

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

**FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE**

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-86733

Optimálny návrh dynamických experimentov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021

Bc. Michal Mateáš

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

**FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE**

Evidenčné číslo: FCHPT-5414-86733

Optimálny návrh dynamických experimentov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Riadenie Procesov
Študijný odbor:	5.2.14. Automatizácia
Školiace pracovisko:	Oddelenie informatizácie a riadenia procesov
Vedúci práce:	doc. Ing. Radoslav Paulen, PhD.

2021

Bc. Michal Mateáš



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent: **Bc. Michal Mateáš**
ID študenta: 86733
Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor: kybernetika
Vedúci práce: doc. Ing. Radoslav Paulen, PhD.
Miesto vypracovania: Oddelenie informatizácie a riadenia procesov

Názov práce: **Optimálny návrh dynamických experimentov**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Táto práca sa zaoberá optimálnym návrhom experimentov, čo je súbor metód na návrh takých experimentálnych podmienok dynamických systémov, že následný odhad parametrov z experimentálnych údajov je schopný určiť neznáme parametre modelu s veľkou spoľahlivosťou.

Ciele práce:

1. Osvojenie si problematiky odhadu parametrov
2. Osvojenie si problematiky optimálneho návrhu experimentov
3. Robustifikácia návrhu experimentov

Zoznam odbornej literatúry:

1. Graham C. Goodwin, Robert L. Payne, Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis. Academic Press, 1977.

Riešenie zadania práce od: 15. 02. 2021

Dátum odovzdania práce: 16. 05. 2021

Bc. Michal Mateáš
študent

Ing. Martin Klaučo, PhD.
vedúci pracoviska

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Podakovanie

Moje úprimné podakovanie patrí všetkým, ktorí akokoľvek prispeli jednak k tvorbe samotnej diplomovej práce, ale i tým, ktorí so mnou kráčali v živote pri jej tvorbe. Ďakujem doc. Ing. Radoslavovi Paulenovi, PhD. za metodickú výpomoc pri písaní diplomovej práce, za rady a pripomienky a nekonečnú trpezlivosť. Vďaka patrí aj každému členovi z ústavu Automatizácie Informatizácie a Matematiky za ich prívetivosť, profesionálny prístup a vytvorenie priateľskej atmosféry. Moje podakovanie patrí, samozrejme, rodine a priateľom, bez ktorých by dokončenie diplomovej práce, ale i samotného štúdia automatizácie, bolo oveľa náročnejšie.

Abstract

In this diploma thesis we are concerned with optimal experiment design. Our goal is to achieve the best identification of unknown parameters as possible. We are working with first order systems, whose output is corrupted by normally distributed noise. Our point of interest is to propose optimal experimental conditions in order to achieve maximal accuracy in the process of identification. The degree of accuracy of the identification is determined by the size of a confidence region. In this thesis we will discuss identification of the unknown dynamic system. Next we will focus optimization of sampling times and input into the system. We will introduce a methodology of sequential design, which is capable of improving robustness of identification. In this thesis we will compare our results with results which are obtained by standard means of identification.

Abstrakt

V diplomovej práci sa zaoberáme optimálnym návrhom dynamických experimentov, kde našim cieľom je odhadnúť neznáme parametre čo najpresnejšie. V prvej polovici práce uvidíme problematiku modelovania a identifikácie neznámeho systému. Taktiež si ukážeme ako navrhnuť experimentálne podmienky tak, aby sme získali čo najpresnejší odhad parametrov. Ako mieru presnosti uvažujeme veľkosť regiónu spoľahlivosti. V druhej časti práce aplikujeme tieto úvahy a budeme ich demonštrovať na príkladoch. Pracujeme s dynamickým systémom prvého rádu, ktorého výstup je ovplyvnený náhodným šumom s normálnym rozdelením, kde táto situácia simuluje reálne podmienky. Našou úlohou je prispôsobiť experiment, za účelom zlepšenia odhadu parametrov. Konkrétne sa zameriame na vzorkovacie časy a akčné zásahy v priebehu experimentu. Ďalšie metódy pre optimálny návrh taktiež zahŕňajú vylepšenie robustnosti identifikácie. Výsledky budeme porovnávať so štandardnými metódami identifikácie.

Obsah

Poďakovanie	iii
Abstract	v
Abstrakt	vii
1 Úvod	1
2 Teoretický základ	3
2.1 Matematický model a identifikácia	3
2.1.1 Matematické modelovanie dynamických systémov	3
2.1.2 Identifikácia neznámeho systému	9
2.1.3 Odhad parametrov použitím metódy najmenších štvorcov . . .	13
2.1.4 Región spoľahlivosti odhadu parametrov	14
3 Návrh optimálneho experimentu	21
3.1 D-optimálny návrh	22
3.2 Študovaný systém	23
3.2.1 Optimálny návrh času vzorkovania	24
3.2.2 Optimálny akčný zásah	24

3.2.3	Sekvenčný návrh	25
3.2.4	Scenárový návrh	26
4	Prípadová štúdia	31
4.1	Optimalizovanie vzorkovacieho času.	32
4.2	Optimalizovanie akčného zásahu	33
4.3	Zavedenie sekvenčného návrhu	38
4.4	Zavedenie scenárového návrhu	38
5	Záver	45
	Literatúra	47

V praxi je kľúčové poznať presný matematický model, ktorý opisuje dynamiku reálneho procesu. Pomocou takýchto modelov vieme simulovať skutočné javy, kde sme schopní skúmať a vyhodnocovať vplyv rôznych faktorov [17].

Matematické modely majú svoje využitie najmä v inžinierskych disciplínach (fyzika, elektrotechnika, chémia). Príkladom môže byť chemický reaktor, kde teplota a tlak priamo ovplyvňujú koncentráciu reaktantu a produktu. Ak poznáme presný matematický model dynamiky reaktoru vzhľadom na takéto meniace sa faktory, tak sme schopní presne simulovať proces.

Okrem spomenutých inžinierskych disciplín majú dynamické modely nezastupiteľné miesto aj v spoločenských a ekonomických vedách. Napríklad znalosť matematického modelu, ktorý opisuje správanie dynamiky svetových trhov môže ušetriť obrovské finančné prostriedky [8].

Simulácie majú široké uplatnenie v mnohých technických disciplínach, vďaka ktorým, sme schopní študovať systémy bez nutnosti ich skutočnej realizácie. Taktiež simulácie sú používané v návrhu riadenia reálnych systémov, kde sa okrem samotného riadenia navrhujú aj bezpečnostné protokoly. Je zjavné, že takýto prístup má mnoho výhod [8]:

- Nízke náklady
- Bezpečnosť
- Ekológia

V tejto práci sa zaoberáme problematikou identifikácie neznámeho systému. Snažíme sa tak optimalizovať experimentálne podmienky tak, aby sme identifikovali čo najpresnejší matematický model systému [7].

Priblížiť si to môžeme nasledovne. Predstavme si, že šoférujeme automobil po zľadovatej ceste a chceli by sme zistiť ako sa vozidlo správa v takýchto podmienkach. V istom slova zmysle sa snažíme získať čo najpresnejší model, aby sme mohli prispôbiť našu jazdu. Jednou z možností ako zistiť jazdné vlastnosti vozidla je striedavo otáčať volantom z jednej strany na druhú a sledovať správanie sa vozidla. A práve v tejto chvíli nastáva otázka, ako máme hýbať volantom aby sme dostali čo najspoľahlivejšie výsledky? Máme otáčať volantom striedavo? Alebo je lepšie ak volant necháme v jednej pozícii určitý čas a potom otočíme na opačnú stranu? Práve toto otočenie volantu predstavuje akčný zásah do systému, ktorý chceme identifikovať. Nemôžeme zabudnúť ani na fakt, že na ceste sa nachádzajú nerovnosti, ktoré istým spôsobom majú vplyv na meranie. Samozrejme sa týmto nerovnostiam nemôžeme úplne vyhnúť, ale vieme ich prítomnosť a intenzitu predpovedať. Takéto nerovnosti predstavujú príklad vždy prítomného náhodného šumu vo všetkých meraniach.

V tejto diplomovej práci si postupne bližšie ukážeme študovaný matematický model a jeho identifikáciu, vplyv šumu na presnosť odhadu parametrov a nakoniec si budeme demonštrovať ako optimálne experimentálne podmienky výrazne dokážu spresniť odhad parametrov. Konkrétne sa budeme zaoberať vzorkovacími časmi, čiže kedy je optimálne namerať výsledky a optimálnym akčným zásahom, čiže ako je vhodné vybudovať neznámy systém.

V poslednej časti práce sa budeme zaoberať *sekvenčným* a *scenárovým návrhom*, kde si ukážeme, ako celkový proces identifikácie vieme rozdeliť na viacej častí a výrazne tak zlepšiť presnosť a robustnosť odhadu parametrov.

Teoretický základ

V úvodnej časti práce si priblížime problematiku matematického modelu a jeho využitie. Následne ukážeme, ako získať parametre takéhoto modelu a taktiež budeme vyšetrovať presnosť odhadu parametrov.

2.1 Matematický model a identifikácia

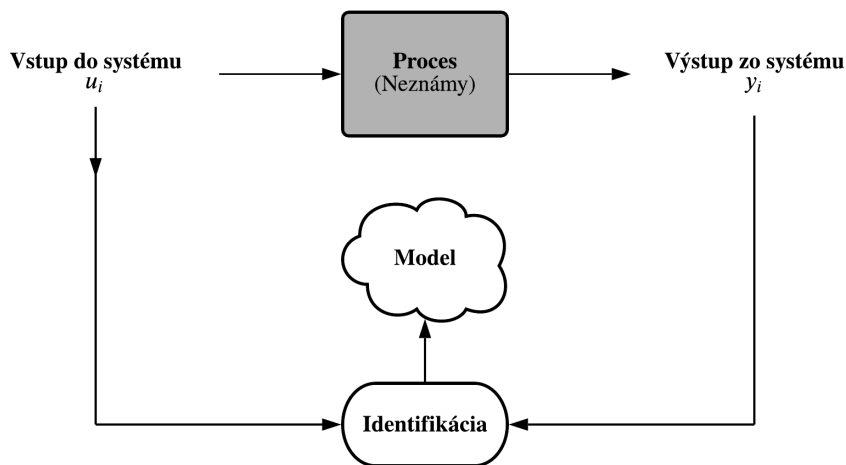
2.1.1 Matematické modelovanie dynamických systémov

Pod pojmom systém rozumieme usporiadanie vzájomne sa ovplyvňujúcich procesov. Proces je definovaný ako konverzia alebo transport materiálov, energie alebo informácie. Na tomto mieste môžeme rozlišovať medzi individuálnymi subprocesmi alebo a medzi celkovým procesom ako takým [8]. Príkladom môže byť v úvode spomenutá situácia, kde sme uvažovali o vozidle na zľadovatej ceste. Ako celkový proces sa môže javiť zmena smeru vozidla na ceste, ale taktiež môžeme brať v úvahu aj jednotlivé subprocesy, ako napríklad otočenie volantu, reakcia posilňovača riadenia a pod. Správanie sa celkového systému je podmienené správaním sa jeho subprocesov.

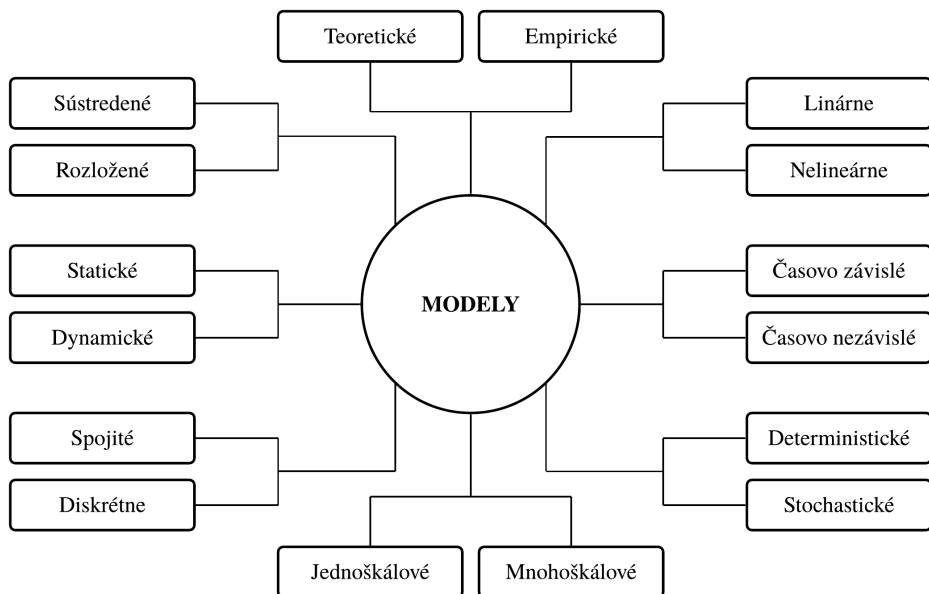
Porozumenie procesných charakteristík a ich vzájomných vzťahov je veľmi dôležité v predpovedaní udalostí a taktiež v riadení procesných systémov. Kľúčovým krokom v tomto porozumení je nájdenie matematického opisu procesu, ktorý označujeme ako model. Definícia modelu môže byť nasledovná:

Model je množina lineárnych (nelineárnych) diferenciálnych (diferenčných) rovníc, ktoré opisujú procesné veličiny, ako sú stavy systému, vstupy a výstupy systému a taktiež parametre systému. Tieto rovnice sú založené na súbore predpokladov.

