SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLÓGIE

Katedra informatizácie a riadenia procesov

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Robustné riadenie chemického prietokového reaktora

Diplomant: Bc. Daniel Gomboš

Vedúca diplomovej práce: Doc. Ing. Monika Bakošová, CSc.

MÁJ 2004

Úprimne ďakujem pani Doc. Ing. Monike Bakošovej, CSc. za odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri písaní diplomovej práce.

OBSAH

1 Úvod

Práca je venovaná návrhu robustného riadenia prietokového chemického reaktora. Ide o chemický reaktor, v ktorom prebiehajú dve exotermické paralelné chemické reakcie.

V práci sa rieši problém teórie neurčitosti stavových modelov a následne analýzy robustnosti pomocou LMI Control Toolboxu v dvoch teoretických príkladoch a v prietokovom chemickom reaktore. Na základe lineárnych maticových nerovností počítam stabilizujúcu výstupnú spätnú väzbu pomocou LMI editora v Matlabe. Robustný regulátor porovnávam s optimálnym spätnoväzbovým regulátorom z hľadiska kvality regulácie a hodnoty účelovej funkcie.

Základne ciele práce môžu byť formulované nasledovne:

1. Teória neurčitých stavových modelov a lineárnych maticových nerovnosti(LMI).
2. Vysvetlenie činnosti LMI Control Toolboxu
3. Návrh robustného riadenia v dvoch teoretických príkladoch.
4. Vytvorenie dynamického matematického modelu chemického reaktora.
5. Návrh robustného riadenia pre chemický reaktor s neurčitosťami.

2 Teoretická časť

2.1 Neurčitosť modelu

Predstavou neurčitého dynamického systému **[4]** sa zaoberá hlavne teória robustného riadenia. Príčiny neurčitosti systémov sú rôzne. Pre návrh riadenia, musí byť komplexné správanie dynamických systémov aproximované modelmi s relatívne malou zložitosťou. Rozdiel medzi takými modelmi a skutočným fyzikálnym systémom sa nazýva neurčitosťou modelu. Ďalšia príčina neurčitosti je neúplná znalosť niektorých zložiek systému, alebo prispôsobenie ich správania zmenám pracovných podmienok. Nakoniec, neurčitosť pramení z fyzikálnych parametrov, ktorých hodnota je len približne známa alebo sa mení v čase.

Sú dve hlavné triedy neurčitostí:

- Dynamická neurčitosť, ktorá vzniká z dynamických zložiek zanedbaných v lineárnom modeli alebo z odchýlok v dynamickom správaní počas riadenia. Napríklad, vysokofrekvenčné flexibilné módy, nelinearity pre veľké vstupy, pomalé časové premeny.
- Parametrická neurčitosť, ktorá pochádza z neúplnej znalosti hodnôt fyzikálnych parametrov alebo zo zmien týchto parametrov počas riadenia. Príklady fyzikálnych parametrov spôsobujúcich neurčitosť : koeficienty tlmenia v mechanických systémoch, aerodynamické koeficienty v leteckých zariadeniach, koeficienty v kondenzátoroch a cievkach v elektrických okruhoch, rýchlostné konštanty chemických reakcií, reakčné entalpie chemických reakcií a pod.

Ďalšie dôležité charakteristiky neurčitosti vyjadrujú, či sú neurčitosti lineárne alebo nelineárne, a či sú časovo invariantné alebo časovo premenné. Neurčitosť modelu je celkovo kombinácia dynamickej a parametrickej neurčitosti a môže nastať v niekoľkých rôznych miestach v riadiacej slučke. Napríklad, dynamická neurčitosť môže byť na akčných členoch systému a parametrická neurčitosť na nejakých koeficientoch snímača.

2.2 Neurčité stavové modely

Fyzikálne modely systému často vedú k stavovému opisu jeho dynamického správania.Výsledné stavové rovnice obsahujú fyzikálne parametre, ktorých hodnota je len približne známa. Inými slovami systém opísaný neurčitým stavovým modelom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

kde matice A,B,C,D závisia od neurčitých a časovo premenných parametrov alebo sa menia v nejakých ohraničených intervaloch priestoru matíc.

2.3 Polytopické modely

Časovo premenný systém sa nazýva polytopický systém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \tag{2}$$

ktorého systémová matica $S(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix}$ sa mení v rámci fixného polytopu matíc

t.j.

$$S(t) \subset Co\{S_1,...,S_k\} = \left\{ \sum_{i-1}^{k} \alpha_i S_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \right\}, \tag{3}$$

kde $S_1,...,S_k$ sú dané systémy vrcholov:

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix},....,S_k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \tag{4}$$

Inými slovami, $S(t)$ je konvexná kombinácia matíc systémov $S_1,....,S_k$.

Nezáporné čísla $\alpha_1,...,\alpha_k$ sa nazývajú súradnice polytopu S. Takéto modely sa nazývajú aj polytopické lineárne diferenciálne inklúzie (LDI) a objavujú sa v mnohých praktických situáciách :

- Multimodelové opísanie systému, pričom každý model sa odvodí v okolí konkrétnych operačných podmienok

- Nelineárne systémy typu $\begin{matrix} \dot{x} = A(x)x + B(x)u \\ y = C(x)x + D(x)u \end{matrix}$

- Stavové modely závislé na časovo premenných parametroch

2.4 Afinné parametricky závislé modely

Fyzikálne rovnice často zahŕňajú neurčité alebo časovo premenné koeficienty. Keď je systém lineárny, potom to dáva podnet k zavedeniu parametricky závislých modelov (PDS) typu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B(p)u \\ y &= C(p)x + D(p)u \end{aligned} \tag{5}$$

kde $A(p), B(p), C(p), D(p)$ sú známe funkcie nejakého vektora parametrov $p=(p_1,...,p_n)$. Také modely bežne vzniknú z rovníc pohybu, aerodynamiky, obvodov atď. Matice v týchto modeloch možno opísať nasledovne

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + ... + p_n A_n, \qquad B(p) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_n B_n, \text{ atď.} \tag{6}$$

Afinné parametricky závislé modely sa dobre hodia pre Ljapunovu analýzu a syntézu a dajú sa ľahko previesť na lineárne zlomkové neurčité modely.

Po definovaní

$$S(p) = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix}, \; S_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \tag{7}$$

sa afinná závislosť od vektora parametrov p dá vyjadriť ako

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + ... + p_n S_n, \tag{8}$$

Koeficienty systému $S_0,\dots,S_n$ plne charakterizujú závislosť na neurčitých parametroch $p_1,\dots,p_n$. $S_0,\dots,S_n$ nemusia reprezentovať skutočné dynamické systémy. Len ich kombinácia $S(p)$ je náležitým opisom problému.

Afinné parametricky závislé modely sa dajú vytvoriť za predpokladov, že je k dispozícii:

- opis vektora parametrov p z hľadiska hodnôt parametrov a rýchlosti ich zmien
- zoznam koeficientov systémových matíc $S_0,\dots,S_n$

2.5 Prevod afinných na polytopické modely

Afinné parametricky závislé modely

$$S(p) = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \tag{9}$$

sa dajú ľahko previesť na polytopické modely. Predpokladajme napríklad, že každý parameter p_i je v rozmedzí nejakého intervalu $\left[\underline{p}_i, \overline{p}_i \right]$.

Vektor parametrov $p = (p_1,\dots,p_n)$ potom nadobúda hodnoty z priestoru parametrov s 2^n vrcholmi $\Pi_1, \Pi_2 \dots$ Ak funkcia $S(p)$ je afinne závislá od vektora parametrov p, zobrazí tento priestor parametrov na nejaký polytop matíc systému. Polytop je konvexná obálka obrazov $S(\Pi_{1)}, S(\Pi_2),\dots$ z vrcholov priestoru parametrov $\Pi_1, \Pi_2 \dots$

2.6 Ljapunova teória stability

Lineárny systém

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{10}$$

je asymptoticky stabilný vo veľkom v začiatku vtedy a len vtedy, ak sú splnené nasledovné podmienky:

(i) Pre každú kladne definitnú maticu μ má Ljapunova maticová rovnica (11) jediné kladne definitné riešenie P

$$A^T P + PA = -\mu \tag{11}$$

(ii) Všetky vlastné čísla matice *A*, t.j. všetky korene charakteristického polynómu *det(sI-A)* majú zápornú reálnu časť.

Dôkaz **[5]**

Dokázala sa iba postačujúca časť podmienky (i).

Nech je Ljapunova funkcia definovaná nasledovne

$$V(x) = x^T P x \tag{12}$$

Keďže P je kladne defnitné, $V(x) > 0$ pre $x \neq 0$ a $V(0) = 0$. Teraz

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^T Px + x^T P \frac{dx}{dt} \tag{13}$$

Dosadením rovnice(10) sa získalo

$$\frac{dV}{dt} = x^T A^T Px + x^T PAx \tag{14}$$

Použitím (11) sa vzťah zredukoval na

$$\frac{dV}{dt} = -x^T \mu x \tag{15}$$

a keďže μ je kladne definitná matica, platí

$$\frac{dV}{dt} < 0 \tag{16}$$

Pre všetky $x \neq 0$ a systém je asymptotický stabilný v začiatku.

2.7 Analýza robustnosti

Riadiace systémy sú často navrhované pre zjednodušený model fyzikálneho zariadenia, ktorý neberie do úvahy všetky zdroje neurčitosti. Nasledujúca analýza robustnosti **[4]** je potom nevyhnutná na ohodnotenie návrhu a získanie garancií na stabilitu a kvalitu napriek neurčitosti zariadenia.

2.7.1 Kvadratické Ljapunove funkcie

Predstavy kvadratickej stability a kvadratického správania sú užitočné pre analýzu lineárnych časovo premenných systémov

$$\dot{x} = A(t)x(t) \qquad x(0)=x_0 \tag{17}$$

Pre tieto systémy postačujúcou podmienkou pre asymptotickú stabilitu je existencia kladne definitnej Ljapunovej funkcie

$$V(x) = x^T P x \tag{18}$$

takej, že

$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0 \tag{19}$$

pozdĺž všetkých stavových trajektórií. Ak $Q = P^{-1}$, potom ekvivalent (19) je nerovnosť

$$A(t)Q + QA(t)^T < 0 \text{, pre každé } t \tag{20}$$

Posúdenie kvadratickej stability nie je vo všeobecnosti ľahké, pretože nerovnosť (20) kladie nekonečný počet obmedzení na Q. Ten však možno zredukovať na konečný počet LMI obmedzení v nasledujúcich prípadoch:

1. $A(t)$ je známa afinná funkcia nejakých časovo premenných parametrov $p_1(t),\ldots,p_n(t)$:

$$A(t) = A_0 + p_1(t)A_1 + \ldots + p_n(t)A_n \tag{21}$$

Toto sa vzťahuje na *afinný parametricky závislý model*

2. $A(t)$ patrí do známeho polytopu matíc

$$A(t) = \alpha_1(t)A_1 + \ldots + \alpha_n(t)A_n \text{, kde } \alpha_i(t) \geq 0 \text{ a } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = 1 \tag{22}$$

Toto sa vzťahuje na polytopický model.

Prvý prípad odpovedá systémom, ktorých stavový opis závisí afinne na časovo premenných fyzikálnych parametrov, a druhý prípad odpovedá časovo premenným systémom, ktoré sú modelované konvexnou obálkou LTI systémov. Kvadratické Ljapunove funkcie zaručujú stabilitu *ľubovoľne rýchlych* systémov.

2.7.2 Formulácia podmienok kvadratickej stability pomocou LMI

V nasledujúcom texte sa formulujú postačujúce podmienky kvadratickej stability v tvare LMI.

Afinné modely

Majme parametricky závislý model

$$\dot{x} = A(p)x\,,\ A(p) = A_0 + p_1(t)A_1 + ... + p_n(t)A_n \tag{23}$$

kde $p_i(t) \in \left[\underline{p}_i, \overline{p}_i\right]$ a nech $\nu = \left\{(\omega_1,...,\omega_n) : \omega_i \in \left\{\underline{p}_i, \overline{p}_i\right\}\right\}$

označuje množinu vrcholov odpovedajúceho priestoru parametrov. Dynamický systém (23) je kvadratický stabilný, ak existujú symetrické matice Q a $\{M_i\}_{i=1}^n$ také, že platí

$$\begin{gathered} A(\omega)Q + QA(\omega)^T + \sum_i w_i^2 M_i < 0 \text{ pre všetky } \omega \in \nu \\ A_i P + PA^T + M_i \geq 0 \text{ pre } i=1,...n \\ M_i \geq 0 \\ Q > 1 \end{gathered} \tag{24}$$

Polytopické modely:

Polytopický systém

$$\dot{x} = A(t)x\,,\ A(t) \in Co\{A_1,..., A_n\}. \tag{25}$$

je kvadraticky stabilný, ak existuje symetrická matica Q a skaláry $t_{ij} = t_{ji}$ také, že platia nerovnosti

$$\begin{gathered} A_i Q + QA_i^T + A_j Q + QA_j^T < 2t_{ij} I \text{ pre } i, j \in \{1,...n\} \\ Q > I \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & . & t_{1n} \\ . & . & . \\ t_{1n} & . & t_{nn} \end{bmatrix} < 0 .$$

2.7.3 Rýchlosť klesania

Pre časovo premenný systém

$$\dot{x} = A(t)x(t), \tag{27}$$

kvadratickou rýchlosťou klesania $\alpha^{\bullet}$ je najmenšie α také, že nerovnosť

$$A(t)Q + QA(t)^T < \alpha Q \tag{28}$$

platí v každom čase a pre nejaké dané *Q>0*. Systém je kvadraticky stabilný ak $\alpha^{\bullet} < 0$, pričom $\alpha^{\bullet}$ je horná hranica rýchlosti návratu do rovnovážneho stavu. Konkrétne

$$x^T(t)Q^{-1}x(t) < e^{\alpha^{\bullet} t}(x(0)^T Q^{-1}x(0)) . \tag{29}$$

2.7.4 Parametricky závislé Ljapunové funkcie

Overenie robustnej stability je aplikovateľné pre afinné parametricky závislé systémy alebo časovo invariantné neurčité systémy opísané polytopickými modelmi. Na dokázanie robustnej stability takýchto systémov, sa hľadá kvadratická Ljapunova funkcia, ktorá závisí od neurčitých parametrov alebo súradníc polytopu v prípade polytopického modelu. Overenie robustnej stability je menej konzervatívne ako overenie kvadratickej stability, keď sú parametre konštantné alebo sa menia pomaly. Okrem toho dostupné hranice rýchlostí zmien parametrov môžu byť vzaté do úvahy explicitne.

Afinné modely

Pre afinný parametricky závislý systém

$\dot{x} = A(p)x$, s vektorom parametrov $p = (p_1,..., p_n) \in R^n$,sa hľadajú kladné definitné Ljapunove funkcie typu

$$V(x, p) = x^T Q(p)^{-1} x \tag{30}$$

kde $Q(p) = Q_0 + p_1 Q_1 + ... + p_n Q_n$.

Pre takéto Ljapunove funkcie, je podmienka stability $\frac{dV(x,p)}{dt} < 0$ ekvivalentná k

$$Q(p)A^T(p) + A(p)Q(p) - \frac{dQ}{dt} < 0 \tag{31}$$

Nech sú dané hranice intervalu

$$p_i \in \left[\underline{p}_i, \bar{p}_i \right], \ \frac{dp_i}{dt} \in \left[\underline{\nu}_i, \bar{\nu}_i \right],$$

pre každé p_i a jeho derivácia podľa času $\frac{dp_i}{dt}$.Nech vektory p a $\frac{dp}{dt}$ patria do n - rozmerného konečného priestoru parametrov. Nech ν a τ sú vrcholy priestoru parametrov. Potom LMI (31) platí pre všetky trajektórie parametrov, ak je prípustný nasledovný LMI problém:

Nájdu sa symetrické matice $Q_0, Q_1, ..., Q_n$, a $\{M_i\}_{i=1}^n$ také, že

- pre všetky $(\omega, \tau) \in \nu \times \tau$,

$$A(\omega)Q(\omega) + Q(\omega)A(\omega)^T - (Q(\tau) - Q_0) + \sum_i w_i^2 M_i < 0 \tag{32}$$

- pre $\omega \in \nu$ a $i=1,...,n$

$$A_i^T Q_i + Q_i A_i + A_i Q(\omega) + Q(\omega) A_i + A(\omega)^T Q_i + Q_i A(\omega) - (Q(\tau) - Q_0) + M_i \geq 0 \tag{33}$$

- $Q(\omega) > I$ pre všetky $\omega \in \nu$
- $M_i \geq 0$.

Tieto podmienky sa redukujú na kvadratickú stabilitu, keď rýchlosti zmeny $\frac{dp_i}{dt}$ sú v rozsahu $(-\infty, +\infty)$. V týchto prípadoch $Q_1, ..., Q_n$, musia byť kvôli realizovateľnosti nulové.

