

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE

ÚSTAV AUTOMATIZÁCIE, INFORMATIZÁCIE A MATEMATIKY

Riadenie technologického procesu pomocou
frekvenčných kritérií

Monika POLAČKOVÁ

BAKALÁRSKY PROJEKT

FCHPT-5415-40474

2010

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE
ÚSTAV AUTOMATIZÁCIE, INFORMATIZÁCIE A MATEMATIKY

**Riadenie technologického procesu pomocou
frekvenčných kritérií**

BAKALÁRSKY PROJEKT

Monika POLAČKOVÁ

Vedúci bakalárskeho projektu:

Ing. Mária Karšaiová, CSc.

FCHPT-5415-40474

Bratislava 2010

Zadanie bakalárskej práce

Špecifikácia zadania:

- frekvenčný prenos
- frekvenčné charakteristiky – amplitúdová, fázová
- frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu
- návrh parametrov regulátora
- riadenie technologického procesu

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem pod'akovať vedúcej bakalárskej práce
Ing. Márii Karšaiovej, CSc. za odbornú pomoc a cenné rady,
ktoré mi poskytla pri jej vypracovaní.

Súhrn

Bakalársky projekt prináša a systematizuje poznatky z oblasti riadenia technologických procesov pomocou frekvenčných kritérií. Prvá časť vysvetľuje základné pojmy z danej problematiky, čo je frekvenčný prenos, frekvenčná a logaritmická frekvenčná charakteristika a ako použiť frekvenčné kritériá na overovanie stability dynamických systémov. Pre názornosť sú analyzované jednoduché modely systémov prvého, druhého a vyšších rádov. V ďalšej časti sú nadobudnuté poznatky aplikované na návrh P,PI a PID regulátorov. V závere tohto bakalárskeho projektu je na konkrétnom príklade prietokového chemického reaktora demonštrované použitie teoretických poznatkov v praxi. Všetky frekvenčné charakteristiky sú simulované v programovom prostredí MATLAB R2008a – SIMULINK 7.6®.

Abstract

This bachelor project brings and systematizes knowledge of the technological process control using frequency criteria. The first section explains the basic concepts of the issue, what is the transmission frequency, frequency and logarithmic frequency characteristic and frequency criteria used to verify the stability of dynamic system. By way of illustration are analysed simple models of the first, second and higher orders. In the next part there are the won knowledge applied to the proposal of P, PI and PID regulators.

In the conclusion of this thesis there are on the specific example of the chemical flow reactor demonstrated the use of theoretical knowledge in practice. All frequency characteristics are simulated in the program MATLAB R2008a – SIMULINK 7.6®.

Obsah

Zoznam obrázkov	7
Zoznam tabuliek	9
Zoznam symbolov a skratiek	10
Úvod	12
1 Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika	13
1.1 Frekvenčná charakteristika a stabilita systému	14
2 Frekvenčné charakteristiky jednoduchých systémov v komplexnej rovine	17
2.1 Frekvenčné charakteristiky pre systém prvého rádu	17
2.2 Frekvenčné charakteristiky pre systém druhého rádu	22
2.3 Frekvenčné charakteristiky pre systém vyššieho rádu	27
3 Logaritmické frekvenčné charakteristiky	29
3.1 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém prvého rádu	29
3.2 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém druhého rádu	32
3.3 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém vyššieho rádu	36
4 Návrh regulátora	38
4.1 Určenie kritických hodnôt pomocou frekvenčných charakteristík	39
4.2 Určenie kritických hodnôt ručným výpočtom	41
4.3 Výpočet parametrov regulátora Ziegler – Nicholsovou metódou	43
5 Riadenie prietokového chemického reaktora pomocou frekvenčných kritérií	47
5.1 Určenie kritických hodnôt pomocou frekvenčných charakteristík	51
5.2 Určenie kritických hodnôt ručným výpočtom	52
5.3 Výpočet parametrov regulátora pre riadenie reaktora	54
5.4 Simulácia riadenia reaktora s navrhnutými regulátormi	55
6 Záver	58
Zoznam použitej literatúry	59

Zoznam obrázkov

Obr. 1 Zobrazenie frekvenčného prenosu v komplexnej rovine	14
Obr. 2 Frekvenčná charakteristika stabilného systému	15
Obr. 3 Frekvenčná charakteristika systému na hranici stability	16
Obr. 4 Frekvenčná charakteristika nestabilného systému	16
Obr. 5 FCH 1.rádu s $K = 1$, $T = 2$	19
Obr. 6 FCH 1.rádu s $K = 5$, $T = 3$	20
Obr. 7 FCH frekvenčného útlmu 1. rádu	21
Obr. 8 FCH 1. rádu s integračnými vlastnosťami	22
Obr. 9 FCH 2. rádu pre $\xi = 5$	23
Obr. 10 FCH 2. rádu pre $\xi = 1$	24
Obr. 11 FCH 2. rádu pre $\xi = 0,5$	24
Obr. 12 FCH 2. rádu pre $\xi = -0,7$	25
Obr. 13 FCH 2. rádu pre $\xi = -2$	26
Obr. 14 FCH frekvenčného útlmu 2. rádu	26
Obr. 15 FCH 2. rádu s integračnými vlastnosťami	27
Obr. 16 FCH 3. rádu	28
Obr. 17a Logaritmická FCH 1. rádu	30
Obr. 17b Logaritmická FCH 1. rádu	31
Obr. 18 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 10$	33
Obr. 19 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 1$	34
Obr. 20 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0,5$	34
Obr. 21 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0,1$	35
Obr. 22 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0$	35
Obr. 23 Logaritmická FCH 3. rádu	37
Obr. 24 Rozpojený regulačný obvod	38
Obr. 25 FCH otvoreného regulačného obvodu	39
Obr. 26 Logaritmická FCH pre otvorený regulačný obvod	40
Obr. 27 FCH otvoreného regulačného obvodu na hranici stability	40
Obr. 28 Prechodová charakteristika URO	41
Obr. 29 FCH otvoreného regulačného obvodu s P regulátorom	44
Obr. 30 Prechodová charakteristika URO s P regulátorom	44
Obr. 31 FCH otvoreného regulačného obvodu s PI regulátorom	45
Obr. 32 FCH uzavretého regulačného obvodu s PI regulátorom	45

