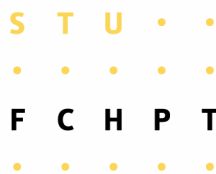


SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE

Oddelenie informatizácie a riadenia procesov



Analýza systémov s neurčitost'ami a robustného riadenia

BAKALÁRSKY PROJEKT

Vypracoval: Jozef Merčák

Vedúci bakalárskej práce: Ing. Jana Závacká

MÁJ 2008

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskeho projektu je analyzovať neurčitosti, ktoré v praxi majú podobu možných odchýlok skúmanej (riadenej) veličiny od požadovaného stavu. Tieto neurčitosti vplývajú na riadenie systémov, konkrétne robustné riadenie. Projekt obsahuje analýzu neurčitostí s jedným parametrom, ako aj analýzu neurčitostí, ktorých hodnoty sa môžu pohybovať v istom intervale. Metóda analýzy spočíva v definíciách základných pojmov súvisiacich s danou problematikou, ich vzájomnej súvislosti a v aplikácií objasnených skutočností na konkrétne príklady, riešené v prostredí MATLAB.

ABSTRACT

The intention of the bachelor project is analyze the indeterminateness, which have in use form of eventually departures examinational (controlled) magnitude from required condition. These indeterminateness influenced control systems, in the concrete robust control. The project contains analyze of the indeterminateness with a one parameter, and analyze of the indeterminateness, which have the values in interval. Method of the analyze consist in definitions based concepts, which cohere with proposition, their interdependence and in application cleared actualities at the examples, which is worked in MATLAB.

Za pomoc pri písaní bakalárskeho projektu ďakujem Ing. Jane Závackej

OBSAH

1. ÚVOD.....	7
2. KLASIFIKÁCIA A DELENIE NEURČITOSTÍ.....	8
3. NEURČITOSTI S JEDNÝM PARAMETROM	10
3.1. Hurwitzova matica a Bialasova veta.....	12
3.1.1. Vyššie mocniny parametra q	15
3.1.2. Konvexná kombinácia a smer.....	16
4. INTERVALOVÉ NEURČITOSTI	19
4.1. Charitonovova veta	20
4.1.1. Charitonovove obdĺžniky	21
4.1.2. Testovanie robustnosti regulačného obvodu	25
4.2. Veta o vylúčení nuly	27
5. ZÁVER.....	32
LITERATÚRA	33

1. Úvod

V tejto práci sa zaoberám analýzou robustného riadenia [1] a v užšom skúmam systémy s neurčitost'ami. Ide predovšetkým o systémy s neurčitost'ami jednoparametrickými a intervalovými [2], [4]. Pri týchto systémoch sa snažím ukázať spôsob zisťovania robustnej stability [3] na názorných príkladoch, ktoré sú prezentované v *PolynomialToolbox* v prostredí MATLAB.

Pri jednoparametrických neurčitostiach sa bližšie venujem Hurwitzovej matici a Bialasovej vete [2]. Tieto pojmy sú chápané ako kritériá pre zisťovanie robustnej stability neurčitého polynómu zastupujúceho systém s neurčitost'ami s jedným parametrom. Ďalej pojednávam o vyšších mocninách parametra neurčitosti ako aj o konvexnej kombinácii a smere za účelom lepšieho pochopenia danej problematiky. V časti venovanej intervalovým neurčitostiam bližšie opisujem intervalový polynóm, Charitonovovu vetu ako mĺňnik v analýze stability robustnosti systémov a Vetu o vylúčení nuly [2]. V časti „testovanie robustnosti regulačného obvodu“ sa na jednoduchom príklade systému s požiadavkou robustnej regulácie snažím zvoliť taký regulátor, aby spĺňal podmienky robustnej stability.

2. Klasifikácia a delenie neurčitostí

Vo všeobecnosti platí fakt, že pri modelovaní reálnych dynamických systémov sa nám nikdy nepodarí zostaviť úplne presný matematický model. Aj keď systém, ktorého model vykazuje po simulačnej stránke stabilitu, nemusí byť v skutočnosti dosahovať požadovanú úroveň stability, ba dokonca môže byť nestabilný. To vedie k poznatku, že pri metódach, ktoré sa používajú pri návrhoch riadenia sa musí brať dôraz na túto skutočnosť. V neposlednom rade to vedie k vzniku (zavedeniu) spätnej väzby. Táto by inak neexistovala, nebyť rozdielov medzi modelom riadeného systému a samotným systémom, ktoré majú zovšeobecňujúci názov *neurčitosti*.

Vznik neurčitostí môže mať hneď niekoľko príčin:

- niektoré fyzikálne parametre systému sú buď zistené nepresne, alebo nie sú zistené vôbec
- niektoré parametre, ktoré majú v linearizovanom modeli charakter konštant sa v skutočnosti časom menia
- obmedzené, alebo mylné chápanie fyzikálnej podstaty modelovaného systému
- časová a finančná náročnosť získania presného matematického modelu

Modely blížiac sa k presnej interpretácii systému sú veľmi zložité a tým pádom nepoužiteľné na riadenie

V danom matematickom modeli sa dajú neurčitosti popísať dvoma spôsobmi:

- Neparametrický** – jeho podstatou je obmedzenie oblasti možného rozptylu frekvenčnej charakteristiky. Je vhodný pri zanedbaní rýchlych dynamických vlastností a nelinearít.
- Parametrický** – vyjadruje známu štruktúru, ale neznáme hodnoty konkrétnych fyzikálnych parametrov riadeného systému. Hodnoty týchto parametrov sú potom ohraničené intervalom.

Predmetom záujmu často býva neurčitý charakteristický polynóm uzavretého regulačného obvodu [2]:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n \rho_i(q) s^i \quad (1)$$

Ak pracujeme s neurčitými systémami, často sa uvažuje množina obmedzujúca parametre (Q), ktorá je ohraničená nejakou normou (H_∞ , H_2).

Pre normu H_∞ platí:

$$\|q\|_\infty = \max_i |q_i| \quad (2)$$

Pre normu H_2 (Euklidova) platí:

$$\|q\|_2 = \left(\sum_{i=1}^l q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Majme prípad množiny polynómov $R = \{r(\cdot, q) : q \in Q\}$. Táto je robustne stabilná, ak polynóm r je stabilný pre všetky $q \in Q$. Z toho vyplýva, že pre všetky $q \in Q$ musia mať všetky korene polynómu r záporné reálne časti, teda musia ležať v ľavej časti komplexnej roviny.

Do polynómu $p(s, q) = \sum_{i=0}^n \rho_i(q) s^i$ sa neurčitosť vnáša cez funkcie koeficientov $\rho_i(q)$ a to hneď niekoľkými spôsobmi, na základe ktorých rozlišujeme niekoľko základných štruktúr neurčitosti:

- jednoparametrická štruktúra neurčitosti
- intervalová (nezávislá) štruktúra neurčitosti
- afinná lineárna štruktúra neurčitosti
- multilineárna štruktúra neurčitosti
- nelineárna štruktúra neurčitosti (polynomická)

3. Neurčitosti s jedným parametrom

V tomto prípade vystupuje len jeden neurčitý parameter. Analýza robustnej stability takéhoto systému je jednoduchá. Zaoberanie sa takýmto prípadom je dôležité pre riešenie zložitejších problémov robustnej stability. Jedným z takýchto problémov je „The Edge Theorem“, ktorá dokáže previesť viacparametrový problém na úroveň konečného počtu jednoparametrových problémov [2].