Polytopické modely

Podobné rozšírenie testu kvadratickej stability je možné aj pre časovo invariantné polytopické systémy

$$\dot{x} = Ax \tag{34}$$

Za predpokladu, že A je z polytopu

$$A \in \{\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_n A_n : \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + ... + \alpha_n = 1\}$$

hľadá sa Ljapunova funkcia typu

$$V(x,\alpha) = x^T Q(\alpha)^{-1} x \tag{35}$$

kde

$$Q(\alpha) = \alpha_1 Q_1 + ... + \alpha_n Q_n .$$

Použitím takýchto Ljapunovych funkcií, sú postačujúce podmienky stability pre celý polytop nasledovné:

Existujú symetrické matice $Q_1,...,Q_n$, a skaláry $t_{ij} = t_{ji}$ také, že platí

$$A_i Q_j + Q_j A_i^T + A_j Q_i + Q_i A_j^T < 2t_{ij} \tag{36}$$

$$Q_i > I$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & . & t_{1n} \\ . & . & . \\ t_{1n} & . & t_{nn} \end{bmatrix} < 0 .$$

2.8 Stabilizácia pomocou statickej výstupnej spätnej väzby

Problém stabilizácie systémov **[5]** pomocou statickej výstupnej spätnej väzby je jednou z najdôležitejších otvorených otázok v teórii riadenia. Problém môže byť definovaný následovne: hľadá sa statická spätná väzba, ktorá stabilizuje daný lineárny, časovo invariantný systém tak, aby uzavretý systém vykazoval požadované charakteristiky.

Uvažuje sa lineárny, časovo invariantný systém definovaný

$$\sum : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx(t), \tag{37}$$

kde $x(t) \in R^n$ je vektor stavov, $u(t) \in R^m$ vektor vstupov a $y(t) \in R^p$ vektor výstupov.

Systém sa stabilizuje statickou spätnou väzbou v tvare

$$u(t) = Fy(t) + v(t) \tag{38}$$

pričom výsledný tvar uzavretého obvodu nadobúda tvar

$$\sum_c : \dot{x} = (A + BFC)x(t) + Bv(t) \tag{39}$$

Problém možno transformovať do oblasti prenosových funkcií, kde je definovaný vzťah medzi vstupmi $u(s)$ a výstupmi $y(s)$. Úlohou v tomto prípade je nájsť také F v zákone riadenia, aby uzavretý systém

$$y(s) = C(sI - A - BFC)^{-1} Bv(s) \tag{40}$$

spĺňal určené kvalitatívne kritériá.

2.9 Výpočet stabilizujúcej spätnej väzby pomocou riešenia LMI

Majme systém reprezentovaný opísaný stavovým opisom s neurčitosťami **[1]**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(A + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i A_i \right) x + \left(B + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i B_i \right) u \\ y &= \left(C + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i C_i \right) x \end{aligned} \tag{41}$$

Systém (41) je vyjadrený polytopom lineárnych systémov. Prístup LMI vyžaduje aby bol systém (41) opísaný jeho vrcholmi v tvare:

$$\{(A_{v1}, B_{v1}, C_{v1}), (A_{v2}, B_{v2}, C_{v2}), \ldots, (A_{vN}, B_{vN}, C_{vN})\} \tag{42}$$

kde $N = 2^p$

Systém (42) je kvadratický stabilný ak existuje Ljapunová matica $P > 0$ taká, že platí

$$A_{vi}^T P + PA_{vi} < 0, \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{43}$$

Následne je systém (42) kvadraticky stabilizovateľný statickou výstupnou spätnou väzbou len ak Ljapunová matica $P > 0$ a existuje matica zosilnení *F*

$$(A_{vi} + B_{vi}FC_{vi})^T P + P(A_{vi} + B_{vi}FC_{vi}) < 0, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{44}$$

Ak sa pomocou (44) nájde $P > 0$ a nejaké F, potom vrcholy polytopu (42) sú súčasne kvadraticky stabilizovateľné maticou zosilnení F.

Teoréma **[1]**

Uvažuje sa systém (42). Potom sú nasledujúce výroky rovnocenné.

- Systém je stabilizovateľný statickou výstupnou spätnou väzbou s garantovanou hodnotou účelovej funkcie

$$\int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \le x_0^T P x_0 = J^* \text{ a } P > 0 \tag{45}$$

- Existujú matice $P > 0$, $R > 0$, $Q > 0$ a matica zosilnení F *také, že*

$$\left(A_{vi} + B_{vi} F C_{vi}\right)^T P + P\left(A_{vi} + B_{vi} F C_{vi}\right) + Q + C_{vi}^T F^T R F C_{vi} \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{46}$$

- Existujú matice $P > 0$, $R > 0$, $Q > 0$ a matica zosilnení F *také, že*

$$A_{vi}^T P + P A_{vi} - P B_{vi} R^{-1} B_{vi}^T P + Q \le 0, \tag{47}$$

$$\left(B_{vi}^T P + R F C_{vi}\right) \Phi_{ui}^{-1} \left(B_{vi}^T P + R F C_{vi}\right)^T - R \le 0 \tag{48}$$

kde

$$\Phi_{ui} = -\left(A_{vi}^T P + P A_{vi} - P B_{vi} R^{-1} B_{vi}^T P + Q\right), \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{49}$$

Dôkaz **[1]**

Uvažuje sa riadiaci algoritmus s výstupnou spätnou väzbou typu

$$u = Fy = F C_{vi} x$$

Potom je uzavretý systém opísaný nasledovne

$$\dot{x} = \left(A_{vi} + B_{vi} F C_{vi}\right) x, \quad i = 1,2,\ldots,N\ .$$

Pre $V = x^T P x$**,** časová derivácia V pozdĺž systému (42) je

$$\frac{dV}{dt} = x^T \left[\left(A_{vi} + B_{vi} F C_{vi}\right)^T P + P\left(A_{vi} + B_{vi} F C_{vi}\right)\right] x.$$

Ak platí nerovnosť (46), potom existujú matice $P > 0$, $R > 0$, $Q > 0$ a matica zosilnení F, takže

$$\frac{dV}{dt} \le -x^T\left(Q + C_{vi}^T F^T RFC_{vi}\right)x < 0, \quad \text{pre } i = 1,2,\ldots,N$$

Z tejto podmienky vyplýva, že uzavretý systém asymptoticky stabilný. Okrem toho integráciou obidvoch strán nerovnosti od 0 po T a použitím začiatočnej podmienky x_0 sa získa

$$V(0) - V(T) \ge \int_0^T x^T\left(Q + C_{vi}^T F^T RFC_{vi}\right)x dt$$

Ak je uzavretý systém asymtoticky stabilný, vtedy keď $T \to \infty$ potom

$$x(T)^T Px(T) \to 0,$$

Z toho vyplýva

$$\int_0^T x^T\left(Q + C_{vi}^T F^T RFC_{vi}\right)x dt \le x_0^T Px_0 \qquad (50)$$

a riadiaci algoritmus $u = Fy$ je zákon riadenia a

$$J^* = x_0^T Px_0$$

je garantovaná hodnota účelovej funkcie pre neurčité uzavreté systémy.

Ak sa definuje $S = P^{-1}$,potom je použitie Schurovho doplnku k (47) ekvivalentné k nasledujúcim lineárnym maticovým nerovnostiam

$$\begin{bmatrix} SA_{vi}^T + A_{vi}S - B_{vi}R^{-1}B_{vi}^T & S\sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}S & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (51)$$

$$\gamma I < S$$

$$i = 1,2,\ldots,N$$

kde $\gamma \ge 0$ je nejaká kladná konštanta. Ak sa definuje $P = S^{-1}$, potom nerovnosť (48) môže byť prepísaná na

$$\begin{bmatrix} -R & B_{vi}^T P + RFC_{vi} \\ \left(B_{vi}^T P + RFC_{vi}\right)^T & -\Phi_{ui} \end{bmatrix} < 0 \qquad (52)$$

$$i = 1,2,\ldots,N$$

2.10 Regulácia výstupu pri riešení úlohy optimálneho riadenia

Máme výstup: $y = Cx$

$$J = \frac{1}{2} y^T(t_1) H'_{t_1} y(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(y^T Q' y + u^T R u \right) dt \tag{53}$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_1) C^T H'_{t_1} C x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x^T C^T Q' C x + u^T R u \right) dt \tag{54}$$

$$\text{Ak} \quad \begin{array}{l} Q = C^T Q' C \\ H_{t_1} = C^T H'_{t_1} C \end{array} \tag{55}$$

H, Q, R sú matice konštánt.

Potom máme originálny Kalmanov problém alebo aj tzv. LQR problém, ktorý rieši návrh optimálneho lineárno – kvadratického regulátora **[6]**

Majme systém: $\dot{x} = Ax + Bu$ (56)

Začiatočné podmienky sú:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) - \text{voľné} \\ t_1 \ - \text{máme} \end{array}\right\} \tag{57}$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_1) H_{t_1} x(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x^T Q \ x + u^T R u \right) dt \tag{58}$$

Hľadáme optimálne riadenie aby J v (58) bolo minimálne, pritom musí platiť(56) Predpokladá sa, že H_{t_1} , Q sú reálne symetrické kladné semidefinitné matice a R reálna symetrická kladná definitná matice

Predpokladá sa, že pre ľubovoľný začiatočný stav optimálne riadenie existuje. Na získanie nevyhnutných podmienok optimálneho riadenia a na nájdenie extremálneho riadenia možno použiť princíp minima. Hamiltonova funkcia pre systém (56) a funkcionál (58) je

$$\begin{aligned} H &= F + \lambda^T f \\ H &= \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (Ax + Bu) \end{aligned} \tag{59}$$

Združený vektor $\lambda(t)$ je riešením vektorovej diferenciálnej rovnice

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{60}$$

ktorá po úprave bude

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T \lambda \tag{61}$$

Pozdĺž optimálnej trajektórie musí platiť

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{62}$$

z rovnice (62) vyplýva

$$0 = Ru + B^T \lambda \tag{63}$$

a z tejto rovnice dostaneme

$$u = -R^{-1} B^T \lambda \tag{64}$$

Predpoklad , že matica R je kladne definitná v ľubovoľnom čase $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ zaručuje existenciu R^{-1} v čase t.

Z Riccatiho transformácie dostaneme

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \tag{65}$$

$$u = -R^{-1} B^T Px \tag{66}$$

$$u(t) = -K(t)x(t) \tag{67}$$

Euler – Langrangeove rovnice $\dot{\lambda} = P\dot{x} + \dot{P}x$ (68)

Euler – Langrangeove rovnica (61) $\dot{\lambda} = -A^T Px - Qx$ (69)

Porovnaním rovníc (68) a (69) dostaneme

$$\begin{aligned} -A^T Px - Qx &= P\dot{x} + \dot{P}x \\ -A^T Px - Qx &= P(Ax + Bu) + \dot{P}x \end{aligned} \tag{70}$$

Dosadením rovnice (67)

$$-A^T Px - Qx = P\left(Ax - BR^{-1} B^T Px\right) + \dot{P}x \tag{71}$$

alebo $$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - PBR^{-1} B^T P(t) = -Q \tag{72}$$

Rovnica (72) sa nazýva *Riccatiho maticová rovnica*, ktorá je aj zároveň rozšírením Ljapunovej rovnice.

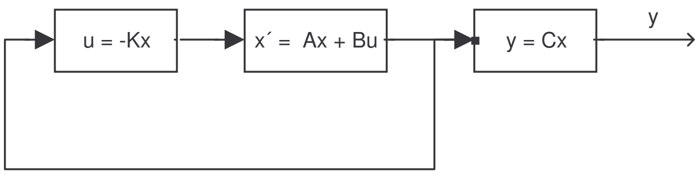
Okrajové podmienky sú $\lambda(t_1) = H_{t_1} x(t_1)$ (73)

Z Riccatiho transformácie $\lambda(t_1) = P(t_1) x(t_1)$ (74)

Teda: $P(t_1) = H_{t_1}$ (75)

$P(t_1)$ sa rieši v spätnom čase so zjednodušením $t_1 \to \infty$

P je funkciou matíc $P = f(A, B, Q, R)$



Obr.1 Bloková schéma regulácie výstupu

3 LMI Control Toolbox

Neurčité dynamické systémy

LMI Control Toolbox ponúka širokú paletu nástrojov na uľahčenie popisu a manipuláciu s neurčitými dynamickými systémami **[4]**. Tieto zahrňujú funkcie na:

- prevod stavovej realizácie lineárnych časovo invariantných (LTI) systémov na jedinú systémovú maticu
- typické zapojenia lineárnych systémov
- špecifikáciu lineárnych systémov s neurčitými stavovými maticami (polytopické a afinné systémy)
- opis lineárnych zlomkových modelov

Lineárne časovo premenné systémy

LMI Control Toolbox (LMI CT) poskytuje efektívne nástroje na manipuláciu so stavovým opisom lineárnych časovo invariantných (LTI) systémov. Tieto nástroje riešia všeobecné LTI modely typu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (76)$$

kde A,B,C,D sú reálne matice. Vektory x(t), u(t), y(t) symbolizujú stavové, vstupné a výstupné trajektórie.

Systémová matica

Pre praktickosť, stavová realizácia LTI je uchovaná ako jediná matlabovská matica nazývaná *systémová matica*. Konkrétne spojitý alebo diskrétny LTI systém so stavovými maticami *A,B,C,D* je vyjadrený štruktúrovanou maticou:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & B & n \\ & & . \\ C & D & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -Inf \end{array}\right] \tag{77}$$

Horný údaj napravo *n* odpovedá počtu stavov, kým údaj *–Inf* sa využíva na odlíšenie Systémových matíc od obyčajných matíc.

Funkcie ltisys a ltiss vytvárajú systémové matice a extrahujú z nich stavové údaje. Napríklad,

sys = ltisys(-1,1,1,0) špecifikuje LTI systém

$$\dot{x} = -x + u, \qquad y = x. \tag{78}$$

Na navrátenie hodnôt *A,B,C,D* zo systémovej matice sys sa použije príkaz

[a,b,c,d]=ltiss(sys)

Neurčitosť modelu

LMI CT sa zameriava na dynamické systémy, ktorá môžu byť aproximované lineárnymi modelmi zohľadňujúcimi nejakú nelinearitu alebo časovo premennú neurčitosť. Pri odvodení nominálneho modelu a odhadu neurčitosti sa musí pamätať na dva základné princípy.

- Neurčitosť by mala byť malá, keď sa vyžaduje vysoká kvalita riadenia (rozpor medzi kvalitou a robustnosťou). Inými slovami lineárny model by mal byť dostatočne presný v oblasti riadenia.

- Čím viac informácií o neurčitosti je k dispozícii (fáza, štruktúra, časová premennosť parametrov), tým vyššia kvalita riadenia sa dosiahne.

Dve reprezentácie neurčitosti modelu sa využívajú v LMI CT

- Neurčité stavové modely. Táto reprezentácia je vhodná pre systémy opísané dynamickými rovnicami s neurčitými alebo časovo premennými koeficientmi

- Lineárna zlomková reprezentácia neurčitosti. V tomto prípade je neurčitý systém opísaný ako prepojenie známych LTI systémov s neurčitými zložkami nazvanými bloky neurčitosti. Každý blok neurčitosti Δ_i reprezentuje skupinu systémov o ktorých máme len málo informácií. Napríklad, jediná informácia o Δ_i, ktorá je k dispozícií, môže byť, že to je časovo-invariantná nelinearita so zosilnením menším než 0.01.

Rozhodujúce faktory pri výbere reprezentácie sú dostupnosť modelu (stavový opis, frekvenčný model, atď.) a prostriedky analýzy a syntézy, ktoré sa budú využívať.

Jednoduchý príklad je systém $\dot{x} = (\sin x)x$, ktorého stavová matica $A = \sin x$ je v rozmedzí polytopu. $A \in Co\{-1,1\} = [-1,1]$

Polytopické systémy sú špecifikované zoznamom ich systémových vrcholov, to sú systémové matice $S_1,....,S_k$. Napríklad polytopický model majúci hodnoty v konvexnej obálke troch LTI systémov s1, s2, s3 vyjadríme:

```
polsys = psys([s1 s2 s3])
```

Afinné parametricky závislé modely:

LMI riadiaci toolbox ponúka rôzne nástroje na analýzu stability a správania sa parametricky závislých systémov s afinnou závislosťou od vektora parametrov $p=(p_1,...,p_n)$ (PDS) kde

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + ... + p_n A_n, \qquad B(p) = B_0 + p_1 B_1 + ... + p_n B_n, \text{ atď.} \tag{79}$$

Napríklad, systém $S(p) = S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2$, je definovaný

```
s0=ltisys(a0,b0,c0,d0)
s1=ltisys(a1,b1,c1,d1,0)
s2=ltisys(a2,b2,c2,d2,0)
affsys=psys(pv,[s0 s1 s2])
```

kde pv je príkaz na opis parametrov opak pvec opísaný v nasledujúcej kapitole. Výstup affsys je štruktúrovaná matica uchovávajúca všetky dôležité dáta.

Kvantifikácia neurčitosti parametrov

Neurčitosť parametrov je kvantifikovateľná rozsahom hodnôt parametrov a možnými rýchlosťami zmien parametrov. Toto je možné urobiť príkazom pvec. Charakteristiky vektorov parametrov definované pvec možno získať príkazom pvinfo.