Obr. 33 FCH otvoreného regulačného obvodu s PID regulátorom	46
Obr.34 Prechodová charakteristika URO s PID regulátorom	46
Obr. 35 Prietokový chemický reaktor s miešaním	47
Obr. 36 Simulačná schéma na realizáciu skokovej zmeny prietoku chladiaceho média	48
Obr. 37 Prechodová charakteristika odozvy systému na skokovú zmenu prietoku q_c	48
Obr. 38 Simulačná schéma na overenie správnosti identifikácie	50
Obr. 39 Prechodová charakteristika pôvodného a identifikovaného systému	50
Obr. 40 LFCH otvoreného regulačného obvodu reaktora	51
Obr. 41 FCH otvoreného regulačného obvodu reaktora	52
Obr. 42 Prechodová charakteristika URO reaktora	53
Obr. 43 Simulačná schéma na riadenia reaktora	55
Obr. 44 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným P regulátorom	56
Obr. 45 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným PI regulátorom	56
Obr. 46 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným PID regulátorom	57

Zoznam tabuliek

Tab. 1: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora Ziegler - Nicholsonovou metódou	43
Tab. 2: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora pre určené hodnoty K_{KR} , T_{KR}	43
Tab. 3: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora pre riadenie reaktora	54

Zoznam symbolov a skratiek

$G_S(s)$	Prenos systému
$G_S(j\omega)$	Frekvenčný prenos
$G_S(-j\omega)$	Združený frekvenčný prenos
$u(t)$	Vstupná harmonická veličina
$y(t)$	Výstupná harmonická veličina
A_1	Amplitúda vstupujúcej harmonickej veličiny
A_2	Amplitúda vystupujúcej harmonickej veličiny
ω	Uhlová frekvencia
φ	Fázový posun
$ G_S(j\omega) $	Absolútna hodnota frekvenčného prenosu
$\text{Re } G_S(j\omega)$	Reálna zložka frekvenčného prenosu
$\text{Im } G_S(j\omega)$	Imaginárna zložka frekvenčného prenosu
$G_R(s)$	Prenos regulátora
$G_O(s)$	Prenos otvoreného regulačného obvodu
$G_W(s)$	Prenos uzavretého regulačného obvodu
K	Zosilnenie systému
T	Časová konštanta systému
ξ	Tlmiaci koeficient prenosu
n	Rád systému
1dB	1 decibel
Δ	Chyba medzi skutočnou amplitúdovou charakteristikou a asymptotami
K_{KR}	Kritické zosilnenie systému
T_{KR}	Kritická časová konštanta systému
ω_{KR}	Kritická uhlová frekvencia
URO	Uzavretý regulačný obvod
ORO	Otvorený regulačný obvod
FCH	Frekvenčná charakteristika
LFCH	Logaritmická frekvenčná charakteristika
G_m	Bezpečnosť v amplitúde
P regulátor	Proporcionálny regulátor

PI regulátor	<u>P</u> roporcionálno – <u>I</u> ntegračný regulátor
PID regulátor	<u>P</u> roporcionálno – <u>I</u> ntegračno – <u>D</u> erivačný regulátor
q_c^s	Prietok chladiaceho média v ustálenom stave
c_A^s	Koncentrácia látky A v ustálenom stave
c_B^s	Koncentrácia látky B v ustálenom stave
c_C^s	Koncentrácia látky C v ustálenom stave
θ^s	Teplota reakčnej zmesi v ustálenom stave
θ_c^s	Teplota chladiaceho média v ustálenom stave

Úvod

Jednou z hlavných podmienok riadenia technologických procesov je zabezpečenie stability príslušných regulačných obvodov [5]. Stabilita je vlastnosť obvodu vrátiť sa do rovnovážneho stavu po doznení poruchovej veličiny, ktorá ho z rovnovážneho stavu vyviedla [6]. Regulačný obvod môže byť stabilný, na hranici stability a nestabilný. Stabilita systému sa posudzuje na základe kritérií stability. Jedným z nich je frekvenčné kritérium, Nyquistovo kritérium stability, ktoré je založené na použití frekvenčných charakteristík. Riešenie stability pomocou frekvenčných charakteristík je názorné a umožňuje pomerne ľahko určiť, ako meniť parametre regulačného obvodu, aby bola zabezpečená jeho stabilita [6]. V prvej časti práca oboznamuje čitateľa s určovaním stability jednoduchých systémov prvého, druhého a vyšších rádov pomocou frekvenčných a logaritmických frekvenčných charakteristík.

