

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE
ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A
MATEMATIKY**

OPTIMÁLNE RIADENIE PROCESOV

BAKALARÁSKA PRÁCA

FCHPT-5415-50937

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE
ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A
MATEMATIKY**

OPTIMÁLNE RIADENIE PROCESOV

BAKALARÁSKA PRÁCA

FCHPT-5415-50937

Študijný program: Automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve

Číslo a názov študijného odboru: 5.2.14 automatizácia, 5.2.25 priemyselné inžinierstvo

Školiace pracovisko: Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, STU

Vedúci záverečnej práce/školiťel: Ing. Radoslav Paulen



ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka: **Lívia Petáková**
ID študenta: **50937**
Študijný program: **automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve**
Kombinácia študijných odborov: **5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo**
Vedúci práce: **Ing. Radoslav Paulen**

Názov práce: **Optimálne riadenie procesov**

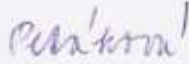
Špecifikácia zadania:

Práca sa zaoberá návrhom optimálneho riadenia dynamických systémov. Prvá etapa predstavuje štúdium rôznych metód dynamickej optimalizácie a druhá etapa sa týka aplikácie zvolenej metódy na výpočet niekoľkých úloh pre optimálne riadenie.

Rozsah práce: **40**

Riešenie zadania práce od: **15. 02. 2010**

Dátum odovzdania práce: **22. 05. 2010**


Lívia Petáková
študentka




prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska


prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Abstrakt

Predkladaná práca zaoberá návrhom optimálneho riadenia dynamických systémov. Prvá časť predstavuje štúdium rôznych metód dynamickej optimalizácie. V druhej časti sa zaoberáme aplikáciou zvolených metód na výpočet optimálneho riadenia zvolených procesov.

Kľúčové slová: optimálne riadenie, dynamická optimalizácia, iterácia hraničnej podmienky

Abstract

The present work deals with the design of optimal control of dynamic systems. The first part presents the study of different methods of dynamic optimization. The second part deals with the application of selected methods for calculating the optimal control of chosen processes.

Keywords: optimal control, dynamic optimization, boundary condition iteration

Ďakujem svojmu vedúcemu bakalárskeho projektu Ing. Radoslavovi Paulenovi za pomoc a rady, ktoré mi poskytol pri vypracovaní tohto projektu.

Obsah

1	Úvod.....	8
2	Optimálne riadenie procesov pri otvorenej slučke.....	10
2.1	Formulácia problému.....	10
2.1.1	Matematický opis	10
2.1.2	Obmedzenia.....	11
2.1.3	Zadefinovanie funkcionálu	12
3	Optimálne riadenie procesov	13
3.1	Úloha optimálneho riadenia - princíp minima	13
3.2	Plášťový výmenník tepla	17
4	Metódy riešenia úloh optimálneho riadenia procesov	21
4.1	Analytické metódy	21
4.1.1	Dynamické programovanie	21
4.1.2	Pontrjaginov princíp minima.....	23
4.1.3	Variačný počet	24
4.2	Numerické metódy.....	25
4.2.1	Priame numerické metódy	25
4.2.2	Nepriame numerické metódy	26
5	Časovo optimálne riadenie.....	27
6	Optimálne riadenie plášťového výmenníka tepla	31
7	Záver	35
	Literatúra	36

1 Úvod

Problém optimálneho stavu, je problém, ktorý chceme vyriešiť v každej oblasti nášho života. Optimalizácia sa týka každého výrobného, technologického a ekonomického procesu. Každý podnik chce minimalizovať svoje náklady a zvyšovať svoju kvalitu. Rovnakou zásadou sa riadime aj v optimálnom riadení procesov. V reálnom živote musíme počítať s určitými obmedzeniami. Tieto obmedzenia môžu byť fyzikálneho charakteru, napríklad výška hladiny v zásobníkoch kvapaliny nemôže byť záporná, alebo zariadenie, ktoré využívame vo výrobe má určitý výkon, ktorý už nedokážeme zväčšiť. Dynamická optimalizácia inými slovami optimálne riadenie v otvorenej slučke zohľadňuje tieto obmedzenia.

V súčasnosti poznáme dva základné prístupy k riešeniu problémov dynamickej optimalizácie a to deterministický prístup a stochastický (náhodný) prístup. V tejto bakalárskej práci sa budeme venovať hlavne deterministickému prístupu. Vo všeobecnosti deterministický prístup zahŕňa nepriame (variačné) metódy a priame (diskretizačné) metódy. Jednotlivým metódam sa budeme venovať v nasledujúcich statiach.

V tejto práci vysvetlíme, čo je optimálne riadenie procesov a optimálne riadenie procesov pri otvorenej slučke, sformulujeme problém, zadefinujeme obmedzenia, ktorými je tento proces definovaný a zadefinujeme účelovú funkciu.

Ďalej v tejto práci ukážeme ako sa dajú riešiť úlohy optimálneho riadenia proces jednotlivými metódami. Vysvetlíme princíp minima resp. maxima ako vo všeobecnosti, tak na príklade plášťového výmenníka tepla, na ktorý pôsobia určité fyzikálne obmedzenia.

V závere práce si ukážeme ako použiť jednotlivé metódy na dvoch konkrétnych príkladoch, a to na časovo optimálnom riadení auta a plášťovým výmenníku tepla. Úlohou v príklade časovo optimálneho riadenia auta bude minimalizovať čas, za ktorý auto prejde určenú dráhu s obmedzením na zrýchlenie. Úlohou v príklade plášťového výmenníka tepla bude vypočítať

riadenie, ktoré prevedie proces do nového ustáleného stavu. V prípade plášťového výmenníka tepla môžu byť obmedzenia rôzne.

2 Optimálne riadenie procesov pri otvorenej slučke

V tejto časti sa budeme venovať dynamickej optimalizácii inými slovami optimálnemu riadeniu procesov pri otvorenej slučke. Naším zámerom bude vymedziť časovo premenné tvary systémov (Fikar 2007).

2.1 Formulácia problému

Základným pravidlom vyriešenia hocijakého problému je dostatočne tento problém opísať. V tejto stati sa budeme venovať vyjadreniu problému optimalizácie a zavedením označení, ktoré budem používať ďalej. (Kirk 1998)

Formulácia problému optimálneho riadenia vyžaduje:

1. Matematický opis alebo model procesu, ktorý má byť riadený.
2. Zadefinovanie obmedzení.
3. Zadefinovanie funkcionálu.

2.1.1 Matematický opis

Netriviálna časť väčšiny problémov riadenia je určenie modelu procesu. Pri modelovaní fyzikálneho systému je naším hlavným cieľom odvodiť čo najjednoduchší matematický opis, ktorý adekvátne predpovedá odozvu fyzikálneho systému na všetky predpokladané vstupy. Zameriame sa na opis obyčajných diferenciálnych rovníc. (Kirk 1998)

Zadefinujeme stavy premenných (alebo iba stavy) procesu v čase t

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (2.1)$$

A zadefinujeme aj riadené vstupy procesu v čase t

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \quad (2.2)$$

Potom systém môže byť opísaný n - rovnicami prvého rádu

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$

.

.

.

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$

Ďalej zadefinujeme stavový vektor systému

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Vektor riadiacich veličín bude mať nasledovný tvar

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Pre stavové rovnice môžeme potom napísať

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

kde definícia f vyplýva z rovnice (2.3)

2.1.2 Obmedzenia

V reálnom živote musíme pri riešení optimalizačného problému počítať aj s fyzikálnymi obmedzeniami. Ak chceme odvodiť napríklad model plášťového výmenníka tepla, musíme mať na mysli, že teplota vo výmenníku nemôže presiahnuť napríklad metalurgickú teplotu materiálu, z ktorého je výmenník vyrobený.