Rozsah neurčitosti parametrov je opisovaný ako"box" v priestore parametrov. Toto odpovedá prípadom, kde každý neurčitý alebo časovo premenný parameter p_i je v rozsahu medzi dvomi empiricky determinovanými extrémnymi hodnotami $\underline{p}_i$ a $\bar{p}_i$.

$$p_i \in \left[\underline{p}_i, \bar{p}_i \right] \tag{80}$$

Ak $p = (p_1,...,p_n)$ je vektor všetkých neurčitých parametrov, vymedzuje mnohouholník v priestoru parametrov R^n nazývaný aj *„box“ priestoru parametrov*. Uvažujme príklad elektrického obvodu s neurčitým odporom ρ a kapacitou c v rozsahu

$\rho \in [600{,}1000], \quad c \in [1{,}5]$

Odpovedajúci vektor parametrov $p = (\rho, c)$ s príslušnými neurčitosťami špecifikujú nasledovné príkazy

range=[600,1000;1 5]

p=pvec('box',range)

Podobne hranice rýchlosti zmien $\dot{p}_i$ vektora parametrov $p_i(t)$ sa špecifikujú pridaním tretieho argumentu „rate“ do príkazu:

Napríklad obmedzenia rýchlosti zmien parametrov ρ a ε

$$0.1 < \dot{\rho}(t) \leq 1, \quad \left|\dot{\varepsilon}(t)\right| \leq 0.001$$

sú začlenené v príkazoch

rate=[0.1 1;-0.001 0.001]

p=pvec('box',range,rate)

Predpokladajme, že všetky parametre budú časovo invariantné, keď vynecháme „rate“. Pomaly sa meniace parametre možno špecifikovať týmto spôsobom. Vo všeobecnosti je robustnosť vo vzťahu k rýchlym zmenám parametrov striktnejšia ako robustnosť vo vzťahu ku konštantným ale neurčitým parametrom.

Prevod afinných na polytopické modely

Danému afinnému parametricky závislému modelu možno priradiť funkciou aff2pol ekvivalent polytopického modelu. Typ príkazu je: `polsys=aff2pol(affsys)`

kde affsys je afinný model. Výsledný polytopický model polsys sa skladá z príkladov affsys vo vrcholoch rozsahu parametrov.

Analýza robustnosti

LMI Control toolbox ponúka rôznorodé nástroje na posúdenie stability robustnosti a prevádzky robustnosti. Tieto nástroje zahŕňajú dostupné techniky Ljapunovej a frekvenčnej analýzy:

- kvadratická stabilita
- testy zahrňujúce od parametrov závislé Ljapunove funkcie

Kvadratická stabilita

Funkcia quadstab testuje kvadratickú stabilitu polytopických alebo afinných parametricky závislých systémov. Kvadratická stabilita sa dá overiť aj pomocou LMI riešením odpovedajúceho problému prípustnosti príkazom feasp.

Príklad:

Uvažuje sa časovo premenný systém

$$\dot{x} = A(t)x \text{ , kde } A(t) \in Co\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.2 & -0.3 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.9 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Tento polytopický systém špecifikujeme príkazmi:

```
s1=ltisys(a1)
s2=ltisys(a2)
s3=ltisys(a3)
polsys=psys([s1 s2 s3])
```

Na testovanie kvadratickej stability:

```
[tmin,P]=quadstab(polsys)
tmin =
   -0.0025
P =
    1.2947    0.0206
    0.0206    0.6443
```

Systém je kvadratický stabilný pri tmin <0. V tomto prípade je druhý výstup P Ljapunovou maticou, ktorá zabezpečuje stabilitu.

Rýchlosť klesania

Príklad:

Pre časovo premenný systém uvažovaný v predchádzajúcom príklade sa rýchlosť klesania vypočíta príkazom:

```
drate = -0.0564
```

Analýza stability pomocou parametricky závislých Ljapunových funkcií

V prípade afinných alebo polytopických systémov treba pre zabezpečenie kvadratickej stability nájsť parametricky závislú Ljapunovu funkciu takú, ktorá zabezpečí kvadratickú stabilitu pre daný rozsah parametrov alebo daný polytop modelov. Vhodnú paramericky závislú Ljapunovu funkciu (30) možno nájsť pomocou príkazu pdlstab. Funkcia zároveň testuje prípustnosť riešenia problému kvadratickej stability pomocou LMI (36).

Príklad: Uvažuje sa systém druhého rádu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k(t) & -f(t) \end{pmatrix} \tag{81}$$

kde pevnosť *k(t)* a tlmenie *f(t)* je v rozsahu

$$k(t) \in [5,10]\,, \qquad f(t) \in [0.01,0.1] \tag{82}$$

a ich rýchlosti zmeny sú ohraničené obmedzeniami

$$\left|\frac{dk}{dt}\right| < 0.01, \qquad \left|\frac{df}{dt}\right| < 1 \tag{83}$$

Tento systém a údaje o parametroch sa vyjadria príkazmi

```
s0 = ltisys([0 1;0 0])
s1 = ltisys([0 0;-1 0],0)
s2 = ltisys([0 0;0 -1],0)
pv = pvec('box',[5 10;0.01 0.1],[-0.01 0.01;-1 1])
ps = psys(pv,[s0 s1 s2])

tmin = quadstab(ps)
tmin = 8.5014e-004

[tmin,Q0,Q1,Q2] = pdlstab(ps)

tmin =

 -7.8288e-004

Q0 = 51.0379   -0.3164
     -0.3164  255.1795

Q1 =  0.0000   -0.0130
     -0.0130   51.0393

Q2 = -0.0003   -0.2427
     -0.2427   -0.0273
```

Toto robí príkaz pdlstab užitočným nástrojom a analýzu stability systémov s konštantnými alebo pomaly sa meniacimi parametrami.

LMI editor

Hlavné príkazy na riešenie LMI sú `feasp, mincx, gevp`.

Uvádzam príklad na ukážku riešenia LMI pomocou príkazu `feasp`, ktorý som použil v experimentálnej časti.

Príklad: Dané sú matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2.0 \end{pmatrix}$$

Uvažuje sa problém hľadania $P > I$:

$$\begin{aligned} A_1^T P + PA_1 &< 0 \\ A_2^T P + PA_2 &< 0 \\ A_3^T P + PA_3 &< 0 \end{aligned} \qquad (84)$$

Študuje kvadratická stabilita polytopu matíc $Co\{A_1, A_2, A_3\}$

Po zadaní LMI v LMI editori dostanem prepis:

```
setlmis([])
p=lmivar(1,[2 1])
lmiterm([1 1 1 p],1,a1,'s')      % LMI1
lmiterm([2 1 1 p],1,a2,'s')      % LMI2
lmiterm([3 1 1 p],1,a3,'s')      % LMI3
lmiterm([-4 1 1 p],1,1)          % LMI4: P
lmiterm([4 1 1 0],1)             % LMI4: I
lmis=getlmis

[tmin,xfeas]=feasp(lmis)

tmin =

   -3.1363
```

LMI (84) sú prípustné a dynamický systém $\dot{x} = A(t)x$ je kvadraticky stabilný pre $A(t) \in Co\{A_1, A_2, A_3\}$.

Na získanie Ljapunovej matice *P*, ktorá zabezpečuje kvadratickú stabilitu sa používa príkaz:

```
P=dec2mat(lmis,xfeas,p)


P =  270.8553  126.3999
     126.3999  155.1336
```

4 Experimentálna časť

4.1 Teoretický príklad 1

Teoretické výsledky boli overené simulačne na príklade návrhu robustného spätnoväzbového riadenia motora, ktorý je systémom s neurčitosťami a ktorý je opísaný nasledovným modelom **[2]**.

$$
\begin{aligned}
A_i &= A_0 + \varepsilon_1 A_{v1} + \varepsilon_2 A_{v2} \\
B_i &= B_0 + \varepsilon_1 B_{v1} + \varepsilon_2 B_{v2}
\end{aligned}
\qquad (85)
$$

kde

$$
A_0 = \begin{bmatrix} -0{,}9235 & 1 & 0 \\ -0.2363 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4221 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A_{v1} = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0 & 0 \\ -0{,}0172 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{v1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}0529 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A_{v2} = \begin{bmatrix} -0{,}4065 & 0 & 0 \\ -0.06433 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{v2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2522 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\varepsilon_i \in \left\langle \underline{\varepsilon}_i , \overline{\varepsilon}_i \right\rangle, \quad i = 1,2 \qquad \left| \varepsilon_i \right| = 1
$$

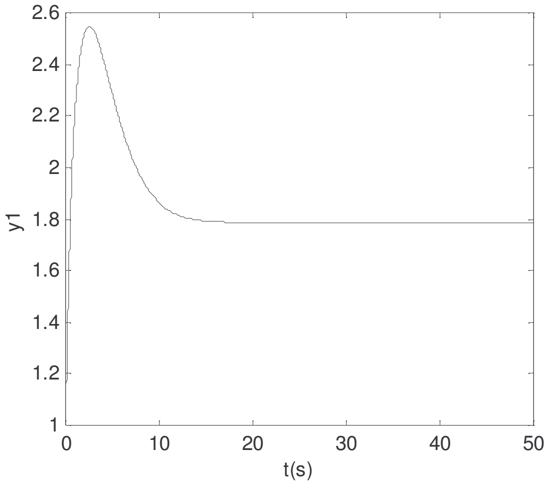
Z tohto modelu vznikli 4 polytopické systémy, ktorých vrcholy sa vypočítajú pre rôzne permutácie dvoch premenných ε_i, $i = 1,2$, pre ktoré sa uvažuje ich maximum a minimum.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + \underline{\varepsilon}_1 A_{v1} + \underline{\varepsilon}_2 A_{v2} \quad \text{(polytopický systém S1)} \\
A_2 &= A_0 + \underline{\varepsilon}_1 A_{v1} + \overline{\varepsilon}_2 A_{v2} \quad \text{(polytopický systém S2)} \\
A_3 &= A_0 + \overline{\varepsilon}_1 A_{v1} + \underline{\varepsilon}_2 A_{v2} \quad \text{(polytopický systém S3)} \\
A_4 &= A_0 + \overline{\varepsilon}_1 A_{v1} + \overline{\varepsilon}_2 A_{v2} \quad \text{(polytopický systém S4)}
\end{aligned}
\qquad (86)
$$

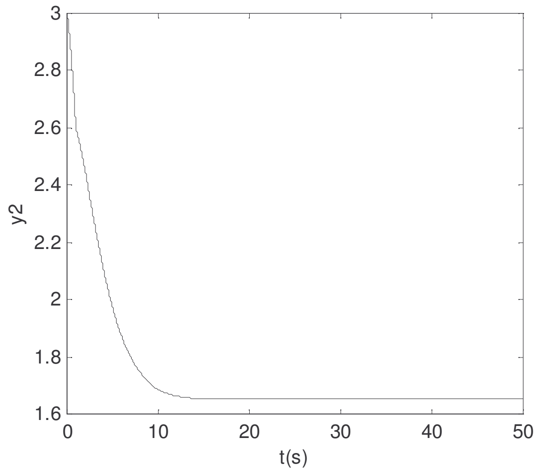
Výrazy pre B_1 až B_4 sa nájdu analogicky.

Overenie stability nominálneho modelu

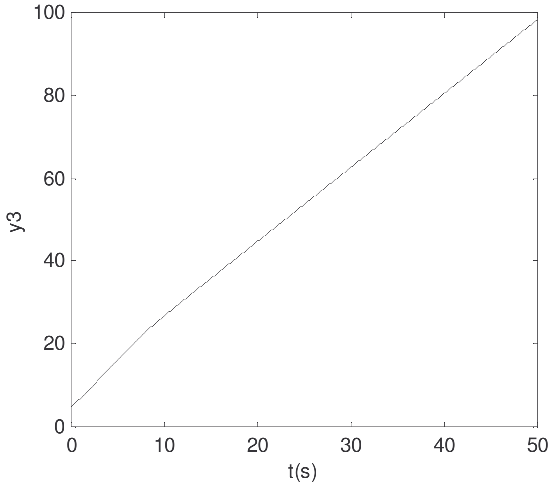
```
a0=[-.9235 1 0;-.2363 0 0;1 0 0];b0=[0;.4221;0]; c=eye(3);
d=zeros(3,1);
x0=[1 3 5]';%zvolene zaciatocne podmienky
```



Obr.2 Prechodovej charakteristika (PCH) výstupu y1 nominálneho modelu



Obr.3 PCH výstupu y2 nominálneho modelu

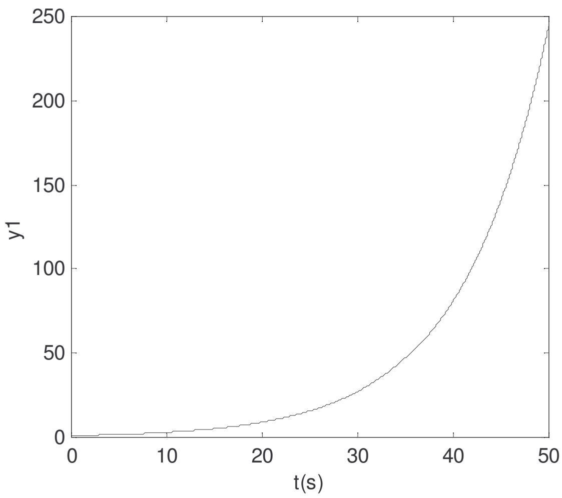


Obr.4 PCH výstupu y3 nominálneho modelu

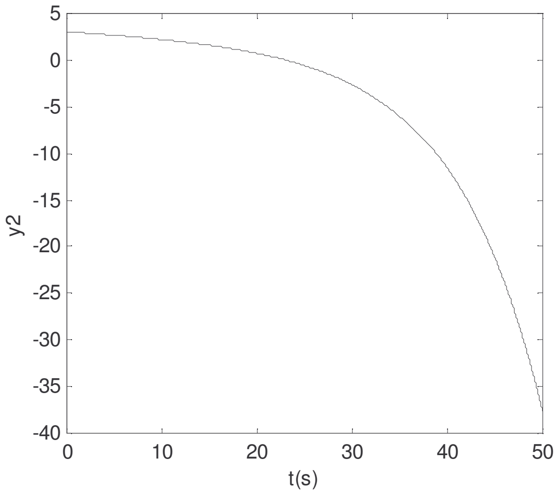
Tretí výstup je nestabilný, to znamená, že aj nominálny systém je nestabilný.

Vrcholy polytopu:

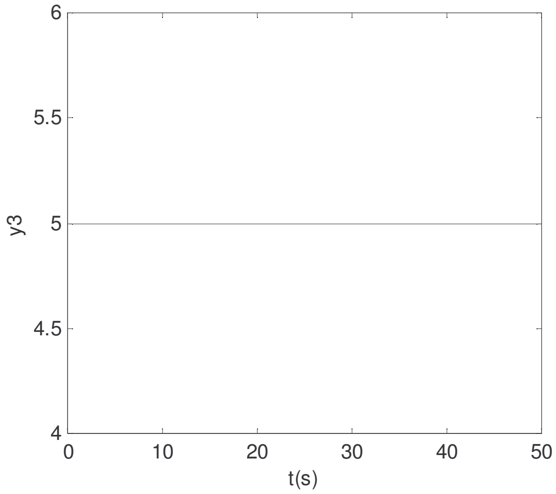
```
av1=[.11 0 0;-.0172 0 0;0 0 0];bv1=[0;-.0529;0];
```



Obr.5 PCH výstupu y1 vo vrchole polytopu Av1,Bv1



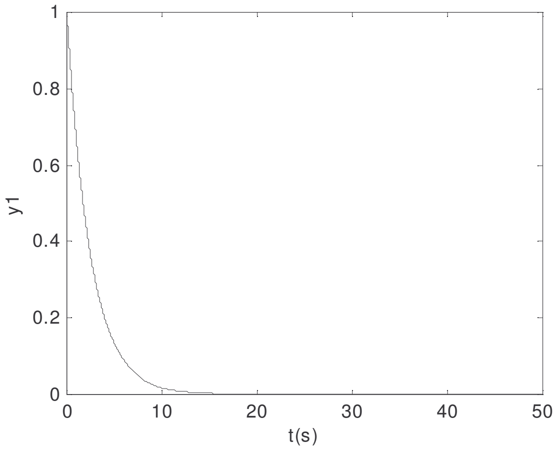
Obr.6 PCH výstupu y2 vo vrchole polytopu Av1,Bv1



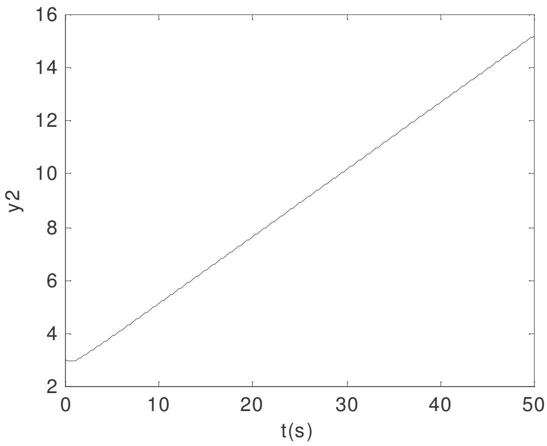
Obr.7 PCH výstupu y3 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

Prvý a druhý výstup je nestabilný, systém vo vrchole polytopu Av1, Bv1 je nestabilný.