Zabezpečenie stability a kvality riadenia regulačných obvodov je spojené s návrhom parametrov jednotlivých regulátorov [5]. Nastavovanie optimálnych koeficientov regulátora je stále aktuálny problém prevádzky priemyselných regulátorov. Rad metód, ktoré sa v praxi využívajú, existuje už vyše päťdesiat rokov, ale je aj rad nových metód, ktoré sa naďalej rozvíjajú a obohacujú súčasnú teóriu regulácie.[4]

Použitím inžinierskej metódy nastavovania parametrov regulátora pomocou frekvenčných kritérií, známej ako Ziegler – Nicholsonova metóda, sa z amplitúdovej a fázovej logaritmickkej frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu určia kritické parametre. Pomocou kritického zosilnenia a kritickej časovej konštanty sa zo známych tabuliek Zieglera – Nicholosa určia parametre P, PI a PID regulátora.

Hlavným cieľom práce bude aplikovať získané vedomosti na riadenie prietokového reaktora. Prvým krokom bude preto získať vhodný matematický opis reálneho objektu reprezentujúci dynamické vlastnosti regulovaného procesu, teda identifikovať riadený objekt. V druhom kroku sa z logaritmickkej frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu určia kritické parametre a na základe Ziegler – Nicholsonovej metódy sa navrhnu vhodné regulátory na riadenie prietokového reaktora.

1 Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika

Je daný systém s prenosom

$$G_s(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{I-1})$$

potom dosadením za $s = j\omega$ bude frekvenčný prenos

$$G_s(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (\text{I-2})$$

Ak sa do rovnice (I-1) dosadí za $s = -j\omega$, združený frekvenčný prenos bude

$$G_s(-j\omega) = \frac{b_m (-j\omega)^m + b_{m-1} (-j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (-j\omega) + b_0}{a_n (-j\omega)^n + a_{n-1} (-j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (-j\omega) + a_0} \quad (\text{I-3})$$

Frekvenčný prenos aj združený frekvenčný prenos plne charakterizujú danú sústavu.[3]

Nech do danej sústavy (I-2) vstupuje harmonická veličina

$$u(t) = A_1 \sin \omega t \quad (\text{I-4})$$

potom výstupná veličina bude mať priebeh

$$y(t) = A_2 \sin(\omega t - \varphi) \quad (\text{I-5})$$

kde A_1 - amplitúda vstupujúcej harmonickej veličiny, A_2 - amplitúda vystupujúcej harmonickej veličiny, ω - uhlová frekvencia a φ - fázový posun.

Výstupná veličina bude tiež harmonická. Amplitúda aj fázový posun závisia od sústavy a od frekvencie vstupných kmitov.

Podiel amplitúd A_2 a A_1 je rovný absolútnej hodnote frekvenčného prenosu (I-2)

$$|G_s(j\omega)| = \frac{A_2}{A_1} \quad (\text{I-6})$$

Frekvenčný prenos je možné písať aj v tvare

$$G_s(j\omega) = |G_s(j\omega)| e^{j\varphi} = \sqrt{[\operatorname{Re} G_s(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} G_s(j\omega)]^2} e^{j\varphi} \quad (\text{I-7})$$

kde $\operatorname{Re} G_s(j\omega)$ - reálna zložka a $\operatorname{Im} G_s(j\omega)$ - imaginárna zložka frekvenčného prenosu.

Výsledný fázový posun je

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\operatorname{Im} G_s(j\omega)}{\operatorname{Re} G_s(j\omega)} \right] \quad (\text{I-8})$$

Grafickým zobrazením frekvenčného prenosu je frekvenčná charakteristika, ktorú v komplexnej rovine opisuje koncový bod vektora $Ae^{j\varphi}$ pri zmene uhlovej frekvencie od 0 po ∞ , vid'. obr. 1. Často sa kreslí osobitne závislosť amplitúdy a osobitne fázy od frekvencie. Tieto charakteristiky sa nazývajú amplitúdovou resp. fázovou frekvenčnou charakteristikou.[3]

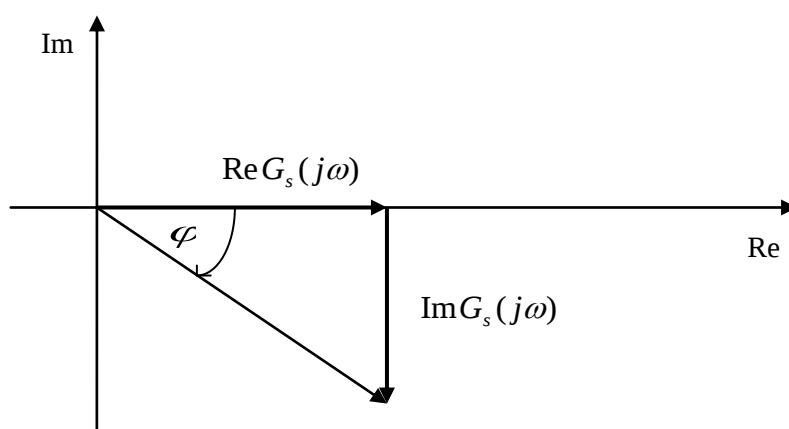
Logaritmus frekvenčného prenosu (I-7) je

$$\log G_s(j\omega) = \log |G_s(j\omega)| + j\varphi \log e \quad (\text{I-9})$$

Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika sa kreslí ako závislosť logaritmu modulu (amplitúdy) frekvenčného prenosu od logaritmu kruhovej frekvencie, pričom je zvykom kresliť hodnoty 20-krát väčšie, t.j. $20\log |G_s(j\omega)|$.

