

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE
ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A
MATEMATIKY**

OPTIMÁLNE RIADENIE PROCESOV

BAKALARÁSKA PRÁCA

FCHPT-5415-17457

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE
ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A
MATEMATIKY**

OPTIMÁLNE RIADENIE PROCESOV

BAKALARÁSKA PRÁCA

FCHPT-5415-17457

Študijný program: Automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve

Číslo a názov študijného odboru: 5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo

Školiace pracovisko: Fakulta chemickej a potravinárskej technológie

Vedúci záverečnej práce/školiť: Ing. Radoslav Paulen

2010

Martin Jelemenský

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Oddelenie informatizácie a riadenia procesov

Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Akademický rok: 2009/2010
Evidenčné číslo: FCHPT-5415-17457

S T U . .
.
F C H P T
.

ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študent: **Martin Jelemenský**
ID študenta: 17457
Študijný program: automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve
Kombinácia študijných odborov: 5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo
Vedúci práce: Ing. Radoslav Paulen

Názov práce: **Optimálne riadenie procesov**

Špecifikácia zadania:

Práca sa zaoberá návrhom optimálneho riadenia dynamických systémov. Prvá etapa predstavuje štúdium rôznych metód dynamickej optimalizácie a druhá etapa sa týka aplikácie zvolenej metódy na výpočet niekoľkých úloh pre optimálne riadenie.

Rozsah práce: 40

Riešenie zadania práce od: 15. 02. 2010
Dátum odovzdania práce: 22. 05. 2010


Martin Jelemenský
študent




prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska


prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce Ing. Radoslavovi Paulenovi za vedenie, rady a pripomienky, ktoré mi poskytol pri vypracovávaní bakalárskej práce.

Abstrakt

Práca bola zameraná na oboznámenie sa s riešením optimalizačných problémov. Cieľom tejto práce je zoznámiť sa a vyriešiť modelové príklady súvisiace s dynamickou optimalizáciou. Prvá časť práce je zameraná na teóriu a matematické základy. V tejto časti konkrétne priblížime dve skupiny možných postupov pri riešení optimalizačných úloh. Numerické a analytické metódy. Z analytických metód, ktorým sa budeme venovať spomeňme Pontrjaginov princíp minima (maxima) a variačný počet. Medzi numerické metódy patrí napríklad iterácia hraničnej podmienky. V druhej časti už riešime modelové príklady ako optimálne riadenie zásobníka kvapaliny a optimálne riadenie auta.

Kľúčové slová: optimálne riadenie, dynamická optimalizácia, iterácia hraničnej podmienky

Abstract

This work was oriented on learning about the solution of optimization problems. The aim of this thesis is to study and solve the model examples related to dynamic optimization. The first part of this work is oriented to theory and mathematical foundations. In this section we closer specify two of the possible procedures to solve optimization problems. Numerical and analytical methods. Let us mention Potryagin's minimum (maximum) principle and Calculus variations as being an analytical methods. Numerical methods include for example method of boundary condition iteration. In the second part we deal with model examples like optimal control of liquid tank and optimal control of a car.

Keywords: optimal control, dynamic optimization, boundary condition iteration

Obsah

<i>Úvod</i>	8
1 <i>Dynamická optimalizácia</i>	9
1.1 Formulácia problému	9
1.1.1 Matematický model	9
1.1.2 Obmedzenia	11
1.1.3 Účelová funkcia	11
1.2 Úlohy optimálneho riadenia	12
1.2.1 Príklad optimálneho riadenia zásobníka kvapaliny	16
2 <i>Metódy dynamickej optimalizácie</i>	19
2.1 Analytické metódy	19
2.1.1 Dynamické programovanie.....	19
2.1.2 Pontrjaginov princíp minima (maxima).....	20
2.1.3 Variačný počet	21
2.2 Numerické metódy	22
2.2.1 Nepriame metódy.....	22
2.2.2 Priame metódy	23
3 <i>Riadenie zásobníka kvapaliny</i>	24
4 <i>Príklad časovo optimálneho riadenia auta</i>	28
4.1 Optimálne riadenie auta so stavovým obmedzením	28
4.2 Optimálne riadenie auta s obmedzením na rýchlosť	32
<i>Záver</i>	35
<i>Literatúra</i>	36

Úvod

Pri riešení problémov, či ide o problémy matematické, ekonomické alebo iné, sa vždy vyžaduje hľadanie optimálneho riešenia. V práci sa venujeme postupom a metódam hľadania optimálnych riešení problémov. Pretože existuje široká škála metód ako postupovať, budeme sa sústrediť iba na určité metódy. Pritom nemôžeme uvažovať iba o ideálnych systémoch, ale hlavne o reálnych systémoch. Pri reálnych systémoch sa vyskytujú určité obmedzenia, ktoré nemôžeme pri riešení optimalizačných úloh ignorovať resp. zanedbať. Prvá časť sa zaoberá všeobecne dynamickou optimalizáciou, formuláciou problémov a metódami, ktoré nám umožňujú nájsť optimálne riešenie problémov. Medzi najdôležitejšie metódy patrí Pontrjaginov princíp minima a variačný počet. V práci sú spomenuté a vysvetlené hlavne rozdelenia metód a to analytické a numerické metódy. Každá metóda sa ďalej rozdeľuje na ďalšie skupiny. Numerické metódy poznáme priame a nepriame. Analytické metódy sa rozdeľujú na dynamické programovanie, Pontrjaginov princíp minima(maxima) a variačný počet. V druhej časti sa snažíme použitím už spomínaných metód hľadať optimálne riešenia na konkrétne príklady. Rozoberáme dva druhy prípadov kedy hľadáme optimálne riešenie. V prvom prípade so zásobníkom kvapalín sa snažíme hľadať optimálny prechod z jedného ustáleného stavu do druhého. Problém riešime najprv teoreticky a neskôr v ďalšej kapitole riešime tento príklad už s konkrétnymi hodnotami, opisujúce zásobník kvapalín. V rámci druhej časti tejto práce sa venujeme ďalšiemu riešeniu optimalizačnej úlohy a to minimalizácii času pri optimálnom riadení auta.

1 Dynamická optimalizácia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať problémom optimálneho riadenia pri otvorenej slučke (open-loop optimal control) a použitiu viacerých metód na riešenie týchto problémov.

1.1 Formulácia problému

Hlavným predpokladom riešenia akéhokoľvek problému je dobre sformulovaný a zadefinovaný problém. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať formuláciou problému a zavedeniu základných pojmov. [1]

Formulácia problému optimálneho riadenia vyžaduje:

1. Matematický opis, alebo model procesu, ktorý má byť riadený
2. Definíciu obmedzení
3. Špecifikáciu optimalizačných kritérií

1.1.1 Matematický model

Dôležitou časťou každého návrhu riadenia procesu je modelovanie procesu. Cieľom je získať najjednoduchší matematický opis, ktorý adekvátne predpovedá odozvu fyzikálneho systému na všetky predpokladané vstupy. [1]

Zameriame sa na opis obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde,

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (1.2)$$

sú stavy premenných (alebo iba stavy) procesu v čase t a

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \quad (1.3)$$

riadené vstupy procesu v čase t .

Pričom stav môžeme vypočítať na základe vstupnej veličiny a znalosti začiatkovej podmienky.

Je dôležité poznamenať že $\dot{x}_i(t)$ je vo všeobecnosti nelineárna časovo premenná funkcia stavu riadeného vstupu a času.

Definujeme:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Ako stavový vektor systému a

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

ako vektor riadiacich veličín. Pre stavové rovnice môžeme potom napísať

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.6)$$

kde definícia f vyplýva z rovnice (1.1).