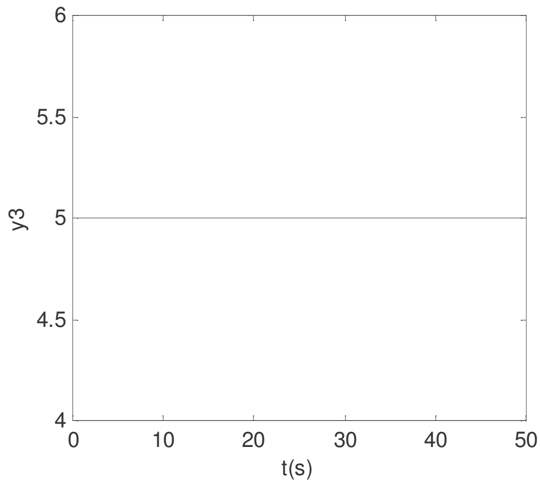
```
av2=[-.4065 0 0;-.06433 0 0;0 0 0];bv2=[0;.2522;0];
```



Obr.8 PCH výstupu y1 vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.9 PCH výstupu y2 vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.10 PCH výstupu y3 vo vrchole polytopu Av2,Bv2

Druhý výstup je nestabilný, systém vo vrchole polytopu Av2, Bv2 je nestabilný.

Načítanie polytopického systému

```
%nominalny system
a0=[-.9235 1 0;-.2363 0 0;1 0 0];%nominalny system nie je stabilny
b0=[0;.4221;0];
%c=[1 0 0;0 0 1];
c=eye(3);
%d=zeros(2,1);
d=zeros(3,1);
s0=ltisys(a0,b0,c,d);
x0=[1 3 5]';%zvolene zaciatocne podnienky
%hranice neurcitosti
av1=[.11 0 0;-.0172 0 0;0 0 0];
bv1=[0;-.0529;0];
av2=[-.4065 0 0;-.06433 0 0;0 0 0];
bv2=[0;.2522;0];
e1min=-1;e1max=1;
e2min=-1;e2max=1;
%4 polytopicke systemy - nestabilne
a1=a0+e1min*av1+e2min*av2;
a2=a0+e1min*av1+e2max*av2;
a3=a0+e1max*av1+e2min*av2;
a4=a0+e1max*av1+e2max*av2;
b1=b0+e1min*bv1+e2min*bv2;
b2=b0+e1min*bv1+e2max*bv2;
b3=b0+e1max*bv1+e2min*bv2;
b4=b0+e1max*bv1+e2max*bv2;
%vygenerovanie vrcholov polytopickeho systemu ako LTI
s1=ltisys(a1,b1,c,d);
s2=ltisys(a2,b2,c,d);
s3=ltisys(a3,b3,c,d);
s4=ltisys(a4,b4,c,d);
%vygenerovanie polytopickeho systemu
polytops=psys([s1 s2 s3 s4])
```

Overenie kvadratickej stability otvoreného systému

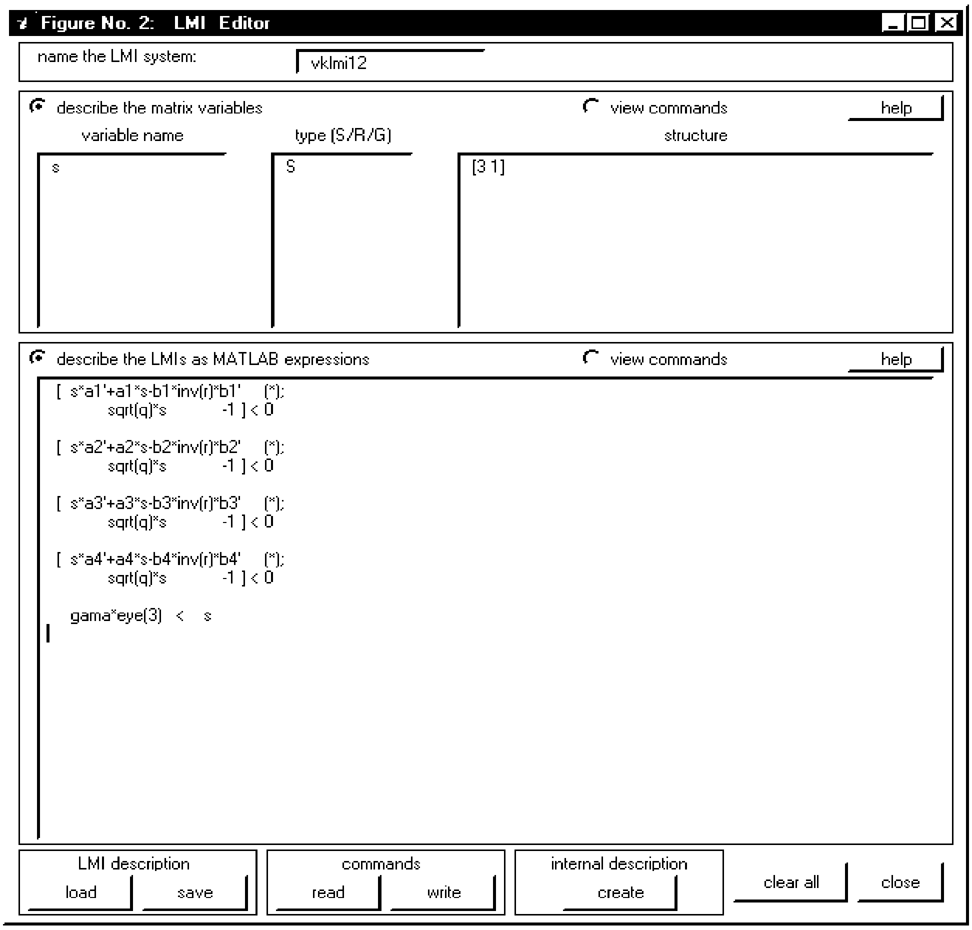
```
%overenie kvadratickej stability otvoreneho polytopickeho systemu
[tau,matP]=quadstab(polytops)

tau = 2.2371e-005
```

Otvorený systém nie je kvadraticky stabilný, tau nie je menšie ako nula.

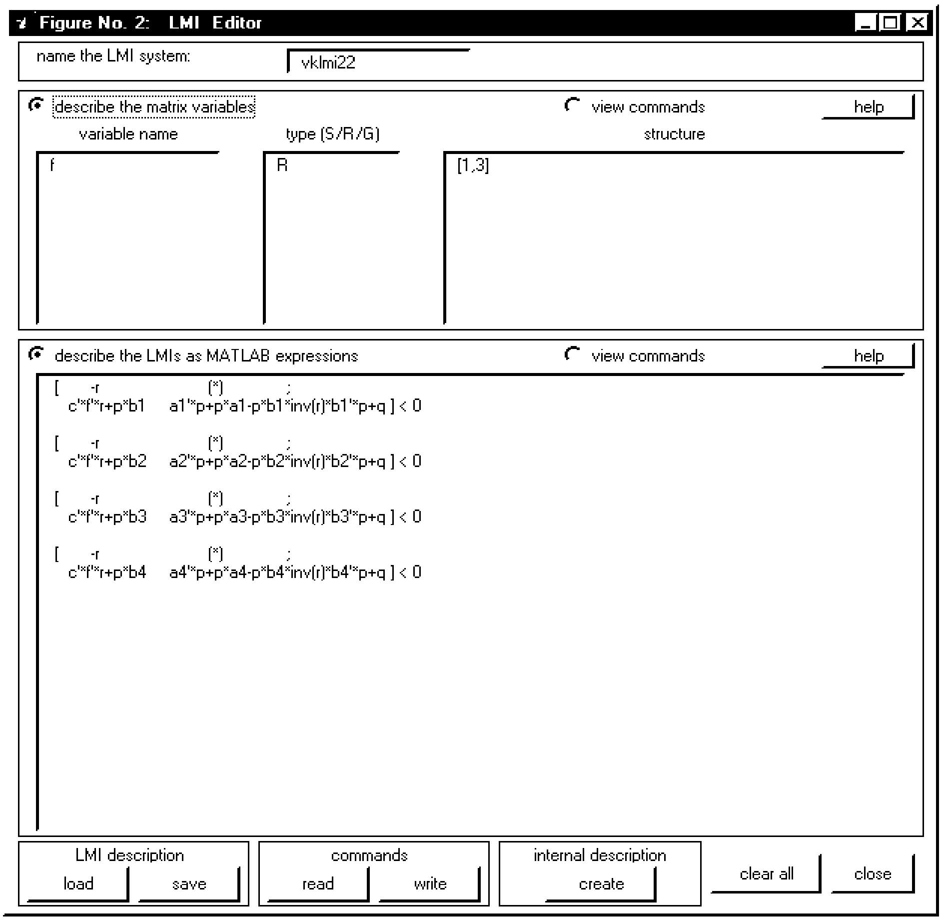
Výpočet stabilizujúcej spätnej väzby a overenie kvadratickej stability uzavretého systému – pomocou riešenia lineárnych maticových nerovností.

Stabilizujúcu spätnú väzbu som vypočítal pomocou riešenia lineárnych maticových nerovností (51), (52) v LMI editore v Matlabe 5.3.

Ukážka zadávania LMI v LMI editore. Riešili sa 4 lineárne maticové nerovnosti podľa počtu polytopických systémov.



Obr.11 Zadávanie prvej sady LMI v LMI editore



Obr.12 Zadávanie druhej sady LMI v LMI editore

Výpočet stabilizujúcej spätnej väzby

```
%zadaj r, q, gama
r=1;q=5;gama=0.01;%dobra volba
%r=5;q=1;gama=0.05;%cvicna volba
q=q*eye(3);
r=r*eye(1);
vklmi12f;
[r1,r2]=feasp(vklmi12);
sries=dec2mat(vklmi12, r2, s)
p=inv(sries)
vklmi22f;
[r1,r2]=feasp(vklmi22);
fries=dec2mat(vklmi22, r2, f)
ac1=a1+b1*fries*c;
ac2=a2+b2*fries*c;
ac3=a3+b3*fries*c;
ac4=a4+b4*fries*c;
vc1=eig(ac1);
vc2=eig(ac2);
vc3=eig(ac3);
vc4=eig(ac4);
'vsetky vlastne cisla'
vc=[vc1 vc2 vc3 vc4]

fries = -3.2271   -8.5674   -2.9000


ans =

vsetky vlastne cisla

vc =

  -0.5846 + 0.3620i  -1.7604            -0.3499 + 0.5964i  -1.5187
  -0.5846 - 0.3620i  -5.6996            -0.3499 - 0.5964i  -4.7767
  -1.3667            -0.2102            -0.7096            -0.2484
```

Uzavretý systém je kvadraticky stabilný, všetky vlastné čísla uzavretého obvodu sú stabilné.

Ljapunova matica P, ktorá je výsledkom prvej sady LMI (51)

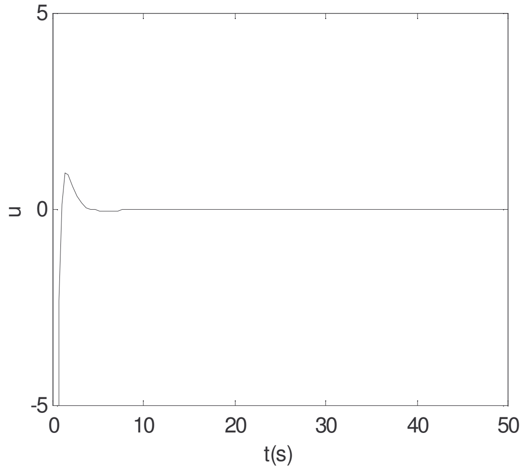
$$P = \begin{bmatrix} 32{,}7302 & 29{,}2950 & 20{,}2731 \\ 29{,}2950 & 70{,}3548 & 23{,}7620 \\ 20{,}2713 & 23{,}7620 & 25{,}4077 \end{bmatrix}$$

Stabilizujúca spätná väzba F , ktorá je výsledkom druhej sady LMI (52)

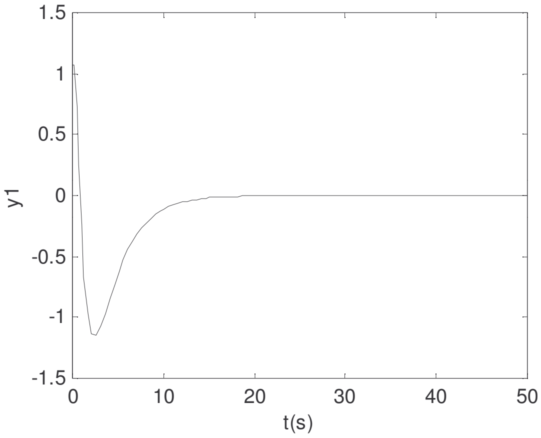
$$F = \begin{bmatrix} -3{,}2271 & -8{,}5674 & -2{,}9000 \end{bmatrix}$$

Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia

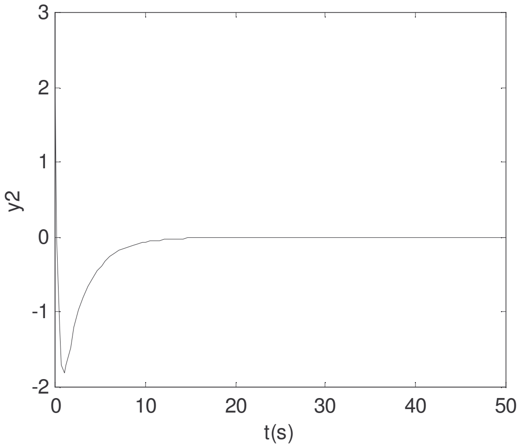
Pre nominálny model:



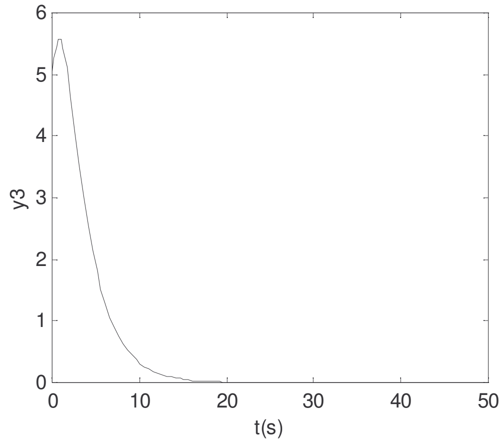
Obr.13 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení nominálneho modelu



Obr.14 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 nominálneho modelu

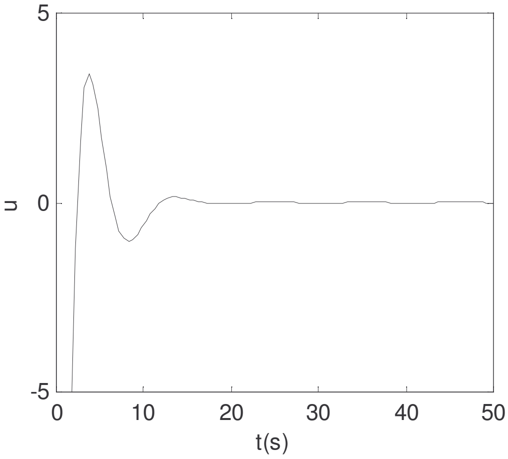


Obr.15 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 nominálneho modelu

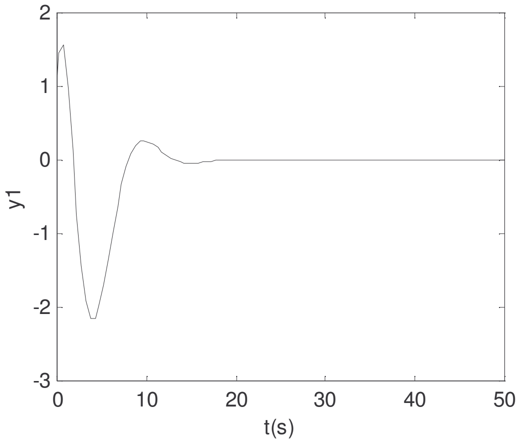


Obr.16 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y3 nominálneho modelu

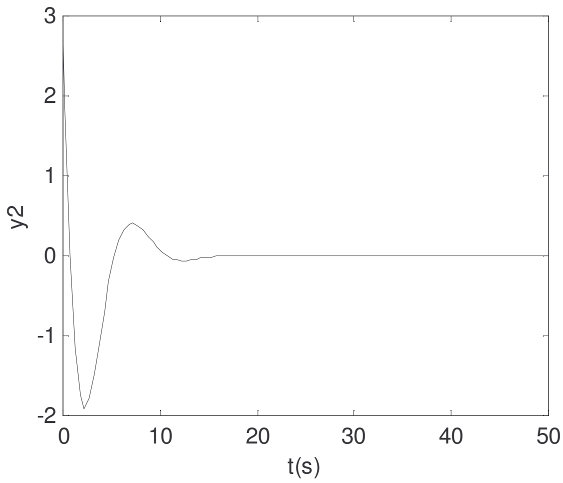
Pre nestabilný polytopický model S3



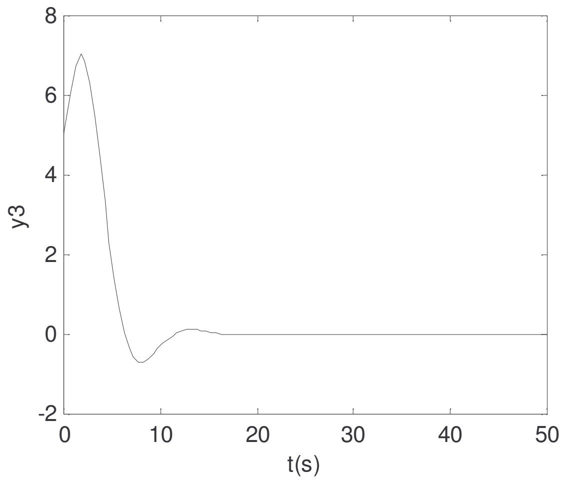
Obr.17 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení polytopického modelu S3



Obr.18 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 polytopického modelu S3



Obr.19 Simulácia robustného spätnovázbového riadenia výstupu y2 polytopického modelu S3



Obr.20 Simulácia robustného spätnovázbového riadenia výstupu y3 polytopického modelu S3

Výpočet optimálnej spätnej väzby

Pre porovnanie robustného regulátora som si zvolil optimálne spätnoväzbové riadenie opísané v teoretickej časti v stati 2.10. Optimálny regulátor som vypočítal pomocou príkazu „lqry“.