Rozlišujeme tri základné typy obmedzení (Repčíková 2008):

$$1. \text{Obmedzenia typu nerovnosti: } g(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.7)$$

2. Obmedzenia typu rovnosti – poznáme:

- bodové obmedzenia: $h(x(t), u(t), t) = 0$ $t \in [t_0, t_f]$ (2.8)

- obmedzenia v tvare diferenciálnych rovníc:

$$h(x(t), x'(t), u(t), t) = 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (2.9)$$

3. Izoimperické obmedzenia: $\int_{t_0}^{t_f} e(x(t), x'(t), u(t), t) dt \leq c$ (2.10)

$$t \in [t_0, t_f]$$

Každé obmedzenie dokážeme odvodiť na tzv. kanonický tvar. (Mikleš 2008)

2.1.3 Zadefinovanie funkcionálu

Funkcionál ako funkcia je prediktíva, ktorá funkciám priraduje reálne číslo, preto ju často nazývame „funkciou funkcie“. Všeobecne ju môžeme zapísať v troch základných tvaroch, a to (Čizniar 2005):

Bolzov tvar: $J(u(t)) = G(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt$ (2.11)

Lagrangeov tvar: $J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt$ (2.12)

Mayerov tvar: $J(u(t)) = G(x(t_f), t_f)$ (2.13)

kde: J - účelová funkcia,

G – zastupuje časť účelovej funkcie vyčíslennej v koncových podmienkach,

$x(t)$ – zastupuje vektor stavového profilu,

$u(t)$ – zastupuje vektor riadiaceho profilu,

$\int_{t_0}^{t_f} F dt$ reprezentuje časť účelovej funkcie vyčíslennej počas časového intervalu (Repčíková 2008).

3 Optimálne riadenie procesov

V tejto stati si vysvetlíme princíp minima resp. maxima vo všeobecnosti, a aj na príklade plášťového výmenníka tepla. Ďalej si ukážeme príklady úloh s voľným resp. pevným koncovým stavom a časom.

3.1 Úloha optimálneho riadenia - princíp minima

Optimálne riadenie je možné charakterizovať ako minimalizáciu resp. maximalizáciu vykonaného merania. V niektorých prípadoch je na prvý pohľad jasné, či sa bude jednať o minimalizáciu resp. maximalizáciu. Pri meraní najrýchlejšieho presunu systému z bodu A do bodu B je zjavné, že čas trvania chceme minimalizovať alebo pri výrobe nejakého výrobku je zrejmé, že chceme maximalizovať produkciu a minimalizovať náklady.

Uvažujeme o riadenom procese, ktorý je opísaný nasledovným matematickým modelom:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

kde x je n - rozmerový vektor stavových veličín a u je m - rozmerový vektor riadiacich resp. akčných veličín (Fikar 2007).

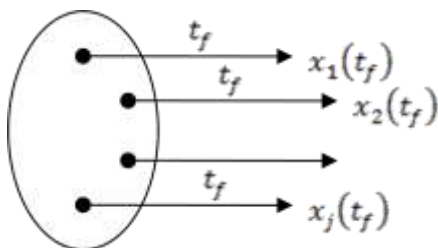
f je n - rozmerová vektorová funkcia.

Cieľom optimálneho riadenia je nájsť také $u(t)$, aby funkcionál v Bolzovom tvare dosiahol minimálnu hodnotu.

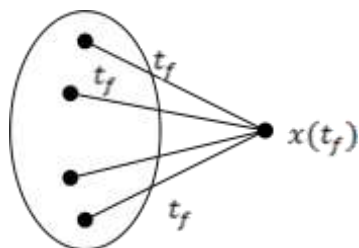
$$J(u(t)) = G_{tf}(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t)) dt \quad (3.2)$$

Pre také funkcie G_{tf} a F , ktoré sú skalárne a diferencovateľné (Fikar 2007).

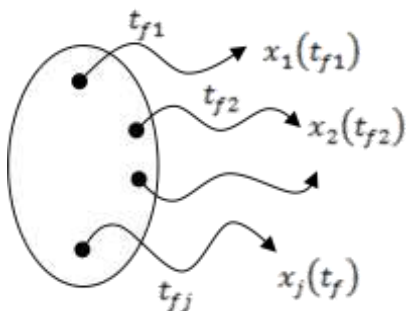
V praxi sa môžu vyskytnúť úlohy s rôznymi požiadavkami a obmedzeniami. Príkladom takýchto obmedzení sú napríklad úlohy s voľným alebo pevným koncovým časom t_f .



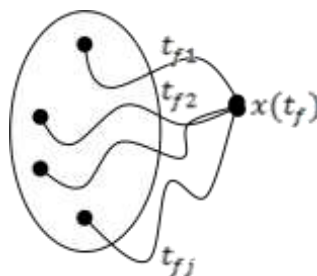
Obr.1.Obmedzenie-Pevný konečný čas,voľný konečný stav



Obr.2.Obmedzenie-Pevný konečný čas aj stav



Obr.3.Obmedzenie-Voľný konečný čas aj stav



Obr.4. Obmedzenie-Voľný konečný čas,pevný

Na Obr.1 vidíme príklad s pevným konečným časom a voľným konečným stavom. Počiatočný stav je voľný a môže začať v ľubovoľnom bode množiny možných počiatočných stavov. Každý čas t_f má rovnakú hodnotu a končí v rôznom konečnom stave $x_j(t_f)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Na Obr.2 je príklad s pevným konečným časom a s pevným konečným stavom, to znamená, že všetky t_f majú rovnakú hodnotu a končia v tom istom konečnom stave $x(t_f)$. Na Obr.3 je zobrazený príklad s voľným konečným časom aj stavom, to znamená, že hodnoty konečných časov t_{fj} ($j = 1, 2, \dots, n$) sú rôzne končia v rôznych konečných stavoch $x_j(t_{fj})$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Na Obr.4 vidíme príklad s voľnými konečnými časmi t_{fj} ($j = 1, 2, \dots, n$) a s pevným konečným stavom $x(t_f)$.

Uvažujme, že $u^*(t)$ je optimálne riadenie. Potom pre všetky riadenia vo všeobecnosti $u(t)$ platí :

$$J[u(t)] \geq J[u^*(t)] \quad (3.3)$$

Predpokladáme, že $u^*(t)$ existuje. Najprv musíme odvodiť nevyhnutné podmienky, ktorým $u^*(t)$ bude vyhovovať. Optimálna odozva k $u^*(t)$ bude $x^*(t)$ a odozva k variácii $\delta u(t)$ bude variácia $\delta x(t)$ (Fikar 2007).

Potom môžeme povedať, že platí

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad (3.4)$$

$$u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad (3.5)$$

Ak upravíme do Taylorovho radu a budeme uvažovať len o lineárnych členoch, potom platí (Fikar 2007)

$$f(x, u) = f(x^*, u^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^* \delta u \quad (3.6)$$

Alebo po úprave

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \delta u \quad (3.7)$$

Pokiaľ platí nerovnosť (3.3), tak funkcionál $J(u)$ má absolútne minimum pre funkciu $u^*(t) = u(t)$.

Nevyhnutnou podmienkou extrémum bude (Fikar 2007)

$$\delta J = 0 \quad (3.8)$$

Pre variáciu funkcionálu (3.2) platí

$$\delta J = \left(\frac{\partial G_{t_f}}{\partial x(t_f)}\right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^T \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^T \delta u \right] dt \quad (3.9)$$

V rovnici (3.9) bude t_f pevným konečným časom a konečný stav $x(t_f)$ bude voľný.