Zvyčajne sa neurčitý polynóm s jedným parametrom popisuje takto:

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) \quad (4)$$

- $p_0(s) = p(s, 0)$ - stabilný polynóm
- $p_1(s)$ - ľubovoľný polynóm
- $q \in \langle q_{\min}; q_{\max} \rangle$ - reálny neurčitý parameter z daného intervalu

Celú problematiku môžeme znázorniť pomocou nasledujúcich príkladov:

Príklad 1

Majme riadenú sústavu prvého rádu, v ktorej parameter q nadobúda hodnoty:

$$G_s(s, q) = \frac{5}{3s - 2q}; |q| \leq 4 \quad (5)$$

tento prenos je v regulačnom obvode so spätnou väzbou korigovaný P regulátorom:

$$G_R(s) = 2 \quad (6)$$

potom neurčitý charakteristický polynóm URO je:

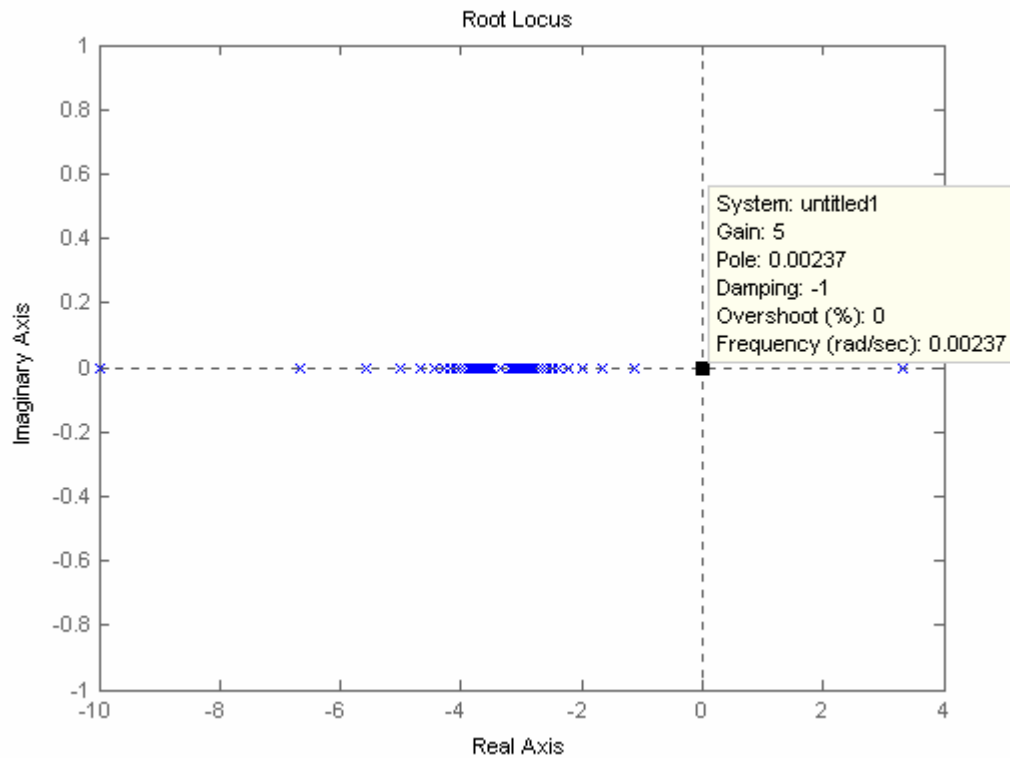
$$p(s, q) = 3s + 10 - 2q \quad (7)$$

Tento polynóm a teda celý systém je robustne stabilný. Grafické znázornenie stability sa vytvára pomocou príkazu „*rlocus*“ v prostredí MATLAB

Program :

```
rlocus(tf([3 10],[-2]),-5:.1:4)
```

Z obrázku (obr. 1) je vidno, že systém je na hranici stability až po $q = 5$.



Obr. 1 - Znázornenie stability pomocou príkazu *rlocus*, príklad 1

Príklad 2

Majme polynóm:

$$p(s, q) = 2s^2 + (3 - q)s + (5 - q) \quad (8)$$

k tomuto polynómu chceme určiť interval, v ktorom by parameter q zabezpečoval stabilitu systému.

Keďže ide o polynóm druhého stupňa, z nutnej a zároveň postačujúcej podmienky stability vyplýva, že všetky koeficienty musia byť kladné:

$$\begin{aligned} 3 - q &\geq 0 \rightarrow q \leq 3 \\ 5 - q &\geq 0 \rightarrow q \leq 5 \end{aligned} \quad (9)$$

a teda:

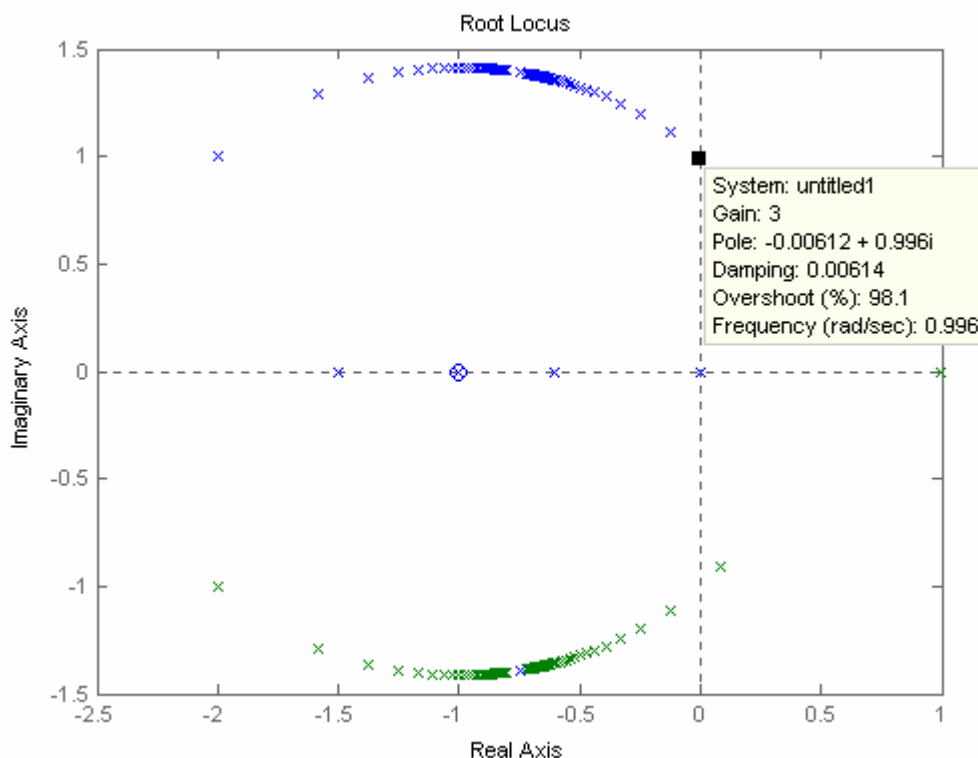
$$q \in (-\infty, 3) \quad (10)$$

Teraz skúsime vypočítať korene polynómu pre $q \in \langle 0,6 \rangle$ a vykreslíme ich do komplexnej roviny pomocou príkazu „*rlocus*“:

Program :

```
rlocus(tf([2 3 5],[ -1 -1]),-5:.1:8)
```

Z (obr. 2) je jasne vidieť, že systém sa správa stabilne naozaj len na intervale $q \in (-\infty, 3)$.



Obr. 2 - Znázornenie stability pomocou príkazu *rlocus*, príklad 2

3.1. Hurwitzova matica a Bialasova veta

Kritérium pre analýzu robustnej stability polynómu (4):

$$p(s, q) = p_0(q) + p_1(q)s + p_2(q)s^2 + \dots + p_n(q)s^n \quad (11)$$

predložil nemecký matematik Adolf Hurwitz [2]. To vychádza z určitého počtu Hurwitzových matic, ktorý je daný stupňom polynómu (11):

$$H_1 = [p_{n-1}] \quad (12)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ p_n & p_{n-2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$H_n = \begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ p_n & p_{n-2} & \dots & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_n & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & p_4 & \dots & p_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

O stabilite polynómu (11) možno hovoriť vtedy a len vtedy, ak platí:

$$\det H_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

čo sa týka $\det H_n$, ten možno podľa posledného stĺpca rozložiť a tým sa podmienka $\det H_n > 0$ zjednoduší do tvaru podmienky:

$$\det H_n = p_0 \det H_{n-1} \quad (16)$$

V prípade, že budeme uvažovať charakteristický polynóm (11) s neurčitosťami, potom pre analýzu stability rodiny charakteristických polynómov (11) platí, že táto je stabilná vtedy a len vtedy, ak sú splnené tieto podmienky:

- a) $\exists q_1 \in Q$, že polynóm * je stabilný,
- b) $\det H_n(q) \neq 0$ pre vektor $q_1 \in Q$.