1.1.2 Obmedzenia

Obmedzenia sú podmienkami, ktoré musia optimalizačné úlohy spĺňať. Obmedzenia predstavujú oblasť dovolených hodnôt, ktoré môžu nadobúdať stavové, alebo riadiace veličiny, poprípade ich derivácie.[2] V reálnom živote sú to hlavne fyzikálne obmedzenia, ktoré si nemôžeme dovoliť ignorovať.

Obmedzenia môžu mať rôzne formy:

- Obmedzenia typu rovnosti:

$$h(x(t), u(t), t) = 0 \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (1.7)$$

- Obmedzenia typu nerovnosti:

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (1.8)$$

1.1.3 Účelová funkcia

Pri dynamickej optimalizácii môžeme funkcionál vyjadriť v nasledovných troch tvaroch.

Bolzov tvar

$$I(u(t)) = G_{t_f}(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (1.9)$$

Lagrangerov tvar

$$I(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (1.10)$$

Mayerov tvar

$$I(u(t)) = G_{t_f}(x(t_f)) \quad (1.11)$$

kde I predstavuje optimalizačné kritérium

G predstavuje časť účelovej funkcie vyčíslenej pri koncových podmienkach

$\int_{t_0}^{t_f} F dt$ reprezentuje časť účelovej funkcie vyčíslenej z určitého časového intervalu

$x(t)$ je vektor stavových veličín

$u(t)$ je vektor riadiacich veličín

Treba poznamenať, že všetky tri tvary sú ekvivalentné a vzájomne prevoditeľné.

1.2 Úlohy optimálneho riadenia

Táto časť sa bude zaoberať úlohami optimálneho riadenia procesov. Budeme sa zaoberať základnými prístupmi k riešeniu úloh optimálneho riadenia. Pri riešení úloh optimálneho riadenia uvažujeme o minimalizácii resp. maximalizácii účelovej funkcie. Ak hovoríme o maximalizácii, môže sa jednať o maximalizáciu zisku, konverzie reaktantu. A ak sa jedná o minimalizáciu, tak môžeme hovoriť o minimalizácii nákladov, odpadu, energie a času.

Uvažujme riadený proces, ktorého matematický model bude v tvare:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.12)$$

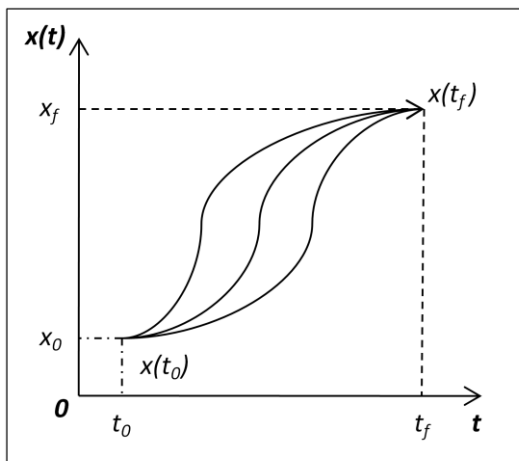
kde x je n - rozmerový vektor stavových veličín a u m - rozmerový vektor riadiacich veličín, f je n - rozmerová vektorová funkcia, spojitá a spojite diferencovateľná podľa všetkých premenných.

Úlohou optimálneho riadenia je nájsť také $u(t)$, aby funkcionál

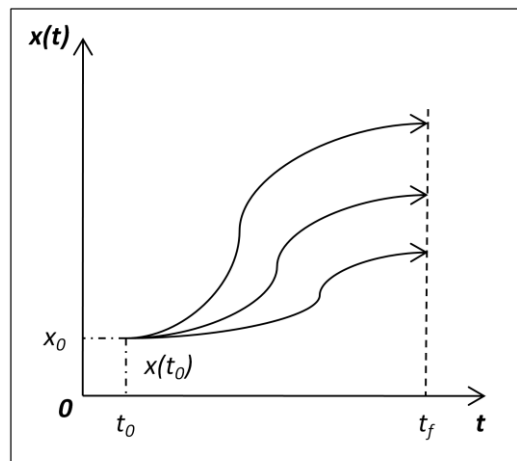
$$I(u(t)) = G_{tf}(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t)) dt \quad (1.13)$$

dosiahol minimálnu hodnotu. Funkcie G_{tf} a F sú skalárne a diferencovateľné.

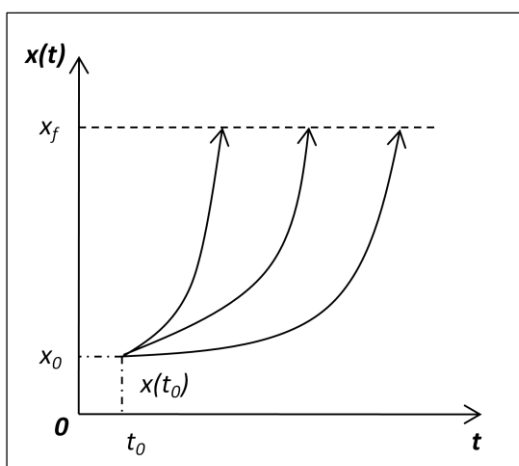
V rôznych prípadoch musíme uvažovať nad ďalšími ohraňčeniami a požiadavkami, ktoré sa môžu vyskytnúť pri riešení optimalizačných úloh a ktoré treba zahrnúť do úloh riadenia.



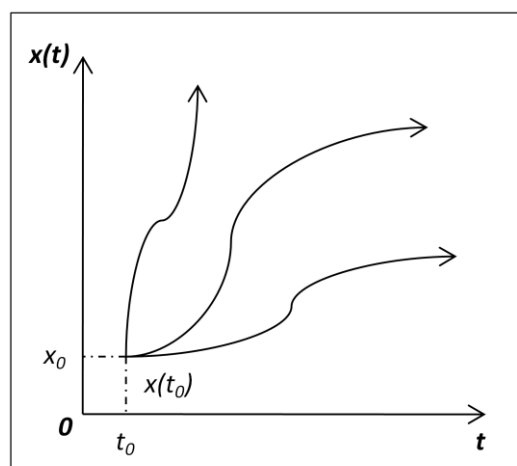
Obrázok 1. Pevný koncový čas a stav



Obrázok 2. Pevný koncový čas a voľný stav



Obrázok 3. Voľný koncový čas a pevný stav



Obrázok 4. Voľný koncový čas a voľný stav

Našou úlohou bude nájsť zo všetkých stavových trajektórií $x(t)$ s príslušným vektorom riadenia u optimálnu stavovú trajektóriu $x^*(t)$. [3] Pretože pri riešení optimalizačných úloh nemáme vždy konkrétne zadaný koncový stav a koncový čas môžu sa vyskytnúť rôzne druhy optimalizačných úloh. Budeme vždy uvažovať, že počiatočný čas a počiatočný stav je zadaný.

Ako sme už spomínali, začiatkový čas t_0 a stav $x(t_0)$ sú známe. Potom môžeme vidieť, že máme rôzne typy optimalizačných úloh. V prvom prípade (obrázok 1.) máme zadaný začiatkový a koncový stav, táto úloha môže byť ľahká, ale v určitých prípadoch aj veľmi náročná, pretože konkrétne zadaný koncový stav môže byť veľmi obmedzujúci. V ďalších dvoch prípadoch (obrázok 2.) a (obrázok 3.) poznáme buď koncový čas, alebo koncový stav. Najhorší prípad optimalizačných úloh je ak nepoznáme ani koncový stav a čas, ako je to znázornené na obrázku (obrázok 4.). V tomto prípade nájdenie optimálnej stavovej trajektórie $x^*(t)$ je veľmi náročné.

Nevyhnutnou podmienkou extrému v prípade ak máme dovolené len jednostranné variácie je

$$\delta I = 0 \quad (1.14)$$

Pre variáciu funkcionálu (1.13) platí

$$\delta I = \left(\frac{\partial G_{t_f}}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^T \delta u \right] dt \quad (1.15)$$

V rovnici (1.14) uvažujeme pevný koncový čas. Koncový stav $x(t_f)$ uvažujeme voľný.