Zdefinujme združený vektor a upravme rovnicu (3.7)

$$\lambda^T \frac{d(\delta x)}{dt} = \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \delta u \quad (3.10)$$

Ak spočítame rovnice (3.9) a (3.10), tak pre δJ platí (Fikar 2007)

$$\delta J = \left(\frac{\partial G_{t_f}}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \delta x + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^T + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \delta u \right\} dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \frac{d(\delta x)}{dt} dt \quad (3.11)$$

Zadefinujeme Hamiltonovu funkciu

$$H = F + \lambda^T f(x, u) \quad (3.12)$$

Ak združený vektor $\lambda(t)$ bude vyhovovať diferenciálnej rovnici

$$\frac{d\lambda}{dx} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.13)$$

Nevyhnutná podmienka extrémum, čiže minima funkcionálu bude splnená, ak pre ľubovoľnú variáciu $\delta u(t)$ platí (Fikar 2007)

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.14)$$

Z rovnice (3.14) vyplýva nevyhnutná podmienka optimálneho riadenia $u^*(t)$ pre ľubovoľnú variáciu δu .

Z rovníc (3.12) a (3.13)

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{dt} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \quad (3.17)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x} - \left(\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \quad (3.18)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.19)$$

Derivácia Hamiltonovej funkcie podľa času bude vyzeráť nasledovne

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \frac{du}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T \frac{d\lambda}{dt} \quad (3.20)$$

Z rovníc (3.16) a (3.13) vyplýva

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (3.21)$$

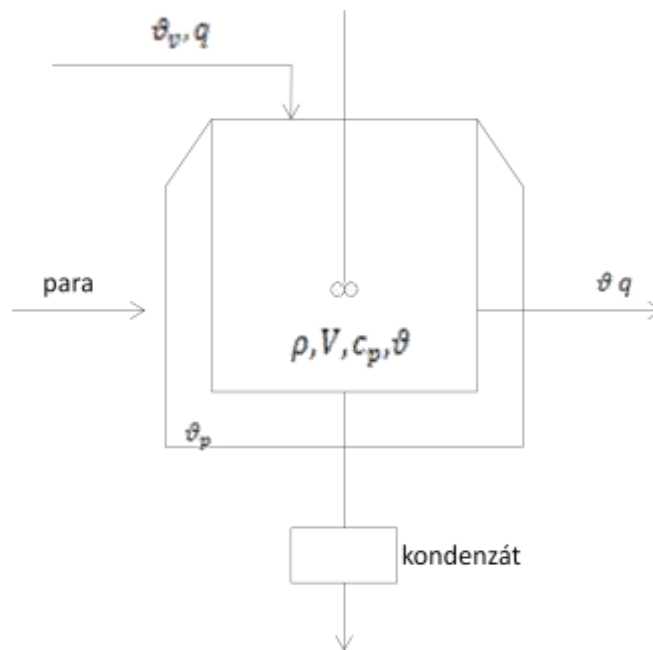
Pretože platí rovnica (3.14), pravá strana (3.21) sa rovná nule, teda

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.22)$$

Táto rovnica však platí len ak riadenie nedosiahne ohraničenie a vyplýva z nej, že funkcia H počas celej doby trvania optimálnej odozvy konštantná.

3.2 Plášťový výmenník tepla

Ako príklad pre vysvetlenie si zoberieme plášťový výmenník tepla, ktorý sa používa na ohrievanie kvapaliny.



Obr.5.Plášťový výmenník tepla

Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že teplota vo vnútri výmenníka, objemový prietok kvapaliny, jej hustota a jej špecifická tepelná kapacita je konštantná.

Matematický model plášťového výmenníka tepla získame z jeho entalpickej bilancie

$$\frac{V\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta + \frac{\alpha F}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_p + \frac{q\varphi c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_v \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad (3.23)$$

Alebo po zavedení časovej konštanty a zosilnení

$$T \frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta + Z_1 \vartheta_p + Z_2 \vartheta_v \quad (3.24)$$

Pre

$$T = \frac{V\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \quad Z_1 = \frac{\alpha F}{q\rho c_p + \alpha F} \quad Z_2 = \frac{q\varphi c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \quad (3.25)$$

Pokiaľ nedochádza k akumulácii tepla vo výmenníku, výmenník bude v ustálenom stave a jeho model bude vyzerat' takto

$$\vartheta^s = Z_1 \vartheta_p^s + Z_2 \vartheta_v^s \quad (3.26)$$

Teplota ϑ_s je teplota vo vnútri výmenníka a zároveň aj teplota na výstupe, ϑ_p^s je teplota pary v ustálenom stave a ϑ_v^s je teplota na vstupe v ustálenom stave.

Zadefinujme odchýlkové veličiny

$$x(t) = \vartheta(t) - \vartheta^s \quad (3.27)$$

$$u(t) = \vartheta_p(t) - \vartheta_p^s \quad (3.28)$$

$$p(t) = \vartheta_v(t) - \vartheta_v^s \quad (3.29)$$

Po dosadení odchýlkových veličín bude mať potom model tvar

$$T \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + Z_1 u(t) + Z_2 p(t) \quad x(0) = x_0 \quad (3.30)$$

Po vydelení rovnice časovou konštantou dostaneme

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T} x(t) + \frac{Z_1}{T} u(t) + \frac{Z_2}{T} p(t) \quad x(0) = x_0 \quad (3.31)$$

Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že poruchová odchýlková veličina je rovná nule

$$p(t) = 0 \quad (3.32)$$

Model výmenníka má teda tvar

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{Z_1}{T}u(t) \quad (3.33)$$

A pre tento model budeme hľadať $u(t)$ tak, aby bola hodnota funkcionálu minimálna.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^2(t) + ru^2(t)]dt \quad (3.34)$$

t_0 je čas na začiatku, t_f je čas na konci a r je váhový koeficient ($r > 0$).

Uvažujeme, že ide o prípad s voľným konečným časom, čiže t_f nepoznáme. Potom naša Hamiltonova funkcia bude mať tvar

$$H = x^2 + ru^2 + \lambda(-\frac{1}{T}x + \frac{Z_1}{T}u) \quad (3.35)$$

Zároveň platí

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + \frac{\lambda}{T} \quad (3.36)$$

s koncovou podmienkou pre združený vektor $\lambda(t)$:

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (3.37)$$

Potom minimum Hamiltonovej funkcie bude

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.38)$$

A teda

$$2ru + \lambda \frac{Z_1}{T} = 0 \quad (3.39)$$

Z toho vyplýva, že tvar nášho optimálneho riadenia bude

$$u^*(t) = -\frac{Z_1}{2rT} \lambda^*(t) \quad (3.40)$$

Náš optimálny proces bude teda vo výsledku vyzeráť nasledovne

$$x' = f(x, \lambda) \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.41)$$

$$\lambda' = f(x, u) \quad \lambda(t_f) = \lambda_f \quad (3.42)$$

Dosadením optimálneho riadenia do stavovej rovnice dostaneme

$$x' = -\frac{1}{T}x - \frac{z_1^2}{2rT^2}\lambda \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.43)$$

$$\lambda' = -2x + \frac{1}{T}\lambda \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (3.44)$$

4 Metódy riešenia úloh optimálneho riadenia procesov

V súčasnosti existuje už niekoľko metód pomocou, ktorých dokážeme riešiť problémy optimálneho riadenia. Vo všeobecnosti ich môžeme rozdeliť do dvoch veľkých skupín, ktoré tvoria analytické a numerické metódy.

