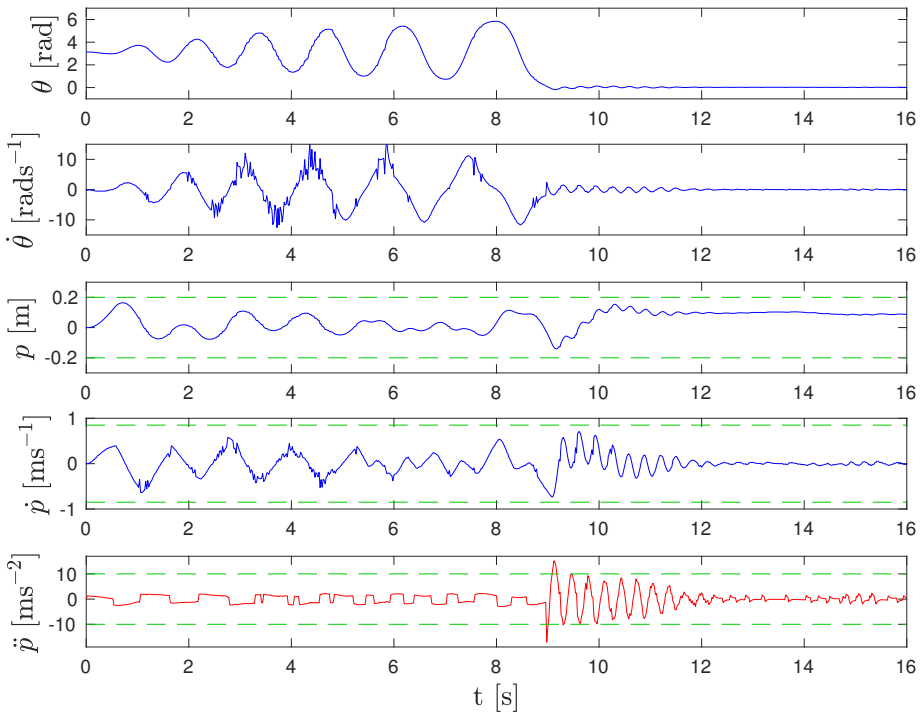
$$\ddot{p} = U_{\text{swing_up}} + U_{\text{cart_well}} + U_{\text{velocity_well}} + U_{\text{energy_maint}} \quad (4.35)$$

Počas swing up módu, rýchlosť, ktorou je energia vstrekovávaná do systému, je kontrovaná výlučne váhovacím parametrom K_{su} , ktorý zvyšuje výkon vyšvihnutia. To znamená, že čím väčší bude tento parameter, tým rýchlejšie sa kyvadlo vyšvihne.

4.2.2.3 Experimentálne výsledky riadenia nábehu inverzného kyvadla energetickým regulátorom so stabilizáciou

Po implementácii rovnice (4.35) do procesu sa získali experimentálne výsledky riadenia pomocou energetického regulátora a stabilizácie pomocou LQ regulátora 4.7, taktiež stabilizácia pomocou prediktívneho regulátora zobrazená na obr. 4.8, 4.9. V tabuľke 4.1 sú spísané všetky použité hodnoty pre výpočet akčných zásahov na vyšvihnutie kyvadla použitím energetického regulátora (4.35).