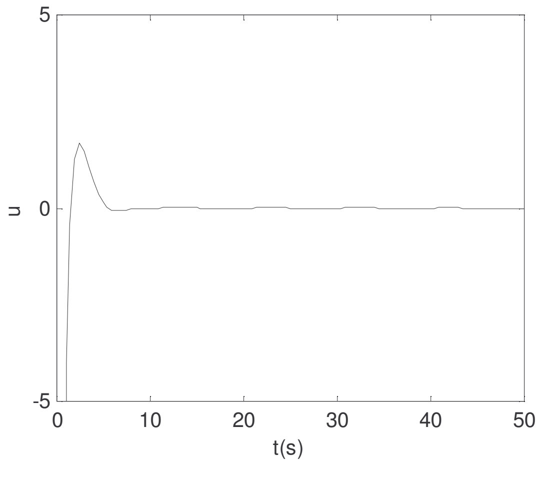
```
%vypocet optimalneho regulatora vystupnych velicin pre system s 3
vystupmi
ss0=ss(a0,b0,c,d)
[fopt,kmat,vccl]=lqry(ss0, q,r)

fopt = -1.9687    -3.7852    -2.2361


kmat = 8.5805    4.6640    8.4640
       4.6640    8.9676    5.2975
       8.4640    5.2975   13.4704

vccl = -0.8475 + 0.6512i
       -0.8475 - 0.6512i
       -0.8263
```

„kmat“ je Ljapunova matica P a „vccl“ sú vlastné čísla uzavretého obvodu.

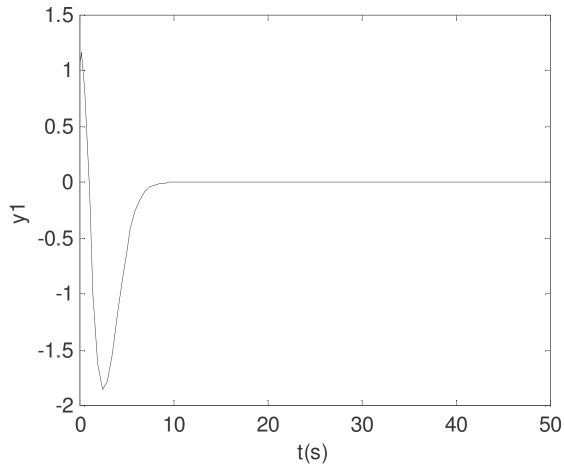
Stabilizujúca optimálna spätná väzba F je

$$F = \begin{bmatrix} -1{,}9687 & -3{,}7852 & -2{,}2361 \end{bmatrix}$$

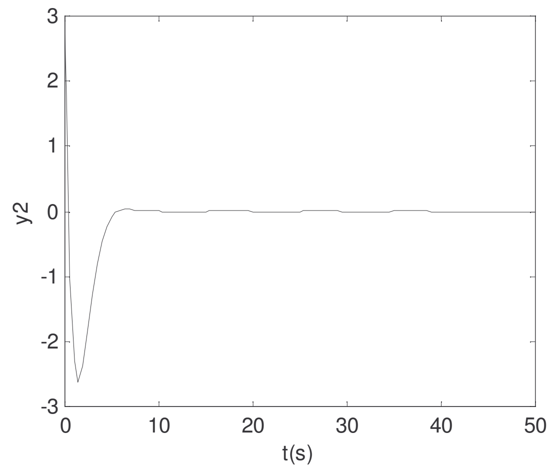
Simulácia optimálneho riadenia pre nominálny model a vrcholy polytopu



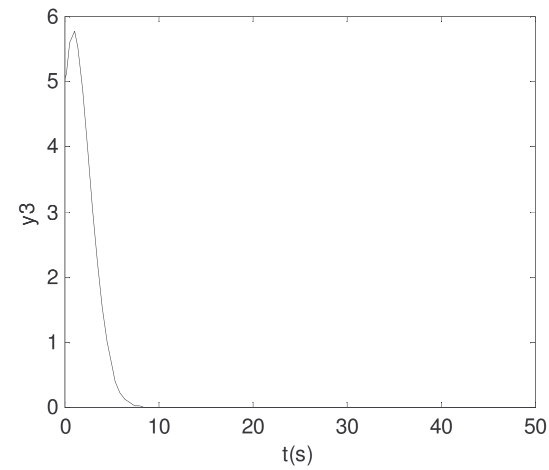
Obr.21 Priebeh riadiacej veličiny pri optimálnom riadení nominálneho modelu



Obr.22 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y1 nominálneho modelu

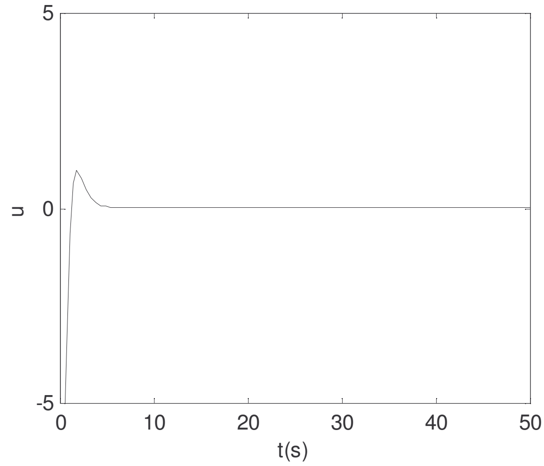


Obr.23 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y2 nominálneho modelu

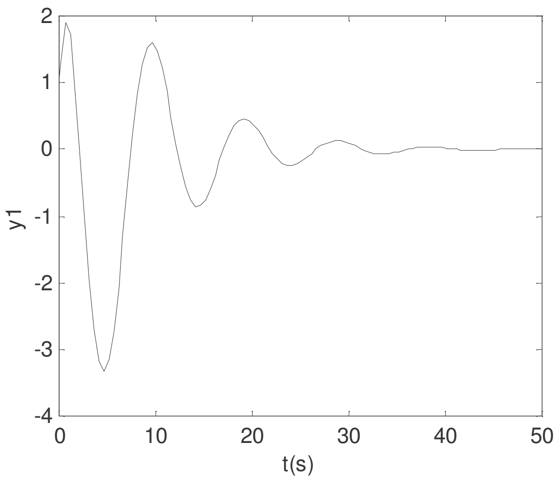


Obr.24 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y3 nominálneho modelu

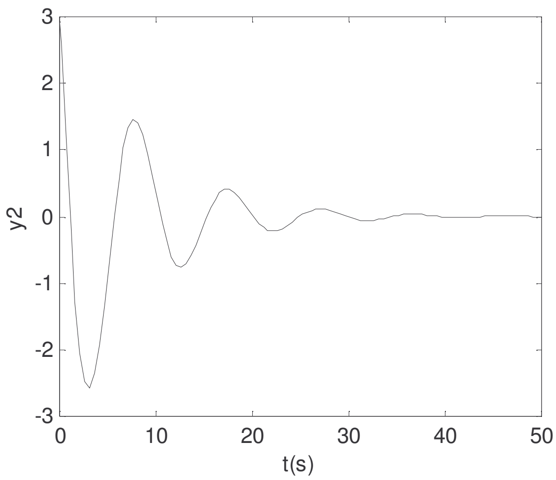
Simulácia optimálneho riadenia pre vrchol polytopu S3:



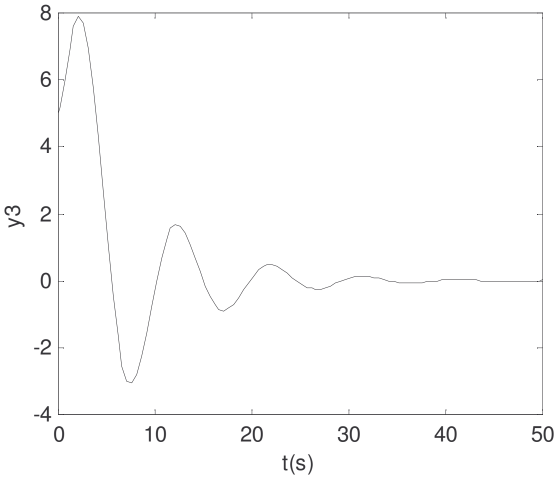
Obr.25 Simulácia PCH riadiacej veličiny u polytopického modelu S3



Obr.26 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y1 polytopického modelu S3



Obr.27 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y2 polytopického modelu S3



Obr.28 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y3 polytopického modelu S3

Sledovanie hodnoty účelovej funkcie pre robustný a optimálny regulátor

$$\int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \le x_0^{\ T} P x_0 = J^*$$

Garantovaná hodnota J^*: `Jgarant=x0'*p*x0`

Jgarant = 2392,5

Tabuľka 1. Tabuľka hodnôt účelovej funkcie J pre nominálny a polytopické systémy

Optimálne riadenie		Robustné riadenie	
Systém	**J**	**Systém**	**J**
S0	697,4306	S0	790,8878
S1	1152,1	S1	1135,7
S2	572,7079	S2	710,5250
S3	2390,7	S3	1951,2
S4	589,2254	S4	711,7963

Z tabuľky je vidieť, že minimalizácia účelovej funkcie je pre robustné riadenie v polytopických systémoch S1, S3 lepšia a v nominálnom modeli a v S2, S4 horšia.

4.2 Teoretický príklad 2

Na rozdiel od Teoretického príkladu 1 bola stabilizujúca výstupná spätná väzba vypočítaná pomocou riešenia dvoch LMI (51), (52). Výsledky boli overené simulačne na príklade návrhu robustného spätnoväzbového riadenia lineárneho modelu helikoptéry, ktorého nominálny model a vrcholy polytopu sú:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & -0{,}455 \\ 0{,}0482 & -1{,}01 & 0{,}0024 & -4{,}0208 \\ 0{,}1002 & 0{,}2855 & -0{,}0707 & 1{,}3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0^T = \begin{bmatrix} 0{,}4422 & 3{,}5446 & -5{,}520 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{v1} = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & -1{,}7555 \\ 0{,}0482 & -1{,}01 & 0{,}0024 & -4{,}0208 \\ 0{,}1002 & -1{,}0145 & -0{,}0707 & 1{,}3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{v1}^T = \begin{bmatrix} 0{,}4422 & 3{,}5446 & -5{,}520 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{v2} = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & 0{,}8445 \\ 0{,}0482 & -1{,}01 & 0{,}0024 & -4{,}0208 \\ 0{,}1002 & 1{,}5855 & -0{,}0707 & 1{,}3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{v2} = B_{v1}$$

$$C_{v1} = C_{v2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Volené matice, ktoré vystupujú v LMI (51), (52): $R = 0{,}0000001 * I, Q = 0{,}0001 * I$

Vypočítaná stabilizujúca spätná väzba $F = [-11{,}7637 \quad -12{,}249]$

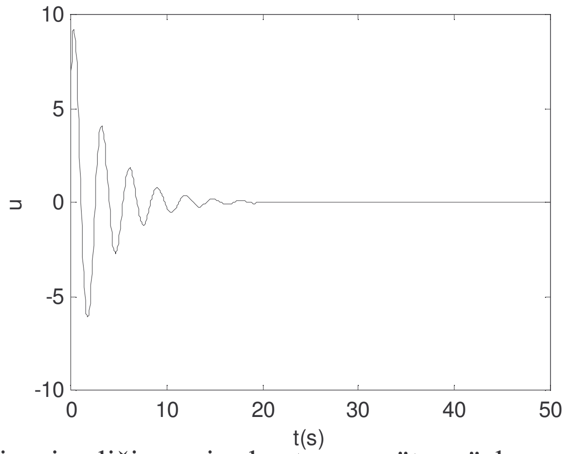
Vlastné čísla uzavretého obvodu sú záporné, systém je stabilizovateľný výstupnou spätnou väzbou F.

$eig\ CL1 \{-48.1733, -0.6181, -0.0364 \pm 2.5352\}$

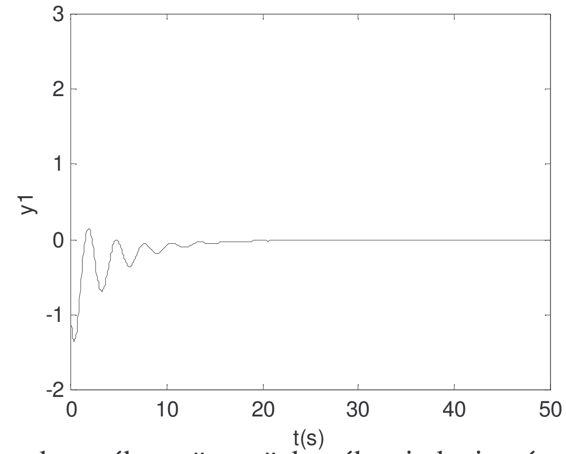
$eig\ CL2 \{-48.1034, -0.2228, -0.2689 \pm 1.7212i\}$

Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia pre nominálny model a vrcholy polytopu

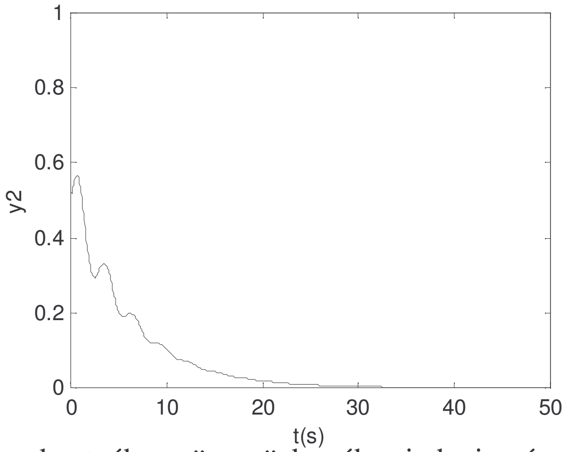
Robustné spätnoväzbové riadenie nominálneho modelu:



Obr.29 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení nominálneho modelu

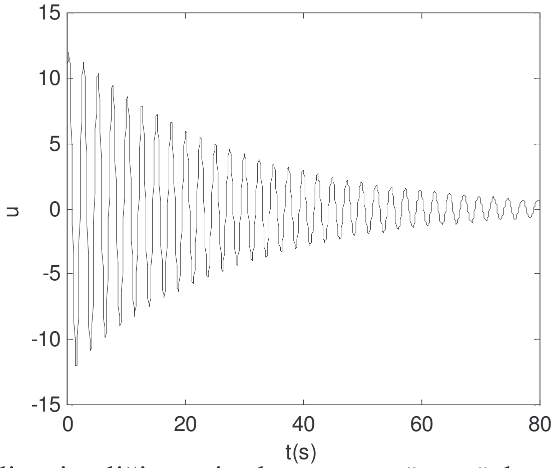


Obr.30 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 nominálneho modelu

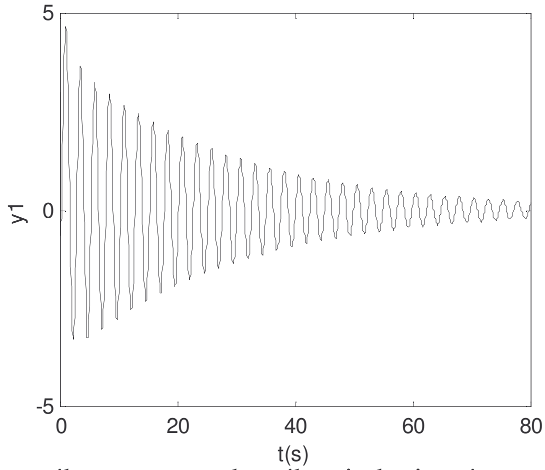


Obr.31 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 nominálneho modelu

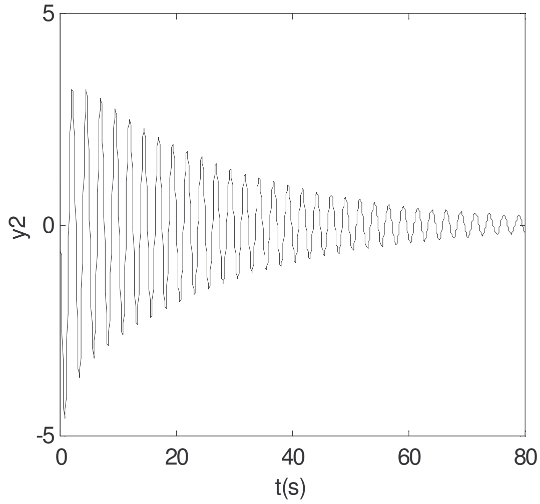
Robustné spätnoväzbové riadenie systému vo vrchole polytopu Av1,Bv1:



Obr.32 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av1,Bv1

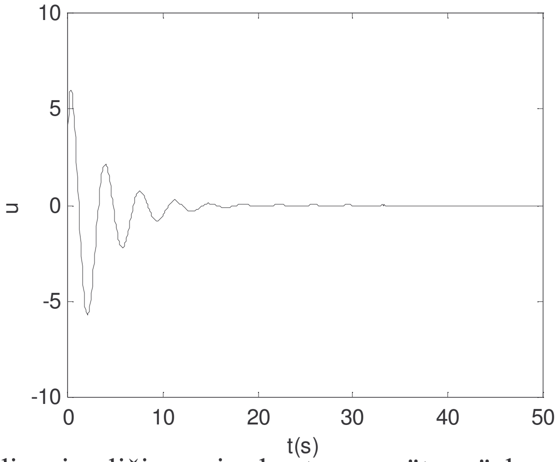


Obr.33 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

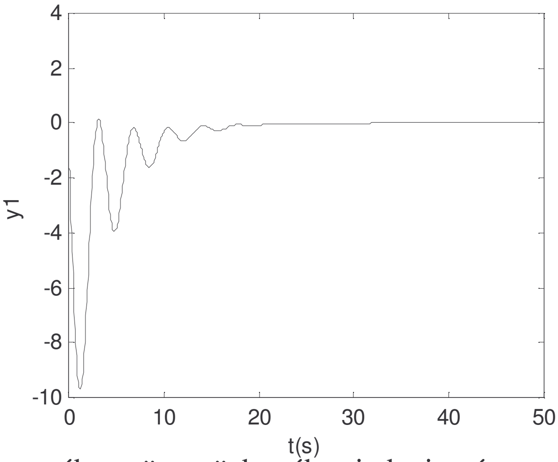


Obr.34 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

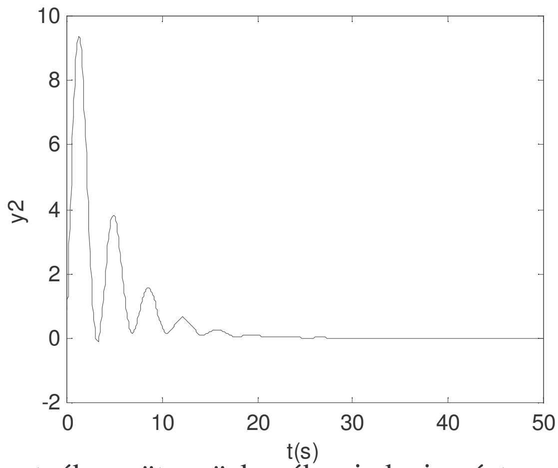
Robustné spätnoväzbové riadenie systému vo vrchole polytopu Av2,Bv2:



Obr.35 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.36 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.37 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 vo vrchole polytopu Av2,Bv2

Pretože volené matice R,Q majú vplyv na kvalitu robustného riadenia, skúsil som vypočítať výstupnú spätnú väzbu F pri iných R,Q: $R = 0{,}000001 * I, Q = I$

Vypočítaná stabilizujúca spätná väzba: $F = \left[-353{,}4662 \quad -199{,}0897\right]$

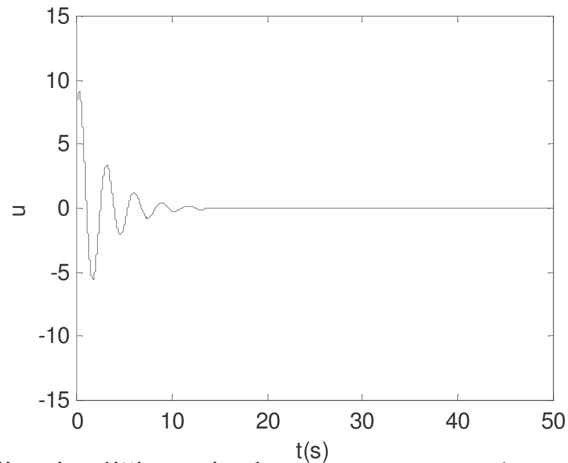
Vlastné čísla uzavretého obvodu sú záporné, systém je stabilizovateľný maticou F.

$eig\ CL1 \left\{-1341.9, -0.4281, -0.1875 \pm 2.4119\right\}$

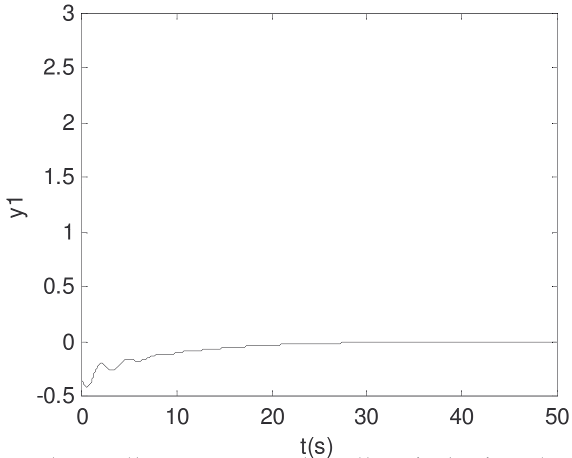
$eig\ CL2 \left\{-1341.9, -0.0995, -0.3525 \pm 1.9296i\right\}$

Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia pre nominálny model a vrcholy polytopu

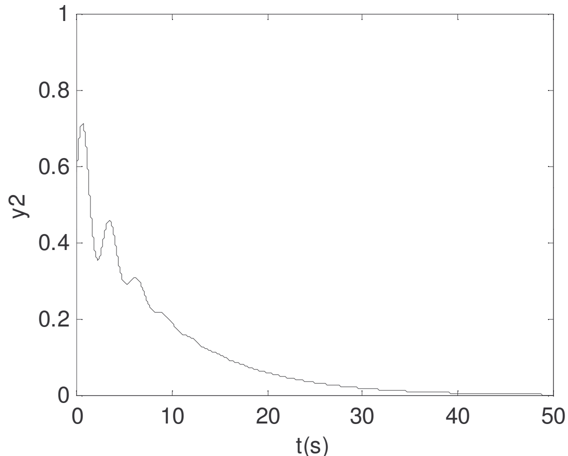
Robustné spätnoväzbové riadenie nominálneho modelu**:**



Obr.38 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení nominálneho modelu

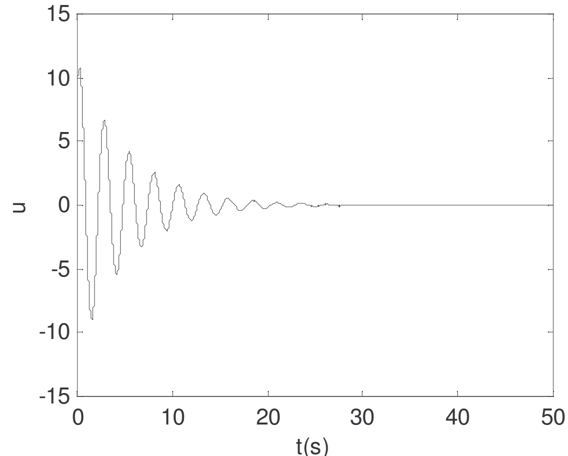


Obr.39 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 nominálneho modelu

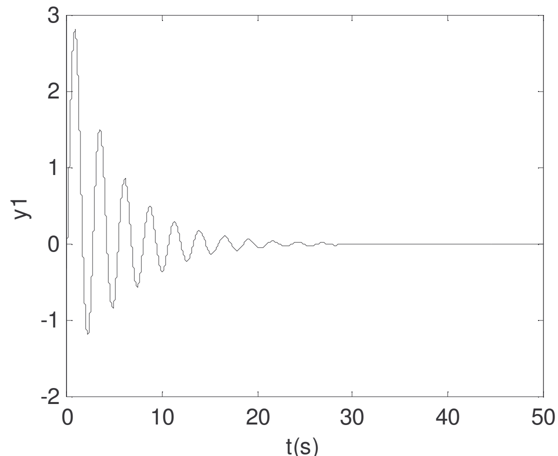


Obr.40 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 nominálneho modelu

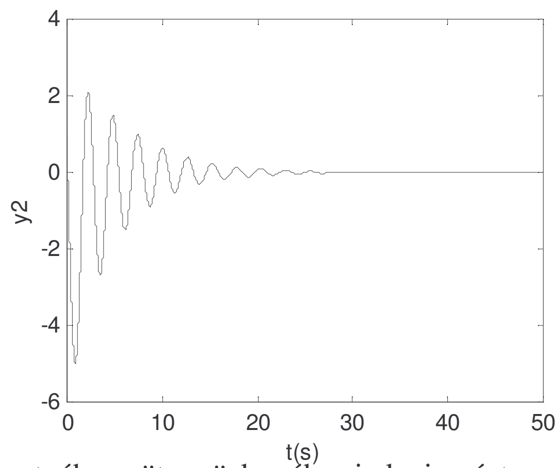
Robustné spätnoväzbové riadenie systému vo vrchole polytopu Av1,Bv1:



Obr.41 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av1,Bv1

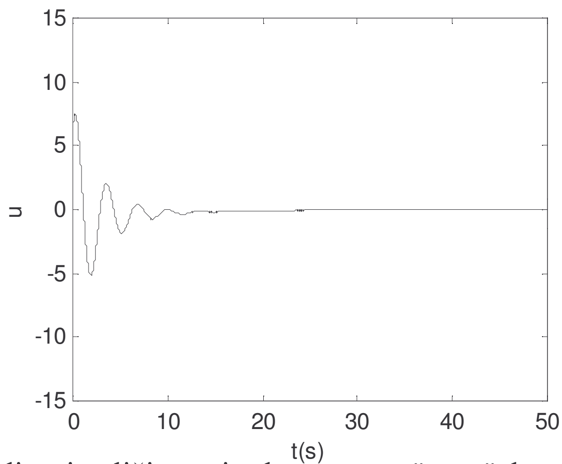


Obr.42 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

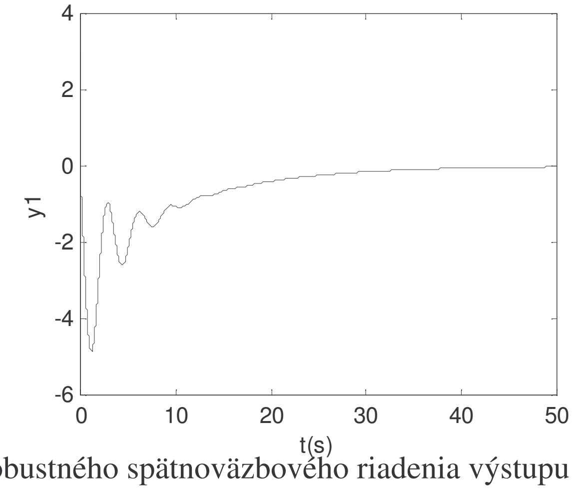


Obr.43 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y2 vo vrchole polytopu Av1,Bv2

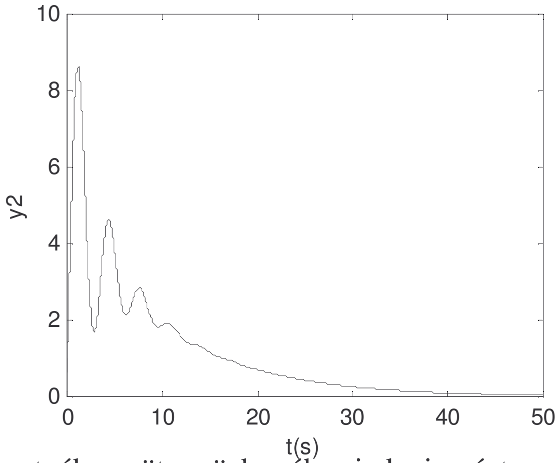
Robustné spätnoväzbové riadenie systému vo vrchole polytopu Av2,Bv2:



Obr.44 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.45 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.46 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av2,Bv2

Výpočet optimálnej spätnej väzby

Podobne ako v Teoretickom príklade 1 som porovnal robustné riadenie spätnoväzbového s optimálnym.

```
%vypocet optimalneho regulatora vystupnych velicin pre system s 3
vystupmi
ss0=ss(Avn,Bvn,Cvn,Dvn)
[fopt,kmat,vccl]=lqry(ss0, Q,R)

fopt = -24.4628   -28.8647    -0.1841   1.4086


vccl = 1.0e+002 *
      -1.1302
      -0.0015
      -0.0035 + 0.0219i
      -0.0035 - 0.0219i
```

„vccl“ sú vlastné čísla uzavretého obvodu.

Stabilizujúca optimálna spätná väzba F je

$$F = \begin{bmatrix} -24{,}4628 & -28{,}8647 & -0{,}1841 & 1{,}4086 \end{bmatrix}$$

Sledovanie hodnoty účelovej funkcie pre robustný a optimálny regulátor

$$\int_0^{\infty} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \leq x_0{}^T P x_0 = J^*$$

Začiatočné podmienky: x0=[1 3 5 7]'

Volené matice: `R=1e-6;Q=eye(2);`

Garantovaná hranica účelovej funkcie: Jgarant = 3569,1

Tabuľka 2. Tabuľka hodnôt účelovej funkcie J pre nominálny a polytopické systémy

Optimálne		**Robustné**	
Systém	**J**	**Systém**	**J**
Avn	314,2529	Avn	315,0166
Av1	960,6206	Av1	722,2097
Av2	525,1252	Av2	509,4290

Volené matice: `R=1e-7;Q=1e-4*eye(2);`

Garantovaná hranica účelovej funkcie: Jgarant = 0,7548

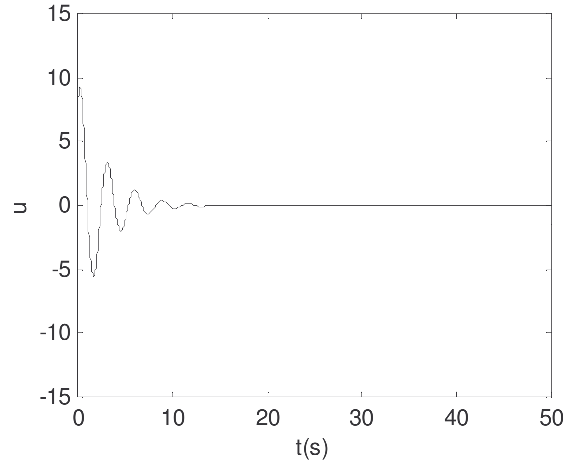
Tabuľka 3. Tabuľka hodnôt účelovej funkcie J pre nominálny a polytopické systémy

Optimálne		**Robustné**	
Systém	**J**	**Systém**	**J**
Avn	0,0309	Avn	0,0397
Av1	0,0988	Av1	0,3906
Av2	0,0514	Av2	0,0658

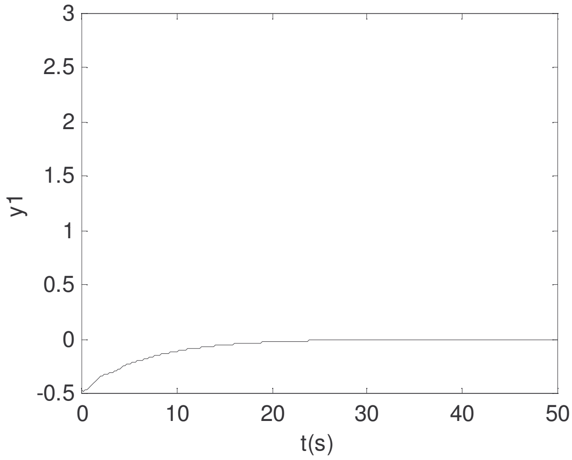
V tabuľke 2. a 3. vidno, že robustné riadenie je porovnateľné s optimálnym. V tabuľke 2. je robustné riadenie lepšie a v tabuľke 3. o trochu horšie ako optimálne. Z toho vyplýva, že voľba matíc R, Q z LMI (51), (52) ovplyvňuje kvalitu robustného spätnoväzbového riadenia.