Následne si zdefinujeme združený vektor $\lambda(t)$

$$\lambda^T \frac{d(\delta x)}{dt} = \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta u \quad (1.16)$$

Rovnice (1.15) a (1.16) spočítame potom môžeme pre δI napísať

$$\begin{aligned} \delta I = & \left(\frac{\partial G_{t_f}}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \delta x \right\} dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^T + \lambda^T \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \delta u \right\} dt - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \frac{d(\delta x)}{dt} dt \end{aligned} \quad (1.17)$$

Následne zavedieme Hamiltonovu funkciu

$$H = F + \lambda^T f(x, u) \quad (1.18)$$

Ak združený vektor $\lambda(t)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.19)$$

potom pre pevný začiatkový stav $x(t_0) = x_0$ je nevyhnutná podmienka optimálneho riadenia daná ako

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u dt = 0 \quad (1.20)$$

Pričom koncová podmienka pre združený vektor $\lambda(t)$ bude

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial G_{t_f}}{\partial x} \right)_{t=t_f} \quad (1.21)$$

V prípade ľubovoľnej variácie $\delta u(t)$ platí

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (1.22)$$

Nevyhnutná podmienka pre extrém resp. minimum funkcionálu je splnená.

Nevyhnutnou podmienkou optimálneho riadenia $u^*(t)$ pre ľubovoľnú variáciu δu vyplýva teda z rovnice (1.19).

Z rovníc (1.17) a (1.18)

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u) \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{dt} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \quad (1.25)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \left(\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \quad (1.26)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.27)$$

Deriváciou Hamiltonovej funkcie dostaneme tvar

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T \frac{du}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \frac{d\lambda}{dt} \quad (1.28)$$

Z rovníc (1.11) a (1.18) vyplýva

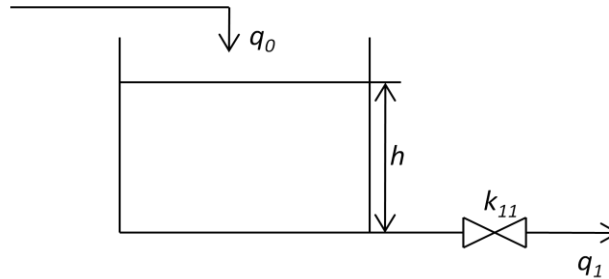
$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (1.29)$$

Pretože platí rovnica (1.22)

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (1.30)$$

Za predpokladu, že riadenie nedosiahne ohraničenie. Následne z rovnice (1.30) vyplýva, že Hamiltonova funkcia je počas trvania optimálnej odozvy konštantná.[4]

1.2.1 Príklad optimálneho riadenia zásobníka kvapaliny



Obrázok 5. Zásobník kvapaliny

Uvažujeme zásobník kvapaliny (Obrázok 5.) v ktorom riadime výšku hladiny. Chceme zabezpečiť optimálny prechod z jedného ustáleného stavu do druhého. Predpokladáme, že vstupy a výstupy sú časovo závislé veličiny. Matematický model zásobníka kvapaliny môžeme napísať nasledovne

$$F \frac{dh(t)}{dt} = q_0(t) - k_{11} \sqrt{h(t)} \quad h(t_0) = h_0 \quad (1.31)$$

Model zásobníka kvapalín v rovnovážnom (ustálenom) stave potom môžeme vyjadriť

$$q_0^s = k_{11}\sqrt{h^s} \quad (1.32)$$

kde $h(t)[m]$ je výška hladiny v zásobníku, $q_0(t)[m^3\min^{-1}]$ je objemový prietok na vstupe do zásobníka, $q_1(t)[m^3\min^{-1}]$ je objemový prietok na výstupe zo zásobníka. Uvažujeme, že prierez zásobníka $F[m^2]$, $k_{11}[m^{2,5}\min^{-1}]$ konštanta ventila a hustota kvapaliny $\rho [kg\ m^3]$ sú konštantné. Tiež uvažujeme, že teplota kvapaliny je konštantná.

Skôr ako začneme riešiť problém, musíme si najprv zadať odchyľkové veličiny

$$x(t) = h(t) - h^s \quad (1.33)$$

$$u(t) = q_0(t) - q_0^s \quad (1.34)$$

Zavedieme si konštanty

$$K = \frac{k_{11}}{2\sqrt{h^s}} \quad (1.35)$$

$$Z = \frac{1}{K} \quad (1.36)$$

$$T = \frac{F}{K} \quad (1.37)$$

kde Z je zosilnenie

T je časová konštanta

Linearizovaný odchyľkový dynamický model zásobníka

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{Z}{T}u(t) \quad (1.38)$$

Máme riadený systém, ktorý je opísaný diferenciálnou rovnicou (1.10). Budeme teda hľadať také $u(t)$ aby sme dosiahli minimum funkcionálu

$$I = \int_{t_0}^{t_f} [x^2(t) + ru^2(t)]dt \quad (1.39)$$

kde $t_0 = 0$ je začiatkový čas, t_f je koncový čas a $r > 0$ – váhový koeficient.

Predpokladáme, že hodnota $x(t_f)$ nie je zadaná, teda bude sa jednať o problém s voľným koncovým bodom.

Potom Hamiltonova funkcia má tvar

$$H = x^2 + ru^2 + \lambda\left(-\frac{1}{T}x + \frac{Z}{T}u\right) \quad (1.40)$$

pričom platí

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + \frac{\lambda}{T} \quad (1.41)$$

Koncová podmienka pre združenú veličinu $\lambda(t)$ je

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (1.42)$$

Minimum H podľa u dostaneme z rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2ru + \lambda \frac{Z}{T} = 0 \quad (1.43)$$

Optimálne riadenie potom môžeme napísať

$$u^*(t) = -\frac{Z}{2rT}\lambda^*(t) \quad (1.44)$$

Celý optimálny proces môžeme opísať nasledovne

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.45)$$

$$\dot{\lambda} = f(x, \lambda) \quad \lambda(t_f) = \lambda_f \quad (1.46)$$

Riešením systému rovníc

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x - \frac{Z^2}{2rT^2}\lambda \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.47)$$

$$\dot{\lambda} = -2x + \frac{1}{T}\lambda \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (1.48)$$

dostaneme optimálne riadenie zo vzťahu (1.43).

2 Metódy dynamickej optimalizácie

Na riešenie problémov týkajúcich sa optimálneho riadenia môžeme využiť niekoľko metód, ktoré sa rozdeľujú na dve hlavné skupiny :

1. Analytické metódy
2. Numerické metódy

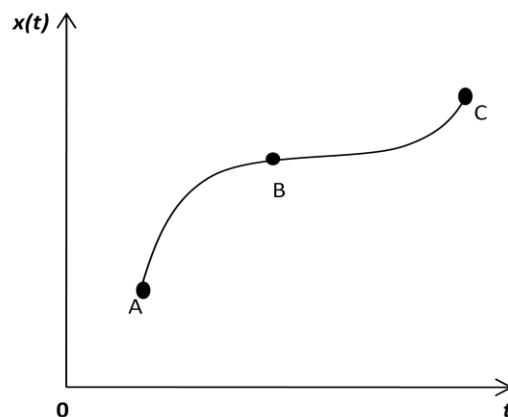
2.1 Analytické metódy

Analytické metódy sa rozdeľujú na tri hlavné skupiny

- Dynamické programovanie
- Pontrjaginov princíp minima (maxima)
- Variačný počet

2.1.1 Dynamické programovanie

Dynamické programovanie vypracované v 50-tich rokoch minulého storočia Bellmanom je založené na princípe optimálnosti. Tento princíp je založený na tvrdení, že optimálne riadenie procesov je závislé od počiatočného (začiatočného) stavu a koncového stavu. Zvláštnosťou tejto metódy je, že ak hľadáme napríklad optimálnu trajektóriu, vždy vychádzame z koncového stavu. Dynamické programovanie možno použiť aj pre spojité a nespojité systémy.[4]



Obrázok 6. Optimálna trajektória

Ak uvažujeme, že trajektória z bodu A do bodu C (obrázok 6.) je optimálna, tak potom tiež môžeme povedať, že cesta z bodu B do bodu C je tiež optimálna. Z toho nám vyplýva ako sme už spomínali na začiatku, že optimálne riadenie je závislé iba od počiatočného a koncového stavu.