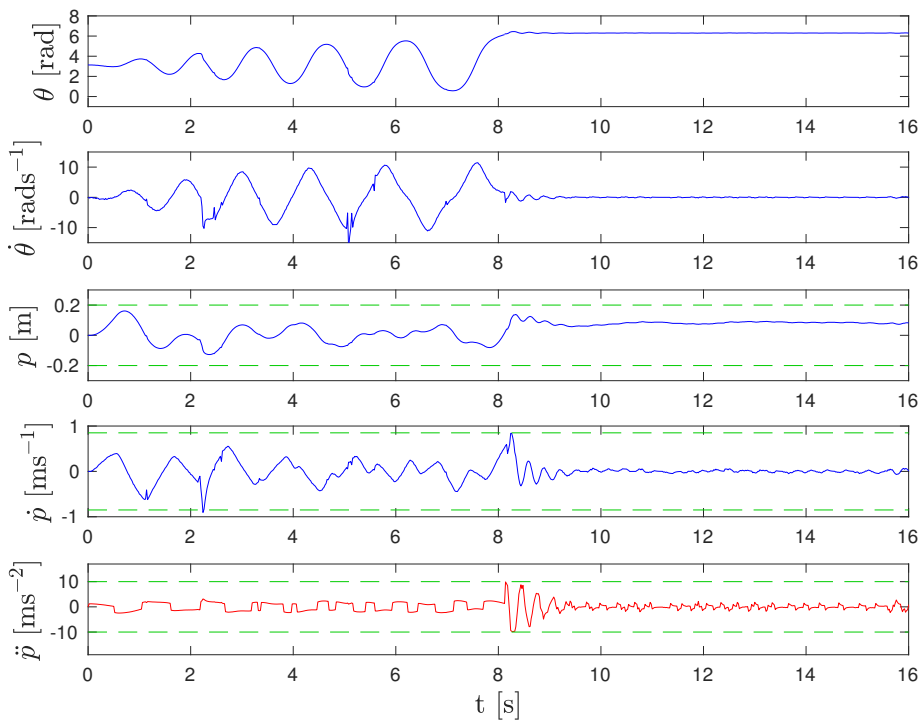
Na obr. 4.7 a obr. 4.8 sú zobrazené experimentálne výsledky riadenia inverzného kyvadla, kde akčným zásahom bolo zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$ a riadenou veličinou bol uhol vychýlenia kyvadla θ . Na vyšvihnutie kyvadla do nestabilnej polohy bol použitý energetický regulátor, v ktorom bolo potrebné nastaviť váhové koeficienty v rovniciach (4.31 - 4.34), ktorých hodnoty boli zvolené ako $K_{su} = 1.2$, $K_{cw} = 2$, $K_{vw} = 1$, $K_{em} = 7$ a hodnota η bola 1.01.



Obr. 4.7: Vyšvihnutie kyvadla energetickým regulátorom a stabilizácia LQ regulátorom.

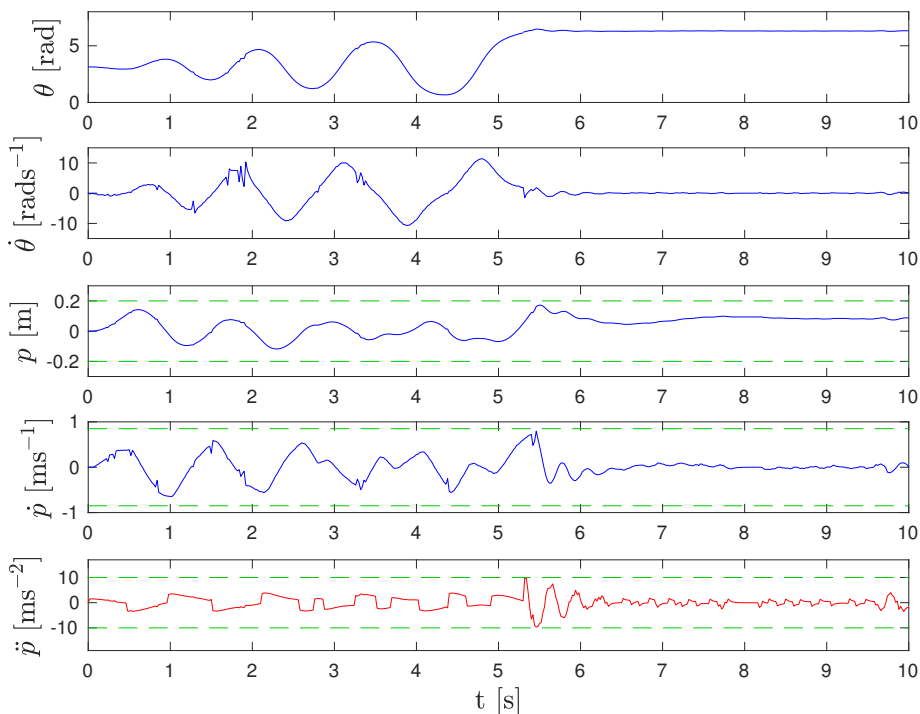
Na obr. 4.7 kyvadlo dosiahlo nestabilnú pozíciu za 13 vyšvihnutí v čase 9 sekúnd, kde následne prevzal kontrolu LQ regulátor, ktorý stabilizoval kyvadlo. Z výsledkov riadenia si môžeme všimnúť, že rozsah akčných zásahov presiahol ohraničenie procesu, čo bolo spôsobené práve použitím LQ regulátora, ktorý nedokáže uvažovať ohraničenia procesu a preto môže vygenerovať väčšie akčné zásahy ako je povolené. Kvalitu riadenia to však veľmi neovplyvnilo, keďže tieto akčné zásahy boli vygenerované počas prevzatia