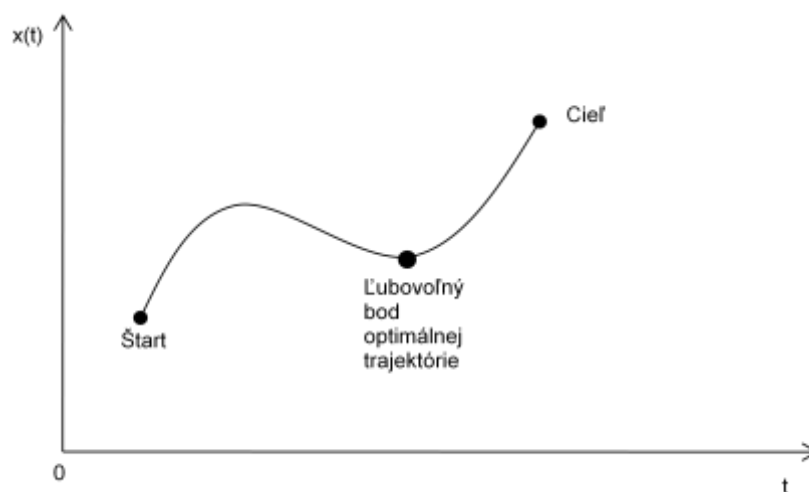
4.1 Analytické metódy

Snáď najznámejšou analytickou metódou je dynamické programovanie, ktoré po prvýkrát definoval Bellman. Základom dynamického programovania je princíp optimálnosti, ktorý tvrdí, že optimálnosť nejakého procesu závisí len od počiatočnej a konečnej podmienky a nie od predchádzajúcich stavov (Fikar 2007). Napriek tomu, že Bellmanov princíp optimálnosti je relatívne jednoduchý, dokážeme ním určiť všeobecné podmienky optimalizácie pre spojité aj nespojité systémy.

Ak spomíname analytické metódy je nevyhnutné spomenúť aj Pontrjaginov princíp minima a variačný počet. Výhodiskom pre určenie Pontrjaginovho minima je dynamické programovanie.

4.1.1 Dynamické programovanie

Dynamické programovanie vychádza z princípu optimálnosti, ktorý tvrdí: optimálna cesta závisí od počiatočnej podmienky a od cieľa a nie od cesty, ktorou sme sa do cieľa dostali (Fikar 2007).



Obr.6.Optimálna trajektória

Princíp optimálnosti tvrdí, že časť trajektórie, ktorá končí v celi optimálnej trajektórii, je tiež optimálna. A to platí pre ľubovoľný úsek, ktorý končí v tomto celi. Dôležité však je, že tento úsek musí bezpodmienečne končiť v celi optimálnej trajektórie. Výhodou tejto metódy je, že ju môžeme použiť pre spojité aj nespojité systémy a umožňuje nám získať nevyhnutné podmienky pre optimálnu trajektóriu (Fikar 2007).

Uvažujme o nasledovnom optimálnom riadení v Bolzovom tvare

$$J(u(t)) = G(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

A predpokladajme, že daný problém optimálneho riadenia má riešenie.

Zadefinujme si ďalšiu funkciu, tiež známu ako Bellmanova funkcia (Čizniar 2005).

$$v(x(t), t) = \min_{u(t)} [G(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), \tau) d\tau] \quad (4.3)$$

Deriváciou Bellmanovej funkcie dostaneme

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \min_{u(t)} [F(x, u, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T f(x, u, t)] \quad (4.4)$$

A musí spĺňať podmienku

$$v(x_f, t_f) = G(x_f, t_f) \quad (4.5)$$

Rovnice (4.4) a (4.5) predstavujú nevyhnutnú podmienku pre dosiahnutie minima optimalizačného problému (Čizniar 2005).

Po nahradení $u(t)$ v rovnici (4.4) optimálnym riadením $u^*(t)$ dostaneme tzv. Hamiltonovu-Jacobiho-Bellmanovu rovnicu v nasledovnom tvare

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = F(x, u^*, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T f(x, u^*, t) \quad (4.6)$$

Zadefinujme si aj Hamiltonovu funkciu

$$H\left(x, u, \frac{\partial v}{\partial x}, t\right) = F(x, u, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T f(x, u, t) \quad (4.7)$$

Po dosadení rovnice (4.7) do rovnice (4.4) bude mať Bellmanova funkcia nasledovný tvar (Čizniar 2005).

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \min_{u(t)} H(x, u, \frac{\partial v}{\partial x}, t) \quad (4.8)$$

4.1.2 Pontrjaginov princíp minima

Pontrjaginov princíp minima resp. maxima je veľmi blízky princípu dynamického programovania. Umožňuje nám riešiť aj veľmi zložité úlohy, v ktorých sú obmedzenia ako riadiacich, tak stavových veličín (Hirmajer 2006)

Náš optimalizačný problém má nasledovný tvar

$$J = G\left(t_f, x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt \quad (4.9)$$

Hamiltonova funkcia má tvar

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (4.10)$$

Kde $\lambda(t)$ je vektor adjungovaných premenných (Fikar 2007) a má nasledovný tvar

$$\lambda(t) = \frac{\partial J(x(t), t)}{\partial x^T} \quad (4.11)$$

Hamiltonova-Jacobiho rovnice bude vyzeráť nasledovne

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = H(x, u, t, \lambda) \quad (4.12)$$

Deriváciou podľa x a t dostaneme

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (4.13)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial x} \quad (4.14)$$

Porovnaním oboch strán potom dostaneme (Fikar 2007)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (4.15)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.16)$$

Rovnica (4.15) predstavuje diferenciálne rovnice systému a rovnica (4.16) predstavuje systém diferenciálnych rovníc adjungovaných premenných (Fikar 2007).

Pontrjaginov princíp minima vraví, že ak má táto úloha riešenie, potom Hamiltonova funkcia má globálne minimum (Hirmajer 2006).

$$H^* = \min_{u(t)} H(t, x, u, \lambda) \quad (4.17)$$

A zároveň musia platiť tzv. kanonické rovnice (4.15) a (4.16).

4.1.3 Variačný počet

Východiskom pre riešenie úloh pomocou variačného počtu je Bellmanova parciálna diferenciálna rovnica (4.8). Táto metóda je oveľa rýchlejšia a efektívnejšia metóda riešenia optimalizačného problému, avšak jej nevýhodou je, že použiteľná len pre špecifické problémy riadenia (Hirmajer 2006).

Zadefinujme si problém pre variačný počet

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (4.18)$$

Lagrangeova funkcia má nasledovný tvar (Hirmajer 2006)

$$\Gamma(t, x, \dot{x}, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda^T [f(t, x, u) - \dot{x}] \quad (4.19)$$

Náš problém optimálneho riadenia je definovaný v rovnici (4.1). Pre tento problém sformulujeme nevyhnutné podmienky (Hirmajer 2006)

- Podmienka optimality pre riadiace veličiny

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (4.20)$$

- Adjungované premenné

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \dot{\lambda}(t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (4.21)$$

- Koncové podmienky pre adjungované premenné

$$\frac{\partial G}{\partial x(t_f)} = \lambda(t_f) \quad (4.22)$$

4.2 Numerické metódy

Numerické metódy sa v súčasnosti používajú stále častejšie a postupne nahrádzajú analytické metódy. Numerické metódy môžeme vo všeobecnosti rozdeliť do dvoch hlavných skupín a to priame a nepriame metódy.