2.1.2 Pontrjaginov princíp minima (maxima)

Tento princíp sa aplikuje na optimalizačné problémy, ak chceme nájsť najlepšie resp. optimálne riadenie, čiže ak chceme dostať dynamický systém z jedného optimálneho stavu do druhého.[5]

Uvažujeme problém optimálneho riadenia v Bolzovom tvare

$$I(u(t)) = G(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t)) dt \quad (2.1)$$

Musíme predpokladať, že nami zvolený problém má riešenie

$$v(x(t), t) = \min_{u(t)} \left[G(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(x(t), u(t)) dt \right] \quad (2.2)$$

Parciálna diferenciálna rovnica má tvar

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \min_{u(t)} \left[F(x(t), u(t)) + \left(\frac{\partial v}{\partial x(t)} \right)^T f(x(t), u(t), t) \right] \quad (2.3)$$

Musíme si zadať adjugovanú premennú

$$\lambda(t) = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.4)$$

ďalej upravujeme

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 v \partial H}{\partial x^2 \partial \lambda} \quad (2.5)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad (2.6)$$

Z nasledovných rovníc nám vyplýva princíp minima

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (2.8)$$

2.1.3 Variačný počet

Variačný počet je najefektívnejšia metóda v rámci analytických úloh. Riešenie problému optimálneho riadenia je možné dosiahnuť efektívnejšie a rýchlejšie ako pri ostatných analytických metódach.[5]

Zavedieme si Eulerovu-Lagrangeovú rovnicu z ktorej vyplýva riešenie problému variačného počtu

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2.9)$$

kde, $\mathcal{T}$ Lagrangeova funkcia definovaná ako

$$\mathcal{T}(x, \dot{x}, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T [f(x, u, t) - \dot{x}] \quad (2.10)$$

pričom uvažujeme optimálne riadenie definované v rovnici (2.1) môžeme formulovať nevyhnutné podmienky optimality

- podmienka optimality pre riadiace veličiny

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} = 0 \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (2.11)$$

- definícia adjugovaných veličín

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \quad t \in \langle t_0, t_f \rangle \quad (2.12)$$

- koncová podmienka pre adjugované veličiny

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x(t_f)} \quad (2.13)$$

2.2 Numerické metódy

Množstvo problémov na ktoré hľadáme optimálne riešenie sa nedajú riešiť pomocou analytických metód, vtedy používame numerické metódy. Numerické metódy sa rozdeľujú na dve základné časti

- Nepriame metódy
- Priame metódy

2.2.1 Nepriame metódy

Úlohou nepriamych metód je hlavne riešenie dvojbodovo ohraničeného problému (Two Point Boundary Value Problem).

Dvojbodovo ohraničený problém (TPBVP)

Ak vyžadujeme aby jednoduché diferenciálne rovnice splnili okrajové podmienky viac ako jednej hodnoty nezávislých premenných, tak tento problém nazývame TPBVP. Najčastejším prípadom je, keď okrajové podmienky majú byť splnené v dvoch bodoch a to v začiatočnom a koncovom bode.

Existujú dve hlavné metódy riešenia dvojbodovo ohraničeného problému. Prvá metóda je nazývaná nastreľovacia metóda (shooting method) a druhá relaxačná metóda (relaxation method).

Iterácia hraničnej podmienky (BCI)

Metóda sa zakladá na nájdení chýbajúcej hraničnej podmienky minimalizáciou chýb medzi hraničnými podmienkami.[6]

Nevýhodou tejto metódy je problém odhadnutia a určenia počiatočných hodnôt adjugovaných premenných v počiatočnom čase, pretože ak ich zle odhadneme môže byť veľmi zdĺhavé kým nájdeme optimálne riešenie. Ďalším problém pri odhadovaní počiatočných hodnôt môže byť, že systém bude vykazovať problémy v stabilite.[3]

Iterácia vektora riadenia (CVI)

Túto metódu taktiež označujeme ako gradientovú metódu. Nutné podmienky optimality zabezpečujú gradienty na optimalizované premenné.[3]

2.2.2 Priame metódy

Pri priamych metódach sú vstupy aproximované polynómami s konečným počtom parametrov. Zároveň si musíme uvedomiť, že kvalita vypočítaného riadenia, ktorú získame riešením aproximovaného problému optimálneho riadenia je závislá od parametrizácie a od vhodne zvolených počiatočných podmienok. [3]

Sekvenčná metóda (CVP)

Sekvenčná metóda je tiež nazývaná parametrizácia vektora riadenia. Základ metódy je parametrizácia riadenia niekoľkými parametrami. Výpočet spočíva v riešení gradientov účelovej funkcie a obmedzení. Riešenie ktoré získame pomocou sekvenčnej metódy môže mať iba lokálny charakter. [5]

Simultánna metóda (OC)

Tiež nazývaná ortogonálna kolokácia. Pri tejto metóde aproximujeme stavové a riadiace veličiny použitím polynómu s volenými parametrami. Simultánna metóda na rozdiel od sekvenčnej metódy nevyžaduje riešenie diferenciálnych rovníc pri každej iterácii.[3]

3 Riadenie zásobníka kvapaliny

V tejto kapitole budeme ďalej pokračovať v príklade, ktorý sme rozoberali v kapitole 1.2.1. Cieľom nášho problému bude minimalizácia funkcionálu 1.38 pri ktorom sa hladina v zásobníku kvapalín dostane z jedného ustáleného stavu do druhého. Daný problém sme riešili pomocou metódy BCI - iterácia hraničnej podmienky.

Budeme uvažovať zásobník kvapalín (obrázok 5.) s nasledujúcimi parametrami

$$F = 2 \text{ m}^2, \quad k_{11} = 1,25 \text{ m}^{2,5} \text{ min}^{-1}, \quad q_0 = 3,75 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$$

$$K = \frac{k_{11}}{2\sqrt{h^s}} = \frac{1,25}{2\sqrt{9}} = 0,208 \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$$

$$Z = \frac{1}{K} = \frac{1}{0,208} = 4,81 \text{ min m}^{-2}$$

$$T = \frac{F}{K} = \frac{2}{0,208} = 9,62 \text{ min}$$

Matematicky môžeme vyjadriť existenciu optimálneho riadenia, ale v mnohých praktických úlohách sa existencia optimálneho riadenia posudzuje z fyzikálneho rozboru.[4] Je to z toho dôvodu, že optimálne riadenie, ktoré nájdeme matematicky nemusí vždy vyhovovať reálnym zariadeniam, ktoré chceme riadiť. Musíme posudzovať všetky obmedzenia, ktoré majú vplyv na optimálne riadenia napríklad nášho zásobníka kvapaliny. Obmedzenia typu maximálnej výšky hladiny v zásobníku kvapaliny a maximálny objemový prietok.