Modely môžeme deliť na základe viacerých charakteristík a toto rozdelenie je priblížené na Obrázku 2.5 [17].



Obr. 2.1: Úlohou identifikácie je využitie vstupno-výstupných dát na vytvorenie modelu, čiže matematickej interpretácie reálneho procesu.



Obr. 2.2: Typy modelov.

2.1.1.1 Teoretické vs. Empirické modely

Teoretické modely, sú založené na základných znalostiach fyzikálnych zákonitostí hmoty a energie. Tieto modely sú vysoko efektívne a spoľahlivé avšak simulácia týchto modelov je často výpočtovo náročná, a práve tento fakt je dôvodom prečo sa tieto modely nevyužívajú tak často v on-line aplikáciach ako je napríklad riadenie procesov. Ďalším problémom je, že veľa procesov je komplexných pre pochopenie na fundamentálnej úrovni. Niektoré tieto modely sú rozšírené v komerčných simuláciách. Dôležitým poznatkom je to, že žiadne takéto modely nie sú úplne *teoretické*, pretože obsahujú v sebe nejakú časť empirickej znalosti.

Empirické modely, navrhujeme použitím nameraných údajov. Veľkou výhodou oproti *Teoretickým modelom* je skutočnosť, že pre návrh takýchto modelov nepotrebujeme podrobnú znalosť identifikovaného systému. Ďalšia výhoda je flexibilita štruktúry modelu, čo je užitočné vo viacerých aplikáciach. Tieto výhody sú závislé od viacerých faktorov. Jeden z hlavných faktorov je kvalita nameraných dát a prítomnosť šumu v meraniach. Zatiaľ čo vplyv šumu vieme efektívne potlačiť stochastickými metódami, tak je zároveň nutné zabezpečiť účinné vybudenie systému, aby sme získali spoľahlivé dáta. Napriek nevýhodám, sú *Empirické modely* veľmi rozšírené pre procesy s komplexným správaním.

2.1.1.2 Parametrické a neparametrické modely

Ľubovoľný diskretný a časovo invariantný systém so vstupom u_i a výstupom y_i môže byť vyjadrený pomocou konvolúcie v diskretnom čase:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n u_{k-n} \quad (2.1)$$

kde g_n predstavuje čiastkový integrál impulznej charakteristiky. Toto je príklad *neparametrického modelu*, kde neberieme do úvahy štruktúru modelu ale iba jeho linearitu a časovú invarianciu.

Taktiež platí, že ľubovoľný diskretný a časovo nevariantný systém so vstupom u_k a výstupom y_k môže byť vyjadrený diferenčnou rovnicou:

$$y_k + \sum_{m=1}^{n_a} a_m y[k-m] = \sum_{n=0}^{n_b} a_n u[k-n] \quad (2.2)$$

tento typ patrí do triedy modelov ARX (angl. *auto-regressive model with exogenous input*). Kde a_m a b_m sú parametre diferenčnej rovnice, čiže predstavujú *parametrické modely*. ARX modely sú základom mnohých metód v procesnom inžinierstve a sú široko aplikované v pokročilom riadení procesov ako napríklad *Model Predictive Control* (MPC) [18].

2.1.1.3 Lineárne vs. nelineárne modely

Systém so vstupom u_k a výstupom y_k :

$$y_k = F(u_k) \quad (2.3)$$

je lineárny vtedy a len vtedy keď platí:

1. $\alpha y_k = \alpha F(u_k) = F(\alpha u_k)$
2. $\alpha_1 y_{1,k} + \alpha_2 y_{2,k} = F(\alpha_1 u_{1,k} + \alpha_2 u_{2,k})$

Všetky systémy, ktoré nespĺňajú podmienky lineárnosti považujeme za nelineárne. Na tomto mieste je treba podotknúť, že v prírode sa nenachádza žiaden dej, ktorý je úplne lineárny. Avšak pre malé zmeny môžeme uvažovať, že vstupno-výstupné charakteristiky systémov sú lineárne. Rozsah kde, môžeme uvažovať o lineárnosti závisí od konkrétneho systému. Hlavnou výhodou použitia lineárnych modelov je s nimi spojená jednoduchosť výpočtov, taktiež sú názorné a ľahko pochopiteľné. *Nelineárne modely* sú veľmi zložité pre identifikáciu a majú menšie uplatnenie.

2.1.1.4 Časovo variantné a invariantné modely

Systém je *časovo nezávislý* ak jeho vstupno-výstupná charakteristika je rovnaká vzhľadom na rozdielny čas. Prakticky to znamená, že charakteristika systému je nezávislá od času. Túto vlastnosť môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\text{If } u_k \rightarrow y_k \text{ then } u_{k-i} \rightarrow y_{k-i}, \forall i \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

Systém popísaný rovnicou:

$$y_k + a_{1,k} y_{k-1} = b_0 u_{k-1} \quad (2.5)$$

je príkladom časovo závislého systému, ktorý je vyjadrený časovou závislosťou parametra a_1 .

Tu treba pripomenúť, že žiaden systém v realite nie je dokonalo časovo nezávislý. Zaujímavé je to, že neočakávané časovo závislé správanie systému môže byť zahrnuté v náhodných efektoch meraní alebo samotného systému.

2.1.1.5 Deterministické a stochastické modely

Deterministické modely predvídajú odozvu zo systému presne. Tieto modely sa používajú pre opísanie procesov, kde máme úplnú znalosť fyzikálnych vzťahov. Taktiež platí, že vstupy do systému sú deterministické, čo znamená že úplne poznáme ich charakteristiku (neuvažujeme šum). Na rozdiel od *deterministických, stochastických modelov* opisujú systémy, kde odozva zo systému nemôže byť nikdy presne daná. Základom týchto modelov je znalosť štatistiky a pravdepodobnosti. Hlavným problémom je fakt, že nameraný výstup zo systému je iba jeden z viacerých možných výstupov.

2.1.1.6 Jednoškálové a mnohoškálové modely

V niektorých procesoch môžeme pozorovať fenomén, ktorý sa vyvíja vo viacerých úrovniach. Ako príklad môže slúžiť atmosféra Zeme. Tento systém, je veľmi komplexný, pozostávajúci z mikro fyzikálnych procesov (rýchlosť je rádovo v $10^{-1}s$), taktiež z tepelných procesov (kde zmena môže trvať rádovo hodiny) alebo sezónnych procesov (mesiace, roky). Modelovanie takýchto systémov predstavuje veľkú výzvu do budúcnosti.

Jednoškálové modely popisujú také javy, ktoré sa vyskytujú v jednej časovej mierke. Drvivá väčšina štúdií (ako aj táto) sa venuje najmä týmto modelom.

2.1.1.7 Spojité a diskrétné modely

Klasifikácia týchto modelov je založená na odlišnosti časových domén. V skutočnosti, vstupy a výstupy zo systému sú všetky diskrétné veličiny, kde odmerané dáta získavame vzorkovaním, čo vedie k vytvoreniu *diskrétnych modelov*. Môže avšak nastať situácia, kde znalosť *spojitého modelu* je potrebná. Aby sme získali takýto model, tak sú vyvinuté techniky pre transformáciu z modelov z diskkrétnej oblasti do spojitých.

2.1.1.8 Statické a dynamické modely

Pod statickými modelami rozumieme tie, ktoré nedisponujú žiadnym poznaním predchádzajúcich stavov, vstupov alebo výstupov. Kanonické vyjadrenie je nasledovné:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ y_2 &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ y_k &= f_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

v tomto type je výstup zo systému y_k závislý od funkcie $f_k(u_n)$.

Dynamické modely si „pamätajú“ predchádzajúce stavy. Tieto modely sú všeobecnejšiu triedou ako *Statické modely* a majú uplatnenie v mnohých aplikáciach. Príkladom takéhoto prípadu môže byť vyššie spomenutý ARX model 2.2, kde aktuálny výstup zo systému y_k je taktiež podmienený predchádzajúcim výstupom y_{k-1} , čiže tento model musí v sebe zahŕňať predchádzajúci stav.

2.1.1.9 Modely so sústredenými a rozloženými parametrami

Vzťahy v modeloch chápeme buď iba ako funkcie času (obsahujúce *sústredené parametre*) alebo funkcie viacerých faktorov (obsahujúce *rozložené parametre*). Môžeme si uviesť príklady dvoch rozdielných chemických reaktorov. V prvom prípade uvažujeme reaktor s miešadlom, ktorý zabezpečuje rovnomerné rozdelenie reaktantov a produktov v celom objeme. Čiže môžeme uvažovať, že chemická reakcia je rovnomerná a je iba funkciou času. V druhom prípade môžeme uvažovať rúrkovitý reaktor, kde dochádza k prietoku média, v ktorom dochádza ku chemickej reakcií. Avšak dynamika tejto chemickej reakcie nezávisí iba od času, ale aj od polohy, kde sa v danom mieste reaktanty nachádzajú. Vo všeobecnosti sú *koncentrované modely* jednoduchšie na simulovanie, pretože sa vyznačujú menším množstvom parametrov ako *distribúované modely*.

Jednou z hlavných úloh pri identifikácií je výber „správneho“ modelu. Skutočnosť je taká, že „správny“ model je iba idealistickou predstavou. V praxi nás iba zaujíma získanie užitočného a funkčného modelu. Pri výbere modelu sa držíme týchto štyroch bodov:

- Účel modelu

- Zložitosť odhadu
- Jednoduchosť modelu
- Fyzikálna zmyslupnosť

2.1.2 Identifikácia neznámeho systému

Úlohou identifikácie procesu je nájsť matematický model procesu zo znalosti vstupného signálu $u(t)$ a výstupu zo systému $y(t)$, táto úloha sa stáva komplikovanejšou ak sú prítomné poruchy vo forme šumu. Výstupy predstavujú všetky tie signály ktoré meriame, zatiaľ čo vstupy sú všetky faktory, ktoré ovplyvňujú výstupy[8]. Podľa L. A. Zadeha je definícia identifikácie nasledovná: *Identifikácia je experimentálne stanovenie časového správania sa procesu alebo systému. Z nameraných signálov sa stanoví časové správanie v rámci triedy matematických modelov. Chyba (alebo odchýlka) medzi reálnym signálom a jeho matematickým modelom by mala byť najmenšia možná.*[11]

Existujú tri univerzálne fakty o identifikácii, ktoré sa týkajú presnosti a správnosti identifikovaného modelu, a ktoré tiež poskytujú určité usmernenie pre proces identifikácie [17]:

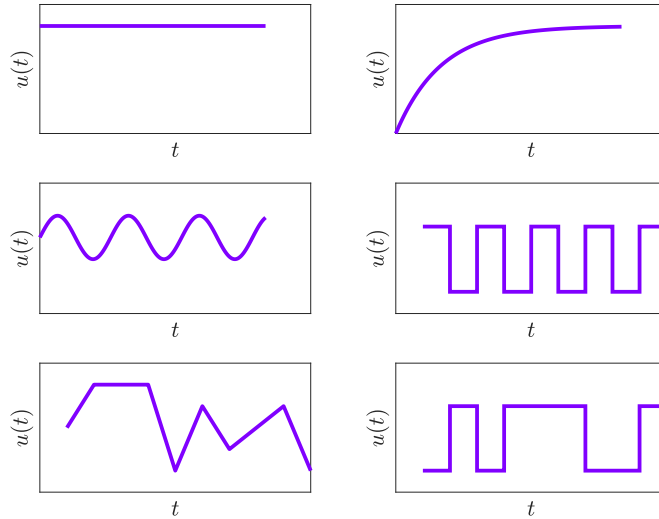
1. *Vo všeobecnosti, nie je možné zostaviť dokonale presný model z konečného počtu meraní.* Akýkoľvek model zostrojený z dát, ktoré sú vždy ovplyvnené určitou chybou nikdy nebude dokonale opisovať reálny systém. Dôležitým faktorom je možnosť nesúladu štruktúry modelu s reálnym procesom (každý proces je typicky omnoho zložitejší ako preň navrhovaný model). Táto rozdielnosť vedie k systematickej chybe v presnosti modelu, takýto odhad parametrov modelu nazývame ako vychýlený. Vo všeobecnosti sa snažíme vykonať nevychýlený odhad, čo je možné iba v prítomnosti správnej štruktúry modelu, pri použití správnej identifikačnej metódy a vo väčšine prípadov s veľkým množstvom meraní.
2. *Všeobecne nie je možné zostaviť dokonale správny model z konečného počtu meraní.* Táto skutočnosť vyplýva z faktu, že nameraný údaj je iba jedna realizácia zo všetkých možností. Opakovaním experimentu (pri konštantných podmienkach), získavame vždy iné údaje. Dôvodom je výskyt náhodne rušivých javov a v šumu merania. Zvyčajne pracujeme iba s konečným záznamom meraní a vieme stanoviť parametre modelu, ktorý je taktiež ako pri meraných údajoch iba jedna realizácia zo všetkých možností. Z tohto teda vyplýva skutočnosť, že odchýlka v meraniach sa prejaví taktiež v odchýlke odhadu parametrov. Štatistickým vyjadrením tejto odchýlky je rozptyl odhadu. Každá identifikačná metóda sa snaží rozptyl

minimalizovať, ale fakt je taký, že určitý rozptyl nevieme nikdy úplne odstrániť, čiže nie sme schopní stanoviť dokonale správny model.