kontroly stabilizačným regulátorom počas prvých dvoch periód vzorkovania, ktorá bola $T_s = 20\text{ms}$.



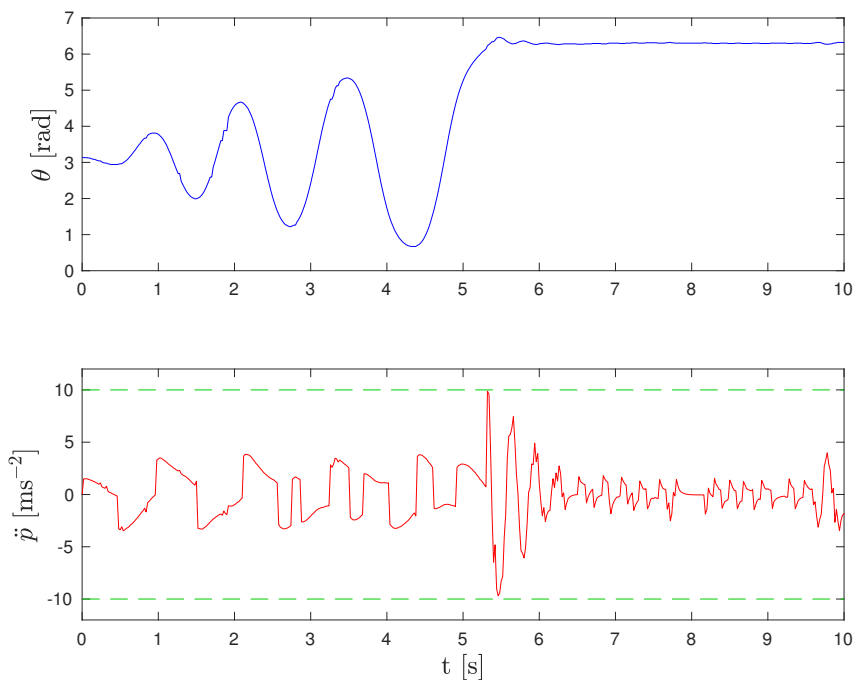
Obr. 4.8: Vyšvihnutie kyvadla energetickým regulátorom a stabilizácia MPC regulátorom(1).

Z obr. 4.8 môžeme vidieť, že kyvadlo dosiahlo hornú nestabilnú pozíciu zodpovedajúcu uhlu $\theta = 0 \text{ rad}$, resp. $\theta = 2\pi \text{ rad}$ za 12 vyšvihnutí v čase 8 sekúnd, kde následne prevzal kontrolu MPC regulátor, ktorý stabilizoval kyvadlo. Oproti riadeniu z obr. 4.7 s použitím stabilizačného LQ regulátora, je priebeh prevzatia riadenia stabilizačným MPC regulátorom hladší, to znamená, že kyvadlo sa stabilizuje rýchlejšie a to práve preto, že nie je potrebné také veľké zrýchlenie vozíka. Vygenerované akčné zásahy, zrýchlenie vozíka $\ddot{p}$, sú v medziach ohraničení.



Obr. 4.9: Vyšvihnutie energetickým regulátorom a stabilizácia MPC regulátorom(2).