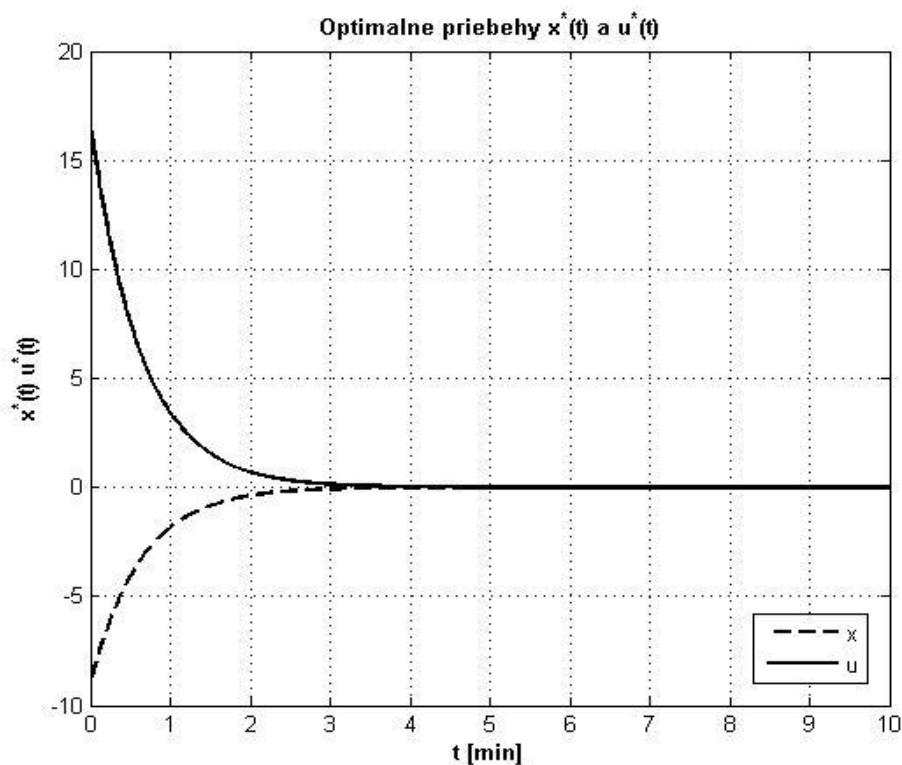
Ako je vidieť z príslušných obrázkov pri rôznych váhových koeficientoch je priebeh riadenia rôzny. Je to hlavne z toho dôsledku, či prikladáme veľký dôraz na vstupnú veličinu, alebo na stavovú veličinu. V každom prípade sa však snažíme minimalizovať funkcionál. Pretože iba vtedy môžeme povedať, že sme dosiahli nami požadovaný stav.

Budeme uvažovať, že na vstupe do zásobníka máme zaradené čerpadlo a podľa váhových koeficientov budeme rozlišovať tri prípady.

Prvý prípad, že nebudeme klásť dôraz na energetickú spotrebu čerpadla v druhom prípade kladieme rovnaký dôraz na vstupnú veličinu, ako na stavovú veličinu a pri poslednom type kladieme dôraz hlavne na vstupnú veličinu.

Na nasledujúcich obrázkoch si ukážeme optimálne priebehy $x(t)$ a $u(t)$ pre rôzne r

$$r = 0,1 \quad t_f = 5 \text{ min}$$

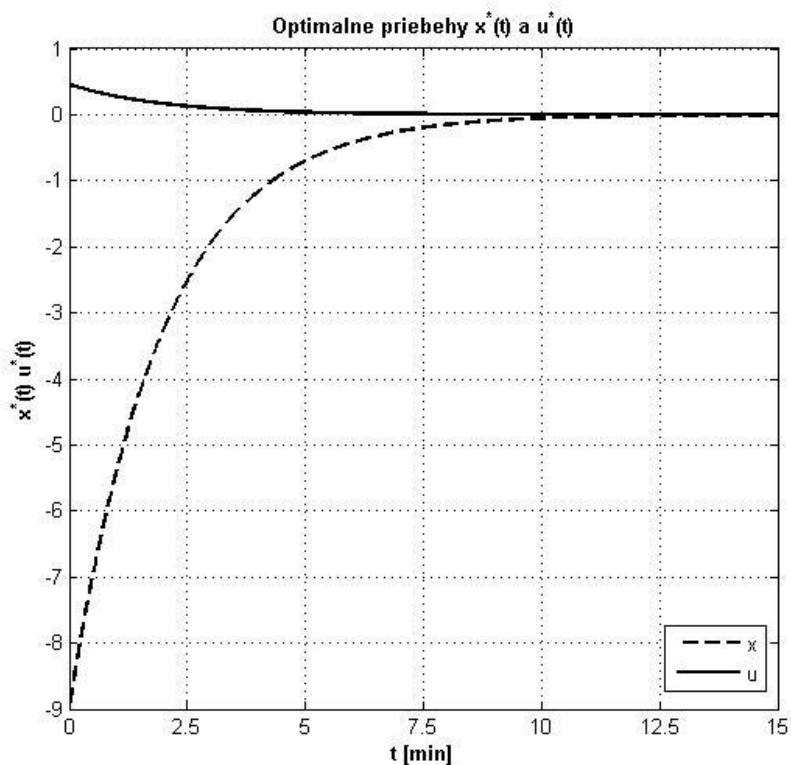


Obrázok 7. Optimálne priebehy vstupnej a stavovej veličiny zásobníka kvapalín

Ako je vidieť pri $r = 0,1$ (Obrázok 7.) nedávame dôraz na vstupnú veličinu, ale snažíme sa dostať čo najrýchlejšie do nami požadovaného stavu. To znamená, že nám nezáleží na energetickej spotrebe čerpadla a tým výkon čerpadla môžeme nastaviť na ľubovoľne veľký čím zaručíme rýchlejšie dosiahnutie požadovanej výšky hladiny.

V ďalšom prípade ak $r = 1$ (obrázok 8.) kladieme rovnaký dôraz na stavovú ako na vstupnú veličinu.

$$r = 1 \quad t_f = 12,5 \text{ min}$$

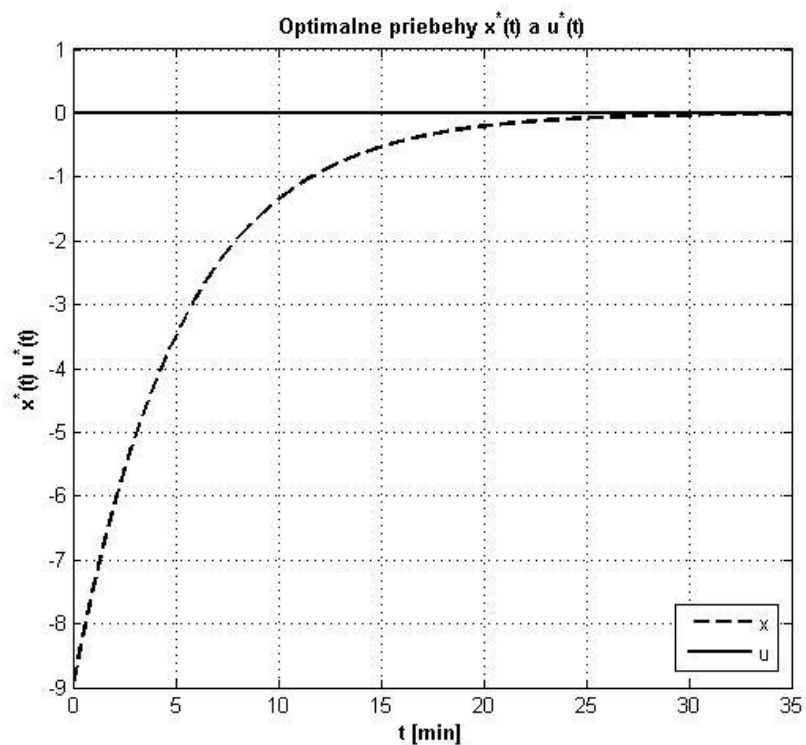


Obrázok 8. Optimálne priebehy vstupnej a stavovej veličiny zásobníka kvapalín

To znamená, že sa snažíme dosiahnuť požadovanú výšku hladiny v zásobníku kvapaliny v čo najkratší čas, ale zároveň musíme prikladať rovnaký dôraz na energetickú spotrebu čerpadla. V istých prípadoch je tento problém o niečo zložitejší ako predchádzajúce problémy, kde sme kládli dôraz iba na stavovú, alebo iba na vstupnú veličinu. Avšak v praxi sa hlavne stretávame práve s týmto typom problému, kde sa snažíme dosiahnuť požadovanú výšku v zásobníku kvapaliny v čo najkratší čas a zároveň minimalizovať energetickú spotrebu čerpadla.