3. *Presnosť a správnosť identifikovaného modelu, je okrem iných faktorov kriticky závislá od (i) vybudenia systému a (ii) pomeru signálu k šumu v nameraných údajoch.* Zovšeobecnením obidvoch týchto faktorov je zavedenie pojmu informačná výdatnosť. Kvalita stanovovaného modelu je závislá od informačnej výdatnosti nameraných údajov. V tomto ohľade hrá zásadnú úlohu *Fisherova Informačná Matrica* FIM, ktorú si odvodíme v kapitole 2.1.4. Intuícia za konceptom informačná výdatnosť môže byť prezentovaná na jednoduchom príklade pracovného pohovoru. Úspech výberu správneho kandidáta závisí od informácie, ktorú získa pracovník ľudských zdrojov. Výdatné informácie získa iba v prípade ak sa bude pýtať vhodné otázky, čo v prenesenom význame je určité vybudenie systému. Zrejmou skutočnosťou je aj to, že aby sme vedeli správne vybudovať systém, tak musíme poznať dostatočné vlastnosti systému. Práve preto identifikácia môže byť iteratívna čo si ukážeme na zavedení *sekvenčného návrhu* pozri kap. 3.2.3.

Uvažujeme niekoľko možností ako deliť identifikačné metódy [11]:

1. Identifikácia môže prebiehať pomocou aktívneho alebo pasívneho experimentu. V prvom prípade generujeme špeciálny vstupný signál do študovaného systému, v druhom prípade je identifikácia možná iba v zabehnutej prevádzke, bez možnosti výrazného ovplyvňovania systému. Voľba je daná hlavne možnosťami daného systému alebo celkovej náročnosti identifikácie.
2. Podľa matematického spracovania nameraných údajov môžeme rozlišovať metódy:
 - *Deterministické*, pod ktorými sa myslia metódy vyhodnotenia odozvy vzhľadom na špeciálne signály a numerické metódy výpočtu konvolučného integrálu. Ďalej predpokladáme, že vstupný signál je deterministický, čiže nie je ovplyvnený náhodným šumom.
 - *Stochastické*, ktoré zahrňuje riešenie Wiener-Hopfovej rovnice a taktiež sem patria aj štatistické metódy, ktoré vychádzajú z riešenia metódy najmenších štvorcov, z maximálnej vierohodnosti a z Bayesovho prístupu.
3. Podľa spôsobu nameraných údajov:
 - *Jednorázové*, tieto metódy spracúvajú merania v "jednej dávke".
 - *Priebežné*, vyhodnocujú namerané údaje postupne *rekurzívne*, kde identifikácia je vylepšovaná v každom kroku merania.



Obr. 2.3: Rôzne typy vstupných signálov.

Pre úvahy o identifikácii je potrebné klasifikovať vstupy do systému. Vstupné veličiny delíme na tie, ktoré môžeme technickým spôsobom rôzne ovládať [11]. Tieto veličiny voláme akčné. Príkladom môže byť v úvode spomenutý pohyb volantu vo vozidle alebo v technologických systémoch to môžu byť prietoky médií, napätie a pod. Ďalším typom vstupných veličín sú také, ktoré nie je možné ovládať, inými slovami poruchy. Rozdelenie signálov [11]:

- *Deterministické*, to sú také signály ktorých celkový priebeh je známy a nie je ovplyvnený náhodným šumom.
- *Náhodné signály*, ich priebehy v čase sú náhodné funkcie a poznáme len ich štatistické rozdelenie. Takéto signály označujeme ako tzv. *šum* a budeme ich uvažovať v našej práci.
- *Pseudonáhodné signály*, ich priebeh v čase je známy v rámci jednej periódy.

V práci sa budeme zaoberať najmä skokovou funkciou a pseudonáhodnou binárnou sekvenciou, ktoré si bližšie rozoberieme. Medzi ďalšie rozšírené signály patria *pulz* a *periodické funkcie*.

1. Skoková funkcia:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_o & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Použitím skokovej funkcie vieme dobre odhadnúť niektoré dôležité charakteristiky systému ako napríklad [17]:

- **Zosilnenie systému (Z)** vyjadruje vstupno-výstupnú spojitosť systému v ustálenom stave a je rovné hodnote výstupu, keď sa systém ustáli ak naň pôsobí jednotkový vstupný signál:

$$Z = \left. \frac{\Delta y}{\Delta u} \right|_{us} \quad (2.8)$$

- **Časová konštanta (T)** udáva, ako rýchlo sa po skokovej zmene vstupnej veličiny ustáli výstup na novej hodnote. Pre systém 1. rádu platí, že v čase rovnajúcom sa T sa výstup dostane na 62.3 % novej ustálenej hodnoty.
- **Dopravné oneskorenie (D)**, môžeme definovať ako čas potrebný na odpoveď systému na zmenu na vstupe.

2. Pseudonáhodná binárna postupnosť (PRBS - pseudorandom binary sequence):

Tento vstupný signál budeme porovnávať s optimálnym vstupom do systému v kapitole 3.2.2. PRBS vieme generovať pomocou bitového posuvného registra. Táto postupnosť má 2 úrovne a má dĺžku n s ľubovoľným počiatočným stavom.

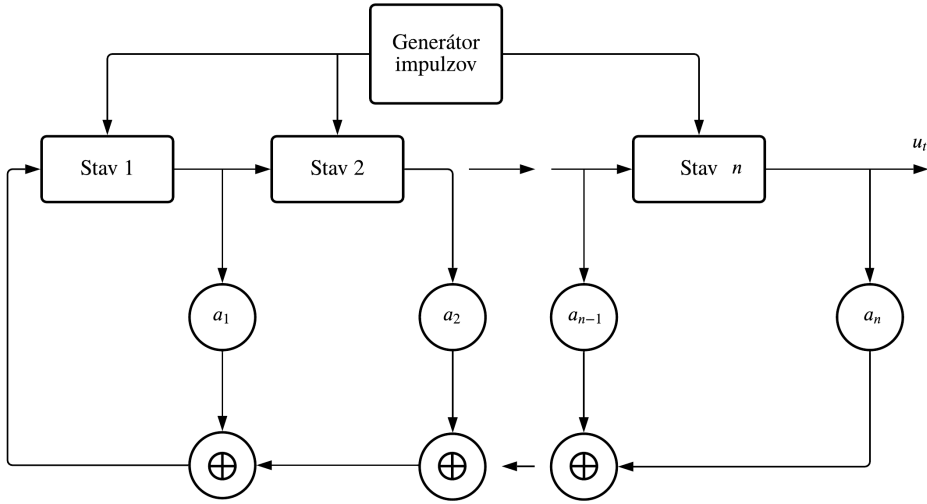
Postupnosť aproximuje diskretný biely šum a je vo forme obdĺžnikových pulzov s modulovou šírkou. Postupnosť je charakterizovaná dĺžkou, počas ktorej sa šírka pulzu mení náhodne, ale v dlhšom časovom intervale si môžeme všimnúť že je periodická [11].

Pri generovaní tohoto signálu používame diskretné pracujúci register. V určitom časovom momente sa všetky údaje v registri posunú doprava a výsledný signál je daný stavom n . Pre každú dĺžku registra je možné nájsť 2 také registre, ktoré keď sa binárne budú sčítavať, tak výsledná postupnosť $u(t)$ sa nebude čo najdlhšie opakovať. Maximálna dĺžka postupnosti je $2^n - 1$ [11].

Na obrázku 2.4 je zobrazený posuvný register, kde sčítanie dvoch binárnych čísel je definované [11]:

$$u_1 \oplus u_2 = \begin{cases} 0 & u_1 = u_2 \\ 1 & u_1 \neq u_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Jednou z vlastností PRBS je, že dĺžka najdlhšieho pulzu je rovná počtu registrov n . Čiže správne nastavený PRBS by mal byť taký aby tento čas bol väčší ako

Obr. 2.4: Posuvný register dĺžky n .

t_{90} prechodovej charakteristiky identifikovaného systému. Uvažujeme periódu vzorkovania T_s , potom platí:

$$nT_s > t_{90} \quad (2.10)$$

Pomocou tejto podmienky vieme určiť dĺžku registra n .

2.1.3 Odhad parametrov použitím metódy najmenších štvorcov

V tejto kapitole si uvedieme základy metódy najmenších štvorcov pre odhad parametrov. Prvýkrát túto metódu popísal Adrien-Marie Legendre, ale najväčšie zásluhy sú pripisované Carl Friedrich Gaussovi, ktorý ju uviedol v prácach *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* v rokoch 1821 a 1823, kde metódu najmenších štvorcov odvodil. V originálnom probléme sa zaoberal odhadom orbitálnych parametrov p_i planét z modelov odvodených podľa Keplerových zákonov [6]. Doposiaľ bolo študovaných nespočetne veľa návrhov a prístupov. Dnes táto metóda predstavuje nepostrádateľný nástroj pre všetky prístupy založené na dátach pri predikciách, modelovaní, riadení, atď.

Budeme uvažovať opis systému, ktorý je možné vyjadriť [12]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) + \mathbf{d} \quad (2.11)$$

kde $\mathbf{y}$ predstavuje vektor výstupov zo systému, $\mathbf{u}$ je vektor vstupov, $\mathbf{d}$ je vektor šumov, $\mathbf{p}$ je vektor parametrov a $\mathbf{F}$ je funkciou štruktúry modelu.

Uvažujme skalárny prípad, potom platí:

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}^T \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (2.12)$$

Budeme hľadať takú hodnotu $\hat{\mathbf{p}}$ ktorá bude minimalizovať súčet druhých mocnín odchýliek nameraných údajov od modelovaných výstupov:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{p}^T \mathbf{x}_i)^2 \quad (2.13)$$

Táto rovnica môže byť prepísaná do vektorového tvaru:

$$J(\mathbf{p}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{p})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{p}) \quad (2.14)$$

Z nulového gradientu podľa $\mathbf{p}$ a ak je matica $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ invertovateľná dostaneme výraz:

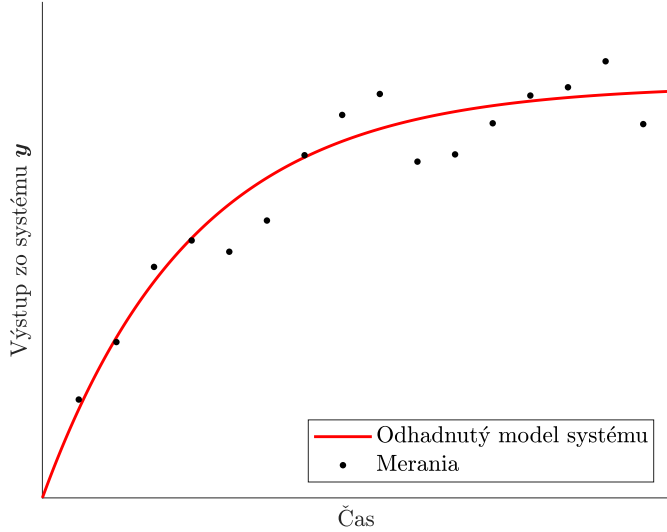
$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (2.15)$$

kde $\hat{\mathbf{p}}$ predstavuje odhadnutý vektor parametrov.

Metódu najmenších štvorcov si môžeme priblížiť aj graficky na Obr. 2.5. Čierne body reprezentujú namerané údaje $\mathbf{y}$, práve toto meranie je zaťažené chybou. Plná červená krivka predstavuje odhadnutý model, ktorý najlepšie opisuje správanie sa systému.

2.1.4 Región spoľahlivosti odhadu parametrov

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, že metóda najmenších štvorcov pre odhad parametrov je preferovaná voľba v prípade pôsobenia šumu s normálnym rozdelením na meraný výstup zo systému. V tejto kapitole si dokážeme predchádzajúce tvrdenie a taktiež sa budeme zaoberať kvalitou odhadu. Otázka je nasledovná: čo je vôbec najlepší odhad?



Obr. 2.5: Grafické priblíženie metódy najmenších štvorcov.

Vierohodný odhad parametrov vyplýva z podmienenej pravdepodobnosti nameraných údajov. Tento vzťah môže byť vyjadrený vierohodnostnou funkciou [8]:

$$p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{p}) \quad (2.16)$$

Môžeme si všimnúť, že pravdepodobnosť stanovenia určitých hodnôt výstupu zo systému $\mathbf{y}$ závisí od parametrov, ktoré sú odhadované $\mathbf{p}$.

Myšlienkou je odhadnúť parametre $\hat{\mathbf{p}}$ aby maximalizovala pravdepodobnostnú funkciu nameraných údajov pre reálne parametre $\mathbf{p}$.

$$p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}} \rightarrow \max \quad (2.17)$$

Z iného pohľadu odhadujeme parametre tak, aby sme maximalizovali pravdepodobnosť stanovenia daných údajov zo systému. Maximum funkcie môže byť vyjadrené použitím prvej derivácie funkcie k vzhladom k parametrom $\mathbf{p}$, ktorá sa rovná nule:

$$\left. \frac{\partial p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}} = 0 \quad (2.18)$$

Táto metóda môže by použitá pre systém, ktorý sme uvažovali v predchádzajúcej kapitole.