4.2.1 Priame numerické metódy

Základom priamych alebo aj diskretizačných numerických metód je premena pôvodného problému, ktorý je nekonečného rozmeru na problém nelineárneho programovania (NLP). Môžeme ju rozdeliť do dvoch podkategórií a to paralelné (simultánne) a postupné (následné) metódy (Paulen 2010).

Paralelná diskretizácia je v podstate úplná diskretizácia stavov a riadených premenných. Táto diskretizácia sa často dosiahne pomocou kolokácie.

Postupná diskretizácia sa docieli pomocou parametrizácie riadenia (control parametrization).

Poznáme dva základné typy priamych numerických metód

- Kompletná parametrizácia
- Parametrizácia vektora riadenia (CVP¹)

4.2.1.1 Kompletná parametrizácia

Kompletná parametrizácia, tiež známa ako simultánna metóda, je založená na diskretizácii riadiacich aj stavových premenných parametrizáciou pomocou vhodne zvolených typov a počtov polynómov. Pričom koeficienty týchto polynómov rozhodujú o počte premenných v NLP probléme (Čizniar 2005).

4.2.1.2 Parametrizácia vektora riadenia

Metóda parametrizácie vektora riadenia, známa aj ako sekvenčná metóda, sa používa na riešenie problémov dynamickej optimalizácie. Základom tejto

¹ CVP (Control Vector Parametrization)

metódy je aproximácia trajektórie riadenia funkciou s malým množstvom parametrov.

Najčastejšie sa riadenie rozdelí na niekoľko úsekov, čím z problému dynamickej optimalizácie dostaneme problém statickej optimalizácie, ktorý môžeme riešiť gradientov metódou (Hirmajer 2006).

4.2.2 Nepriame numerické metódy

Cieľom týchto metód je vyriešiť dvojbodovo ohraničený problém (TPBVP²), a tým nepriamo vyriešiť aj problém dynamickej optimalizácie (Čizniar 2005). Základné podmienky týchto metód sú definované v stati Analytické metódy. Výhodou tejto metódy je, že hľadáme riešenie bez premeny. Príkladom na TPBVP je plášťový výmenník tepla spomenutý už v stati 3.2, kde je našou neznámou hodnota konečného času t_f a počiatočné hodnoty združenej premennej.

Poznáme dva základné typy nepriamych numerických metód

- Iterácia hraničnej podmienky (BCI³)
- Iterácia vektora riadenia (CVI⁴)

4.2.2.1 Iterácie hraničnej podmienky

Iterácie hraničnej podmienky je metóda, ktorá hľadá chýbajúce hraničné podmienky $\lambda(t_0)$ a to tak, že minimalizuje chyby medzi hraničnými podmienkami (Ševčík 2006).

4.2.2.2 Iterácia vektora riadenia

Iterácia vektora riadenia je ďalšia nepriama numerická metóda, ktorá postupne rieši diferenciálne rovnice a to tak, že hľadá gradienty, ktoré zabezpečia nutné podmienky pre riešenia optimalizačného problému.

² TPBVP (Two Point Boundary Value Problem)

³ BCI (Boundary Condition Iteration)

⁴ CVI (Control Vector Iteration)

5 Časovo optimálne riadenie

Časovo optimálne riadenie a niektoré metódy riešenia si ukážeme na príklade auta. Budeme uvažovať, že toto auto sa pohybuje z nejakého počiatočného bodu (stavu) do nejakého konečného bodu (stavu). Našou úlohou bude minimalizovať čas optimálneho riadenia. Pre zjednodušenie príkladu nebudeme uvažovať o obmedzení rýchlosti a rozmery tohto auta zanedbáme.



Obr.7. Riadenie auta

Ako vidieť na Obr.7, budeme riadiť auto, ktoré sa má dostať z bodu A do bodu B. Našou úlohou bude minimalizovať čas, za ktorý auto prejde dráhu z bodu A do B. Vzdialenosť auta od bodu A je $d(t)$.

Auto je definované jeho polohou $x_1(t) = d(t)$, rýchlosťou $x_2(t)$ a zrýchlením $u(t)$.

Následne zadefinujeme stavové rovnice, ktoré charakterizujú naše riadenie auta.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (5.2)$$

Z rovníc (5.1) a (5.2) teda vyplýva

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = u \quad (5.3)$$

Zadefinujeme aj počiatočné a koncové podmienky pre tento proces

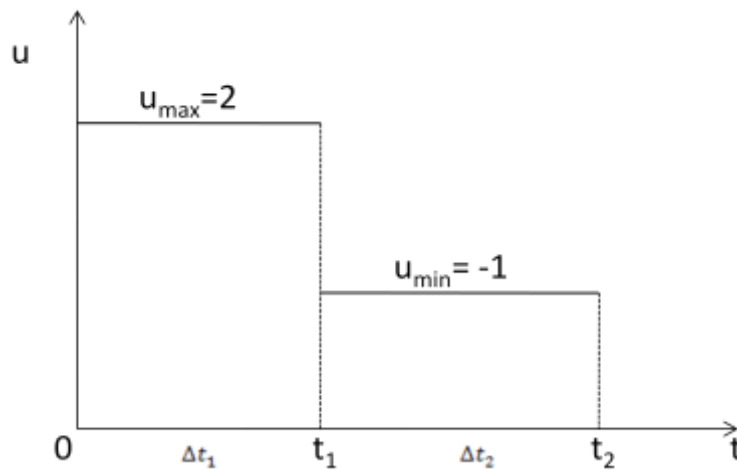
$$x_1(0) = 0 \quad x_1(t_f) = 2000 \quad (5.4)$$

$$x_2(0) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (5.5)$$

Ďalej si zadefinujeme obmedzenia, budú to obmedzenia pre zrýchlenie

$$-1 \leq u(t) \leq 2 \quad (5.6)$$

Riešenie nášho problému bude zjednodušené vyzeráť nasledovne



Obr.8.Zobrazenie extrémov riadenia

Chceme minimalizovať čas trvania procesu, čiže

$$\min_{u(t)} t_f = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \min_{u(t)} J \quad (5.7)$$