Majme polynóm (4) a k tomuto polynómu sa pokúsime určiť tzv. *maximálny interval stability* $Q_{\max} = \langle q_{\min}^-; q_{\max}^+ \rangle$, teda taký, pre ktorý bude platiť, že polynóm $p(s, q)$ je stabilný pre všetky $q \in Q_{\max}$.

Riešenie tohto problému spočíva v princípe singularity Hurwitzovej matice:

$$H(p) = H(p_0(s) + qp_1(s)) = H(p_0(s)) + qH(p_1(s)) = H(p_0) + qH(p_1) \quad (17)$$

na ktorom je založená *Bialasova veta*, ktorej podstatou je tvrdenie, že maximálny interval pre robustnú stabilitu je určený:

$$q_{\max}^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(-H^{-1}(p_0)H(p_1))} \quad (18)$$

$$q_{\min}^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(-H^{-1}(p_0)H(p_1))} \quad (19)$$

λ_{\max}^+ - maximálne reálne kladné vlastné číslo matice $(-H^{-1}(p_0)H(p_1))$

λ_{\min}^- - minimálne reálne kladné vlastné číslo matice $(-H^{-1}(p_0)H(p_1))$

Poznámka: v prípade, že niektoré z týchto čísel neexistuje, potom sa príslušná hranica považuje za kladné, resp. záporné nekonečno.

Platí totiž:

$$\begin{aligned} p(s, q) &= p_0(s) + qp_1(s) \Rightarrow H(p) = H(p_0) + qH(p_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \det H(p) = \det H(p_0) \det (I + qH(p_0)^{-1}H(p_1)) = \\ &= q \det H(p_0) \det (rI - (-H(p_0)^{-1}H(p_1))), \quad r = 1/q \end{aligned} \quad (20)$$

Príklad 3

Chceme určiť interval stability pre polynóm:

$$p(s, q) = s^4 + 15s^3 + 180s^2 + 1300s + 3000 + q(s^2 + 3,7s + 3,4) \quad (21)$$

zadefinujeme Hurwitzove matice $H(p_0) + qH(p_1)$ podľa schémy (14):

$$H(p_0) = \begin{bmatrix} 15 & 1300 & 0 & 0 \\ 1 & 180 & 3000 & 0 \\ 0 & 15 & 1300 & 0 \\ 0 & 1 & 180 & 3000 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$H(p_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3,7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3,4 & 0 \\ 0 & 0 & 3,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3,4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

následne vytvoríme maticu $M = (-H^{-1}(p_0)H(p_1))$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.8652 & -7.5843 & 0 \\ 0 & -0.0128 & 0.0875 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0039 & 0 \\ 0 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0011 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Výpočtom v prostredí MATLAB zistíme jej vlastné čísla:

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0011 \\ -0.0026 \\ -0.0141 \end{bmatrix} \quad (25)$$

a z týchto určíme maximálny interval stability:

$$q = \begin{bmatrix} Inf \\ -882.3529 \\ -386.0005 \\ -70.9475 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$q_{\max}^+ = +\infty$$

$$q_{\min}^- = -70.9475$$

$$Q_{\max} = \langle -70.9475; +\infty \rangle$$

Program :

```
p0 = s^4 + 15*s^3 + 180*s^2 + 1300*s + 3000;
p1 = s^2 + 3.7*s + 3.4;
H0 = hurwitz(p0);
H1 = hurwitz(p1,4);
M = -(H0^(-1))*H1;
l = eig(M)
q = 1./eig(M)
```

Celý výpočet sa dá zjednodušene urobiť aj pomocou funkcie „stabint“:

Program :

```
[lmin,lmax] = stabint(p0,p1)
```

3.1.1. Vyššie mocniny parametra q

Pre prípad polynómu v tvare:

$$p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s) + q^2 p_2(s) + \dots + q^m p_m(s) \quad (27)$$

používame pre výpočet maximálneho intervalu stability Q_{\max} postup, v ktorom pre:

$$H(s, q) = H(p_0) + qH(p_1) + \dots + q^m H(p_m) \quad (28)$$

zavedieme maticu:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -H_0^{-1}H_m & -H_0^{-1}H_{m-1} & -H_0^{-1}H_{m-2} & \dots & -H_0^{-1}H_2 & -H_0^{-1}H_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

pričom interval je definovaný tak ako pre prípad jednorozmerného parametra q :

$$q_{\max}^+ = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(M)} \quad (30)$$

$$q_{\min}^- = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(M)} \quad (31)$$

3.1.2. Konvexná kombinácia a smer

Majme neurčitý polynóm v tvare $p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s)$ a tiež $Q = \langle q^-, q^+ \rangle$. Získame tak rodinu polynómov, ktorá sa vyznačuje dvoma extrémami $p(s, q^-)$ a $p(s, q^+)$. Ak zvolíme s množiny Q nejaké q , potom môžeme tento člen danej rodiny polynómov považovať za bod, ktorý leží na úsečke spájajúcej $p(s, q^-)$ a $p(s, q^+)$ v priestore polynómov.

Polynóm $p(s, q) = p_0(s) + qp_1(s)$ je možné vyjadriť ako *konvexnú kombináciu* $p(s, q^-)$ a $p(s, q^+)$ v prípade, že zavedieme parameter

$$\lambda = \frac{q^+ - q}{q^+ - q^-} \in \langle 0; 1 \rangle \quad (32)$$

Potom:

$$\tilde{p}(s, q) = \lambda p(s, q^-) + (1 - \lambda) p(s, q^+) \quad (33)$$

Ide vlastne o to, že pre ľubovoľnú hodnotu $\lambda \in \langle 0;1 \rangle$ zodpovedá nejaké $q \in \langle q^-, q^+ \rangle$, pričom platí

$$\tilde{p}(s, \lambda) = p(s, q) \quad (34)$$

Z toho vyplýva, že môžeme pracovať ako s pôvodnou rodinou polynómov, tak aj s ekvivalentnou rodinou $\tilde{P} = \{\tilde{p}(., \lambda) : \lambda \in \langle 0;1 \rangle\}$, ktorá je definovaná:

$$\tilde{p}(s, \lambda) = \lambda \tilde{p}_0(s) + (1 - \lambda) \tilde{p}_1(s) \quad (35)$$

$\tilde{p}_0(s)$ a $\tilde{p}_1(s)$ sú pevne dané. Z uvedeného vyplýva, že $P = \tilde{P}$, ale polynómy pevne späté s rodinou P nie sú rovnaké ako polynómy späté s rodinou \tilde{P} .

Našu rodinu polynómov môžeme popísať ešte jedným spôsobom a to ako smer:

$$p(s, \mu) = f(s) + \mu g(s); \quad \mu \in \langle 0;1 \rangle \quad (36)$$

kde:

$$\begin{aligned} f(s) &= p_0(s) + q^- p_1(s) \\ g(s) &= (q^+ - q^-) p_1(s) \\ \mu &= \frac{q - q^-}{q^+ - q^-} \end{aligned} \quad (37)$$

je však otázne, či stabilita hraničiacich vrcholov $p(s, q^-)$ a $p(s, q^+)$ zabezpečuje aj stabilitu celého systému.