Uvažujeme, že náhodný šum d_i má normálne rozdelenie:

$$p(d(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{(d_k - \bar{d})^2}{2\sigma_k^2}\right) \quad (2.19)$$

kde $\bar{d} = 0$, pretože náhodný šum má nulovú strednú hodnotu. Taktiež uvažujeme, že šum je nekorelovaný, čiže celkové normálové rozdelenie šumu d je dane ako produkt jednotlivých normálových rozdelení každej vzorky:

$$p(\mathbf{d}) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{(d_k)^2}{2\sigma_d^2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det \mathbf{\Sigma}}} e^{-1/2 \mathbf{d}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{d}} \quad (2.20)$$

kde $\mathbf{\Sigma}$ je kovariančná matica, z predchádzajúceho tvrdenia vieme, že šum je nekorelovaný a čiže môžeme napísať $\mathbf{\Sigma} = \sigma_d^2 \mathbf{I}$ kde $\mathbf{I}$ predstavuje jednotkovú maticu a platí $\det \mathbf{\Sigma} = N\sigma_d^2$.

Vierohodnostná funkcia stanovených údajov $\mathbf{y}$ kde platí $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{p} + \mathbf{d}$, je daná nasledovne:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{N}\sigma_d} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_d^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{p})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{p})\right) \quad (2.21)$$

Pre nájdenia maxima sa zvyčajne táto funkcia transformuje do logaritmického tvaru, v ktorom je následné jej derivovanie jednoduchšie:

$$\left. \frac{\partial \log f(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\sigma_d^2} ((\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{p}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{p}})) \quad (2.22)$$

Vyriešením tejto rovnice pre nulový gradient pre $\hat{\mathbf{p}}$ a ak výraz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ je invertovateľný získame:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (2.23)$$

Ako si môžeme všimnúť výsledok je totožný s rovnicou (2.15), čiže odhad parametrov pomocou najmenších štvorcov a maximalizácia vierohodnostnej funkcie sú totožné.

V tejto časti budeme diskutovať o kvalite odhadu parametrov. Otázka je nasledovná: existuje spodná hranica odchýlky odhadu? Ak áno, tak odhad s najmenšou odchýlkou bude najlepším možným odhadom parametrov. Kvalitu odhadu bude

vyjadrovať tzv. efektivita a spodná hranica odhadu bude vyjadrená pomocou Cramer-Raovho vzťahu [7]:

$$\text{cov } \hat{\mathbf{p}} \geq \text{FIM}_{\mathbf{p}}^{-1} \quad (2.24)$$

kde:

$$\text{cov } \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Y}|\mathbf{p}}\{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^T\} \quad (2.25)$$

a kde FIM predstavuje tzv. *Fisherovu Informačnú Maticu*, ktorá je definovaná nasledovne:

$$\text{FIM}_{\mathbf{p}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Y}|\mathbf{p}}\left\{\left[\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right]^T \left[\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right]\right\} \quad (2.26)$$

Ako už bolo zmienené, tak odhad parametrov $\mathbf{p}$ je nevychýlený a tak platí:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Y}|\mathbf{p}}\{\hat{\mathbf{p}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathbf{p}) d\mathbf{y} = \mathbf{p} \quad (2.27)$$

Deriváciou vzhľadom k $\mathbf{p}$ dostaneme nasledujúci výraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial p(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{y} = \mathbf{I} \quad (2.28)$$

Po aplikovaní logaritmickej funkcie sa rovnica upraví na tvar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \log p(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathbf{p}) d\mathbf{y} = \mathbf{I} \quad (2.29)$$

Z ktorej vyplýva:

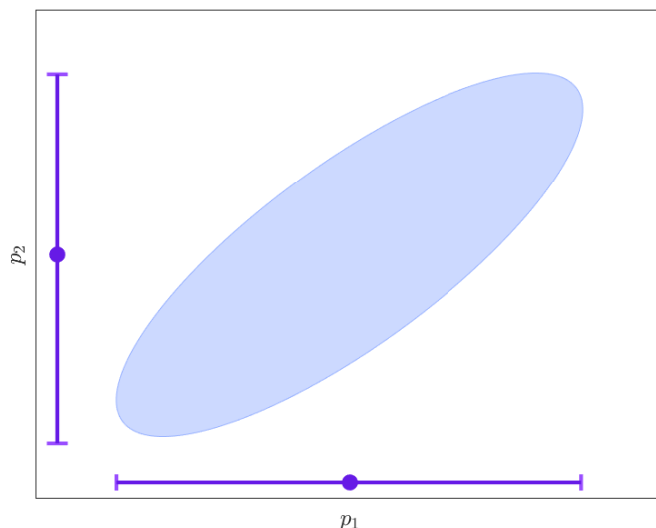
$$\mathbf{E}_{\mathbf{Y}|\mathbf{p}}\left\{\hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right\} = \mathbf{I} \quad (2.30)$$

Použitím predchádzajúcich rovníc kovariancia $\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$ a $\hat{\mathbf{p}}$ je vyjadrená:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Y}|\mathbf{p}}\left\{\begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \\ \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^T & \left(\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right) \end{bmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \text{cov } \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \text{FIM}_{\mathbf{p}} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

Matica (2.31) je zjavne pozitívne semidefinitná, pretože je to kovariančná matica odhadovaných parametrov $\mathbf{p}$. Ak použijeme všeobecnú definíciu kladne semidefinitnej matice $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \geq 0$ tak získavame:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \text{FIM}_{\mathbf{p}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \text{cov } \hat{\mathbf{p}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \text{FIM}_{\mathbf{p}} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \text{FIM}_{\mathbf{p}}^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.32)$$



Obr. 2.6: Región spoľahlivosti pre odhad parametrov $\mathbf{p}$. Elipsu je možné premietat' na každú os tak, aby sme získali bežné jednorozmerné intervaly spoľahlivosti pre každý parameter zvlášť.

Z tejto rovnice vieme ľahko získať tvrdenie z (2.24), čiže sme si dokázali Cramer-Raov vzťah. Taktiež platí že odhad je efektívny ak platí, že kovariancia odhadu je menšia alebo rovná Cramer-Raovej spodnej hranici (alebo inverzii FIM) [7].

Pri každom experimente sa stretávame s problémom náhodného šumu, ktorý ovplyvňuje všetky merania a nie je možné ho úplne potlačiť. Zdroj náhodného šumu je podmienený hlavne zariadeniami, ktoré používame pri meraní. Prítomnosť náhodného šumu sa odrazí hlavne pri odhadovaní parametrov, čiže čím bude šum výraznejší, tým menej bude odhad parametrov presný. V práci budeme predpokladať, že šum má normálne rozdelenie a poznáme jeho smerodajnú odchýlku.

Región spoľahlivosti CR (angl. *confidence region*) reprezentuje presnosť odhadu parametrov, kde jeho výpočet je podmienený štatistickým rozdelením nameraných údajov. CR vyjadruje možný rozsah hodnôt odhadnutých parametrov [4]. Typický tvar regiónu spoľahlivosti pre odhad dvojice parametrov je zobrazený na Obr. 2.6.

Pri výpočte CR zahrňujeme aj mieru spoľahlivosti, ktorou vieme určiť pravdepodobnosť s akou sa skutočná hodnota parametru nachádza v regióne spoľahlivosti. Hodnota

miery spoľahlivosti je určená podľa potreby presnosti odhadu. Platí, že ak je miera spoľahlivosti väčšia, tak aj celkový región spoľahlivosti je väčší. V našej práci budeme používať 95%-nú mieru spoľahlivosti.

Ak uvažujeme že vektor šumu $\mathbf{d}$ je normálne rozdelený, tak veľkosť a tvar regiónu spoľahlivosti odhadovaných parametrov je daný rovnicou [13]:

$$(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}})^T \mathbb{FIM}(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \leq \chi_{\alpha, n_p}^2 \quad (2.33)$$

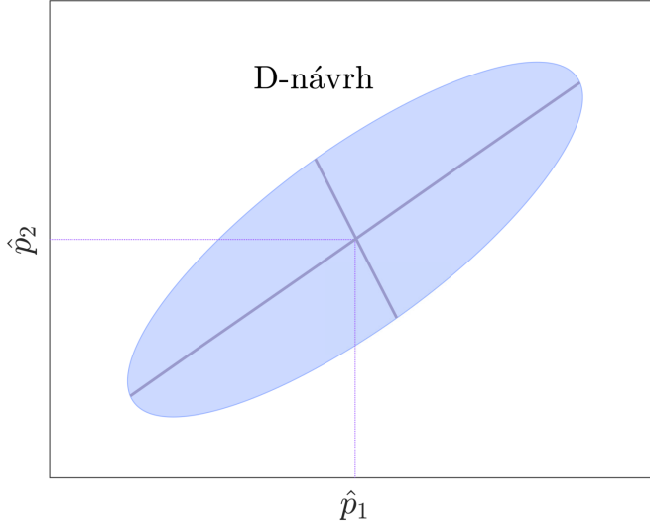
kde χ_{α, n_p}^2 predstavuje $(1 - \alpha)$ percentil χ kvadrát rozdelenia s dvoma stupňami voľnosti (hodnotu parametra α si zvolíme tak, aby sme získali 95% interval spoľahlivosti). Inverzia $\mathbb{FIM}$ predstavuje kovariančnú maticu CR, kde vlastné čísla matice podmieňujú celkový rozmer CR a nediagonálne elementy matice podmieňujú orientáciu CR.

Návrh optimálneho experimentu

V predchádzajúcich kapitolách sme si priblížili, že modelovanie reálnych systémov má nezastupiteľné využitie v množstve technických disciplín. Získané modely či už sú to *teoretické* alebo *empirické* obsahujú konečný počet parametrov, ktoré vyjadrujú správanie a povahu systému. Tieto parametre vieme odhadovať s určitou intervalovou presnosťou alebo v horšom prípade ich nie sme schopní určiť vôbec. Z toho nám vyplýva, že najpresnejší možný odhad týchto parametrov je kľúčový pre znalosť efektívneho modelu popisujúceho reálny proces. V praxi vieme odhadnúť tieto parametre zvyčajne uskutočnením sérií meraní a následne odhadujeme tak parametre, aby sa výstup z modelu čo najviac približoval k výstupu z reálneho systému pozri kap. 2.1.3. Vo všeobecnosti sú merania ovplyvnené náhodným šumom, ktorý sa prejaví taktiež v neistote odhadovaných parametrov, čiže model nie je nikdy dokonalou kópiou reálneho procesu. Táto neistota je reprezentovaná ako CR odhadu parametrov pozri kap. 2.1.4), ktorý zahŕňa všetky pravdepodobné hodnoty parametrov a vychádza z pravdepodobnostnej funkcie náhodného šumu [13].

Túto neistotu vieme znížiť vykonaním experimentu, ktorý efektívne nabudí identifikovaný systém za účelom zvýšenia kvality nameraných údajov. A práve touto problematikou sa zaoberá optimálny návrh dynamických experimentov. Optimalizovať experiment je možné viacerými spôsobmi, ako sú napríklad: počiatočné stavy, akčné zásahy, frekvencia vzorkovania alebo optimálne umiestnenie meracích zariadení. Návrh optimálneho experimentu je zvyčajne formulovaný ako matematický problém, kde určitá vlastnosť CR (zvyčajne rozmer) je minimalizovaná [13].

V práci prezentujeme *návrh optimálnych experimentov* pre dynamický systém. Uvažujeme že CR je spojitý. Pre nespojitý CR, ktoré vyplývajú zo situácií kedy model obsahuje neidentifikovateľne je navrhované model re-parametrizovať. Taktiež predpokladáme, že poznáme odhad $\hat{p}$. Posledným predpokladom je to, že neexistuje žiaden štrukturálny nesúlad a stredná hodnota šumu merania je 0. Existuje viacero návrhov minimalizovania CR ako napríklad: A, D, E, modifikovaný E, V, Q, M návrh [13].



Obr. 3.1: D-optimálny návrh zmenšuje rozptyl odhadu parametrov minimalizovaním plochy elipsy.

V práci sa budeme však zaoberať iba D-návrhom.

3.1 D-optimálny návrh

D-optimálny návrh predstavuje štandardný návrh pre stochastické modely z dôvodu minimalizovania objemu regiónu spoľahlivosti pre odhad parametrov a aj pre jeho matematicko-výpočtovú jednoduchosť. Ak platí že región spoľahlivosti je vyjadrený rovnicou (2.33), tak optimálny D-návrh vyjadríme ako [13]:

$$J = \min_{\substack{\mathbf{u}_\tau \in [\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^U], \forall \tau \in \{1, \dots, k\} \\ t_{v,1}, t_{v,2}, \dots, t_{v,max}}} \det(\mathbb{FIM}^{-1}) \quad (3.1a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.1b)$$

V práci si rozoberieme viacero možností návrhov experimentu, postupne si priblížime, ako môžeme optimalizovať vzorkovacie časy $t_{v,i}$ a zásahy do systému $\mathbf{u}$. Následne si ukážeme, ako môžeme experimenty vykonávať robustne a to práve zavedením sekvenčného návrhu, z ktorého sa bude prirodzene odvíjať scenárový návrh.