Fázová logaritmická frekvenčná charakteristika je definovaná závislosťou

$$\varphi = f(\log \omega). \quad (\text{I-10})$$



Obr. 1 Zobrazenie frekvenčného prenosu v komplexnej rovine

1.1 Frekvenčná charakteristika a stabilita systému

Na základe známej frekvenčnej charakteristiky je výhodné posudzovať stabilitu systému pomocou frekvenčných kritérií stability.

Prenos uzavretého regulačného obvodu (URO) je

$$G_w(s) = \frac{G_s(s)G_R(s)}{1 + G_s(s)G_R(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} \quad (\text{I-11})$$

kde $G_O(s) = G_s(s)G_R(s)$ je prenos otvoreného regulačného obvodu.

Na to, aby bol URO stabilný, musí sa počet obehov frekvenčnej i združenej frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu $G_O(\pm j\omega)$ rovnať počtu nestabilných pólov prenosu otvoreného regulačného obvodu $G_O(s)$. [3]

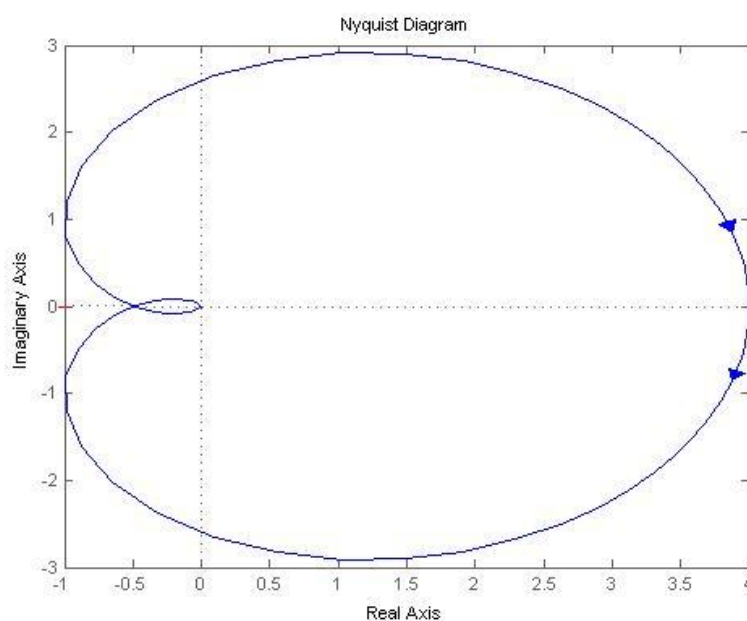
Ak prenos otvoreného regulačného obvodu nemá nestabilné póly ani nuly, stačí použiť zjednodušené Nyquistovo kritérium stability, ktoré hovorí, že aby bol regulačný obvod stabilný,

musí kritický bod -1 na reálnej osi ostať po ľavej strane pozorovateľa, ktorý by sa pohyboval po frekvenčnej charakteristike v smere narastajúcej kruhovej frekvencie ω . [3]

Z definície vyplýva, že frekvenčná charakteristika na obr. 2 je charakteristikou stabilného systému, na obr. 3 je systém na hranici stability a obr. 4 je charakteristika nestabilného systému.

Na obr. 2 je zobrazený prenos:

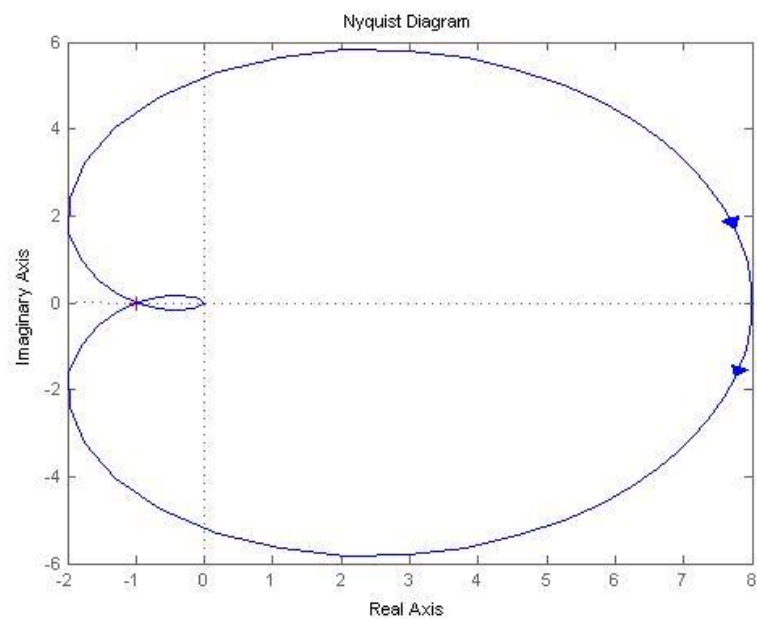
$$G_s(s) = \frac{4}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{I-12})$$



Obr. 2 Frekvenčná charakteristika stabilného systému

Na obr. 3 je zobrazený prenos:

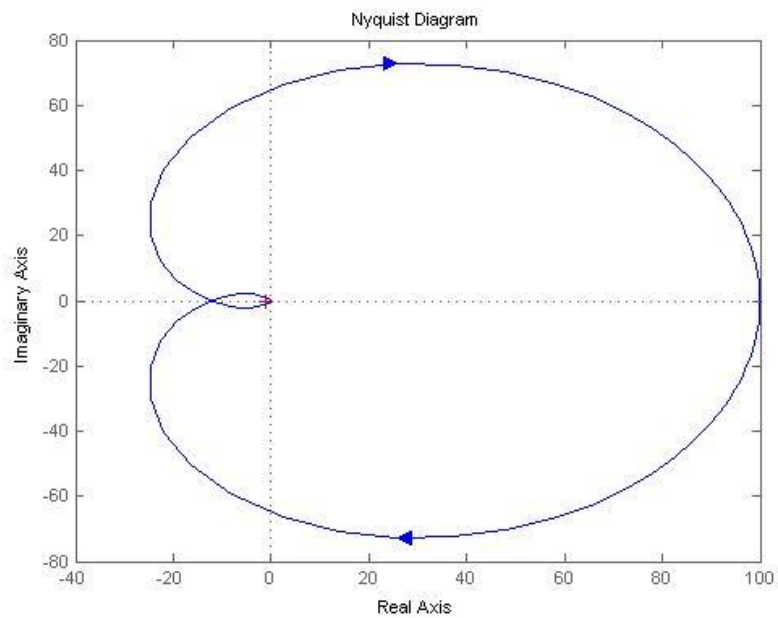
$$G_s(s) = \frac{8}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{I-13})$$



Obr. 3 Frekvenčná charakteristika systému na hranici stability

Na obr. 4 je frekvenčná charakteristika prenosu

$$G_s(s) = \frac{100}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{I-14})$$



Obr. 4 Frekvenčná charakteristika nestabilného systému

2 Frekvenčné charakteristiky jednoduchých systémov v komplexnej rovine

2.1 Frekvenčné charakteristiky pre systém prvého rádu

Prenos systému prvého rádu má tvar

$$G_s(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (\text{II-1})$$

kde K – zosilnenie, T – časová konštanta.

K nemu existuje frekvenčný prenos

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\varphi} \quad (\text{II-2})$$

kde $\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ - amplitúda prenosu ω – uhlová frekvencia, a φ je fázový posun

$$\varphi = \arctg(-\omega T) \quad \varphi \in < 0, -\frac{\pi}{2} > \quad (\text{II-3})$$

V praxi sa však ukazuje, že pre zostrojenie frekvenčnej charakteristiky je výhodnejšie rozdeliť frekvenčný prenos na reálnu a imaginárnu časť

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{\omega TK}{1 + \omega^2 T^2} j \quad (\text{II-4})$$

kde

$$\text{Re } G_s(j\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{II-5})$$

$$\text{Im } G_s(j\omega) = \frac{-\omega TK}{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{II-6})$$

Na zistenie, o akú krivku ide v komplexnej rovine, sa najprv z rovnice (II-5) vyjadří (namiesto $\text{Re } G_s(j\omega)$ sa uvádza u):

$$\omega T = \sqrt{\frac{K}{u} - 1} \quad (\text{II-7})$$

Následne sa dosadí do rovnice (II-6) a upraví na tvar (namiesto $\text{Im } G_s(j\omega)$ sa uvádza v)

$$u^2 - Ku + v^2 = 0 \quad (\text{II-8})$$

Upravený tvar rovnice (II-8) nápadne pripomína všeobecný tvar rovnice kružnice

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = R^2 \quad (\text{II-9})$$

$$u^2 - 2u_0u + u_0^2 + v^2 - 2v_0v + v_0^2 = R^2 \quad (\text{II-10})$$

Rovnice (II-8) a (II-10) sa porovnávajú:

$$u = u$$

$$v = v$$

$$Ku = 2u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{K}{2} \quad (\text{II-11})$$

$$0 = 2v_0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$0 = R^2 - u_0^2 - v_0^2 \Rightarrow R = \frac{K}{2}$$

Takýmto porovnaním rovníc sa dá jednoznačne povedať, že ide o kružnicu s polomerom $R = \frac{K}{2}$, ktorej stred je umiestnený na reálnej osi posunutý o $\frac{K}{2}$. Z rovnice (II-6) je vidieť, že imaginárna zložka je záporná, preto frekvenčná charakteristika bude polkružnica umiestnená pod reálnou osou.

Je daná prenosová funkcia

$$G_s(s) = \frac{1}{2s+1} \quad (\text{II-12})$$

kde $K = 1$, $T = 2$, potom frekvenčný prenos má tvar

$$G_s(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} e^{-j\arctg(-2\omega)} \quad (\text{II-13})$$

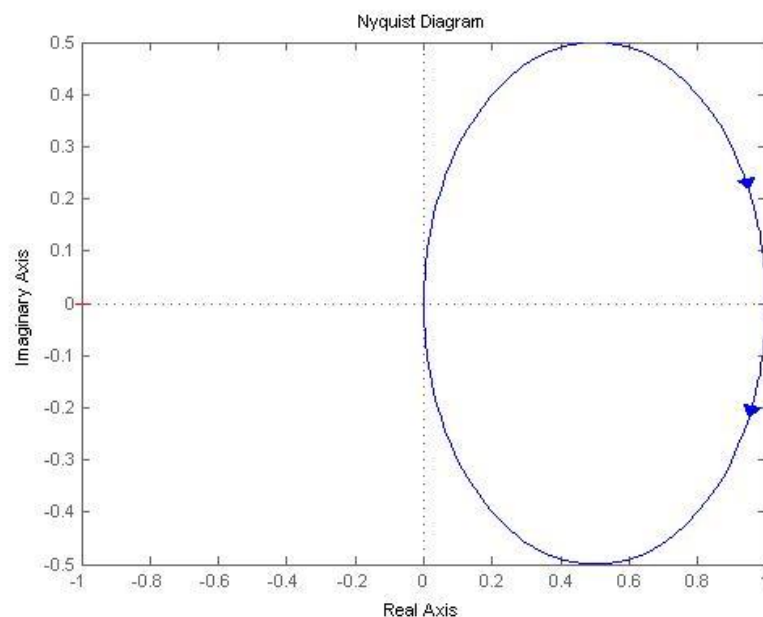
$$G_s(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega} \frac{1-2j\omega}{1-2j\omega} = \frac{1}{1+4\omega^2} - \frac{2\omega}{1+4\omega^2} j \quad (\text{II-14})$$