Príklad 4

Majme polynóm:

$$\begin{aligned} p(s, q) &= 20s^3 + (2 + 2q)s^2 + (12 + 4q)s + 1.14 + 2q = \\ &= 20s^3 + 2s^2 + 12s + 1.14 + q(2s^2 + 4s + 2); \end{aligned} \quad q \in \langle 0;1 \rangle \quad (38)$$

v ktorom prešetíme stabilitu vo vrcholoch, teda pre $q = 0$ a pre $q = 1$:

$$\begin{aligned} p(s, 0) &= 20s^3 + 2s^2 + 12s + 1.14 \\ p(s, 1) &= 20s^3 + 4s^2 + 16s + 3.14 \end{aligned} \quad (39)$$

tieto sú stabilné, ale ak prešetíme stred systému ($q = 0.5$):

$$p(s, 0.5) = 20s^3 + 3s^2 + 14s + 2.14 \quad (40)$$

zistíme, že je nestabilný. To dokazuje, že stabilita hraničiacich vrcholov nezabezpečuje stabilitu celého systému.

Program :

```
roots([20 2 12 1.14])
```

```
roots([20 4 16 3.14])
```

```
roots([20 3 14 2.14])
```

4. Intervalové neurčitosti

Zatiaľ čo jednoparametrická neurčitosť nadobúda len jednu konkrétnu hodnotu, neurčitosť intervalového charakteru nadobúda rôzne hodnoty. Aj keď predstava o tom, že neurčitosť nadobúda rôzne hodnoty, sa môže zdať zovšeobecnená či dokonca zjednodušená, treba však podotknúť istý predpoklad, ktorý musí intervalová neurčitosť spĺňať.

Nutným predpokladom je, aby intervalová neurčitosť mala nezávislú štruktúru.

V prípade neurčitého polynómu

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n \rho_i(q) s^i \quad (41)$$

má tento nezávislú štruktúru neurčitosti v prípade, že každá zložka q_i z q vstupuje len do jedného koeficienta.

V prípade rodiny polynómov [2]

$$P = \{p(\cdot; q) : q \in Q\} \quad (42)$$

môžeme tento nazvať intervalovým polynómom ak:

- a) má nezávislú štruktúru neurčitosti
- b) každý koeficient je spojitou funkciou q
- c) Q je kváder

Vyzerá to napríklad takto:

$$\begin{aligned} p_1(s, q) &= (2 + 2q_2)s^2 + (1 + q_1)s + (10 + 10q_0); \quad q_0 \in \langle -6; 2 \rangle, q_1 \in \langle 3; 5 \rangle, q_2 \in \langle -7; 10 \rangle \\ p_2(s, q) &= 2s^2 + (1 + q_1 + q_2)s + (10 + 10q_0); \quad q_i \in \langle 0; 5 \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

pričom v druhom polynóme pri koeficiente s vidieť redundanciu, ktorá nie je ničím výnimočná.

Existuje aj zjednodušený zápis intervalového polynómu:

$$p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad (44)$$

napríklad:

$$p(s, q) = [-1; 1]s^4 + [-2; 2]s^3 + [-3; 3]s^2 + [-4; 4]s + [-5; 5] \quad (45)$$

4.1. Charitonovova veta

Síce Charitonovova veta bola publikovaná už v roku 1978 v ruskej technickej literatúre, zvyšku sveta ju predstavili až neskôr Barmish a Bialas.

V odborných kruhoch považovaná za míľnik v analýze stability robustnosti systémov vyznačujúcich sa parametrickými neurčitosťami hovorí, že daný intervalový polynóm, ktorý má invariantný stupeň je vtedy a len vtedy stabilný, ak stabilitu vykazujú všetky štyri Charitonovove polynómy.

Upúšťa sa preto od nutnosti testovať stabilitu všetkých existujúcich hraničných možností.

Konštrukcia Charitonovových polynómov je nasledovná [4]:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \dots \\
 K_2 &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \dots \\
 K_3 &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \dots \\
 K_4 &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{46}$$

alebo:

$$\begin{aligned}
 &+ + - - + + \dots \\
 &- + + - - + \dots \\
 &- - + + - - \dots \\
 &+ - - + + - \dots
 \end{aligned} \tag{47}$$

Príklad 5

Pokúsime sa zistiť, či je daný polynóm stabilný

$$p(s, q) = [0.5; 1]s^4 + [1; 2]s^3 + [1.5; 3]s^2 + [2; 4]s + [2.5; 5] \tag{48}$$

Na základe uvedenej konštrukcie (46) alebo (47) vytvoríme Charitonovove polynómy:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 5 + 4s + 1.5s^2 + s^3 + s^4 \\
 K_2 &= 2.5 + 4s + 3s^2 + s^3 + 0.5s^4 \\
 K_3 &= 2.5 + 2s + 3s^2 + 2s^3 + 0.5s^4 \\
 K_4 &= 5 + 2s + 1.5s^2 + 2s^3 + s^4
 \end{aligned} \tag{49}$$

Po výpočte koreňov polynómov:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{-0.6399 \pm 0.3764i; 0.2399 \pm 0.5526i\} \\
K_2 &= \{-0.7710 \pm 0.5385i; -0.0290 \pm 0.4747i\} \\
K_3 &= \{0 \pm i; -0.4 \pm 0.2i\} \\
K_4 &= \{0.2984 \pm 0.69096i; -0.4894 \pm 0.4311i\}
\end{aligned} \tag{50}$$

je vidieť, že stabilný je len jeden (K_2). Na základe Charitonovovej vety vyplýva, že polynóm (48) nie je stabilný. Výpočet stability pomocou Charitonovovej vety je možné uskutočniť aj v Matlabe v prostredí *Polynomial toolbox* pomocou príkazu *kharit*.

Program :

```

pmi = 0.5 * s^4 + s^3 + 1.5 * s^2 + 2 * s + 2.5
pma = s^4 + 2 * s^3 + 3 * s^2 + 4 * s + 5
[sta, K1, K2, K3, K4] = kharit(pmi, pma)

```

Výsledok :

```

sta = 0
K1 = 2.5 + 2s + 3s^2 + 2s^3 + 0.5s^4
K2 = 5 + 4s + 1.5s^2 + s^3 + s^4
K3 = 5 + 2s + 1.5s^2 + 2s^3 + s^4
K4 = 2.5 + 4s + 3s^2 + s^3 + 0.5s^4

```

Výsledkom použitého príkazu je tvrdenie o stabilite analyzovaného polynómu (0 = nestabilný, 1 = stabilný) a vykreslenie Charitonovových polynómov.

4.1.1. Charitonovove obdĺžniky

Špeciálnym prípadom množiny hodnôt, ktorá zastáva významnú úlohu pri riešení problematiky robustnej stability sú *Charitonovove obdĺžniky*. Množina hodnôt intervalového polynómu je dvojrozmerná množina všetkých komplexných hodnôt, ktoré daný intervalový polynóm nadobúda v prípade, že komplexnú premennú s nahradíme $j\omega$ s jedným pevne daným reálnym ω_0 a všetky koeficienty necháme prebiehať ich intervalmi. Pre intervalový polynóm $p(s, q) = \sum_{i=1}^n [q_i^-, q_i^+] s^i$ a jednu pevnú kruhovú frekvenciu ω_0 je množina hodnôt vždy obdĺžnik (v špeciálnych prípadoch to môže byť aj úsečka), ktorý má strany rovnobežné s osami a ktorý sa nazýva *Charitonovov obdĺžnik* pre frekvenciu ω_0 . Dôkaz tohto faktu nie je vôbec komplikovaný [2]. Do intervalového polynómu:

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n q_i s^i, \quad q_i \in [q_i^+; q_i^-] \quad (51)$$

dosadíme $s = j\omega_0$ a rozdelíme na reálnu a imaginárnu časť:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) &= \sum_{j \text{ párna}} q_i (j\omega_0)^i = q_0 - q_2 \omega_0^2 + q_4 \omega_0^4 - q_6 \omega_0^6 + \dots \\ \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) &= \frac{1}{j} \sum_{j \text{ nepárna}} q_i (j\omega_0)^i = q_1 \omega_0 - q_3 \omega_0^3 + q_5 \omega_0^5 - \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Pretože každé q_i vstupuje len do jedného koeficienta, môžeme skúmať každú časť zvlášť.