3.2 Študovaný systém

V nasledujúcich kapitolách pracujeme so systémom prvého rádu, čo predstavuje taký systém, ktorého vstupno-výstupná dynamická charakteristika je opísaná diferenciálnou rovnicou:

$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t), \quad (3.2)$$

kde $y(t)$ predstavuje výstup zo systému v čase t , K je zosilnenie systému, T predstavuje časovú konštantu systému a $u(t)$ reprezentuje akčný zásah do systému. Príkladmi reálnych systémov, ktorých dynamiku je možné opísať diferenciálnou rovnicou prvého radu je veľké množstvo. Napríklad vybíjanie kondenzátora v jednoduchom RC obvode môžeme opísať takýmto systémom, kde meniacou sa veličinou v čase je celkový náboj kondenzátora. Taktiež je dobre známe, že za určitých zjednodušujúcich predpokladov môže byť rast jedincov v určitej populácii práve dobre vyjadrené takýmto systémom [2]. Matematické vyjadrenie časového opisu výstupu zo systémov prvého rádu s nenulovými začiatočnými podmienkami je dané nasledujúcou rovnicou:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{T}} + K(1 - e^{-\frac{t}{T}})u(t) \quad (3.3)$$

Rovnicu (3.3) môžeme transformovať zo spojitkej domény do diskkrétnej, zavedením periódy vzorkovania T_s . Diskrétna forma systému prvého rádu je daná nasledujúcou rovnicou:

$$y_k = y_{k-1} e^{-\frac{T_s}{T}} + K(1 - e^{-\frac{T_s}{T}})u_{k-1} \quad (3.4)$$

kde T_s predstavuje periódu vzorkovania. V ďalšej časti práce budeme pracovať s vektorovým zápisom diskkrétnej formy systému prvého rádu, kde budeme uvažovať merania a akčné zásahy do systému iba v jednotlivých periódach vzorkovania. Vektorový zápis je daný nasledovne [16]:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & u_0 \\ y_1 & u_1 \\ y_2 & u_2 \\ \dots & \dots \\ y_{n-1} & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{T_s}{T}} \\ K(1 - e^{-\frac{T_s}{T}}) \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{X}(\mathbf{p}, \mathbf{u})\mathbf{p} \quad (3.5)$$

práve $\mathbf{X}(\mathbf{p}, \mathbf{u})$ je funkciou akčných zásahov do systému $\mathbf{u}$ s parametrami $\mathbf{p}$ ktoré identifikujeme. Tento proces identifikácie zahŕňa nasledujúce faktory: [4]:

- Vplyvy, ktoré je možné ovládať:
 - akčné zásahy do systému u_i
 - vzorkovacie časy T_s

- začiatkové podmienky y_0
- trvanie experimentu
- Vplyvy, ktoré nie je možné ovládať:
 - náhodný šum d

3.2.1 Optimálny návrh času vzorkovania

V tejto úlohe zisťujeme, ako najlepšie voliť čas merania (vzorkovania). Častokrát je vzorkovanie podmienené rozpočtom a fyzikálnou realizáciou, čiže by sa malo vykonávať racionálne, čo vedie k optimálnemu návrhu experimentu [9]. Uvažujeme, že máme k dispozícii maximálny počet vzoriek $t_{v,max}$. Prirodzeným výberom je rozdeliť vzorkovanie rovnomerne, čiže periodicky. Môže avšak nastať taká situácia, kedy je lepšie sústrediť sa na konkrétne časové okamihy, aby sme získali výdatnejšiu informáciu z meraní. Práve periodické rozdelenie meraní bude porovnávané s optimálne rozdeleným meraním.

Ak uvažujeme o systéme, ktorý je vyjadrený diferenciálnou rovnicou (3.3), tak optimálny čas vzorkovania získame vyriešením nasledujúceho optimalizačného problému:

$$J = \min_{t_{v,1}, t_{v,2}, \dots, t_{v,max}} \det(\text{FIM}^{-1}) \quad (3.6a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.6b)$$

Tento problém je totožný ako (3.6), avšak v tomto prípade uvažujeme konštantný akčný zásah, zatiaľ čo optimalizujeme iba čas vzorkovania. FIM odvodíme z rovnice (2.26) a získame:

$$\text{FIM} = \mathbf{X}^T(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \text{diag}^{-1}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \mathbf{X}(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \quad (3.7)$$

3.2.2 Optimálny akčný zásah

O optimálnom návrhu experimentu môžeme uvažovať aj ako o hľadaní optimálneho akčného zásahu. Túto situáciu sme si už intuitívne priblížili v úvode práce, kde sme uviedli príklad riadenia vozidla na zľadovatej ceste. Práve tu si ukážeme, ako môžeme nájsť optimálny pohyb volantu. Postup môže byť použitý v širokom zábere aplikácií. Optimálny akčný zásah môžeme porovnať s PRBS pozri kap. 2), čo predstavuje jeden zo široko využívaných akčných zásahov v identifikácii [7]. V ďalšej kapitole rozšírime túto úvahu o *Sekvenčný návrh* 3.2.3 a taktiež sa budeme snažiť o väčšiu robustnosť práve zavedením *Multiúrovňového scenárového návrhu* 3.2.4.

Optimálny návrh dynamického experimentu môže byť v tejto chvíli vyjadrený ako nájdenie $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ vzhľadom ku daným ohraničeniam, za účelom minimalizovania determinantu inverzie FIM. Takto vznikne štandardný nelineárny optimalizačný problém a dá sa vyriešiť (minimálne v princípe) klasickými optimalizačnými metódami [7]:

$$J = \min_{\mathbf{u}_\tau \in [\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^U], \forall \tau \in \{1, \dots, k\}} \det(\text{FIM}^{-1}) \quad (3.8a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u}_{1, \dots, k} \leq \mathbf{u}^U \quad (3.8b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.8c)$$

V tomto prípade narozdiel od *hľadania optimálneho času vzorkovania* pozri kap. 3.2.1, uvažujeme o rovnomernom čase vzorkovania a optimalizujeme iba akčné zásahy $\mathbf{u}$.

3.2.3 Sekvenčný návrh

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, ako vyriešenie optimalizačného problému, môže byť využité v návrhu experimentu. Z formulácie FIM je zrejmé, že ak odhadované parametre $\hat{\mathbf{p}}$ ležia ďaleko od skutočných parametrov $\mathbf{p}^*$, tak výsledný návrh experimentu môže byť sub-optimálny. Táto časť sumarizuje ako docieľiť robustnosť dynamického experimentu a navrhuje postupy založené na *sekvenčnom návrhu*. Predpokladáme, že existuje množina $\mathbf{P}$ a platí $\mathbf{p}^* \in \mathbf{P}$ [3].

Uvažujeme identifikovaný systém vo forme (3.5). Ak je v identifikácii možné vykonať určitý počet N_{exp} experimentov, tak jedna z najjednoduchších schém k docieleniu robustného výsledku je práve *sekvenčný návrh* [1]. Jedna sa o iteratívnu metódu, kde sa postupne upravuje odhad $\hat{\mathbf{p}}$ na základe uskutočnených experimentov a taktiež sa upravuje návrh nasledujúceho experimentu. V každom kroku určíme optimálny akčný zásah pre nasledujúci experiment pomocou D-návrhu a optimalizačný problém bude možné vyjadriť rovnicou:

$$J_N = \min_{\mathbf{u}_{1, \dots, k}} \det \left((\text{FIM}_N + \sum_{n=1}^{N-1} \text{FIM}_n)^{-1} \right) \quad (3.9a)$$

$$\text{s.t. } -1 \leq \mathbf{u}_{1, \dots, N} \leq 1 \quad (3.9b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.9c)$$

V tomto optimalizačnom probléme berieme do úvahy aj všetky vypočítané FIM z predchádzajúcich experimentov $\sum_{n=1}^{N-1} \text{FIM}_n$. Takýmto spôsobom je každý experiment obohatený o predošlú informáciu.

Sekvenčný návrh je možné vyjadriť pseudo-algoritmom [12]:

1. Vykonáme prvotný predpoklad parametrov $\mathbf{p}^{\text{init}}$
2. Nájdeme $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ pre experiment pomocou D-návrhu (3.6), použitím $\mathbf{p}^{\text{init}}$
3. Aplikujeme $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ v neznámom systéme, kde nameriame $\mathbf{y}_m$.
4. Identifikujeme nové hodnoty parametrov $\hat{\mathbf{p}}$ s korešpondujúcim CR pomocou metódy najmenších štvorcov, kde zoberieme v úvahu všetky predchádzajúce experimenty
5. Opakujeme procedúru od kroku 2 ak neplatia podmienky (v 2. kroku použijeme $\hat{\mathbf{p}}$):
 - (a) bol vyčerpaný maximálny počet experimentov.
 - (b) zmenšenie CR pre odhad parametrov bolo len minimálne (užívateľom definované).
 - (c) zlepšenie odhadu parametrov bolo len minimálne (nie je dosiahnutá výraznejšia konvergencia).
6. Ukončíme procedúru.

Priebeh sekvenčného návrhu sme znázornili na diagrame 3.2.

3.2.4 Scenárový návrh

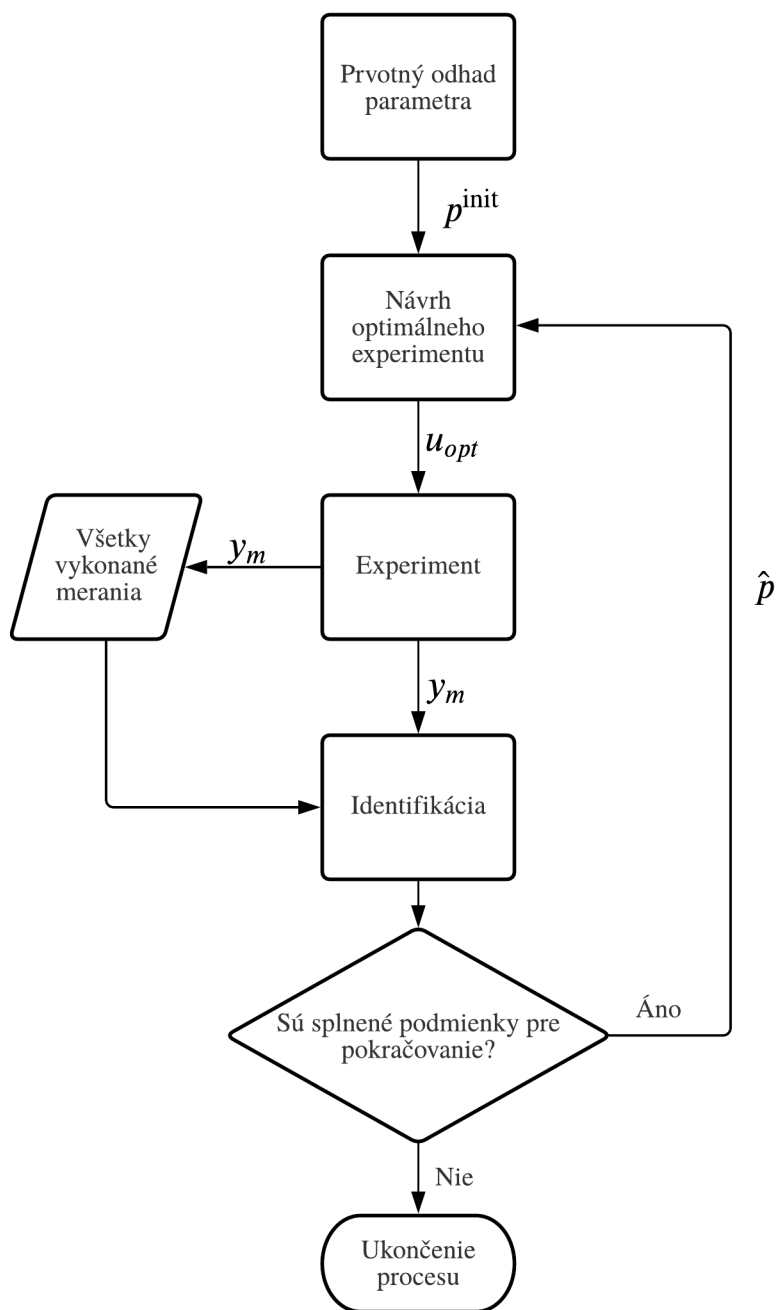
V tejto časti obohatíme *sekvenčný návrh* o *scenárový návrh*. Vo všetkých predchádzajúcich úvahách o návrhu optimálneho experimentu vychádzame z faktu, že musíme poznať určité apriórne informácie o študovanom systéme a mať aspoň približný odhad o hodnotách parametrov. A práve *scenárový návrh* zabezpečuje robustný návrh aj v prítomnosti nepresností v apriórnych informáciach.

Na úvod si môžeme priblížiť *minimálno-maximálny návrh*, ktorý je podobný ako *scenárový návrh*. *Minimálno-maximálny návrh* optimalizuje akčný zásah $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ v experimente vzhľadom na branie do úvahy najhoršiu realizáciu $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbf{P}$ [15], a vzniká optimalizačný problém:

$$J = \min_{\mathbf{u}} \max_{\hat{\mathbf{p}} \in \mathbf{P}} -\det(\text{FIM}^{-1}) \quad (3.10a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \quad (3.10b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (3.10c)$$



Obr. 3.2: Algoritmus sekvenčného návrhu.

Uvažované $\hat{\mathbf{p}}$ sú zvyčajne vyberané ako kombinácie minimálnych a maximálnych hodnôt v množine $\mathbf{P}$. Tu si musíme uvedomiť, že optimalizácia vzhľadom na najhoršiu realizáciu môže viesť ku obmedzeným výsledkom a praktické využitie je podmienené uskutočniteľnosťou a prevádzkovými obmedzeniami [10]. Túto metódu si môžeme analogicky spojiť so situáciou v hre šach.