Experimentálnym ladením váhovacích koeficientov v rovniciach (4.31 - 4.34) bolo zistené, že kyvadlo sa dokáže vyšvihnúť do vertikálnej nestabilnej polohy rýchlejšie, prípadne pomalšie. Nové hodnoty váhovacích koeficientov boli zvolené nasledovne, $K_{su} = 1.8$, $K_{cw} = 3$, $K_{vw} = 2$, $K_{em} = 9$ a hodnota η bola 1.01. Takto zvolené koeficienty kyvadlo vyšvihli rýchlejšie oproti predošlým prípadom z obr. 4.7 a obr. 4.8. Kyvadlo dosiahlo hornú polohu za 5 sekúnd a to pomocou 8 vyšvihnutí. Na stabilizáciu bol použitý MPC regulátor, ktorý neporušil žiadne z ohraňení procesu. Na obr. 4.10 je zobrazený približený moment prevzatia kontroly stabilizačným MPC regulátorom spolu s akčnými zásahmi.



Obr. 4.10: Vyšvihnutie energetickým regulátorom a stabilizácia MPC regulátorom(2), približenie.

veľičina	hodnota	jednotka	popis
m	0.026	[kg]	hmotnosť kyvadla
$2l$	0.42	[m]	dĺžka kyvadla
b	1	[kg.s ⁻¹]	koeficient trenia
g	9.81	[m.s ⁻²]	gravitačné zrýchlenie
L	0.4	[m]	dĺžka trate
$\dot{p}_{\max}$	0.85	[m.s ⁻¹]	maximálna rýchlosť vozíka

Tabuľka 4.1: Používané parametre pre energetický regulátor a ich hodnoty

Výhodou použitia energetického regulátora je to, že ak sa kyvadlo vychýli zo stabilizačnej polohy, prípadne stabilizačný regulátor nedokáže v danom momente stabilizovať kyvadlo, tak energetický regulátor dokáže opäť kyvadlo vyšvihnúť to nestabilnej polohy.

Cieľom diplomovej práce bolo zostrojenie matematického modelu a riadenie reálneho procesu laboratórneho inverzného kyvadla. Proces inverzného kyvadla je častým príkladom na aplikáciu lineárnych, ale aj nelineárnych algoritmov, ktoré sú zložitejšie vzhľadom na riešiteľnosť v prostredí MATLAB. Riadenie laboratórneho inverzného kyvadla bolo rozdelené na dve časti, a to na časť stabilizácie a časť nábehu inverzného kyvadla.

Úlohou stabilizácie je riadenie uhla otočenia inverzného kyvadla v jeho prirodzene nestabilnej polohe, hornej vertikálnej polohe. Bolo navrhnutých viacero riadiacich algoritmov, ktoré v návrhu uvažujú lineárny model, ako PID regulátor, ktorý bol navrhnutý metódou umiestnenia pólov, LQ regulátor a MPC regulátor. Akčným zásahom bolo zrýchlenie vozíka inverzného kyvadla. Navrhnuté regulátory boli implementované na reálny proces laboratórneho inverzného kyvadla. Hlavnou nevýhodou PID regulátora je to, že dokáže uvažovať iba jeden vstup, zrýchlenie vozíka a jeden výstup, hlavnú riadenú veličinu, uhol otočenia kyvadla, tým pádom sa nezaujíma o zvyšné stavy. Preto je PID regulátor nevhodný na stabilizáciu. LQ a MPC regulátor v navrhnutých algoritmoch uvažuje všetky stavy inverzného kyvadla a preto sú najvhodnejšie na stabilizáciu inverzného kyvadla.

V prípade vyšvihnutia inverzného kyvadla sa uvažovali dva prístupy návrhu riadenia a to, nelineárne prediktívne riadenie na minimalizáciu času a energetický regulátor na minimalizáciu použitej energie.

Cieľom nábehu prediktívnym regulátorom bolo získanie trajektórie pre vyšvihnutie inverzného kyvadla (angl. *Swing up*), kde bolo potrebné vygenerovať potrebné akčné zásahy, zrýchlenie vozíka na to, aby sa postupným rozkmitaním kyvadlo dostalo zo svojej stabilnej dolnej polohy do nestabilnej hornej polohy. Riadenie sa navrhlo v prostredí MATLAB, kde sa použilo doplnkové programové rozhranie ACADO, ktoré dokáže vyriešiť zložitý problém v tvare nelineárnych diferenciálnych rovníc s goniometrickými funkciami.