Kde $t_1 = \Delta t_1$ a $t_2 = \Delta t_2 + \Delta t_1$

A platí

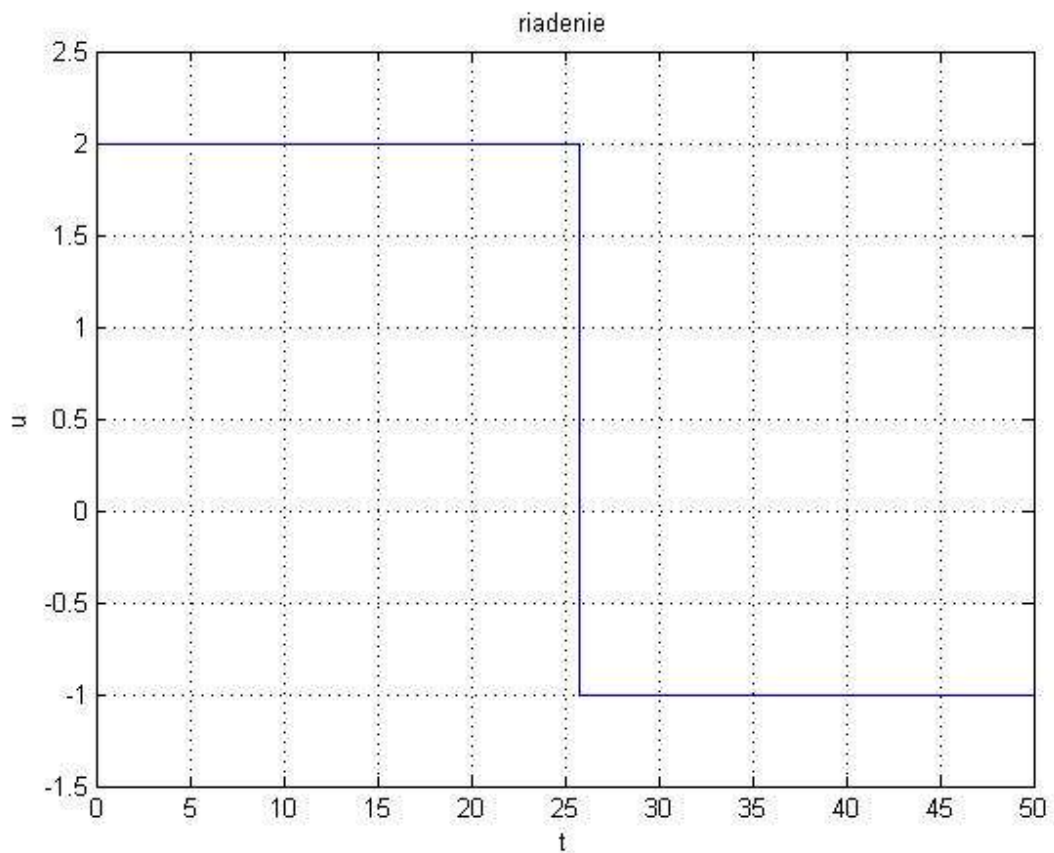
$$\frac{\partial J}{\partial \Delta t_i} = 1 \quad i = 1, 2 \quad (5.8)$$

Po úprave potom dostaneme

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f \quad (5.9)$$

Grafy pre časovo optimálne riadenie auta sme získali v Matlabe, kde sme pomocou funkcie `fmincon()` vypočítali časové intervaly Δt_1 a Δt_2 , tak aby čas trvania procesu bol minimálny.

Na Obr.9 máme zobrazený priebeh zrýchlenia pre optimálne riadenie auta. Z obrázku je zrejmé, že $u(t)$ vyhovuje obmedzeniu (5.6).

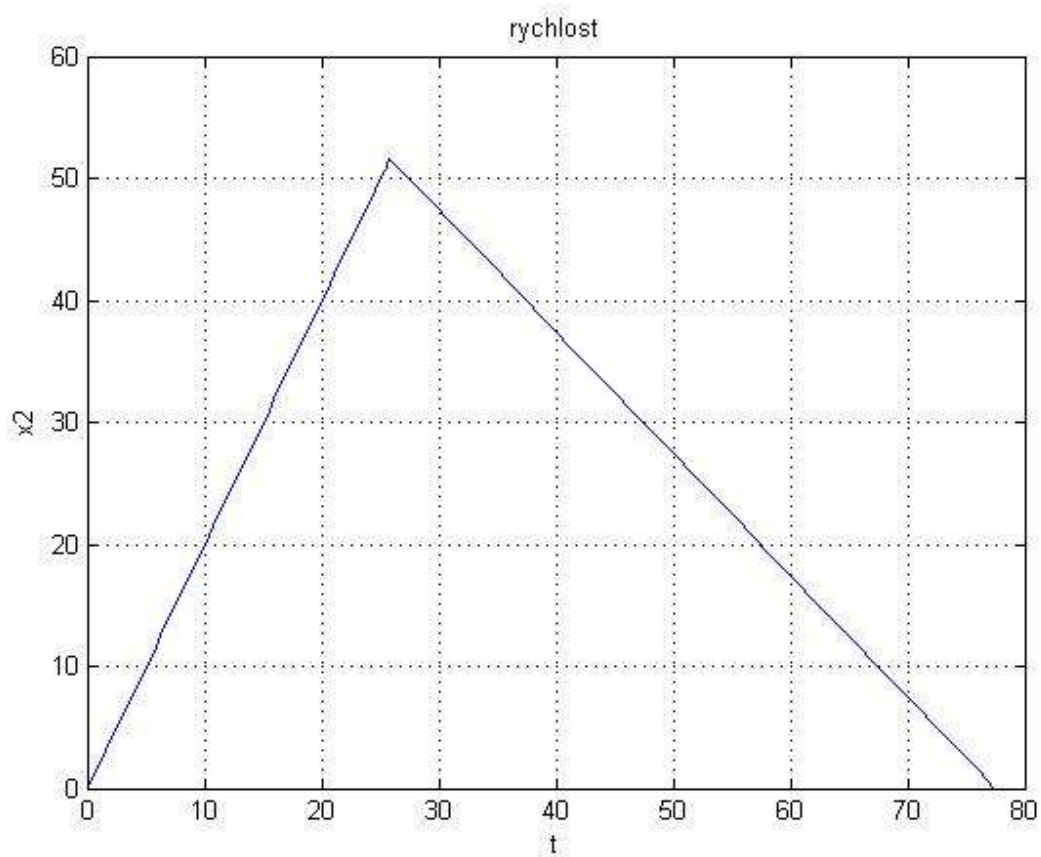


Obr.9 .Priebeh zrýchlenia pre optimálne riadenie auta

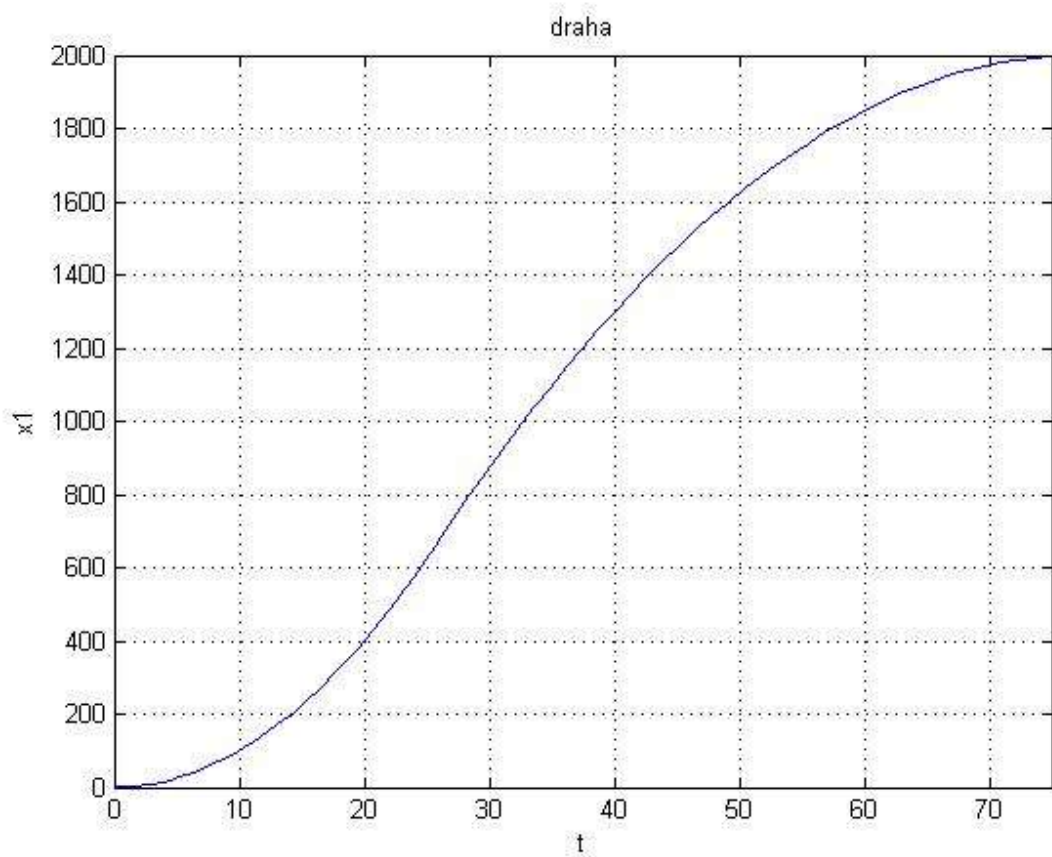
$u_{max} = 2$ na časovom úseku $\Delta t_1 = t_1 - 0$ a $u_{min} = -1$ na časovom úseku $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ ako sme predpokladali na Obr.8. Na prvom úseku auto rovnomerne zrýchľuje až po čas prepnutia a potom bude rovnomerne spomaľovať, až kým nedosiahne nulovú hodnotu zrýchlenia, tak aby splnilo koncovú podmienku (5.5).