Simulácia optimálneho riadenia pre nominálny model a vrcholy polytopu

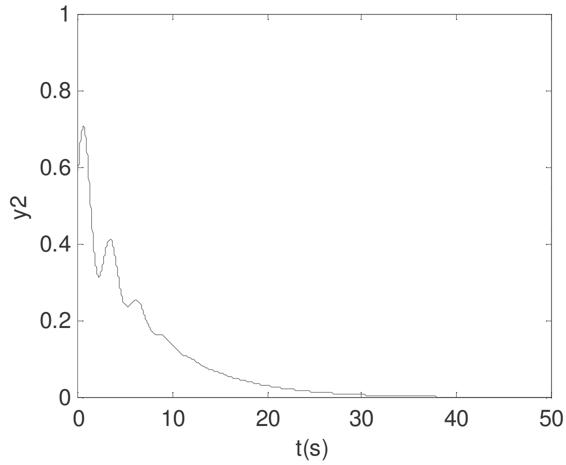
Nominálny model:



Obr.47 Priebeh riadiacej veličiny pri optimálnom riadení nominálneho modelu

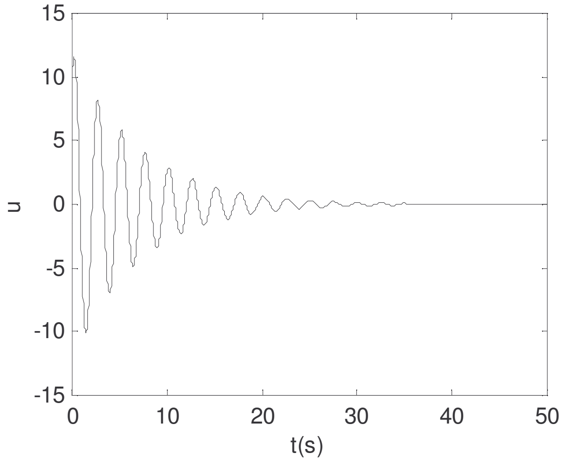


Obr.48 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y1 nominálneho modelu

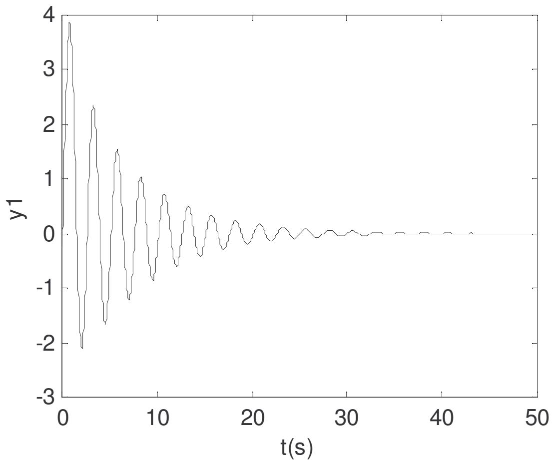


Obr.49 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y2 nominálneho modelu

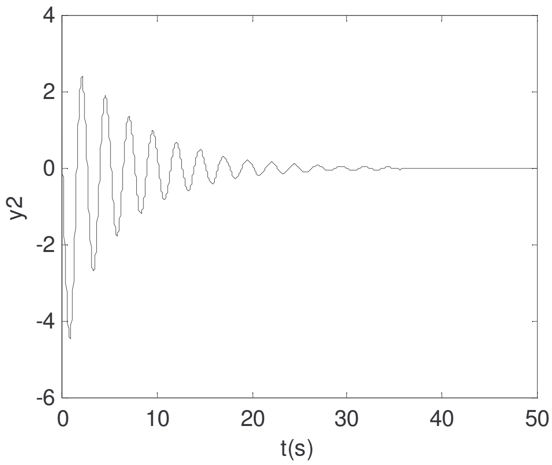
Optimálne riadenie systému vo vrchole polytopu Av1,Bv1:



Obr.50 Priebeh riadiacej veličiny pri optimálnom riadení vo vrchole polytopu Av1,Bv1

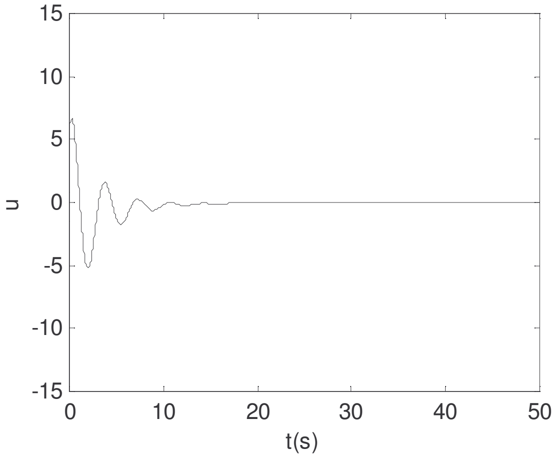


Obr.51 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

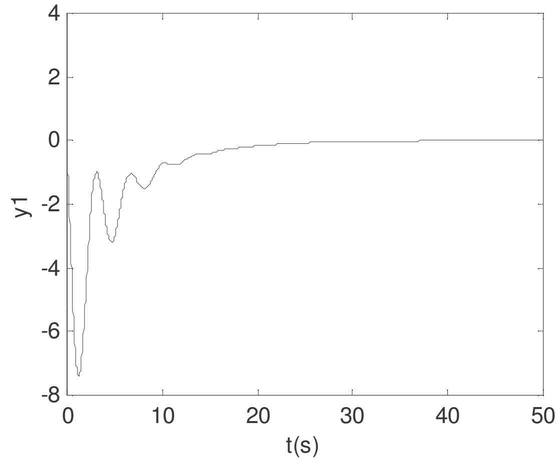


Obr.52 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y2 vo vrchole polytopu Av1,Bv1

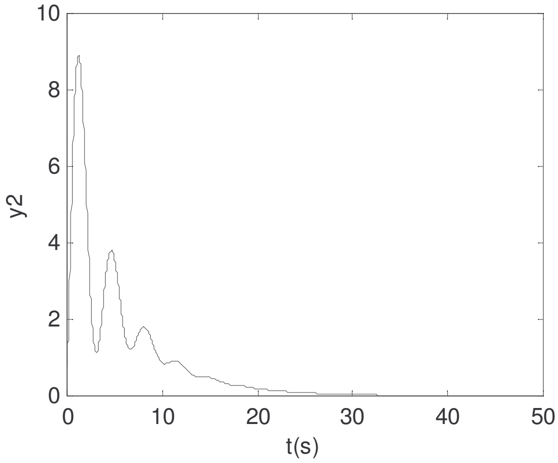
Optimálne riadenie systému vo vrchole polytopu Av2,Bv2:



Obr.53 Priebeh riadiacej veličiny pri optimálnom riadení vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.54 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y1 vo vrchole polytopu Av2,Bv2



Obr.55 Simulácia optimálneho riadenia výstupu y2 vo vrchole polytopu Av2,Bv2

4.3 Prietokový chemický reaktor

4.3.1 Dynamický matematický model prietokového chemického reaktora

Uvažuje sa prietokový chemický reaktor s dokonalým miešaním reakčnej zmesi. Prebiehajú v ňom dve paralelné exotermické reakcie 1.poriadku typu:

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{k_1} B \\ &A \xrightarrow{k_2} C \end{aligned} \tag{87}$$

Pri odvodení matematického modelu sa uvažuje len tepelná kapacita reakčnej zmesi a chladiaceho média. Ostatné tepelné kapacity (tepelné kapacity stien reaktora) a straty tepla do okolia sú zanedbané.

Materiálová bilancia zložky A a B:

$$\begin{aligned} V\frac{dc_A(t)}{dt} &= qc_{AV}(t) - qc_A(t) - k_1(t)c_A(t)V - k_2c_A(t)V \\ V\frac{dc_B(t)}{dt} &= qc_{BV}(t) - qc_B(t) + k_1c_A(t)V \end{aligned} \tag{88}$$

Entalpická bilancia reakčnej zmesi:

$$V\rho c_p\frac{d\vartheta(t)}{dt} = q\rho c_p\vartheta_V(t) - q\rho c_p\vartheta(t) - Ak[\vartheta(t) - \vartheta_c(t)] - k_1c_A(t)V(\Delta_r H_1) - k_2c_A(t)V(\Delta_r H_2) \tag{89}$$

Entalpická bilancia chladiaceho média:

$$V_c\rho_c c_{pc}\frac{d\vartheta_c(t)}{dt} = q_c\rho_c c_{pc}\vartheta_{cv}(t) - q_c\rho_c c_{pc}\vartheta_c(t) + Ak[\vartheta(t) - \vartheta_c(t)] \tag{90}$$

stavové veličiny: $c_A, c_B, \vartheta, \vartheta_c$

akčná veličina: q_c

výstupná veličina: ϑ

konštanty: $V, V_c, \rho, \rho_c, c_p, c_{pc}, A, k, \Delta_r H_1, \Delta_r H_2$

$$k_1 = k_{1A}e^{-\frac{E_1}{R\vartheta(t)}},\; k_2 = k_{2A}e^{-\frac{E_2}{R\vartheta(t)}} \tag{91}$$

Tabuľka 4. Parametre reaktora

Veličina	**Hodnota**	**Rozmer**
ρ	1020	[kg.m^{-3}]
ρ_c	998	[kg.m^{-3}]
c_p	4,02	[kJ.kg.K^{-1}]
c_{pc}	4,182	[kJ.kg.K^{-1}]
V	0,23	[m^3]
V_c	0,21	[m^3]
A	1,51	[m^2]
k	42,8	[m^2.min^{-1}.K^{-1}]
k_{1A}	1,55.10^{11}	[min^{-1}]
k_{2A}	4,55.10^{25}	[min^{-1}]
E_1 / R	9850	[K]
E_2 / R	22019	[K]
$\Delta_r H_1$	-8,6.10^4	[kJ.mol^{-1}]
$\Delta_r H_2$	-1,82.10^4	[kJ.mol^{-1}]

Tabuľka 5. Hodnoty vstupných veličín v rovnovážnom stave

Veličina	Hodnota	Rozmer
c_{Av}^{s}	4,22	[kmol.m^{-3}]
c_{Bv}^{s}	0	[kmol.m^{-3}]
ϑ_{v}^{s}	328	[K]
ϑ_{cv}^{s}	298	[K]
q^{s}	0,015	[m^{3}.min^{-1}]
q_{c}^{s}	0,004	[m^{3}.min^{-1}]

4.3.2 Rovnovážny stav prietokového chemického reaktora

Ustálený stav som vypočítal pomocou programu v Matlabe na základe iterácií. Odhadoval som teplotu reakčnej zmesi.

$c_{A}^{s} = 0{,}4919\,\mathrm{kmol\ m^{-3}}$

$c_{B}^{s} = 2{,}0081\,\mathrm{kmol\ m^{-3}}$

$\vartheta_{c}^{s} = 350{,}134\,\mathrm{K}$

$\vartheta_{vyp}^{s} = 363{,}6011\,\mathrm{K}$

4.3.3 Linearizovaný dynamický matematický model chemického reaktora

Odvodil som linearizovaný dynamický matematický model prietokového chemického reaktora vo forme lineárneho stavového opisu. Za vstupnú riadiacu veličinu som považoval prietok chladiaceho média. Prietok reakčnej zmesi som považoval za konštantný a ostatné vstupné veličiny za poruchové. Za výstupnú veličinu som považoval teplotu reakčnej zmesi.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{13}x_3(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) \\
\frac{dx_3(t)}{dt} &= a_{31}x_1(t) + a_{33}x_3(t) + a_{34}x_4(t) \\
\frac{dx_4(t)}{dt} &= a_{43}x_3(t) + a_{44}x_4(t) + b_{14}u(t)
\end{aligned} \tag{92}$$

$$a_{11} = -\left(\frac{q^s}{V} + k_1^s + k_2^s\right),$$

$$a_{13} = -\frac{\left(k_1^s g_1 + k_2^s g_2\right)c_A^s}{\left(\vartheta^s\right)^2},\ a_{21} = k_1^s,\ a_{22} = -\frac{q^s}{V},\ a_{23} = -\frac{k_1^s g_1 c_A^s}{\left(\vartheta^s\right)^2},$$

$$a_{31} = -\frac{\left(k_1^s \Delta_r H_1 + k_2^s \Delta_r H_2\right)c_A^s}{\rho c_p}, a_{33} = -\frac{q^s}{V} - \frac{Ak}{V\rho c_p} - \frac{\left(k_1^s g_1 \Delta_r H_1 + k_2^s g_2 \Delta_r H_2\right)c_A^s}{\rho c_p \left(\vartheta^s\right)^2},$$

$$a_{34} = \frac{Ak}{V\rho c_p},$$

$$a_{43} = \frac{Ak}{V_c \rho_c c_{pc}},\ a_{44} = -\frac{q_c}{V_c} - \frac{Ak}{V_c \rho_c c_{pc}}, b_{14} = \frac{\vartheta_{cv} - \vartheta_c}{V_c}$$

Stavový opis vo forme matíc:

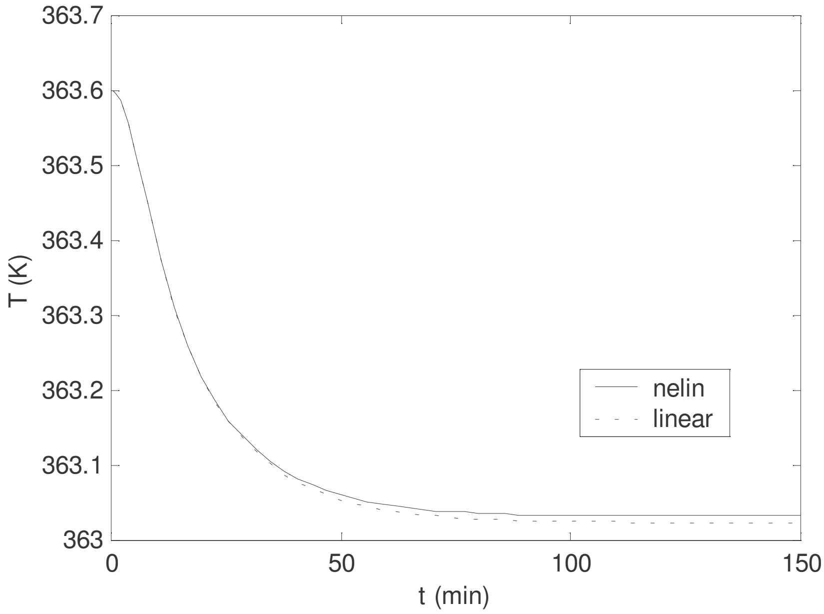
Nominálny model:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}5594 & 0 & -0{,}0284 & 0 \\ 0{,}2662 & -0{,}0652 & -0{,}0098 & 0 \\ 6{,}5956 & 0 & 0{,}1538 & 0{,}0685 \\ 0 & 0 & 0{,}0737 & -0{,}0928 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -249{,}257 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$



Obr.56 Porovnanie odozvy nelineárneho modelu a linearizovaných modelov (lin.stav.opis. a prenos) pri skokovej zmenu prietoku chladiaceho média o10%.

Pre nelineárny model pri skokovej zmene prietoku chladiaceho média o 10% sa teplota reakčnej zmesi ustálila na 363,0323 K, pre linearizovaný model sa teplota reakčnej zmesi ustálila na 363,0237 K.

4.3.4 Robustné spätnoväzbové riadenie prietokového chemického reaktora

Pre nominálny model je hodnota reakčnej entalpie druhej reakcie $A \xrightarrow{k_2} C$, $\Delta_r H_2 = -1{,}82.10^4$ kj.kmol^{-1}. Pri návrhu robustného riadenia pre prietokový chemický reaktor som si zvolil za neurčitú veličinu reakčnú entalpiu druhej reakcie. Za hranice neurčitosti som zvolil interval okolo nominálneho modelu $\Delta H_{r2} = \left(-2{,}82.10^4; -0{,}82.10^4\right)$ kJ.kmol^{-1}. Z tejto neurčitosti reakčnej entalpie vznikli 4 neurčité parametre.

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}5594 & 0 & q_1 & 0 \\ 0{,}2662 & -0{,}0652 & q_2 & 0 \\ q_3 & 0 & q_4 & 0{,}0685 \\ 0 & 0 & 0{,}0737 & -0{,}0928 \end{bmatrix}$$

Hranice neurčitosti parametrov sú:

$$q_1 = (-0.0288, -0.0281)$$
$$q_2 = (-0.0099, -0.0096)$$
$$q_3 = (-6.0395, 7.1517)$$
$$q_4 = (0.1110, 0.1957)$$

Uvádzam hraničné vrcholy polytopu Av1 a Av2:

$$A_{v1} = \begin{bmatrix} -0{,}5594 & 0 & -0{,}0288 & 0 \\ 0{,}2662 & -0{,}0652 & -0{,}0099 & 0 \\ 6{,}0395 & 0 & 0{,}1110 & 0{,}0685 \\ 0 & 0 & 0{,}0737 & -0{,}0928 \end{bmatrix}$$

$$A_{v2} = \begin{bmatrix} -0{,}5594 & 0 & -0{,}0281 & 0 \\ 0{,}2662 & -0{,}0652 & -0{,}0096 & 0 \\ 7{,}1517 & 0 & 0{,}1957 & 0{,}0685 \\ 0 & 0 & 0{,}0737 & -0{,}0928 \end{bmatrix}$$

4.3.5 Výpočet stabilizujúcej spätnej väzby pre prietokový chemický reaktor

Stabilizujúcu spätnú väzbu som vypočítal pomocou riešenia 2 lineárnych maticových nerovností (51), (52) v LMI editori v Matlabe.

```
tminf = -3.4010e-008

vccl1 = -0.0652
        -0.1940 + 0.2398i
        -0.1940 - 0.2398i
        -0.0686

vccl2 = -0.0652
        -0.2343 + 0.2470i
        -0.2343 - 0.2470i
        -0.0726
```

Uzavretý systém je kvadraticky stabilný, všetky vlastné čísla uzavretého obvodu sú stabilné. Stabilizujúcu spätnú väzbu F som našiel pre volené matice z LMI (51), (52)R =10, Q =1e-6 a $\gamma = 50$.