Pri poslednom prípade (obrázok 9.) kladieme dôraz na vstupnú veličinu ako na stavovú veličinu.

$$r = 10 \quad t_f = 35 \text{ min}$$



Obrázok 9. Optimálne priebehy vstupnej a stavovej veličiny zásobníka kvapalín

V poslednom prípade kladieme veľký dôraz na vstupnú veličinu. Znamená to, že čerpadlo nastavíme na minimálny možný výkon, ale pritom nás nezaujíma, kedy dosiahneme požadovanú výšku hladiny.

4 Príklad časovo optimálneho riadenia auta

V tejto kapitole si ukážeme príklad použitia niektorých metód na riešenie optimalizačných problémov. Hľadanie optimálneho času riadenia auta bez obmedzení na rýchlosť. Ako metódu na riešenie optimálneho riadenia auta sme použili metódu parametrizácie vektora riadenia (CVP). Kde sme trajektóriu riadenia parametrizovali na konečný počet parametrov s konštantnou hodnotou. Pričom sme ponechali pôvodné stavové rovnice.



Obrázok 10. Optimálne riadenie auta

4.1 Optimálne riadenie auta so stavovým obmedzením

Našou úlohou bude minimalizovať čas za ktorý sa auto dostane z bodu O do bodu k . Ďalej budeme uvažovať, že auto je hmotný bod, takže jeho rozmery zanedbávame. Opísaný je polohou $x_1(t) = d(t)$, rýchlosťou $x_2(t) = v(t)$ a zrýchlením $u(t) = a(t)$.

Stavový opis procesu následne definujeme rovnicami

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (4.2)$$

následne si zadefinujeme začiatkové a koncové podmienky

$$x_1(0) = 0 \quad x_1(t_f) = 400 \quad (4.3)$$

$$x_2(0) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (4.4)$$

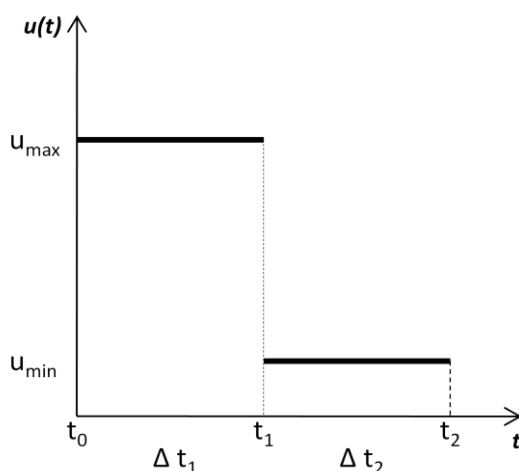
obmedzenie na zrýchlenie má tvar

$$-2 \leq u \leq 2 \quad \Rightarrow \quad u_{min} \leq u \leq u_{max}$$

Účelová funkcia má tvar

$$I = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f \quad (4.5)$$

Pomocou funkcie *fmincon* v Matlabe sme zistili časové intervaly na ktorých má auto zrýchľovať a spomaľovať tak, aby v čo najkratšom čase prešlo zadanú dráhu 400 m.



Obrázok 11. Časové intervaly pre problém bez obmedzením

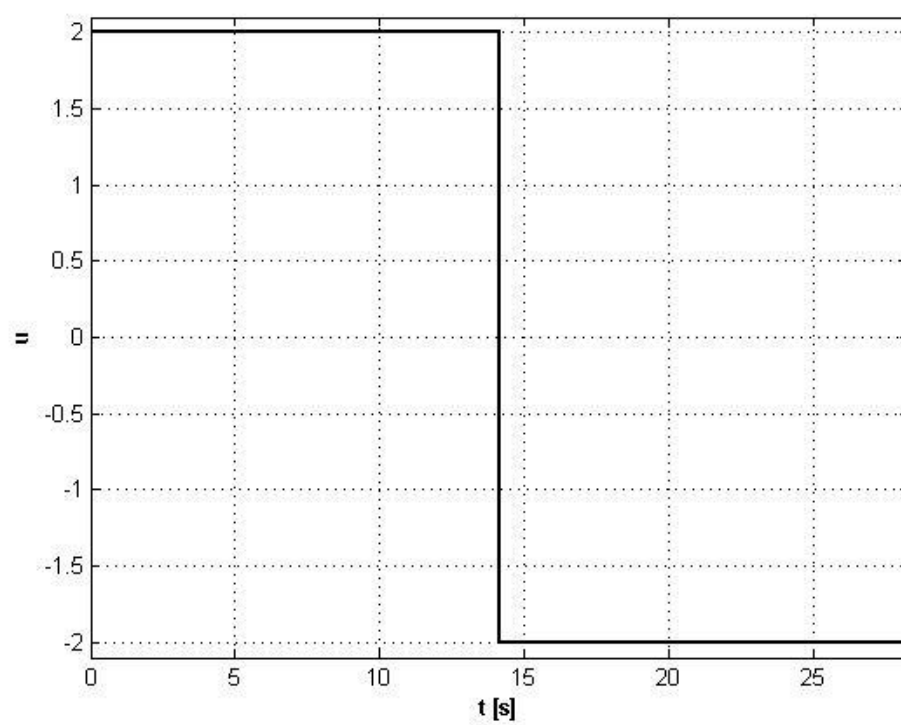
kde

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 14,1421 - 0 = 14,1421 \text{ s} \quad (4.6)$$

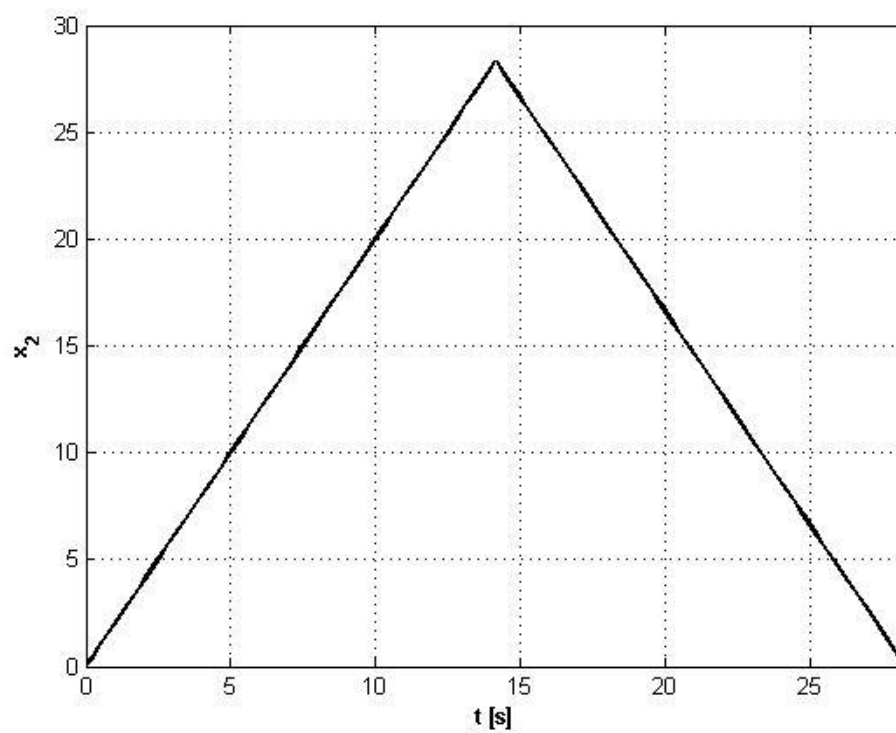
$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 28,2842 - 14,1421 = 14,1421 \text{ s} \quad (4.7)$$

Ako je vidieť na obrázku 11. hľadali sme optimálne časové úseky zrýchľovania a spomaľovania auta. Pomocou už spomínanej funkcie *fmincon* sme zistili, že $\Delta t_1 = 14,1421\text{s}$ a $\Delta t_2 = 14,1421\text{s}$. Celkový čas potrebný na prejdenie dráhy 400 m je súčet jednotlivých časov.