Reálna zložka je vždy medzi:

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) = q_0^- - q_2^+ \omega_0^2 + q_4^- \omega_0^4 - q_6^+ \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) \quad (53)$$

a

$$\max_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) = q_0^+ - q_2^- \omega_0^2 + q_4^+ \omega_0^4 - q_6^- \omega_0^6 + \dots = \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) \quad (54)$$

Znamienko ω_0 v tomto prípade nie je dôležité, pretože všetky mocniny sú párne. Na druhej strane ak ide o imaginárnu zložku, musíme už dbať na znamienko. Pre $\omega_0 \geq 0$ môžeme písať:

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = q_1^- \omega_0 - q_3^+ \omega_0^3 + q_5^- \omega_0^5 - q_7^+ \omega_0^7 + \dots = \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) \quad (55)$$

a pre $\omega_0 \leq 0$:

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = q_1^+ \omega_0 - q_3^- \omega_0^3 + q_5^+ \omega_0^5 - q_7^- \omega_0^7 + \dots = \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) \quad (56)$$

Analogicky sa postupuje v prípade, ak sa analyzuje maximum. Pre imaginárnu časť v takom prípade:

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{pre } \omega_0 \geq 0 \\ \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{pre } \omega_0 \leq 0 \end{cases} \quad (57)$$

$$\max_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \begin{cases} \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) & \text{pre } \omega_0 \geq 0 \\ \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) & \text{pre } \omega_0 \leq 0 \end{cases} \quad (58)$$

Ak s využitím získaných minimálnych a maximálnych hodnôt vykreslíme do komplexnej roviny príslušné štyri body pre zvolenú frekvenciu, dostaneme obdĺžnikový objekt $p(j\omega_0, Q)$, ktorého vrcholy zodpovedajú štyrom Charitonovovým polynómom. Ak predpokladáme, že $\omega_0 \geq 0$, tak vrcholom obdĺžnika zodpovedajú nasledujúce rovnice:

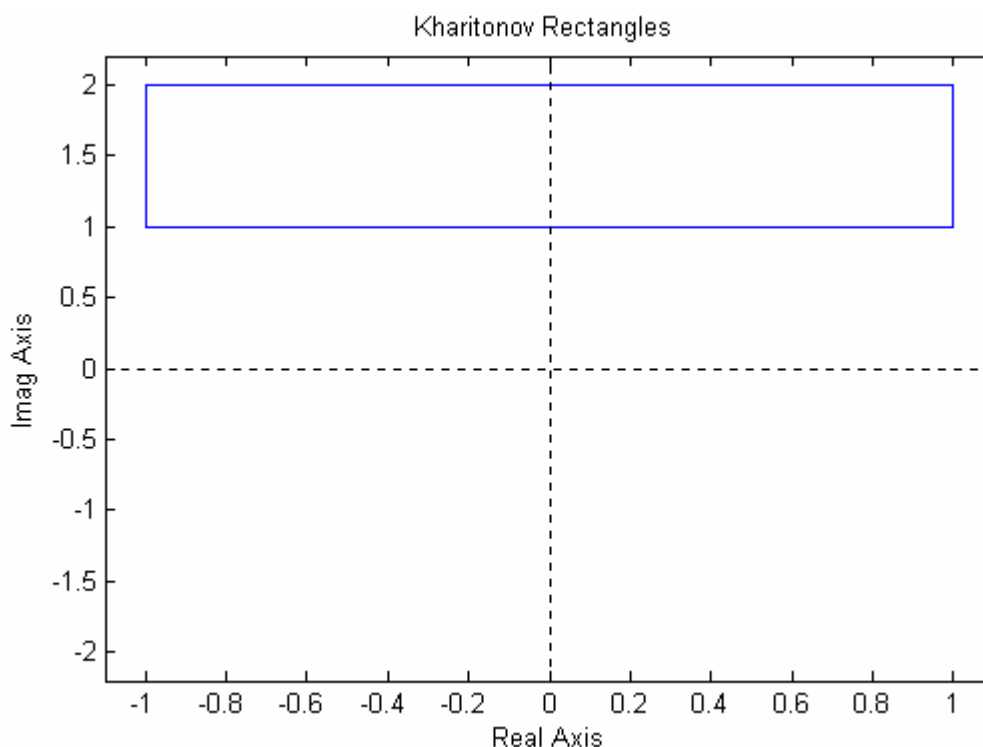
$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = \\
 \text{ľavý horný vrchol: } &= \operatorname{Re} K_4(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = \\
 &= K_4(j\omega_0)
 \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_4(j\omega_0) = \\
 \text{pravý horný vrchol: } &= \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_2(j\omega_0) = \\
 &= K_2(j\omega_0)
 \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} K_2(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = \\
 \text{pravý dolný vrchol: } &= \operatorname{Re} K_3(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = \\
 &= K_3(j\omega_0)
 \end{aligned} \tag{61}$$

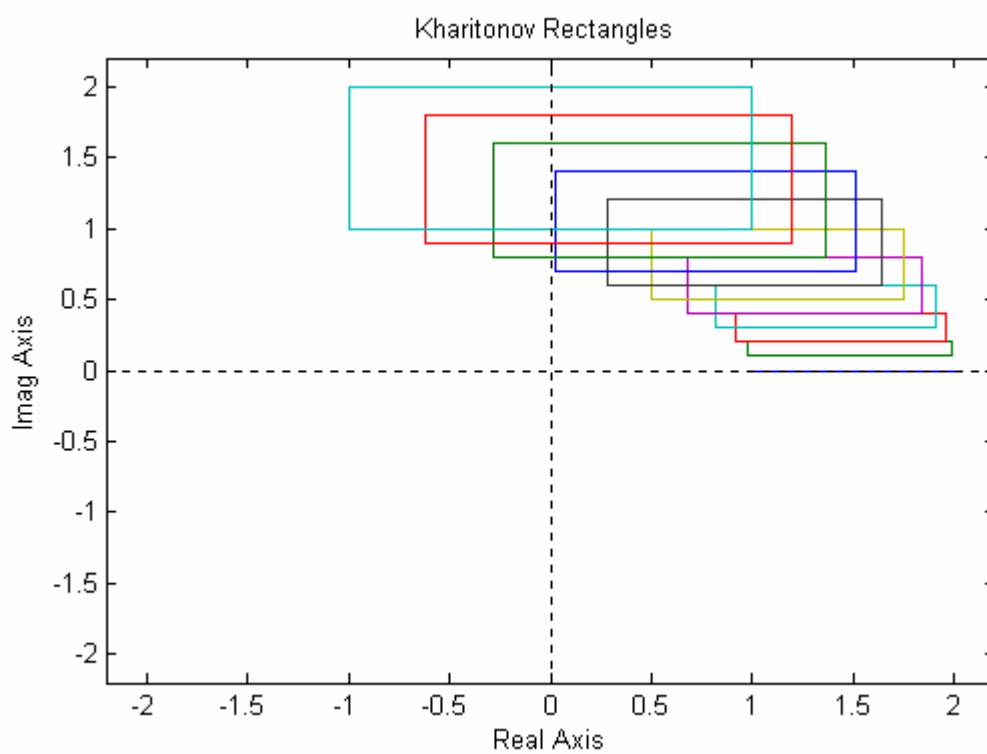
$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_3(j\omega_0) = \\
 \text{ľavý horný vrchol: } &= \operatorname{Re} K_1(j\omega_0) + j \operatorname{Im} K_1(j\omega_0) = \\
 &= K_1(j\omega_0)
 \end{aligned} \tag{62}$$

Zápis pôsobí komplikovane, no grafické riešenie tejto situácie znázorňuje Charitonovov obdĺžnik intervalového polynómu pre kruhovú frekvenciu $\omega_0 = 0.1$.