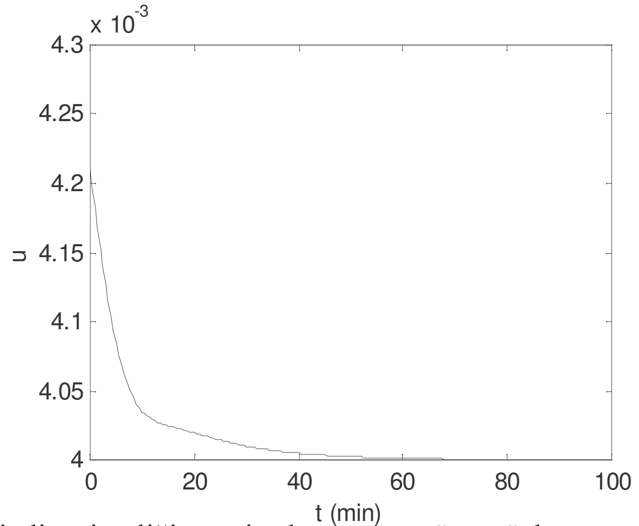
F =-9.02087e-5

4.3.6 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia pre nominálny model a vrcholy polytopu

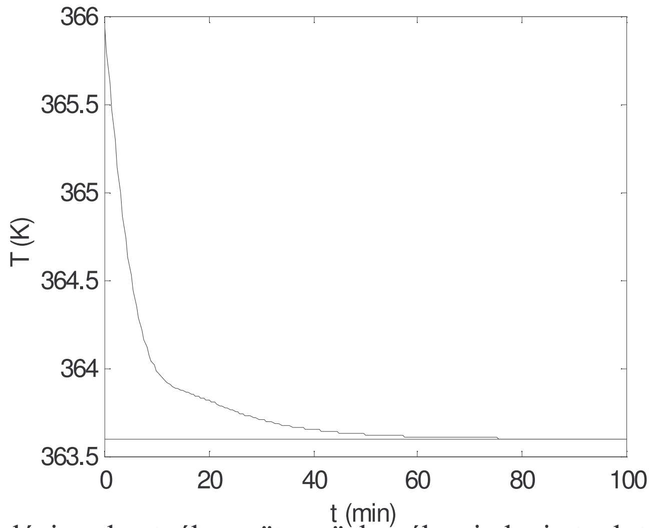
Robustné spätnoväzbové riadenie nominálneho modelu**:**

Začiatočné podmienky:

```
x0=[0.3828 1.8605 365.9571 352.0063]
```



Obr.57 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení nominálneho modelu



Obr.58 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia teploty reakčnej zmesi nominálneho modelu

Robustné spätnoväzbové riadenie vo vrchole polytopu Av1,Bv1**:**

Rovnovážny stav pre vrchol polytopu Av1,Bv1: $\Delta_r H_2 = -2{,}82.10^{-4}$ kJ kmol^{-1}:

$c_A^s = 0{,}3828$ kmol m^{-3}

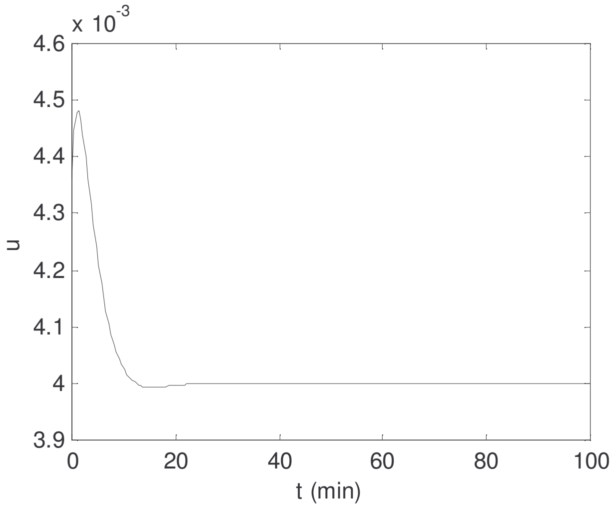
$c_B^s = 1{,}8605$ kmol m^{-3}

$\vartheta_c^s = 352{,}0063$ K

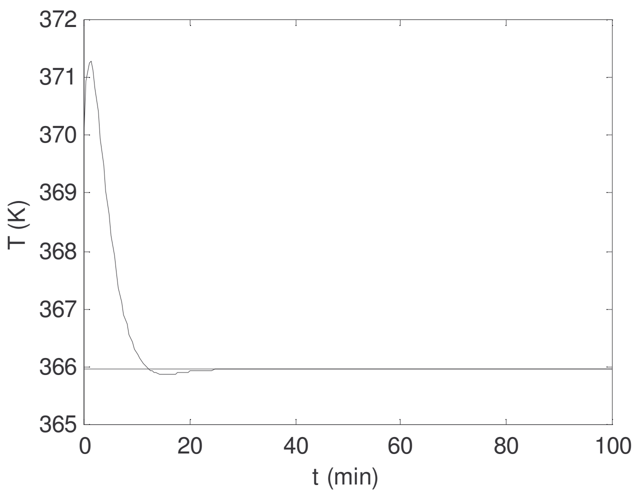
$\vartheta_{vyp}^s = 365{,}9571$ K

Začiatočné podmienky:

```
x0=[0.4920 2.0081 370 350.1331];
```



Obr.59 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av1,Bv1



Obr.60 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia teploty reakčnej zmesi vo vrchole polytopu Av1,Bv1

Robustné spätnoväzbové riadenie vo vrchole polytopu Av2, Bv2

Rovnovážny stav pre vrchol polytopu Av2, Bv2: $\Delta_r H_2 = -0{,}82.10^{-4}$ kJ kmol^{-1}:

c_A^s = 0,6008 kmol m^{-3}

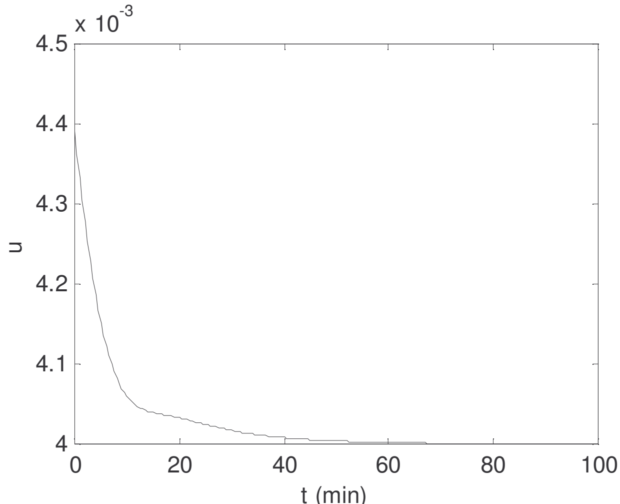
c_B^s = 2,1133 kmol m^{-3}

ϑ_c^s = 348,5543 K

ϑ_{vyp}^s = 361,6133 K

Začiatočné podmienky:

```
x0=[0.3828 1.8605 365.9571 352.0063];
```



Obr.61 Priebeh riadiacej veličiny pri robustnom spätnoväzbovom riadení vo vrchole polytopu Av2,Bv2

Obr.62 Simulácia robustného spätnoväzbového riadenia teploty reakčnej zmesi vo vrchole polytopu Av2,Bv2

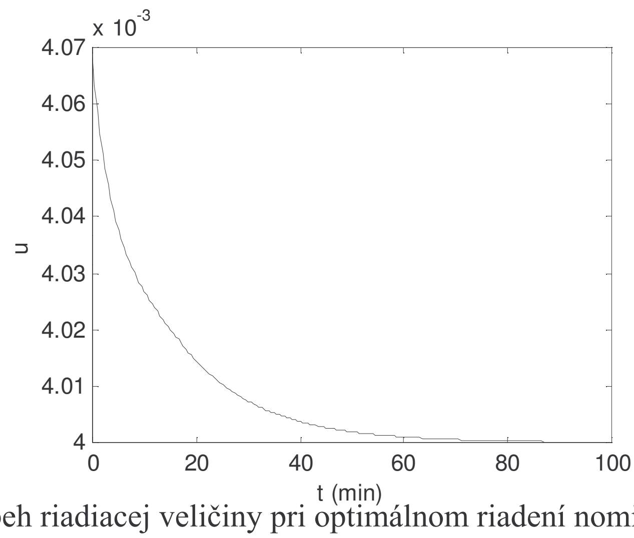
4.3.7 Výpočet optimálnej spätnej väzby pre prietokový chemický reaktor

```
ss0=ss(A,B,C,D)
[fopt,kmat,vccl]=lqry(ss0,Q,R)

Pre nominálny systém:

R=10; Q=1e-6;

fopt = 1.0e-003 *
      -0.4461    0.0000   -0.0316   -0.0226


kmat = 1.0e-003 *
       0.5898   -0.0000    0.0502    0.0180
      -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000
       0.0502   -0.0000    0.0054    0.0013
       0.0180   -0.0000    0.0013    0.0009


vccl = -0.2183 + 0.2446i
       -0.2183 - 0.2446i
       -0.0674
       -0.0652
```

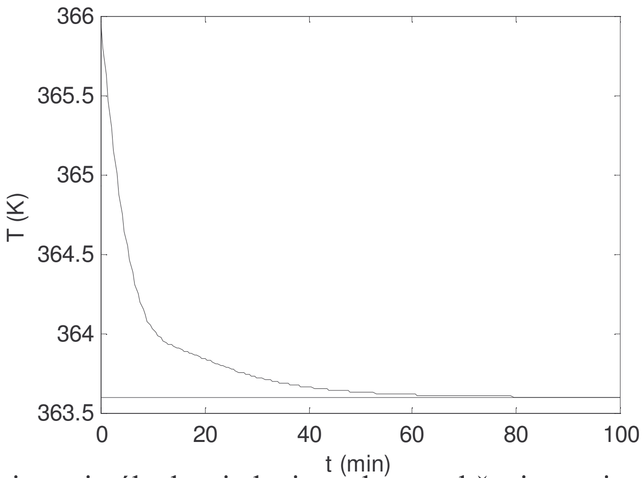
4.3.8 Simulácia optimálneho riadenia pre nominálny model

Optimálne riadenie nominálneho modelu**:**

Začiatočné podmienky: `x0=[0.3828 1.8605 365.9571 352.0063];`



Obr.63 Priebeh riadiacej veličiny pri optimálnom riadení nominálneho modelu



Obr.64 Simulácia optimálneho riadenia teploty reakčnej zmesi nominálneho modelu

4.3.9 Porovnanie robustného a optimálneho riadenia pre nominálny model prietokového chemického reaktora.

Garantovaná hranica účelovej funkcie: Jgarant = 10.93875

Kritérium IAE: $\int_0^t |e(t)| dt$

Kritérium ISE: $\int_0^t e^2(t) dt$

Tabuľka 6. Tabuľka porovnania hodnôt účelovej funkcie J a kritérií IAE a ISE pre robustné a optimálne riadenie

Kritérium	Robustné riad.	Optimálne riad.
J	1.7793e-5	1.7261e-5
IAE	16.8273	17.845
ISE	16.4541	17.026

V tabuľke 6 je vidieť, že obe riadenia dokážu minimalizovať hodnotu účelovej funkcie skoro až na nulu. V kritériách kvality regulácie dopadlo robustné riadenie o trochu lepšie.

4.3.10 Význam symbolov fyzikálno – chemických veličín

A - teplovýmenná plocha chladiaceho média [m^2]

c_A - koncentrácia látky A v reakčnej zmesi [$kmol.m^{-3}$]

c_{AV} - koncentrácia látky A vo vstupnom prúde [$kmol.m^{-3}$]

c_B - koncentrácia látky B v reakčnej zmesi [$kmol.m^{-3}$]

c_{BV} - koncentrácia látky B vo vstupnom prúde [$kmol.m^{-3}$]

c_p - stredná špecifická tepelná kapacita reakčnej zmesi [$kJ.kg.K^{-1}$]

c_{pc} - stredná špecifická tepelná kapacita chladiaceho média [$kJ.kg.K^{-1}$]

E_1 - aktivačná energia prvej reakcie [$kJ.kmol^{-1}$]

E_2 - aktivačná energia druhej reakcie [$kJ.kmol^{-1}$]

$\Delta_r H_1$ - reakčná entalpia prvej reakcie [$kJ.kmol^{-1}$]

$\Delta_r H_2$ - reakčná entalpia druhej reakcie [$kJ.kmol^{-1}$]

k_{1A} - rýchlostná konštanta prvej reakcie [min^{-1}]

k_{2A} - rýchlostná konštanta druhej reakcie [min^{-1}]

k - úhrnný koeficient prechodu tepla [$kJ.m^2.min^{-1}K^{-1}$]

q - vstupný prietok reakčnej zmesi [$m^3.min^{-1}$]

q_c - vstupný prietok chladiaceho média [$m^3.min^{-1}$]

R - univerzálna plynová konštanta [$kJ.kmol^{-1}.K^{-1}$]

V - objem reakčnej zmesi [m^3]

V_c - objem chladiaceho média [m^3]

t - čas [min]

ϑ - teplota reakčnej zmesi [K]

ϑ_c - teplota chladiaceho média na výstupe [K]

ϑ_{cv} - teplota chladiaceho média na vstupe [K]

ϑ_v - teplota reakčnej zmesi na vstupe [K]

ρ - stredná hustota reakčnej zmesi [$kg.m^{-3}$]

ρ_c - stredná hustota chladiaceho média [$kg.m^{-3}$]

5 ZÁVER

V práci bol v súlade s cieľmi odvodený nelineárny matematický model prietokového chemického reaktora. Nelineárny matematický model so štyrmi stavovými veličinami bol po linearizácii prevedený na stavový opis vo forme matíc. Potom sa zvolila za neurčitú veličinu entalpia druhej reakcie, dôsledkom toho vznikol neurčitý stavový model, pre ktorý som navrhol robustné riadenie pomocou riešenia lineárnych maticových nerovností. Ďalej som navrhol aj optimálne riadenie, kvôli porovnaniu. Porovnával som hodnotu účelovej funkcie a kritéria regulácie IAE a ISE. Výsledkom toho bolo, že robustné riadenie je úplne porovnateľné s optimálnym a v niektorých kritériách vyšlo ako lepšie.

Ďalšia časť práce bola venovaná teórii neurčitých systémov, otázke stabilizácie systémov statickou výstupnou spätnou väzbou a riešeniu lineárnych maticových nerovností pomocou LMI Control Toolboxu. Boli tiež formulované niektoré nevyhnutné a postačujúce podmienky stabilizovateľnosti lineárnych systémov ako metódy výpočtu stabilizujúcej spätnej väzby. Stabilizácia neurčitých dynamických systémov bola riešená hlavne pomocou LMI v dvoch teoretických príkladoch. Výsledkom je, že robustné riadenie dokáže stabilizovať neurčité a nestabilné lineárne systémy.

Ďalej je v práci stručný popis príkazov LMI Control Toolboxu v Matlabe 5.3, ako aj ich použitie na jednoduchých príkladoch. LMI Control Toolbox je efektným nástrojom na manipuláciu s neurčitými systémami a riešenie lineárnych maticových nerovností.

Otázka stabilizácie neurčitých systémov pomocou návrhu robustného regulátora ostáva ešte určite otvorená do budúcnosti z hľadiska teórie riadenia ako aj využitia v praxi.

SÚHRN:

Práca bola venovaná stabilizácii prietokového chemického reaktora. Bol prezentovaný návrh robustného spätnoväzbového regulátora pre prietokový chemický reaktor a lineárne neurčité systémy. Odvodený nelineárny matematický model prietokového chemického reaktora sa transformoval na neurčitý lineárny systém zavedením neurčitej veličiny entalpie druhej reakcie, pre ktorý som navrhol robustné riadenie pomocou riešenia lineárnych maticových nerovností. Výsledný regulátor bol robustný, pretože garantoval stabilitu pre všetky začiatočné podmienky. Ďalej sa navrhlo optimálne riadenie, kvôli porovnaniu. Porovnával som hodnotu účelovej funkcie a kritéria regulácie IAE a ISE. Ďalšia časť práce bola venovaná teórii neurčitých systémov, otázke stabilizácie systémov statickou výstupnou spätnou väzbou a riešeniu lineárnych maticových nerovností pomocou LMI Control Toolboxu v dvoch teoretických príkladoch. Potom je v práci stručný popis príkazov LMI Control Toolboxu v Matlabe 5.3, ako aj ich použitie na jednoduchých príkladoch.

SUMMARY:

In this paper, I studied the stabilization of a continuous-stirred tank reactor (CSTR). Robust output feedback controller design procedure for a class of CSTRs and for linear continuous-time systems was presented. The given nonlinear CSTR model was transformed into a linear parameter-varying plant. The procedure for the robust control design via static output feedback is based upon the non-iterative LMI approach and is computationally simple. The resultant controller is robust because it guarantees stability for the entire operating area and not only for a single operating point. To compare the robust controller it was designed an optimal controller. The guaranteed cost value and criteriums of control quality (IAE, ISE) was compared. Next there was presented the theory of uncertain systems, questions of a static output feedback simultaneous stabilization in two teoretical examples, description of commands in LMI Control Toolbox and their using in simple examples in this paper.

6 LITERATÚRA

[1] Veselý, V. (2002): Robust output feedback controller design for linear parametric uncertain systems, *Journal of Electrical Engineering*, **53**, (No.5-6) ,pp. 117-125

[2] Veselý, V., Kozáková, A. (2001): Robust output feedback controller design, *13th Int. Conference on Proces Control*, Štrbské Pleso, Slovakia, June 11-14, 2001

[3] Veselý, V. (2003): Robust output feedback controller design: LMI Approach, *Journal of Electrical Engineering*, **54**, (No.7-8) ,pp. 182-187

[4] *LMI Control Toolbox*. The Math Works Inc. 1999.

[5] Kvasnica, M. (2000): Optimálne spätnoväzbové riadenie laboratórneho chemického reaktora s exotermicou reakciou, *Diplomová práca*, KIRP, STU, Bratislava

[6] Mikleš, J.,Hutla, V. (1986): Teória automatického riadenia, STU, Bratislava