Narozdiel od minimálno-maximálnej formulácie, *scenárový návrh* optimalizuje strednú hodnotu účelovej funkcie za predpokladu stochastickej realizácie neurčitosti. Tento prístup predpokladá n_s diskretných realizácií (scenárov) $\hat{\mathbf{p}}$ z množiny $\mathbf{P}$. V jednoduchej situácii scénárový návrh môže byť zobrazený ako kombinácia minimálnych, nominálnych a maximálnych parametrov z množiny $\mathbf{P}$ ak predpokladáme normálové rozdelenie $\hat{\mathbf{p}}$. Za predpokladu, že $\mathbf{P}$ predstavuje spojitý región spoľahlivosti tak scenáre $\hat{\mathbf{p}}$ môžu byť reprezentované sigma bodmi z $\mathbf{P}$. [14]. Optimalizačný problém je daný nasledujúcou rovnicou:

$$J = \min_{\mathbf{u}} \sum_{s=1}^{n_s} -\det(\mathbf{FIM}^{-1}) \quad (3.11a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.11c)$$

Poznamenávame, že *scenárový návrh* môže byť vhodnou alternatívou pre minimálno-maximálnu formuláciu a to najmä pre striktné ohraničené návrhy optimálnych experimentov.

Zatiaľ uvedené minimálne-maximálny a scénárový návrh sú jedno-úrovňové prístupy, to znamená, že je vykonaný iba jeden experiment potom, ako je navrhnutý. Tieto prístupy, ale vieme kombinovať so *sekvenčným návrhom* a docielime tak, iteračné vylepšovanie odhadov parametrov a teda kvalitnejší návrh optimálneho experimentu. Hlavným problémom tejto kombinácie je to, že vyššie uvedené návrhy nezohľadňujú možnosť opakovaného odhadu a vylepšovania návrhu založeného na aktuálnej informácii. Rekurzívny návrh pre riešenie problému vedie k *multi-úrovňovému rozhodovaniu* [5].

Ak sme schopní upravovať návrh dynamického experimentu medzi jednotlivými sekvenciami, tak multi-úrovňový návrh prekoná jedno-úrovňový scénárový návrh. Aplikácia viacúrovňového návrhu experimentu môže byť vykonaná podobne ako jednoduchý *sekvenčný návrh* 4.6. Navrhovaný algoritmus je teda kombináciou *sekvenčného návrhu* a *scenárového návrhu*. Nadovšetko, scénárový multi-úrovňový návrh predstavuje určitú

náhradu za minimálno-maximálny návrh pre vhodne zvolené scenáre. Cena, za ktorú však platíme v spočívam vo väčšej zložitosti optimalizačného problému.

Spomenuli sme, že parametre $\mathbf{p}^{n_s}$ môžeme vyberať pre scenáre ako rôzne kombinácie z množiny $\mathbf{P}$. V práci sa budeme zaoberať dvoma typológiami výberu a to sú *sigma* a *box scenárový návrh*, interpretácia týchto možností je zobrazená na obrázku 3.3. Predpokladáme, že $\mathbf{P}$ predstavuje spojitý región spoľahlivosti a $\hat{\mathbf{p}}$ predstavuje nominálny odhad.

Sigma výber zhrňa samotné $\hat{\mathbf{p}}$ a také $\mathbf{p}^{n_s, i}$, ktoré sa nachádzajú v rozsahu 2σ od $\hat{\mathbf{p}}$ a ležia presne na hranici CR odhadu parametrov. Tieto body získame vyriešením:

$$\mathbf{p}^{n_s, [1]} = \hat{\mathbf{p}} \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{p}^{n_s, [i]} = \hat{\mathbf{p}} + (\sqrt{(s + \lambda) \text{FTM}})_i, \quad i = 2, 3 \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{p}^{n_s, [i]} = \hat{\mathbf{p}} - (\sqrt{(s + \lambda) \text{FTM}})_{i-s}, \quad i = 4, 5 \quad (3.12c)$$

kde, s predstavuje dimenziu systému a λ je konštanta rovná $6 - s$.

Box výber berie v úvahu $\mathbf{p}^{n_s, i}$, ktoré ohraničujú CR odhadovaného parametru $\hat{\mathbf{p}}$ a predstavujú projekciu jednotlivých intervalov spoľahlivosti na korešpondujúce osi. Tento výber je vyjadrený rovnicou:

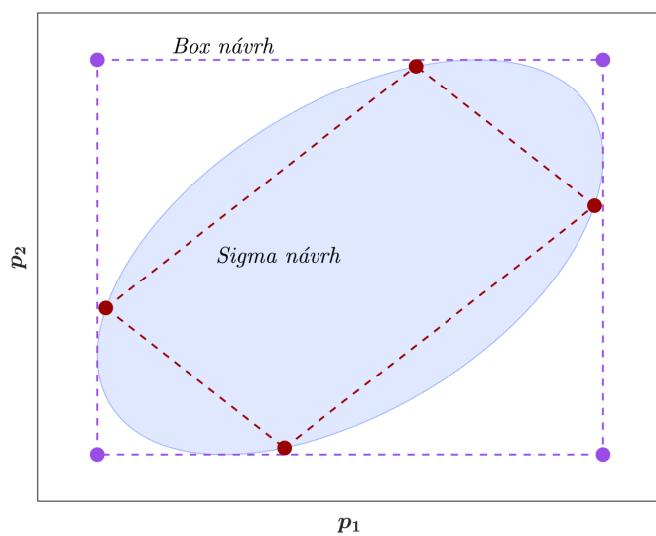
$$\mathbf{p}^{n_s, [1]} = \hat{\mathbf{p}} \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{p}^{n_s, [i]} = \hat{\mathbf{p}} + (-1)^{\frac{i}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad i = 2, 4 \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{p}^{n_s, [i]} = \hat{\mathbf{p}} + (-1)^{\frac{i-1}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ -\sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad i = 3, 5 \quad (3.13c)$$

Smerodajná odhadu jednotlivých parametrov σ_{ii} je rovná diagonálnym prvkom kovariančnej matice popisujúcej CR:

$$\sigma_{ii} = \sqrt{(\text{FTM})_{ii}^{-1}} \quad (3.14)$$



Obr. 3.3: Zobrazenie možností výberu p^{n_s} .

Prípadová štúdia

V prípadovej štúdií si ukážeme predchádzajúce úvahy v praxi. Budeme identifikovať neznámy systém a uvidíme, že zavedením optimálneho návrhu sme schopní výrazne zlepšiť presnosť a spoľahlivosť odhadu. V procese návrhu optimálneho experimentu budeme uvažovať o viacerých možnostiach. V prvom prípade budeme hľadať optimálny vzorkovací čas T_s . To znamená, že budeme vyšetrovať, v akých časových intervaloch je najlepšie vzorkovať neznámy systém ako sme si priblížili v kapitole 3.2.1. V druhom prípade budeme hľadať optimálny vstup do systému u_i , čiže sa budeme zaoberať optimálnym vybudením systému 3.2.2, tento prípad následne obohatíme o *sekvenčný dizajn* 3.2.3 a *scenárový dizajn* 3.2.4 Odhad parametrov budeme vykonávať pomocou metódy najmenších štvorcov 2.1.3. Pre pripomenutie z predchádzajúcej kapitoly, experiment zahŕňa nasledujúce faktory [4]:

- Vplyvy, ktoré je možné ovládať:
 - akčné zásahy do systému u_i
 - vzorkovacie časy T_s
 - začiatočné podmienky y_0
 - trvanie experimentu
- Vplyvy, ktoré nie je možné ovládať:
 - náhodný šum d

Budeme uvažovať nulové začiatočné podmienky a konštantnú dĺžku experimentu. V budúcnosti práve optimalizovanie týchto faktorov, môže byť motiváciou následnej práce. Tu je dôležité poznamenať, že celkovú identifikáciu simulujeme „in sinico“, to znamená že celá štúdia bola vykonaná simuláciou využitím počítačových modelov. Taktiež treba pripomenúť, že dopredu poznáme hodnotu reálnych parametrov $\mathbf{p}^*$ a práve

preto sme schopní porovnávať výsledky. Ďalej je veľmi potrebné brať v úvahu, že máme k dispozícii určité apriórne informácie o systéme, pod týmito rozumieme situáciu, že pred experimentom vieme v akom rozsahu sa nachádzajú neznáme parametre.

Celý návrh optimálneho experimentu ako aj samotnú identifikáciu budeme vykonávať v prostredí MATLAB R2020b. Pre vyriešenie optimalizačných problémov budeme používať BARON (*the Branch-and-Reduce Optimization Navigator*) v1.90, čo predstavuje solver, ktorý je vhodný pre vyriešenie nekonvexných optimalizačných problémov a garantuje nájdenie globálneho minima funkcie.

4.1 Optimizovanie vzorkovacieho času.

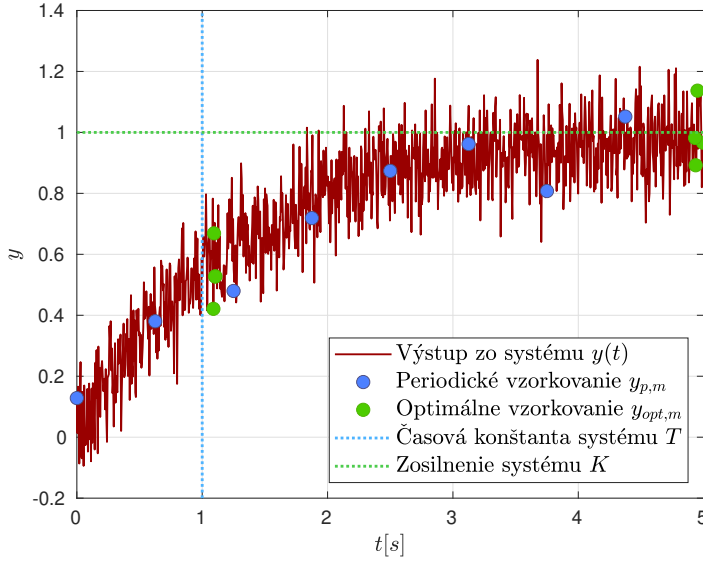
Budeme uvažovať o systéme, ktorý je vyjadrený diferenciálnou rovnicou (3.3). Pri hľadaní optimálneho vzorkovacieho času $t_{v,i,\dots,n}$ bude maximálny počet vzoriek $n = 8$, akčný zásah má konštantnú hodnotu $u_{i,\dots,n} = 1$ a uvažujeme nulovú začiatočnú podmienku $y_0 = 0$. Systém teda budeme identifikovať z jeho prechodovej funkcie :

$$y(t) = p_1(1 - e^{-\frac{t}{p_2}}) \quad (4.1)$$

kde p_1 je zosilnenie systému K a p_2 predstavuje časovú konštantu T . Tieto parametre budeme odhadovať metódou najmenších štvorcov vid. kap. 2.1.3, kde namerané údaje y_m budú ovplyvnené náhodným šumom s normálovým rozdelením so smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0.1$ a nulovou strednou hodnotou. Optimálne časy vzorkovania získame vyriešením optimalizačného problému (3.6).

Na grafe 4.1 sú znázornené periodické vzorkovania a taktiež optimálne vzorkovania počas identifikácie. Je zaujímavé poukázať na skutočnosť, že optimálne časy vzorkovania nie sú rozmiestnené rovnomerne, ale nachádzajú sa v skupinách v určitých oblastiach. Práve tieto regióny majú spojitost s odhadovanými parametrami zosilnenia K a časovej konštanty T . Riešenie optimalizačného problému nám hovorí, že by sme sa mali zamerať na vzorkovanie v čase rovnakom ako je hodnota časovej konštanty a v maximálnom možnom čase, kde je najväčšia pravdepodobnosť ustálenia systému. Práve na týchto miestach má nameraný signál najväčšiu informačnú výdatnosť.

Na grafe 4.2 je porovnanie veľkosti regiónov spoľahlivosti pre optimálny experiment a experiment kde bolo vzorkovanie rovnomerne periodické. Je jasne vidieť, že použitím optimálneho vzorkovania docielime, že identifikácia bude presnejšia a spoľahlivejšia.

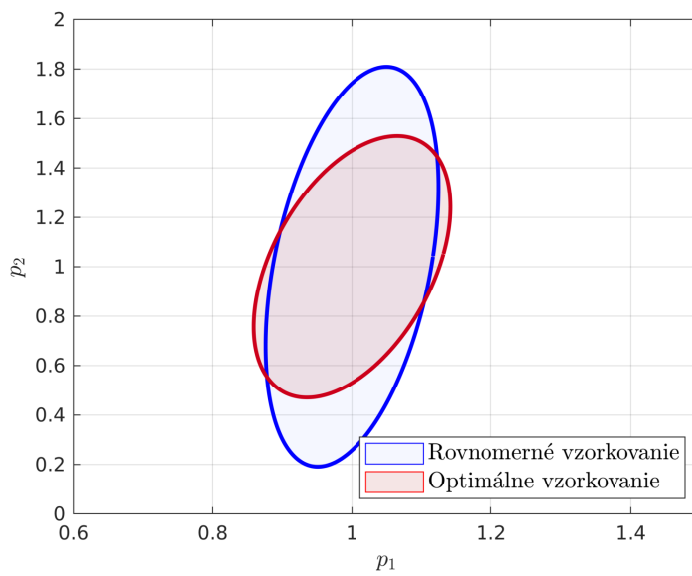


Obr. 4.1: Prechodová charakteristika identifikovaného systému. Na grafe je zjavný náhodný šum, ktorý vplýval na vzorkovanie a odhad parametrov.