Na Obr.10 je zobrazený priebeh rýchlosti pre optimálne riadenie auta. Z tohto grafu môžeme odčítať maximálnu rýchlosť auta $v_{max} = x_{2max}$.

Na poslednom obrázku Obr.11 je zobrazený priebeh dráhy pre optimálne riadenie auta. Ako vidieť na obrázku, podmienka (5.4) bola splnená. Obmedzenie dráhy bolo v tomto príklade jediné obmedzenie, ktoré sme zohľadňovali.



Obr.10 .Pribeh rýchlosti pre optimálne riadenie auta



Obr.11 .Pribeh dráhy pre optimálne riadenie auta

6 Optimálne riadenie plášťového výmenníka tepla

V tejto stati sa budeme venovať riadeniu plášťového výmenníka tepla, ktorý bol popísaný v stati 3.2.

Na výmenník pôsobí mnoho obmedzujúcich faktorov. V praxi sa zohľadňujú hlavne fyzikálne obmedzenia, pretože matematické obmedzenia často nezohľadňujú realitu systému. Fyzikálne obmedzenia berú do úvahy materiál, z ktorého je výmenník vyrobený, zohľadňujú objemový prietok na vstupe resp. na výstupe.

Úlohy pri riadení výmenníka tepla môžu byť rôzne. Našou úlohou môže byť napríklad minimalizovať čas, za ktorý sa nám kvapalina na výstupe z výmenníka ohreje na žiadanú teplotu. Ďalšou úlohou môže byť minimalizácia spotreby ohrevnej pary, alebo ohrievať kvapalinu na žiadanú teplotu tak, aby bola teplota ohrevnej pary čo najnižšia.

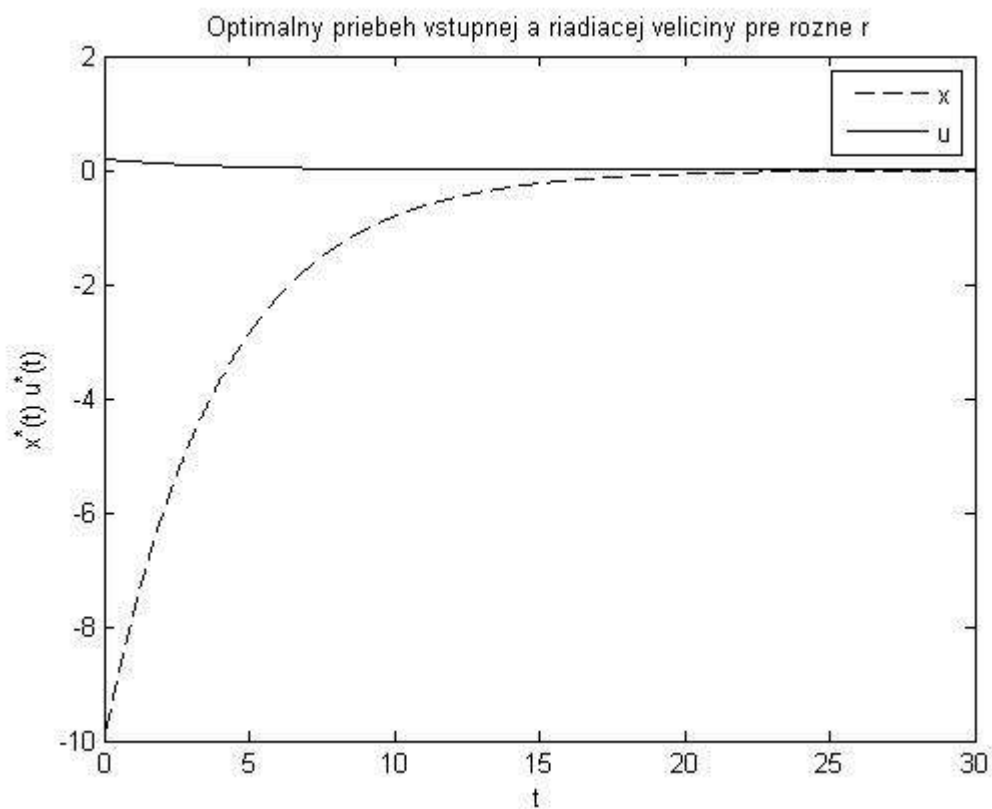
Zvoľme parametre výmenníka

$$c_p = 4,02 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad q = 0,015 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad \alpha = 42,8 \text{ W m}^2 \text{ K}^{-1} \quad F = 1,51 \text{ m}^2$$

$$\rho = 1020 \text{ kg m}^{-3} \quad V = 0,23 \text{ m}^3$$

$$T = \frac{V \rho c_p}{q \rho c_p + \alpha F} = 7,47 \text{ s} \quad Z_1 = \frac{\alpha F}{q \rho c_p + \alpha F} = 0,5$$

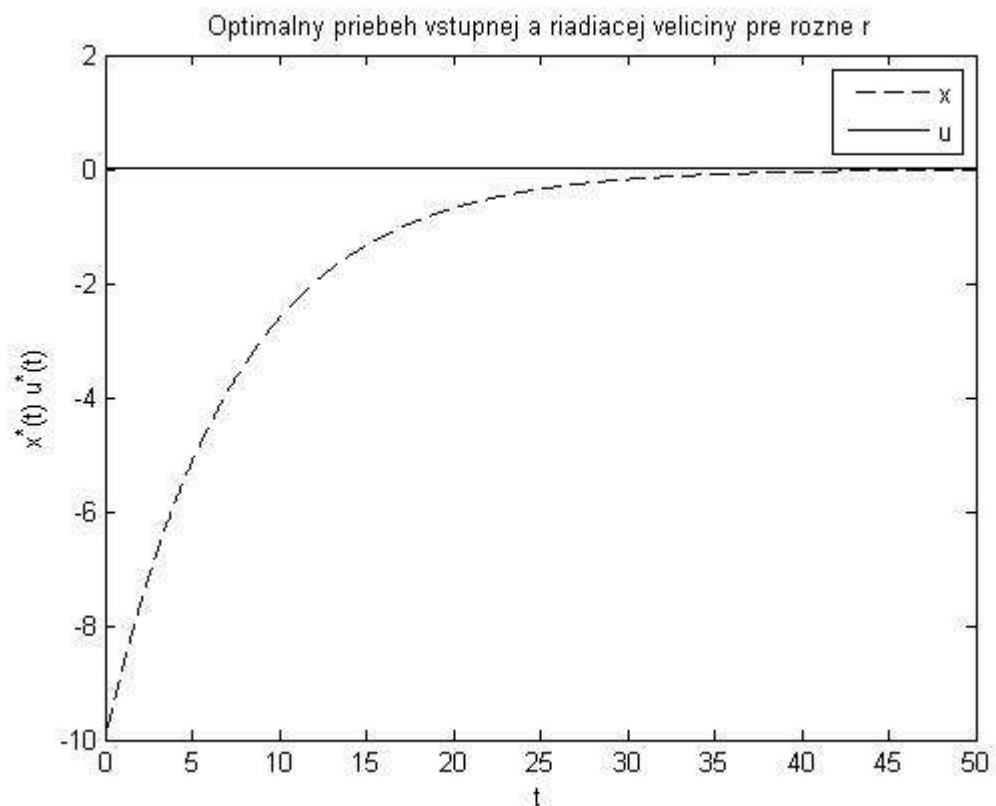
Na Obr.12 máme zobrazený optimálny priebeh vstupnej a stavovej veličiny, keď je váhový koeficient $r = 1$ a $t_f = 25$.