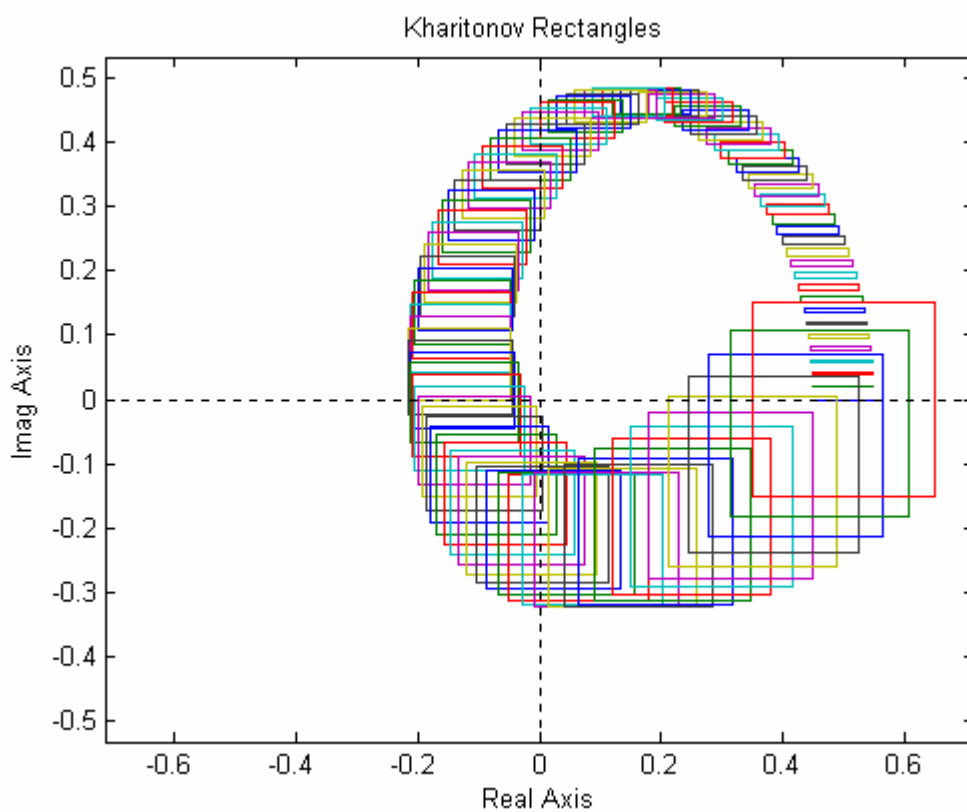
Obr. 3 - Charitonovov obdĺžnik pre jednu hodnotu $\omega = 0.1$

Kruhovú frekvenciu ako takú môže nadobúdať rôzne hodnoty, čo spôsobí pri grafickom zobrazení Charitonovových obdĺžnikov dojem, že tieto sa pohybujú:



Obr. 4 - Charitonovov obdĺžnik pre interval $\omega \in (0; 0.3)$

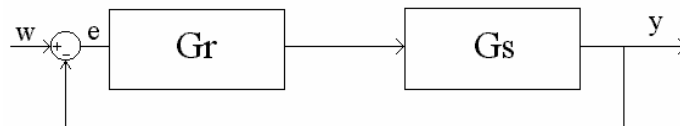
iný prípad:



Obr. 5 - Charitonovov obdĺžnik pre interval $\omega \in (0; 1)$

4.1.2. Testovanie robustnosti regulačného obvodu

Uvažujme uzavretý regulačný obvod



Obr. 6 – Uzavretý regulačný obvod

kde G_S je riadený systém s intervalovými neurčitosťami v tvare

$$G_S = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + 2} \quad (63)$$

kde $b_0 \in \langle 3.9, 4.3 \rangle$, $b_1 \in \langle 2.1, 8.5 \rangle$ a $a_1 \in \langle 1.4, 5.2 \rangle$ a G_R je regulátor v tvare:

$$PI : G_R = Z_R + \frac{Z_R}{T_I s} \quad (Z_R = 0.2, T_I = 0.85) \quad (64)$$

Potom úlohou je zistiť, či daný URO je robustne stabilný.

Podľa schémy (47), ktorej výsledkom sú Charitonovove polynómy, môžeme skonštruovať na základe intervalov všetky možné kombinácie prenosovej funkcie.

Celý výpočet ako aj overenie stability boli vykonané v prostredí *Matlab* a to v konkrétnom algoritme. Tento algoritmus po zadaní všetkých tvarov prechodovej funkcie a regulátora najprv vypočíta uzavreté regulačné obvody pre všetky kombinácie prechodovej funkcie.

Napr. uvažujme jeden z prenosov a regulátor (64):

$$G_{11} = \frac{8.5s + 4.3}{s^2 + 5.2s + 2} \text{ a } G_R = \frac{0.2s + 0.235}{s} \quad (65)$$

Potom uzavretý regulačný obvod bude v tvare:

$$s^3 + 6.9s^2 + 4.6s + 1.01 = 0 \quad (66)$$

Následovne na základe zistených hodnôt Charitonovových polynómov overuje robustnú stabilitu pomocou príkazu *kharit*.

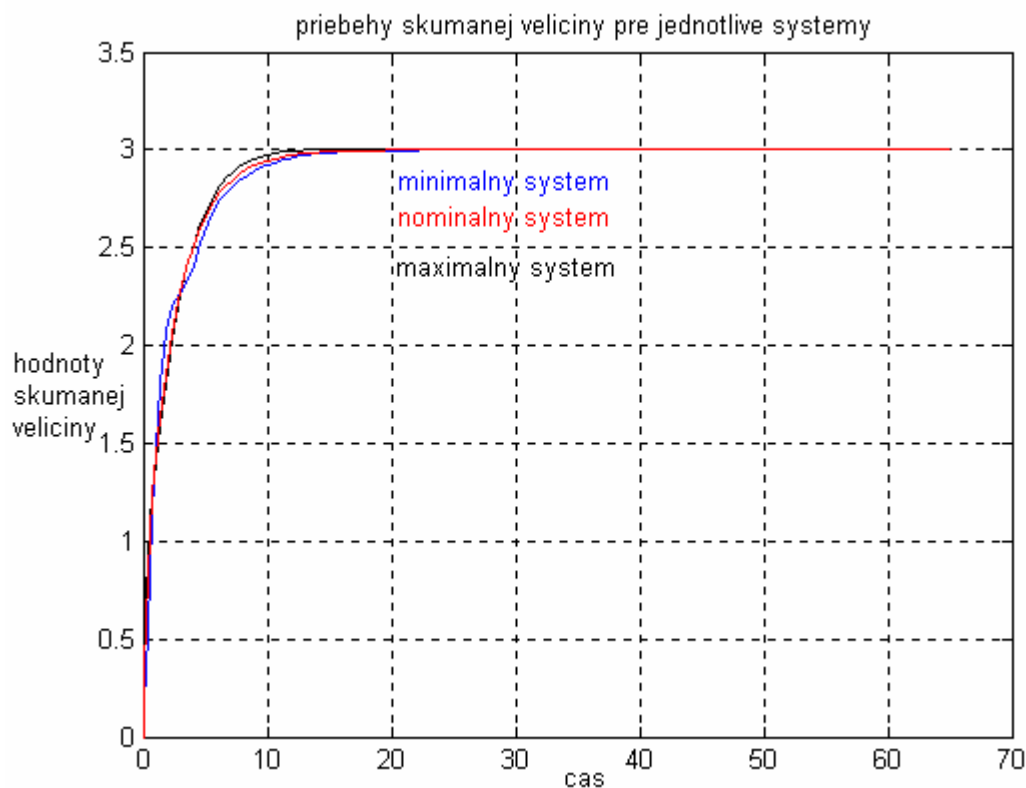

```

Program :
g11 = tf([8.5 4.3],[1 5.2 2])%f - cia systemu (11)
gr = tf([0.2 0.235],[1 0]);%regulator
chr = 1 + g11*gr;%chr
[chrb11, chra11] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb11)
g12 = tf([8.5 4.3],[11.4 2])%f - cia systemu (12)
chr = 1 + g12*gr;%chr
[chrb12, chra12] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb12)
g21 = tf([2.1 4.3],[1 5.2 2])%f - cia systemu (21)
chr = 1 + g21*gr;
[chrb21, chra21] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb21)
g22 = tf([2.1 4.3],[11.4 2])%f - cia systemu (22)
chr = 1 + g22*gr;%chr
[chrb22, chra22] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb22)
g31 = tf([2.1 3.9],[1 5.2 2])%f - cia systemu (31)
chr = 1 + g31*gr;%chr
[chrb31, chra31] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb31)
g32 = tf([2.1 3.9],[11.4 2])%f - cia systemu (32)
chr = 1 + g32*gr;%chr
[chrb32, chra32] = tfdata(chr, 'v');
roots(chrb32)
%URO1
p1 = [chrb11; chrb12; chrb21; chrb21; chrb31; chrb32]
h1 = max(p1), d1 = min(p1)
pmin1 = mat2pol(d1), pmax1 = mat2pol(h1)
[sta1, K11, K12, K13, K14] = kharit(pmin1, pmax1)

```

Výsledkom algoritmu je vypísanie hraničných funkcií regulovaného systému, ďalej spoločný intervalový polynóm ako aj jeho príslušné Charitonovove polynómy s tvrdením o prípadnej stabilite, resp. nestabilite. Na základe výsledkov použitého algoritmu je URO robustne stabilný.