a združený frekvenčný prenos

$$G_s(-j\omega) = \frac{1}{1-2j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} e^{+j\arctg(-2\omega)} \quad (\text{II-15})$$

$$G_s(-j\omega) = \frac{1}{1-2j\omega} \frac{1+2j\omega}{1+2j\omega} = \frac{1}{1+4\omega^2} + \frac{2\omega}{1+4\omega^2} j \quad (\text{II-16})$$

Na obr. 5 je frekvenčná charakteristika polkružnica, umiestnená pod reálnou osou s polomerom $R = \frac{1}{2}$, ktorej stred je na reálnej osi posunutý o $\frac{1}{2}$. Polkružnica nad reálnou osou je združená frekvenčná charakteristika. Podľa Nyquistovho kritéria stability ide o stabilný systém.



Obr. 5 FCH 1.rádu s $K = 1$, $T = 2$

Všeobecne prenos systému prvého rádu je

$$G_s(s) = \frac{K}{Ts - 1} \quad (\text{II-17})$$

kde K – zosilnenie, T – časová konštanta

Prislúchajúci frekvenčný prenos je

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{j\omega T - 1} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\varphi} \quad (\text{II-18})$$

kde $\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ - amplitúda prenosu, ω – uhlová frekvencia a φ - fázový posun.

$$\varphi = \arctg(\omega T) \quad \varphi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{II-19})$$

Potom prenos (II-18) rozložený na reálnu a imaginárnu časť je

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{j\omega T - 1} \frac{(-j\omega T - 1)}{(-j\omega T - 1)} = \frac{-K - j\omega TK}{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{II-20})$$

$$G_s(j\omega) = -\frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - \frac{\omega TK}{1 + \omega^2 T^2} j$$

kde

$$\text{Re } F_s(j\omega) = -\frac{K}{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{II-21})$$

$$\text{Im } F_s(j\omega) = -\frac{\omega TK}{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{II-22})$$

Pre konkrétny systém platí

$$G_s(s) = \frac{5}{3s-1} \quad (\text{II-23})$$

kde zosilnenie $K = 5$ a časová konštanta $T = 3$.

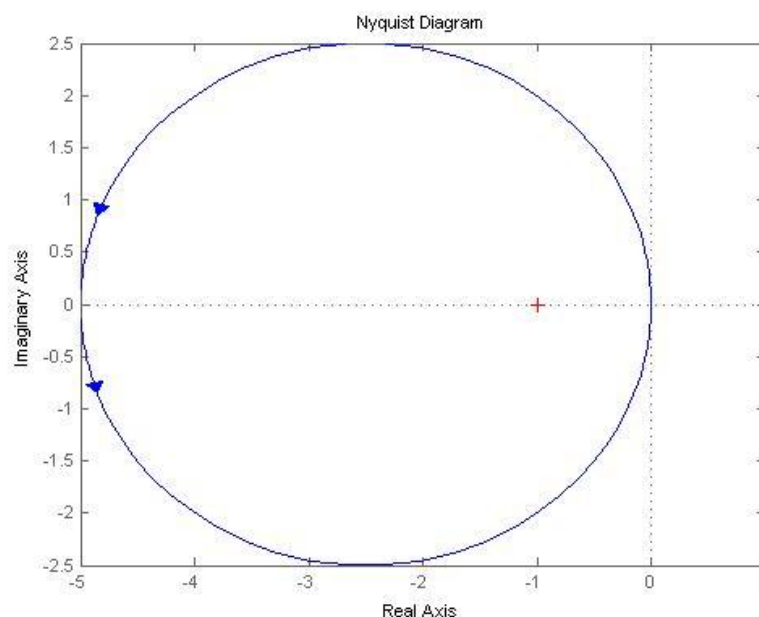
$$G_s(j\omega) = \frac{5}{3j\omega-1} = \frac{5}{\sqrt{1+9\omega^2}} e^{-j\arctg(3\omega)} \quad (\text{II-24})$$

$$G_s(j\omega) = \frac{5}{3j\omega-1} \frac{(-3j\omega-1)}{(-3j\omega-1)} = -\frac{5}{1+9\omega^2} - \frac{15\omega}{1+9\omega^2} j \quad (\text{II-25})$$

$$G_s(-j\omega) = \frac{5}{-3j\omega-1} = \frac{5}{\sqrt{1+9\omega^2}} e^{+j\arctg(3\omega)} \quad (\text{II-26})$$

$$G_s(-j\omega) = \frac{5}{-3j\omega-1} \frac{(3j\omega-1)}{(3j\omega-1)} = -\frac{5}{1+9\omega^2} + \frac{15\omega}{1+9\omega^2} j \quad (\text{II-27})$$

Obr. 6 znázorňuje, že frekvenčná charakteristika je opäť polkružnica, ale v ľavej časti komplexnej roviny s polomerom $R = \frac{5}{2}$ a stred posunutý na reálnej osi o $\frac{5}{2}$. Z obrázku je možné usúdiť, že ide o nestabilný systém.