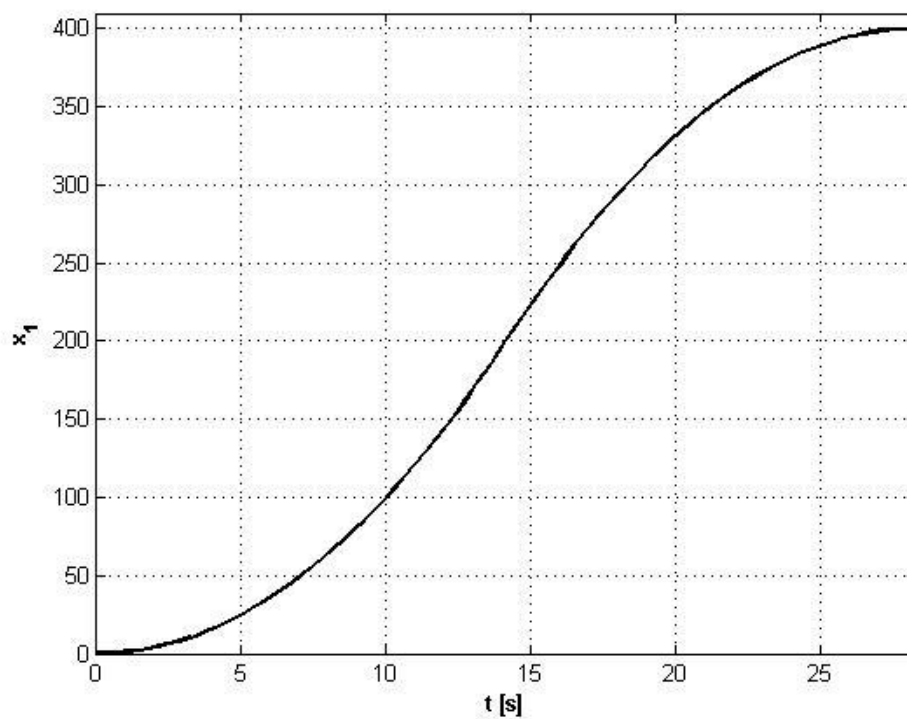
V nasledujúcich grafov sú znázornené priebehy zrýchlenia, rýchlosti a dráhy. Ako je znázornené na (obrázku 12.) prvý od času t_0 po čas t_1 sa koná rovnomerne zrýchlený pohyb auta až kým nedosiahne čas prepnutia, kedy začneme konať rovnomerne spomalený pohyb, až kým nedosiahneme nulovú rýchlosť a zároveň dosiahneme maximálnu dráhu. V koncovom čase je naša rýchlosť a zrýchlenie nulové presne, ako je to predpísané v podmienkach (4.4).



Obrázok 12. Priebek zrýchlenia pre problém bez obmedzenia



Obrázok 13. Priebek rýchlosti pre problém bez obmedzenia



Obrázok 14. Profil dráhy pre problém bez obmedzenia

Pri tomto príklade sme vypočítali jednotlivé časové úseky. Celý problém bol riešený iba s obmedzením na prejdenú dráhu. Ako je vidieť na obrázku 13. sme mohli graficky zistiť aj maximálnu rýchlosť a zároveň čas prepnutia.

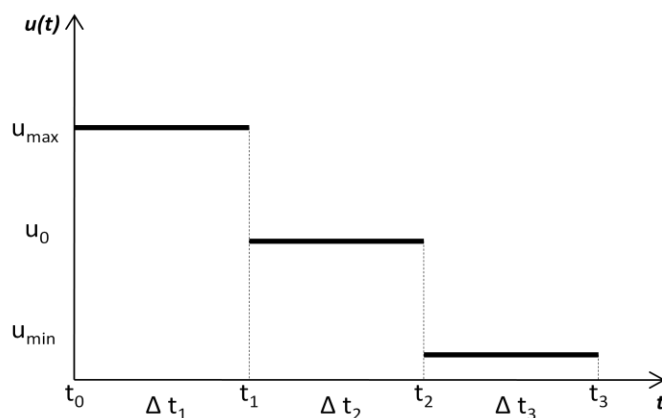
4.2 Optimálne riadenie auta s obmedzením na rýchlosť

V tomto prípade optimálneho riadenia auta budeme postupovať rovnako, ako sme postupovali v kapitole 4.1. Našou hlavnou úlohou bude opäť minimalizácia času za ktorý naše auto dosiahne vzdialenosť 400 m. Budeme však uvažovať obmedzenie na rýchlosť.

Definícia obmedzenia rýchlosti:

$$g(x_2(t)) \leq 20 \quad (4.8)$$

Grafické zobrazenie optimálnych priebehov pre časovo optimálne riadenie auta s obmedzením na rýchlosť.



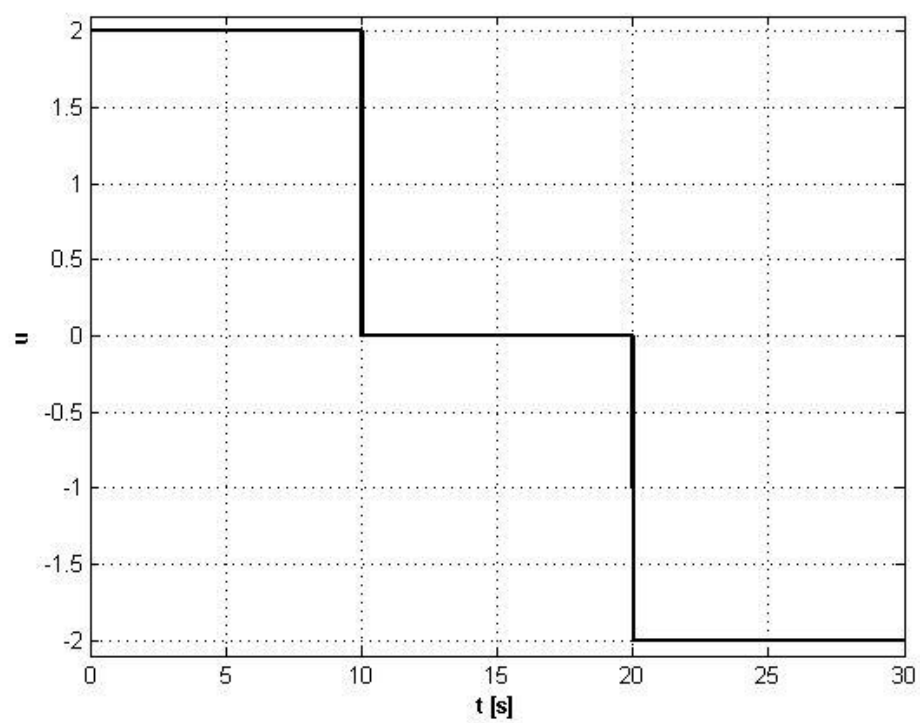
Obrázok 15.Časové intervaly pre problém s obmedzením

Optimalizačný postup pri tomto probléme je úplne podobný ako v kapitole 4.1. A však v tomto prípade máme obmedzenie na rýchlosť. Δt_2 je čas, kedy auto dosiahne maximálnu povolenú rýchlosť a pohybuje sa rovnomerným pohybom. Časy Δt_1 a Δt_3 sú časy kedy auto zrýchľuje a spomaľuje.