Celý problém sa dá overiť grafickou cestou na základe schémy (obr. 6) v prostredí *Simulink* (obr. 7), kde je vykreslený priebeh riadenia pre maximálny, minimálny a nominálny riadený systém.



Obr. 7 – grafické znázornenie robustnej stability navrhnutého systému

4.2. Veta o vylúčení nuly

Rodina intervalových polynómov $P = \{p(., q) : q \in Q\}$, ktorá má invariantný stupeň a aspoň jeden stabilný člen $p(s, q^0)$ je robustne stabilná vtedy a len vtedy, ak Charitonovove obdĺžniky nezasahujú do počiatku komplexnej roviny pre všetky nezáporne frekvencie, t.j. $0 \notin p(j\omega, Q) \quad \forall \omega \geq 0$ [2]. Táto veta o vylúčení nuly predstavuje s princípom množiny hodnôt dôležitý nástroj na overenie robustnej stability pre neurčitosti. Ak by obdĺžniky zahrňovali nulový bod, potom by v danej rodine polynómov musel existovať taký, ktorý by mal koreň na imaginárnej osi, teda na hranici stability.

Príklad 6

Majme intervalový polynóm v tvare:

$$p(s, q) = [1; 5]s^4 + [5, 3; 6]s^3 + [11; 15]s^2 + [9, 4; 10]s + [2, 3; 3] \quad (67)$$

Pokúsime sa určiť robustnú stabilitu tohto polynómu grafickou metódou na základe vety o vylúčení nuly.

Príslušné Charitonovove polynómy:

$$\begin{aligned} K1 &= s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 9.4s + 2.3 \\ K2 &= 5s^4 + 5.3s^3 + 11s^2 + 10s + 3 \\ K3 &= 5s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 9.4s + 3 \\ K4 &= s^4 + 5.3s^3 + 15s^2 + 10s + 2.3 \end{aligned} \quad (68)$$

Nasleduje premena týchto polynómov na komplexné náhradou $s = j\omega$ a zobrazenie zodpovedajúcich Charitonovových obdĺžnikov v komplexnej rovine pre zvolené hodnoty ω .

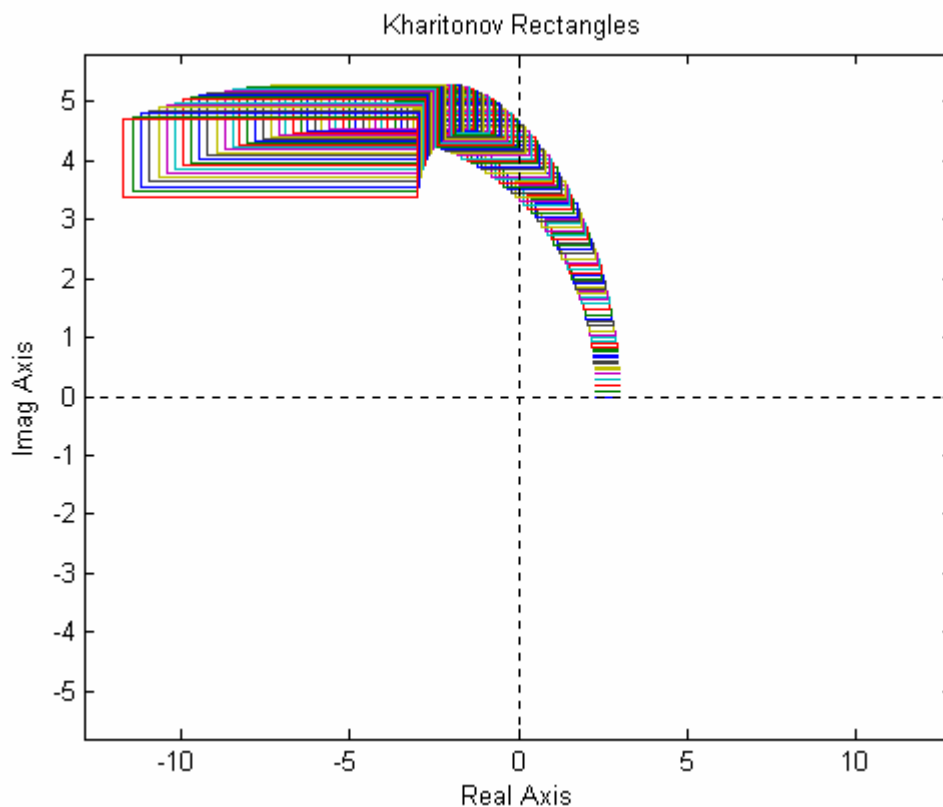
Z nasledujúceho obrázka (obr. 8), keďže Charitonovove obdĺžniky neprechádzajú nulou, je zreteľná robustná stabilita daného intervalového polynómu.

Program :

```
pmin = 2.3 + 9.4s + 11s^2 + 5.3s^3 + s^4
```

```
pmax = 3 + 10s + 15s^2 + 6s^3 + 5s^4
```

```
khplot(pmin, pmax, 0 : .01 : 1)
```



Obr. 8 - Grafické riešenie robustnej stability int. polynómu

Príklad 7

Majme intervalový polynóm v tvare:

$$p(s, q) = [0;1]s^3 + [0,3;0,5]s^2 + [0,6;0,8]s + [0,4;0,6] \quad (69)$$

Úlohou je určiť robustnú stabilitu a to grafickou metódou, teda vykreslením Charitonovových obdĺžnikov.

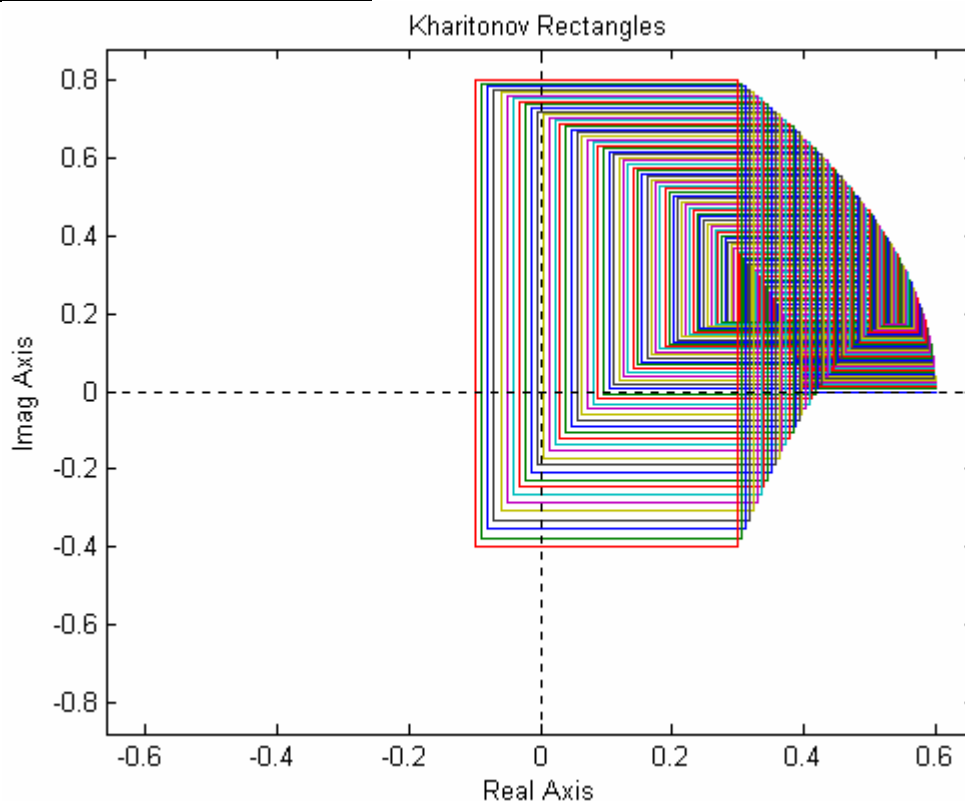
Najprv nahradíme $s = j\omega$:

$$p(j\omega, q) = [[0;1](j\omega)^3 + [0,3;0,5](j\omega)^2 + [0,6;0,8]j\omega + [0,4;0,6]] \quad (70)$$