Obr. 6 FCH 1.rádu s $K = 5$, $T = 3$

Prevrátená hodnota frekvenčného prenosu je tzv. frekvenčný útlm

$$\frac{1}{G_s(j\omega)} = \frac{j\omega T + 1}{K} \quad (\text{II-28})$$

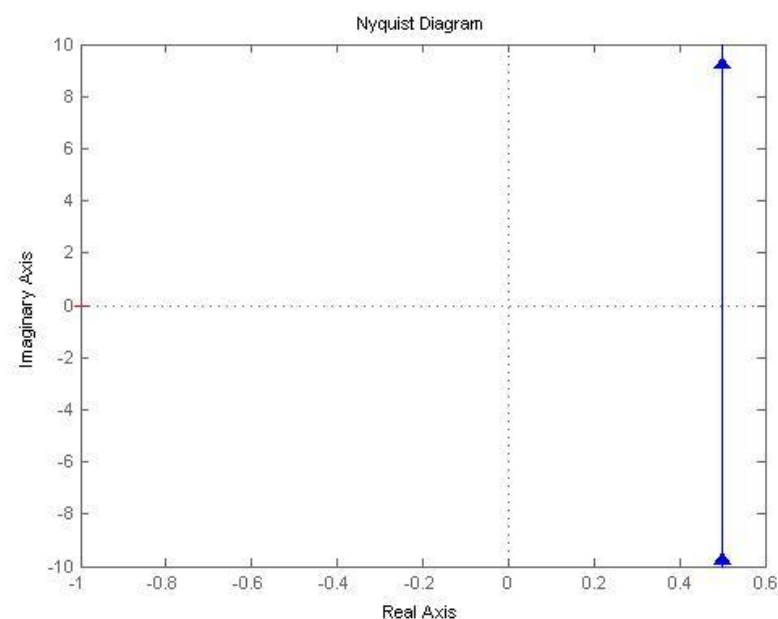
kde K – zosilnenie, T – časová konštanta, ω - uhlová frekvencia.

Frekvenčná charakteristika prechádza bodom $\frac{1}{K}$ na reálnej osi a je rovnobežná s osou imaginárnou. Parameter T nemá vplyv na priebeh charakteristiky.

Prenos konkrétneho systému s parametrami $K = 2$, $T = 5$ je

$$\frac{1}{G_s(j\omega)} = \frac{5j\omega + 1}{2} \quad (\text{II-29})$$

Frekvenčná charakteristika (obr. 7) je priamka, ktorá prechádza bodom $\frac{1}{2}$ na reálnej osi a skutočne je rovnobežná s imaginárnou osou.



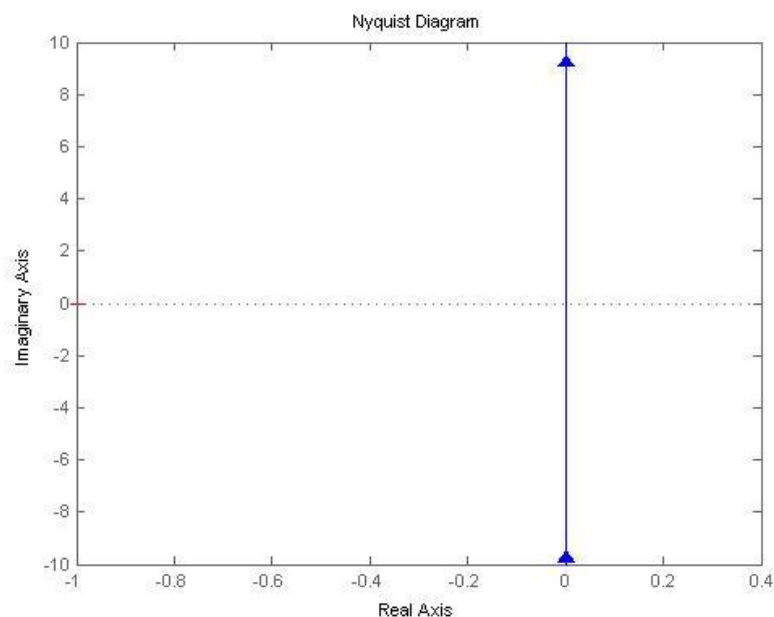
Obr. 7 FCH frekvenčného útlmu 1. rádu

Vo všeobecnosti systém prvého rádu s integračnými vlastnosťami má tvar

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \quad (\text{II-30})$$

kde K - zosilnenie, ω -uhlová frekvencia

Frekvenčná charakteristika je na obr. 8.



Obr. 8 FCH 1. rádu s integračnými vlastnosťami

2.2 Frekvenčné charakteristiky pre systém druhého rádu

Systému s prenosom

$$G_s(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (\text{II-31})$$

zodpovedá frekvenčný prenos

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega) + 1}$$

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} e^{-j\varphi} \quad (\text{II-32})$$

kde K – zosilnenie, T – časová konštanta, ξ - tlmiaci koeficient, ω - uhlová frekvencia,
 φ - fázový posun

$$\varphi = 2\arctg(\omega T) \quad \varphi \in < 0, -\pi > \quad (\text{II-33})$$