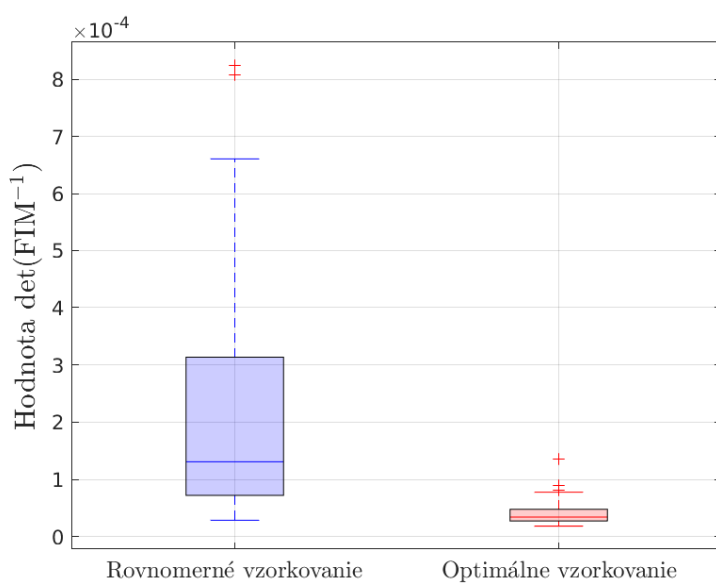
Ďalej sme pokračovali a simulovali toto porovnanie metódou Monte Carlo, v ktorej som vykonal 100 experimentov kde som pozoroval hodnotu determinantu inverzie FIM. Ako sme si priblížili v kapitole 3, práve determinant vplýva na veľkosť regiónu spoľahlivosti odhadu parametrov. Na grafe 4.3 je zobrazený krabicový diagram, ktorý štatisticky opisuje experimenty. V modrej časti môžeme pozorovať väčšiu variabilitu dát v porovnaní s červenou, čo je zobrazené dlhšou zvislou čiarou. Práve táto čiara popisuje variabilitu dát nad tretím a pod druhým kvartilom, taktiež je zrejmá väčšia prítomnosť tzv. okrajových bodov, ktoré sú zobrazené ako červené krížiky. Čiže sme si dokázali, že aj viacnásobné opakovanie optimálneho experimentu vedie ku zvýšeniu presnosti odhadu $\hat{\mathbf{p}}$.

4.2 Optimalizovanie akčného zásahu

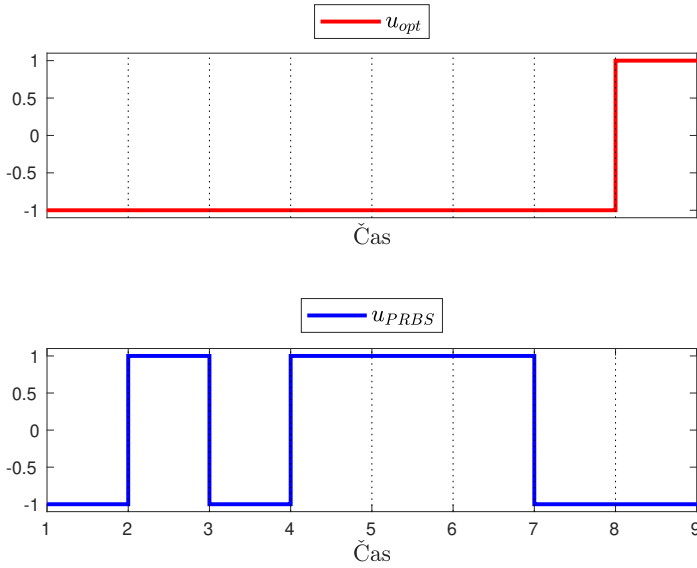
Študujeme rovnaký systém ako v predchádzajúcej kapitole, ale s tým, že budeme uvažovať rovnomerné vzorkovanie s periódou $T_s = 0.5s$. Systém je v tom prípade vyjadrený (3.5). V tejto kapitole budeme hľadať optimálny akčný zásah a to práve vyriešením (3.8) z čoho získame vektor akčného zásahu $\mathbf{u}_{opt}$, ktorý aplikujeme v procese



Obr. 4.2: Porovnanie CR pre identifikáciu, kde sme použili rovnomerné vzorkovanie a optimálne vzorkovanie.



Obr. 4.3: Porovnanie hodnoty determinantu inverzie FIM, po vykonaní sérií experimentov.

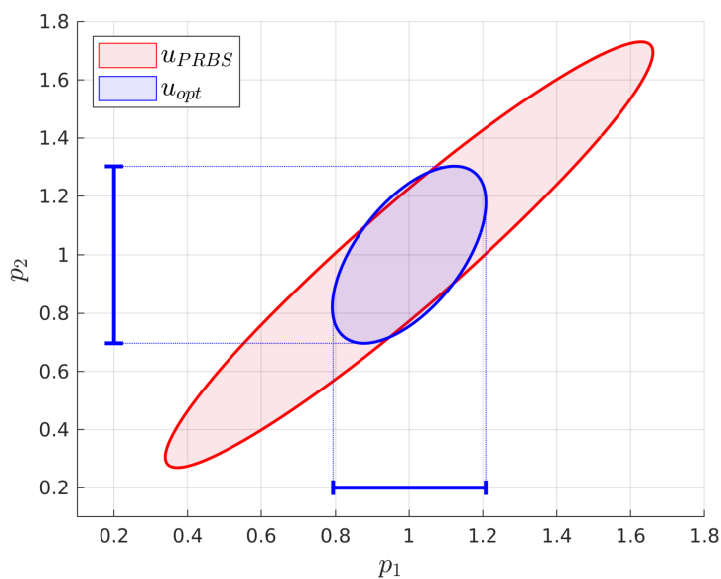


Obr. 4.4: Porovnanie vstupných signálov v procese identifikácie.

identifikácie. Presnosť odhadu parametrov pri identifikácii použitím optimálneho akčného zásahu u_{opt} porovnáme s identifikáciou, kde akčný zásah bol generovaný pomocou PRBS vid. kap. 2 a ktorý vyjadruje vektor u_{PRBS} . Ako bolo spomenuté, poznáme reálne parametre systému, čiže vieme zvoliť vhodný počet registrov PRBS $n = 3$, aby sme docielili platnosť pravidla $nT_s > t_{90}$.

Na Obrázku 4.4 je zobrazené porovnanie akčných zásahov v identifikácii. Z grafu je zjavné, že optimálny akčný zásah u_{opt} má stálejší priebeh a až na konci experimentu dochádza ku zmene. Môžeme uvažovať, že takýto akčný zásah vybudí tak systém, že má dostatok času na ustálenie, čiže môžeme spoľahlivejšie určiť hodnotu zosilnenia K a zároveň na konci experimentu dôjde ku zmene, a tak môže lepšie prejavíť dynamika systému, ktorú vyjadruje hodnota časovej konštanty T . Na druhej strane, u_{PRBS} je menej stály a teda odhad zosilnenia systému môže byť menej spoľahlivý. Treba však poznamenať, že dynamickejšie vybudenie systému môže viesť k lepšiemu odhadu časovej konštanty.

Porovnanie CR odhadu parametrov vidíme na Obrázku 4.5. V tomto prípade je zjavná mierne vychýlená orientácia CR odhadu parametrov v optimálne navrhnutom experimente, kde projekcia elipsy v osi p_1 je užšia v porovnaní s projekciou v osi



Obr. 4.5: Porovnanie regiónu spoľahlivosti pre odhad parametrov použitím optimálneho akčného zásahu (u_{opt}) s odhadom parametrov, kde v identifikácii bol použitý akčný zásah založený na PRBS (u_{PRBS}). Na grafe sú zároveň zobrazené intervaly spoľahlivosti jednotlivých parametrov v optimálne navrhnutej identifikácii.

p_2 . Taktiež je viditeľné že celková plocha CR odhadu parametrov pri použití $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ je výrazne menšia ako použitím $\mathbf{u}_{\text{PRBS}}$, z čoho je zjavné, že optimalizovaním akčného zásahu sme schopní zlepšiť odhad neznámych parametrov.

4.3 Zavedenie sekvenčného návrhu

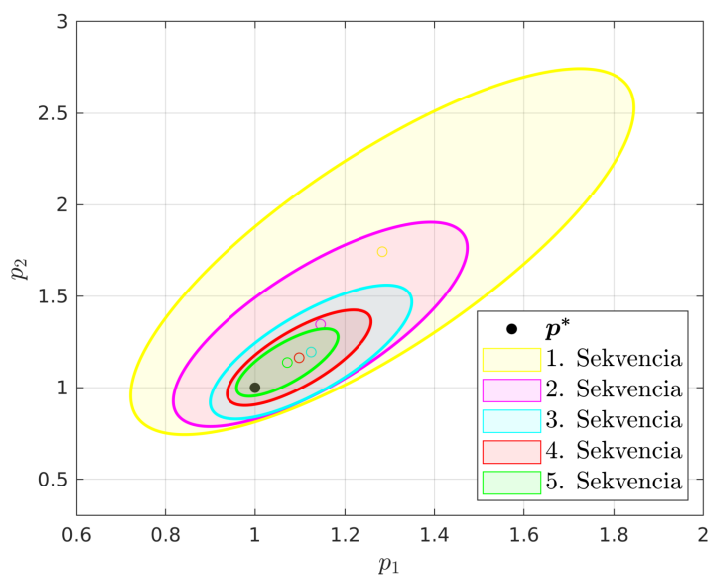
Sekvenčný návrh budeme demonštrovať v nasledujúcom experimente. Uvažujeme identifikovaný systém, rovnaký ako v predchádzajúcej kapitole vo forme (3.5). Celú identifikačnú procedúru rozdelíme na viacej za sebou nasledujúcich sekvencií $N_{\text{sek}} = 5$. Každá sekvencia bude disponovať informáciami z predchádzajúcej. Medzi jednotlivými sekvenciami vypočítame optimálny akčný zásah pre nasledujúcu vyriešením (3.9). V každej sekvencii uvažujeme počet vzoriek $k = 8$, perióda vzorkovania bude mať hodnotu $T_s = 0.5$. Myšlienka za týmto prístupom je taká, že iteratívne bude vylepšované poznanie o neznámych parametroch. Vďaka presnejším informáciám sme schopní lepšie navrhnuť experiment pre nasledujúcu sekvenciu, čo vedie ku spoľahlivejšiemu odhadu parametrov.

Na obrázku 4.6 sú zobrazené CR odhadu parametrov po jednotlivých sekvenciách. CR každej sekvencie indikuje presnosť odhadu parametrov a je viditeľné, že každá sekvencia je presnejšia ako predchádzajúca. Na začiatku kapitoly sme uviedli, že poznáme hodnoty skutočných parametrov $\mathbf{p}^*$. Z grafu je viditeľný trend, že odhadované parametre $\hat{\mathbf{p}}$ konvergujú ku skutočným, čiže rozdiel $\|\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}}\|$ sa minimalizuje.

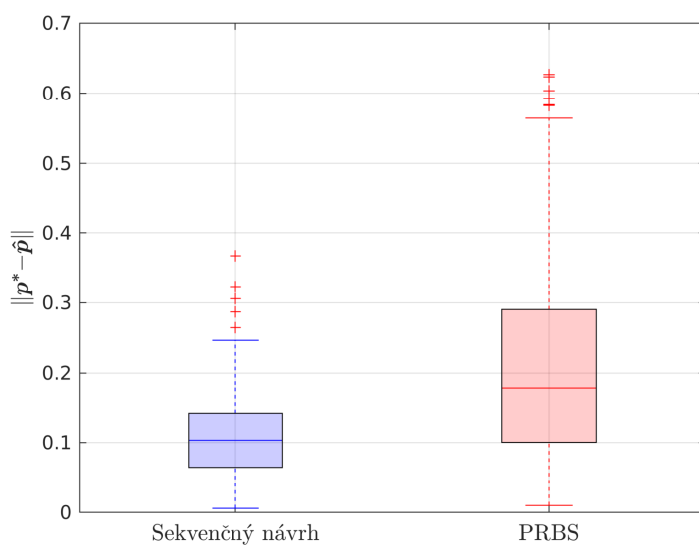
Následne som simuloval experimenty pomocou metódy Monte Carlo, v ktorej som vykonal 100 experimentov, kde som porovnával hodnotu determinantu inverzie FIM. Pre porovnanie som uvažoval situáciu identifikácie kde akčný zásah bol založený na PRBS. Pri tejto identifikácii budeme rátať s počtom vzoriek $k = 40$, čiže je k dispozícii rovnaký počet nameraných údajov ako pri optimálnej identifikácii (maximálny počet experimentov $N_{\text{seq}} = 5$ počet vzoriek v každom experimente $k = 8$). V tomto prípade budeme porovnávať rozdiel $\|\mathbf{p}^* - \hat{\mathbf{p}}\|$, po celkových identifikáciách. Je zrejmé, že minimalizovaním tohto rozdielu je odhad parametrov systému presnejší. Štatistické prevonanie je uvedené na obrázku 4.7.