Obr.12 .Optimálny priebeh vstupnej resp. stavovej veličiny

V tomto prípade kladieme rovnako veľký dôraz na stav aj na riadenie. V praxi to znamená, že našou úlohou je dosiahnuť čo najmenšiu spotrebu ohrevnej pary v plášti výmenníka, ktorá nám ohrieva kvapalinu vo výmenníku tepla na požadovanú hodnotu. Čiže spotreba ohrevnej pary a ohriatie kvapaliny na požadovanú teplotu je pre nás rovnako dôležitá.

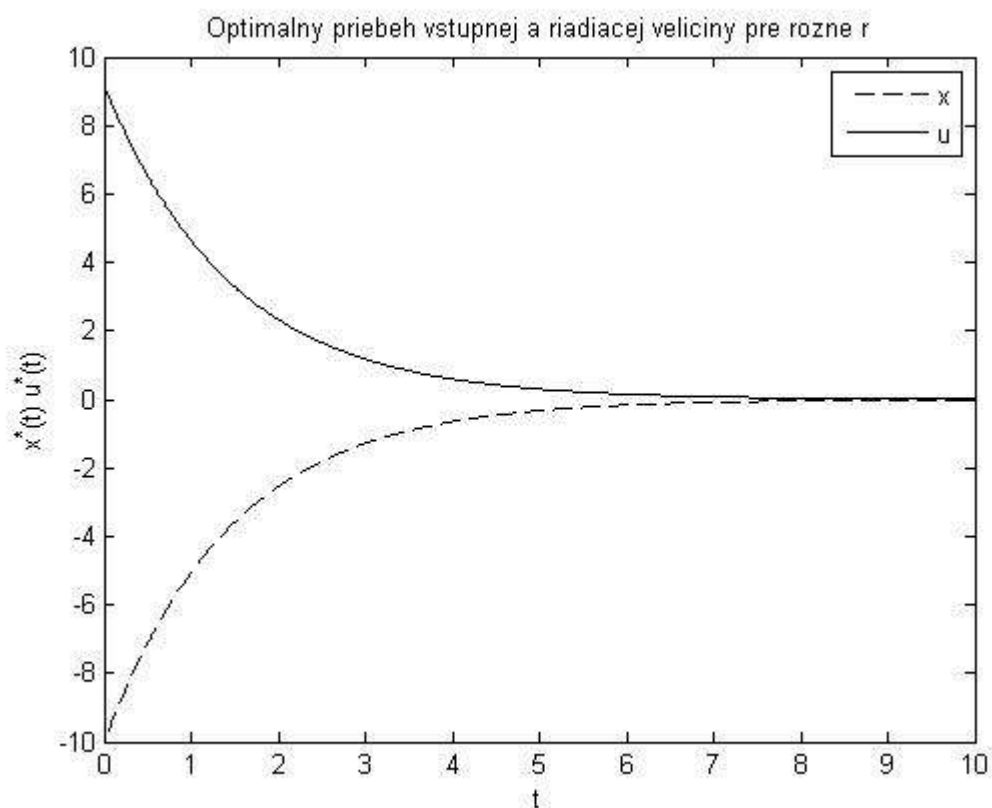
Na Obr.13 máme optimálny priebeh vstupnej a stavovej veličiny pre hodnotu váhového koeficienta $r = 100$ a $t_f = 45$.



Obr.13 .Optimálny priebeh vstupnej resp. stavovej veličiny

Váhový koeficient má oveľa väčšiu hodnotu ako na Obr.12, čo pre nás v praxi znamená, že kladieme ešte väčší dôraz na spotrebu ohrevnej pary vo výmenníku, pretože je pre nás príliš drahá. Čiže chceme dosiahnuť požadovanú teplotu kvapaliny na výstupe z výmenníka pri minimálnej spotrebe ohrevnej pary. To znamená, že kladieme veľký dôraz na vstupnú veličinu $u(t)$. S týmto problémom sa stretávame vtedy, keď je pre nás spotreba ohrevnej pary finančne náročná a našou ekonomickou úlohou je aj minimalizovať náklady vynaložené na výrobný proces.

Na Obr.14 máme príklad optimálneho priebehu vstupnej a stavovej veličiny, keď je váhový koeficient $r = 0,01$ a $t_f = 8$.



Obr.14 .Optimálny priebeh vstupnej resp. stavovej veličiny

V tomto prípade kladieme skôr dôraz na stavovú veličinu než na vstupnú veličinu. V praxi to pre nás znamená, že nás spotreba ohrevnej pary nezaujíma, pretože na ohrev kvapaliny použijeme napríklad „odpadovú paru“ z nejakého iného procesu. V tomto prípade budeme požadovať rýchlejší prechod do nového ustáleného stavu oproti predchádzajúcim prípadom.

7 Záver

Cieľom tejto práce bolo oboznámiť sa so základmi optimálneho riadenia procesov. Vysvetlili sme základné pojmy a definície používané v dynamickej optimalizácii procesov a rozdelili sme si metódy, ktoré sa používajú pri riešení úloh optimálneho riadenia procesov, na analytické a numerické. Bližšie sme si vysvetlili dva príklady optimálneho riadenia, a to príklad časovo optimálneho riadenia auta, v ktorom bolo našou úlohou minimalizovať čas trvania procesu. Príklad auta bol príkladom parametrizácie vektora riadenia. Výsledky sme si zobrazili aj graficky. Druhým príkladom bol plášťový výmenník tepla, kde bolo našou úlohou dosiahnuť optimálny prechod z jedného ustáleného stavu do druhého. Na výpočet optimálneho riadenia sme museli vyriešiť dvojbodovo ohraničený problém. Tento príklad sme riešili pomocou funkcionálu a výsledky sme takisto zobrazili aj graficky.

Literatúra

Čizniar, Michal. *Dynamic Optimisation Of Processe*. STU Bratislava, 2005.

Fikar, Miroslav. *Dynamická optimalizácia procesov*. Bratislava: STU Bratislava, 2007.

Hirmajer, Tomáš. *Dynamická optimalizácia procesov s hybridnou dynamikou*. Bratislava: STU Bratislava, 2006.

Mikleš, Ján a Fikar, Miroslav. *Modelovania, identifikácia a riadenie procesov II*. Bratislava: STU Bratislava, 2004.

Kirk, Donald E. *Optimal Control Theory An Introduction*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 1998.

Mikleš, Ján. *Dynamická optimalizácia procesov*. Bratislava: STU Bratislava, 2008.

Paulen, Radoslav. *Global Dynamic Optimization of Processes*. Bratislava: STU Bratislava, 2010.

Repčíková, Ivana. *Úvod do dynamickej optimalizácie procesov*. Bratislava: STU Bratislava, 2008.

Ševčík, Štefan. *Dynamická optimalizácia procesov*. Bratislava: STU Bratislava, 2006.