Získala sa tak optimálna trajektória, ktorá bola implementovaná na reálny proces inverzného kyvadla, kde sa ukázalo, že takýto spôsob riadenia nie je vhodný a to preto, že počas vyšvihnutia sa táto trajektória neregulovala, to znamená, že nemali sme k dispozícii žiadnu regulačnú silu a ani informáciu o tom, kde sa kyvadlo momentálne nachádza. Preto vypočítaná optimálna trajektória bola spracovaná simulačne spolu so stabilizačným regulátorom.

Taktiež bol navrhnutý aj energetický regulátor na vyšvihnutie kyvadla z jeho stabilnej polohy do nestabilnej polohy. Kyvadlo sa jednoducho ovláda takým spôsobom, že jeho energia je poháňaná smerom k hodnote rovnajúcej sa rovnovážnej polohe. Energetický regulátor bol implementovaný na reálny proces v uzavretej slučke, tým pádom akčné zásahy boli vypočítavané na základe aktuálnych stavov. Akonáhle bol uhol kyvadla v blízkosti stabilizačnej polohy, riadenie sa preplo do stabilizácie a získalo sa tak kompletne funkčné riadenie inverzného kyvadla.

Literatúra

- [1] D. Ariens, B. Houska, and H.J. Ferreau. Acado for matlab user's manual. <http://www.acadotoolkit.org>, 2010–2011.
- [2] P. Bakaráč. Konštrukcia a riadenie inverzného kyvadla. Master's thesis, ÚIAM FCHPT STU v Bratislave, 2017.
- [3] M. Bakošová and L. Fikar, M. a Čírka. *Základy automatizácie. Laboratórne cvičenia zo základov automatizácie*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2003.
- [4] M. Bakošová and M. Fikar. *Riadenie procesov*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1. vydanie edition, 2008.
- [5] Mato Baotic. *Optimal control of piecewise affine systems*. PhD thesis, ETH Zurich, 2005.
- [6] A. Patra D. Chatterjee and H. K. Joglekar. Swing-up and stabilization of a cart-pendulum under restricted cart track length. In *System and Control Letters*, vol. 47, pp. 355-364, 2002.
- [7] Z. Dostál. *Optimal Quadratic Programming Algorithms*. Springer US, 2009.
- [8] P. Giselsson. Model predictive control in a pendulum system. In *Proceedings of the 31th IASTED conference on Modelling, Identification and Control*, 2011.
- [9] Arun Gupta, Sharad Bhartiya, and PSV Nataraj. A novel approach to multiparametric quadratic programming. *Automatica*, 47(9):2112–2117, 2011.
- [10] J. Holaza. *Fast and Memory-Efficient implementation of Model Predictive Control*. PhD thesis, ÚIAM FCHPT STU v Bratislave, 2016.
- [11] M. Klaučo. *MPC-based Reference Governors: Theory and Applications*. PhD thesis, ÚIAM FCHPT STU v Bratislave, 2017.

-
- [12] M. Kvasnica. *Real-Time Model Predictive Control via Multi-Parametric Programming*. VDM Verlag Dr.Müller, 2009.
 - [13] M. Kvasnica, P. Grieder, and M. Baotić. *Multi-Parametric Toolbox (MPT)*, 2004.
 - [14] J. M. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, 2002.
 - [15] J. Mikleš and M. Fikar. *Process Modelling, Identification, and Control*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
 - [16] M. Mikleš, J. a Fikar. *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov 2*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2004.
 - [17] James B. Rawlings and Mayne David Q. *Model Predictive Control Theory and Design*. Nob Hill Publishing, 2009.
 - [18] John Anthony Rossiter. *Model-based predictive control: a practical approach*. Taylor & Francis e-Library, 2005.
 - [19] K. J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. In *IFAC 13th World Congress, San Francisco, California*, 1996.