Nasleduje vykreslenie Charitonovových obdĺžnikov pre $0 \leq \omega \leq 1$ s krokom $\Delta\omega = 0,01$ pomocou *Polynomial toolboxu*:

Program :

```
pmin = 0.4 + 0.6*s + 0.3*s^2
pmax = 0.6 + 0.8*s + 0.5*s^2 + s^3
khplot(pmin,pmax,0:.01:1)
```



Obr. 9 - Grafické riešenie robustnej stability int. polynómu pre príklad 7

Z výsledku (obr. 9) sa nedá jednoznačne určiť, či niektorý z obdĺžnikov prechádza, alebo neprechádza počiatkom $(0, j0)$, preto tento príklad skúsime riešiť pomocou príkazu *kharit*:

Program :

$pmin = 0.4 + 0.6 * s + 0.3 * s^2$

$pmax = 0.6 + 0.8 * s + 0.5 * s^2 + s^3$

$[sta, K1, K2, K3, K4] = kharit(pmin, pmax)$

Výsledok tohto algoritmu je vyslovenie o stabilite, ktoré hovorí, že daný systém je robustne nestabilný.

Príklad 8

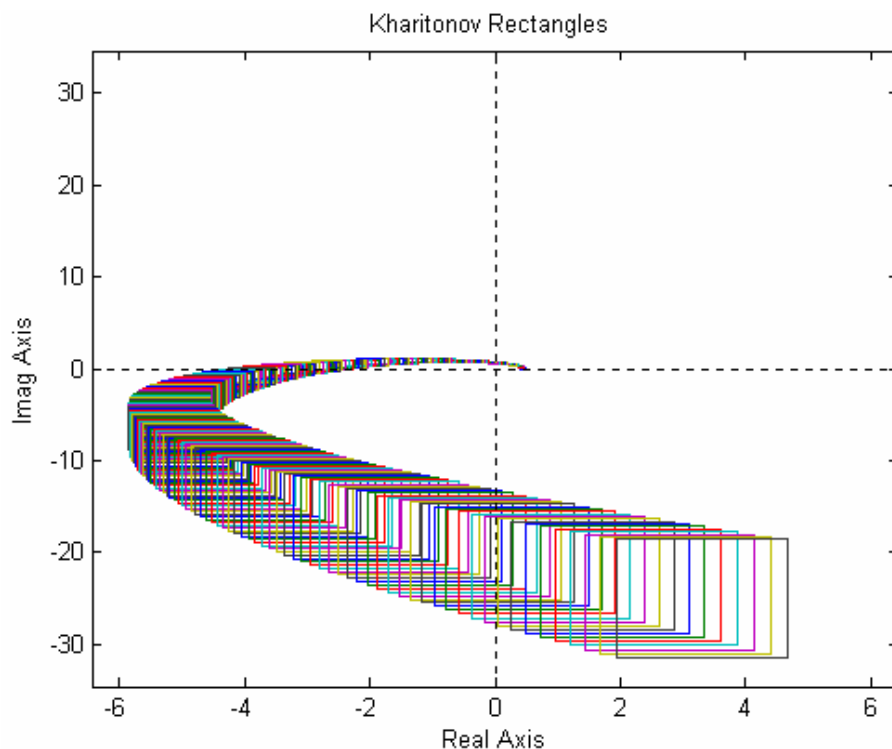
Uvažujme intervalový polynóm štvrtého stupňa so vzájomne nezávislými koeficientmi

$$p(s, q) = [0; 1]s^3 + [0, 3; 0, 5]s^2 + [0, 6; 0, 8]s + [0, 4; 0, 6] \quad (71)$$

Určíme jeho robustnú stabilitu grafickou cestou vykreslením Charitonovových obdĺžnikov a overme vetu o vylúčení nuly zistením koreňov Charitonovových polynómov.

Množina hodnôt príslušného komplexného intervalového polynómu $p(j\omega, q)$ pre kruhové frekvencie $\omega = [0 : 0,01 : 2,3]$ je znázornená na obrázku (obr. 10).

Podľa vety o vylúčení nuly na obrázku (obr. 10) je daný intervalový polynóm robustne stabilný. Grafický dôkaz robustnej stability tohto polynómu potvrdzuje aj príkaz *kharit* (*sta* = 1) a poloha koreňov Charitonovových polynómov, z ktorých každý je stabilný.



Obr. 10 - Grafické riešenie robustnej stability int. polynómu pre príklad 8

Príslušné Charitonovove polynómy sú:

$$\begin{aligned}
 K1 &= s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2,2s + 0,4 \\
 K2 &= s^4 + 2s^3 + 4,5s^2 + 2,5s + 0,5 \\
 K3 &= s^4 + 3s^3 + 4,5s^2 + 2,2s + 0,5 \\
 K4 &= s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 2,5s + 0,4
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

Korene týchto polynómov sú:

$$\begin{array}{llll}
 K1 = & K2 = & K3 = & K4 = \\
 -1.2297 + 1.4303i & -0.6673 + 1.7385i & -1.1855 + 1.1944i & -0.7107 + 1.8906i \\
 -1.2297 - 1.4303i & -0.6673 - 1.7385i & -1.1855 - 1.1944i & -0.7107 - 1.8906i \\
 -0.2703 + 0.1984i & -0.3327 + 0.1830i & -0.3145 + 0.2786i & -0.2893 + 0.1197i \\
 -0.2703 - 0.1984i & -0.3327 - 0.1830i & -0.3145 - 0.2786i & -0.2893 - 0.1197i
 \end{array}
 \tag{73}$$

Program :

```

pmin = pol([0.4 2.2 4.5 2 1],4)
pmax = pol([0.5 2.5 5 3 1],4)
khplot(pmin, pmax, 0 : .01 : 2.3)
[sta, K1, K2, K3, K4] = kharit(pmin, pmax)
roots(K1)
roots(K2)
roots(K3)
roots(K4)

```

5. Záver

V tejto práci som sa venoval teoretickému prehľadu neurčitostí vyskytujúcich sa v systémoch robustného riadenia. Uviedol som základné princípy vzniku neurčitostí, ich členenia a v bližšom som sa venoval neurčitostiam jednoparametrickým a intervalovým. Pokúsil som sa čo možno najvýstižnejšie objasniť danú problematiku a na jednoduchých príkladoch demonštrovať analýzu a riešenie systémov vyznačujúcich sa neurčitosťami.

Literatúra

- [1] Hurák, Z., Robustní řízení, Katedra řídicí techniky, Fakulta elektrotechnická ČVUT v Praze, 2005
- [2] Matušů, R., Algoritmy robustního řízení pro systémy s parametrickými neurčitostmi, IŘPI, FT, UTB ve Zlíně, září 2005
- [3] Veselý, V., Harsányi, L., Robustné riadenie dynamických systémov, STU BA, 2007
- [4] www.polyx.com/_robust