4.4 Zavedenie scenárového návrhu

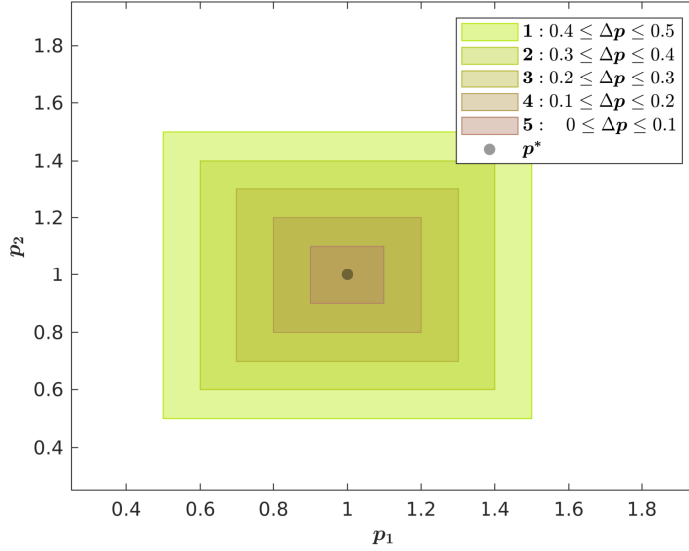
V úvode tejto kapitoly sme uviedli, že vždy musíme mať určitú znalosť o apriórnych informáciách o neznámom systéme, práve tieto informácie sú dôležité pre návrh optimál-



Obr. 4.6: CR v jednotlivých sekvenciach. Z obrázku je zjavná konvergencia odhadnutých parametrov $\hat{p}$ ku skutočným údajom p^* .



Obr. 4.7: Porovnanie relatívnej presnosti jednotlivých identifikačných návrhov. $\|p^* - \hat{p}\|$, na tomto grafe je zrejmá väčšia presnosť odhadu parametrov dosiahnutá použitím sekvenčného návrhu.

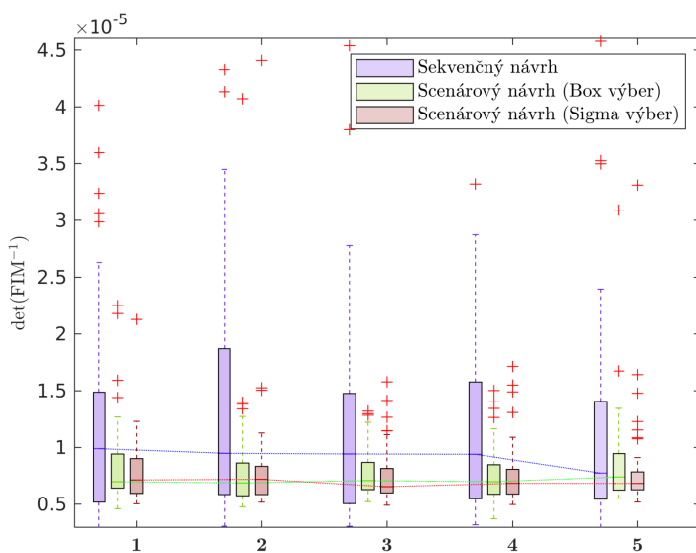


Obr. 4.8: Vizualizácia úrovní prvotného odhadu parametrov neznámeho systému.

neho experimentu. Pri identifikácii sme preto nútený vykonať určitý nástrel neznámych parametrov $\mathbf{p}^{\text{init}}$. V experimente si ukážeme aký vplyv môže mať prvotná nepresnosť nástreľu parametrov na celkovú identifikáciu. Práve tu si ukážeme, ako *sekvenčný dizajn* v kombinácii so *scenárovým dizajnom*, môže vylepšiť odhad parametrov aj keď pred návrhom experimentu nedisponujeme presnou informáciou. Budeme uvažovať rovnaký model ako predchádzajúcim prípade (3.3).

Nepresnosť prvotného nástreľu parametrov $\mathbf{p}^{\text{init}}$ budeme simulovať tak, že pred každým návrhom experimentu si náhodne zvolíme $\mathbf{p}^{\text{init}}$, ktoré sa budú nachádzať v určitej vzdialenosti od reálnych parametrov $\mathbf{p}^*$, čo môžeme vyjadriť zavedením maximálnej normy $\|\Delta \mathbf{p}\|_\infty$, kde $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^* - \mathbf{p}^{\text{init}}$. Prvotný nástrel parametrov rozdelíme do piatich zón viď. obr. 4.8, pre ktoré vykonáme Monte Carlo simuláciu so 100 experimentami, pre každú zónu zvlášť. Priebeh experimentu je identický ako pri sekvenčnom návrhu, s tým rozdielom, že pri scenárovom návrhu berieme v úvahu pri výpočte optimálneho zásahu v identifikácii aj scenárové body $\mathbf{p}^{n*}$. Optimálny akčný zásah budeme počítat v každej sekvencii pomocou D-dizajnu, a ako známka kvality odhadu parametrov bude reprezentovať hodnota determinantu inverzie FIM.

Na grafe 4.9 sú výsledky experimentov, ktoré sú zoradené podľa toho, z akej zóny



Obr. 4.9: Porovnanie presností identifikácie použitím *sekvenčného návrhu* (fialová farba) so scénárovými návrhmi *Box* a *Sigma výber* (zelená, resp. červená farba). Na spodnej osi sú vyznačené zóny, z ktorých pochádzal prvotný nástrel parametrov $\mathbf{p}^{init}$.

boli prvotné parametre $\mathbf{p}^{\text{init}}$ vybrané. Intuitívny predpoklad je taký, že čím je táto vzdialenosť väčšia, tak tým bude návrh dynamického experimentu menej kvalitný. Na grafe porovnávame hodnotu determinantu inverzie FIM na konci celého procesu identifikácie, kde platí, že čím je hodnota determinantu nižšia tak aj obsah CR odhadu parametrov je menší. Tu si môžeme všimnúť, že práve zavedením *multiúrovňovho scenárového dizajnu* vieme dosiahnuť vyššiu presnosť odhadu parametrov vzhľadom na celý rozsah hodnôt $\Delta\mathbf{p}$. *Sekvenčný dizajn* vykazuje nepresnosť v situáciach kde $\Delta\mathbf{p}$ vykazuje najväčšie hodnoty. Je to dôsledkom toho, že pri tomto dizajne sa berie v úvahu iba nominálna hodnota $\hat{\mathbf{p}}$ a nie všetky možné scenáre nepresnosti. Ďalej je viditeľné, že pri situácií, $0 \leq \Delta\mathbf{p} \leq 0.1$ vykazuje *sekvenčný návrh* podobnú presnosť, ako scenárové návrhy. Taktiež je treba podotknúť aj väčšia uniformita dát v *scenárových návrhoch*, čo je znázornené menšou výškou jednotlivých boxplotov.

Záver

Úlohou diplomovej práce bolo priblíženie problematiky modelovania dynamických systémov. Zároveň sme ukázali ako ich identifikovať a následne ako pomocou optimálneho návrhu dynamického experimentu sme schopní zlepšiť celkový odhad parametrov popisujúcich navrhovaný model.

Na začiatku sme teoreticky priblížili úlohu modelovania v mnohých technických, ale aj spoločenských disciplínach. Poukázali sme nato, že nikdy nie sme schopní navrhnuť taký model, ktorý dokonale popisuje správanie sa dynamického systému. Našou snahou ale je čo najlepšie priblížiť matematický model reality. Taktiež sme uviedli niekoľko kritérií na rozdelenie modelov v praxi. Ďalšou častou teoretickej úvahy bolo rozvinutie problematiky identifikácie neznámeho systému. Ukázali sme rôzne spôsoby ako je možné z nameraných údajov získať matematický model. Taktiež sme poukázali na dôležitosť priebehu samotného experimentu pre potreby identifikácie, vzhľadom na čas vzorkovania a správne vybudenie systému. V ďalšej časti sme uvažovali nad presnosťou odhadu neznámych parametrov, uvedením pravdepodobnosti nameraných údajov. Dokázali sme, že práve metóda najmenších štvorcov je preferovanou, pretože prirodzene maximalizuje pravdepodobnosť odhadu parametrov. V ďalšej časti sme taktiež dokázali spojitosť medzi regiónom spoľahlivosti odhadnutých parametrov s informačnou výdatnosťou nameraných údajov, ktorú popisuje práve *Fisherova informačná matica* (FIM). Práve FIM zohráva v tvare a veľkosti regiónu spoľahlivosti rozhodujúcu úlohu.

V ďalšej časti práce sme sa zaoberali problematikou návrhu optimálneho dynamického experimentu. Ukázali sme, že je možné takýmto návrhom výrazne spresniť odhad parametrov v identifikácii. Ďalej bol bližšie uvedený tzv. *D-návrh*, kde sme potvrdili, že minimalizovaním determinantu FIM sme schopní dosiahnuť zmenšenie regiónu spoľahlivosti odhadnutých parametrov.

V poslednej časti práce sme prakticky demonštrovali niekoľko optimálnych návrhov dynamického experimentu v identifikácii. Na začiatku sme ukázali ako dokážeme

vylepšiť identifikáciu systému zavedením optimálneho vzorkovacieho času. Následne sme sa venovali optimálnemu vybudenie systému a predstavili *sekvenčný* a *scenárový* návrh. Práve takýmito prístupmi vieme vykonať robustnú identifikáciu, ktorá počíta s možnosťou nepresností v prvotnom nástrele a odhade parametrov, čo vplýva na optimálny návrh experimentu.

V úvode práce sme položili otázku: čo máme urobiť aby sme čo najlepšie zistili jazdné vlastnosti vozidla na zľadovatenej ceste? Odpoveď sa skrýva práve v tejto práci. Po prvé, musíme nájsť správny model dynamiky vozidla ktorý nemusí byť úplne dokonalý, ale mal by verne popisovať dynamiku. Po druhé, určiť správnu identifikačnú metódu, kde práve z charakteru systému sa hodí metóda najmenších štvorcov. A posledný bod sa týka správnym návrhom experimentu, ktorý vieme získať vyriešením vzniknutého optimalizačného problému.

V diplomovej práci sme načrtli koncept zlepšenia odhadu parametrov a práve predmetom budúcej snahy môže byť aplikovanie týchto znalostí v praxi. Ďalšou možnosťou je skombinovať tieto prístupy dokopy, kde sa súčasne budú optimalizovať ako akčné zásahy do systému, tak aj čas vzorkovania. Ďalej je potrebné rozšíriť tieto úvahy aj na iné rodiny matematických modelov vyšších rádov. V neposlednej rade sa môžeme zamerať aj na iné faktory experimentu. Príkladom, môžu byť začiatočné podmienky alebo samotné meracie zariadenia.

Literatúra

- [1] Tilman Barz, Harvey Arellano-Garcia, and Gunter Wozny. Handling uncertainty in model-based optimal experimental design. *Industrial & engineering chemistry research*, 49(12):5702–5713, 2010.
- [2] George Bojadziev. Population modelling by higher order differential equations. In *Population Biology*, pages 141–145. Springer, 1983.
- [3] Luis Castillo, Eleaneth Baltodano, Nils Ramírez, Rolando Vargas, and Georgia Hanley. Design of experiments assessment for the determination of moisture content in five herbal raw materials contained in tea products. *Borneo Journal of Pharmacy*, 3(1):22–35, 2020.
- [4] Gaia Franceschini and Sandro Macchietto. Model-based design of experiments for parameter precision: State of the art. *Chemical Engineering Science*, 63(19):4846–4872, 2008.
- [5] Stanley J Garstka and Roger J-B Wets. On decision rules in stochastic programming. *Mathematical Programming*, 7(1):117–143, 1974.
- [6] Carl Friedrich Gauss. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, volume 2. H. Dieterich, 1823.
- [7] G.C. GOODWIN and R.L. PAYNE. Dynamic system identification. experiment design and data analysis. 1977.
- [8] Rolf Isermann and Marco Münchhof. *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [9] PC Leube, A Geiges, and W Nowak. Bayesian assessment of the expected data impact on prediction confidence in optimal sampling design. *Water Resources Research*, 48(2), 2012.

- [10] Sergio Lucia, Tiago Finkler, and Sebastian Engell. Multi-stage nonlinear model predictive control applied to a semi-batch polymerization reactor under uncertainty. *Journal of process control*, 23(9):1306–1319, 2013.
- [11] Ján Mikleš and Miroslav Fikar. *Process Modelling, Identification, and Control*. Citeseer, 2000.
- [12] Anwesh Reddy Gottu Mukkula, Michal Mateáš, Miroslav Fikar, and Radoslav Paulen. Robust multi-stage model-based design of optimal experiments for nonlinear estimation. *arXiv preprint arXiv:2011.06042*, 2020.
- [13] Anwesh Reddy Gottu Mukkula and Radoslav Paulen. Optimal experiment design in nonlinear parameter estimation with exact confidence regions. *Journal of Process Control*, 83:187–195, 2019.
- [14] Philippe Nimmegeers, Satyajeet Bhonsale, Dries Telen, and Jan Van Impe. Optimal experiment design under parametric uncertainty: A comparison of a sensitivities based approach versus a polynomial chaos based stochastic approach. *Chemical Engineering Science*, 221:115651, 2020.
- [15] Luc Pronzato and Éric Walter. Robust experiment design via maximin optimization. *Mathematical Biosciences*, 89(2):161–176, 1988.
- [16] Dan Simon. *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [17] Arun K Tangirala. *Principles of system identification: theory and practice*. Crc Press, 2018.
- [18] Feng Zhou, Hui Peng, Yemei Qin, Xiaoyong Zeng, Wenbiao Xie, and Jun Wu. Rbf-arx model-based mpc strategies with application to a water tank system. *Journal of Process Control*, 34:97–116, 2015.