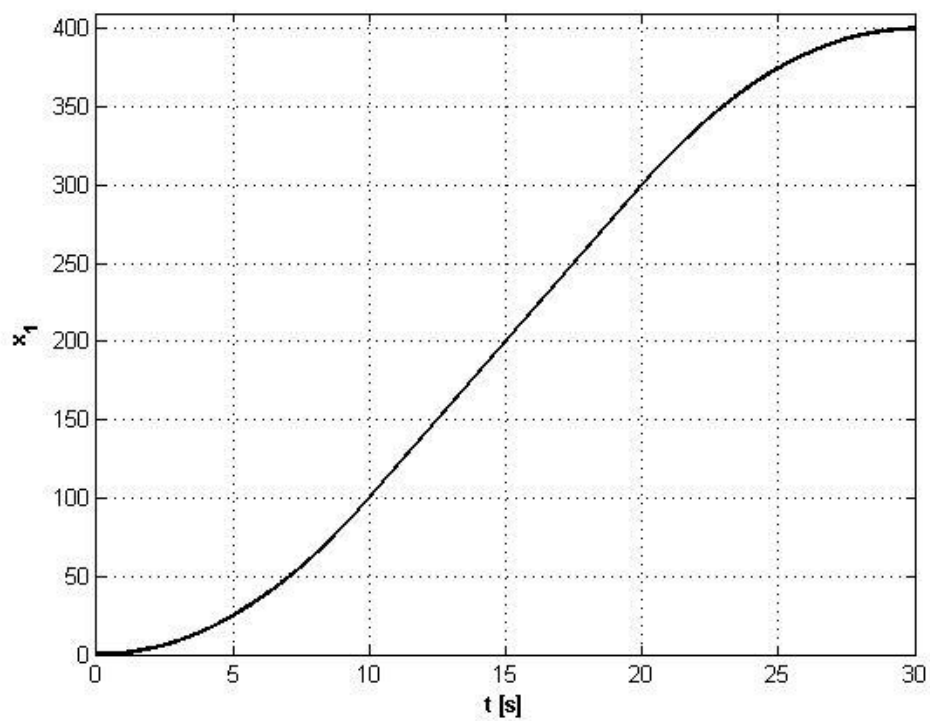
$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 10 - 0 = 10s \quad (4.9)$$

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10s \quad (4.10)$$

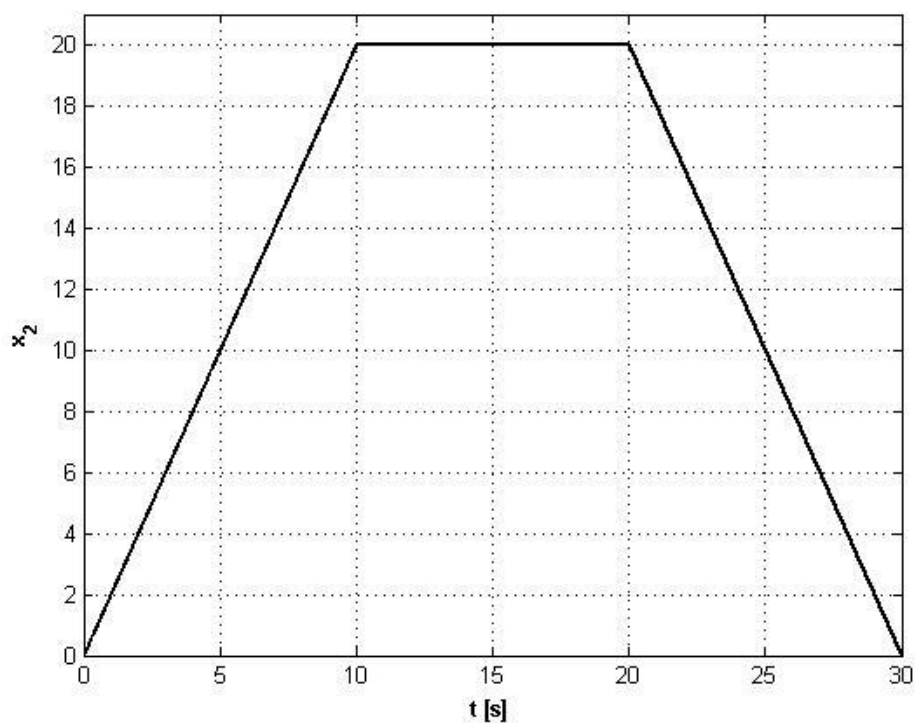
$$\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 30 - 20 = 10s \quad (4.11)$$



Obrázok 16. Priebek zrýchlenia pre problém s obmedzením



Obrázok 17. Profil dráhy pre problém s obmedzením



Obrázok 18. Profil rýchlosti pre problém s obmedzením

Pri tomto type optimálneho riadenia auto sme museli uvažovať o dvoch typoch obmedzenia. Prvý typ bol ako v predchádzajúcej úlohe, kde sme uvažovali o obmedzení na konečný stav. Druhý typ obmedzenia bol opísaný rovnicou (4.8) a jednalo sa o obmedzenie na maximálnu rýchlosť. Na obrázku 15. môžeme vidieť, že ak dosiahneme maximálnu rýchlosť, dosiahneme stav riadenia u_0 , kedy naše zrýchlenie je nulové a začneme sa pohybovať rovnomerným pohybom. Ďalej môžeme vidieť, že máme dva časy prepnutia.

Záver

V rámci bakalárskej práce sme sa zaoberali problematikou optimálneho riadenia procesov. Základom tejto práce bolo teoreticky zvládnuť teoretické základy dynamickej optimalizácie a príslušných metód , ktoré nám pomáhajú pri riešení optimalizačných úloh. V práci sme riešili dva typy optimalizačných úloh. V prvom prípade sme sa pokúšali minimalizovať funkcionál pri prechode z jedného ustáleného stavu do nového, čo sa nám aj podarilo. Výsledky sú znázornené graficky v rámci príkladu. Ďalším typom príkladu, ktorý sme riešili bolo optimálne riadenie auta. Aj pri tomto prípade sme minimalizovali funkcionál. Pomocou dostupných funkcií v rámci programu Matlab sa nám podarilo zistiť optimálne časové úseky zrýchľovania a spomaľovania, tak aby sme prešli nami zadanú dráhu v čo najkratší čas. Všetky výsledky, ktoré sme získali sú uvedené v kapitole o optimálnom riadení auta. Výsledky sú tiež spracované graficky.

Literatúra

- [1] **Donald, Kirk E.** *Optimal Control Theory*. Mineola, New York : Doner Publications, Inc., 1998.
- [2] **Repčíková, Ivana.** *Úvod do dynamickej optimalizácie procesov*. Bratislava : STU Bratislava, 2008.
- [3] **Hirmajer, Tomáš.** *Dynamická optimalizácia procesov s hybridnou dynamikou*. Bratislava : STU Bratislava, 2006.
- [4] **Fikar, Miroslav.** *Dynamická optimalizácia procesov*. Bratislava : STU Bratislava, 2006.
- [5] **Čižniar, Michal.** *Dynamic optimisation of processes*. Bratislava : STU Bratislava, 2005.
- [6] **Ševčík, Štefan.** *Dynamická optimalizácia procesov*. Bratislava : STU Bratislava, 2006.
- [7] **Mikleš, Ján a Fikar, Miroslav.** *Modelovanie, identifikácia riadenie procesov 2*. Bratislava : STU Bratislava, 2004.
- [8] **Paulen, Radoslav.** *Global dynamic optimization of processes*. Bratislava : STU Bratislava, 2010.