Hodnoty parametrov pre prenos (II-31) sú:

$$K = 3$$

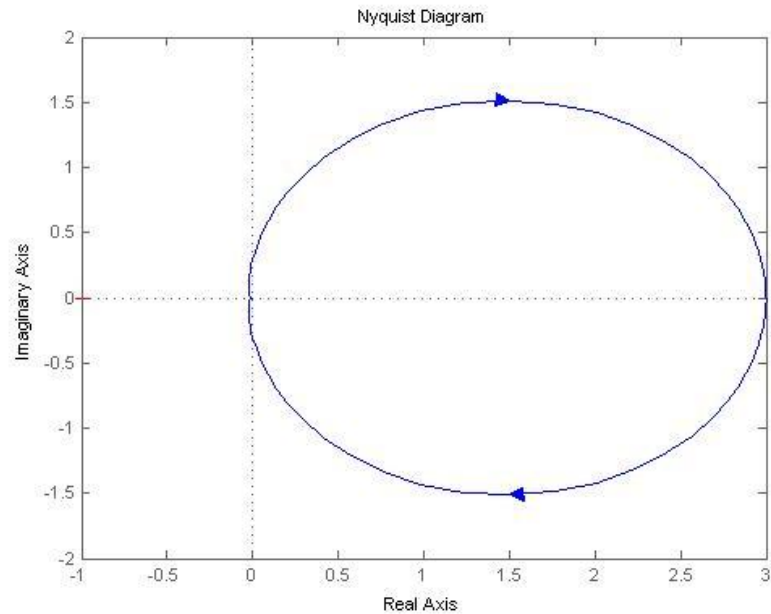
$$T = 4$$

$$\xi = 5$$

potom frekvenčný prenos bude v tvare

$$G_s(j\omega) = \frac{3}{16(j\omega)^2 + 40(j\omega) + 1} \quad (\text{II-34})$$

Pre $\xi = 5$ je systém (II-34) stabilný, frekvenčná charakteristika je zobrazená na obr. 9.



Obr. 9 FCH 2. rádu pre $\xi = 5$

Hodnoty parametrov pre prenos (II-31) sú:

$$K = 3$$

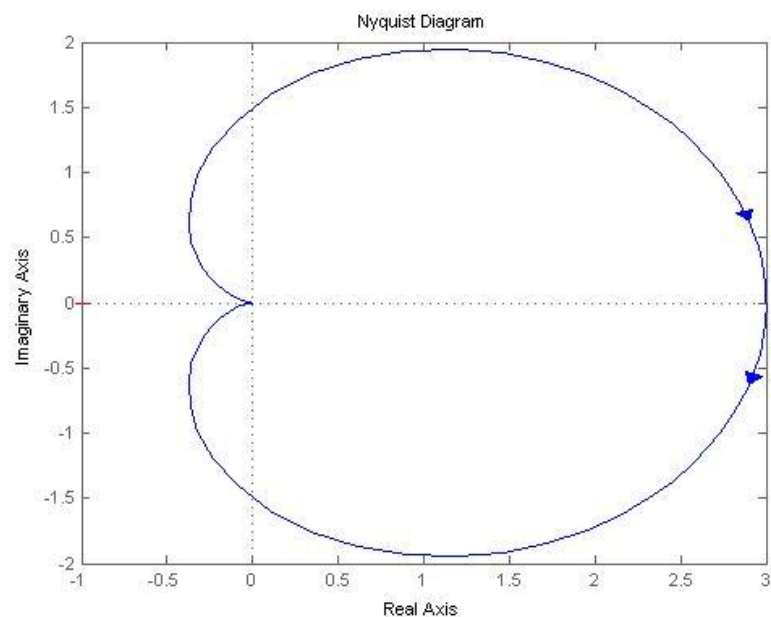
$$T = 4$$

$$\xi = 1$$

potom frekvenčný prenos bude v tvare

$$G_s(j\omega) = \frac{3}{16(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 1} \quad (\text{II-35})$$

Pre $\xi = 1$ bude systém (II-35) ešte stabilný, pretože frekvenčná charakteristika (obr. 10) sa nachádza napravo od kritického bodu -1.

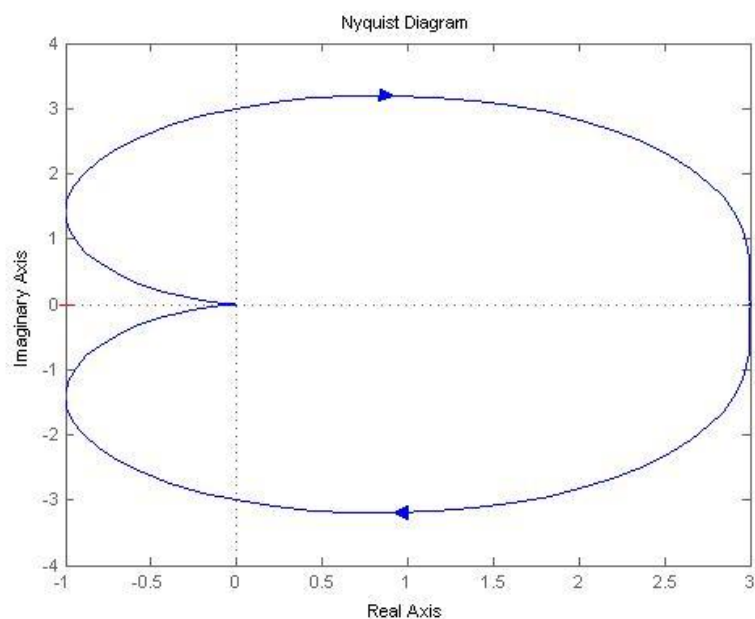


Obr. 10 FCH 2. rádu pre $\xi = 1$

Ako vidieť na obr. 11, pre $\xi = 0,5$ bude systém (II-31) stabilný, pretože frekvenčná charakteristika sa nachádza napravo od kritického bodu -1.

Frekvenčný prenos je:

$$G_s(j\omega) = \frac{3}{16(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 1} \quad (\text{II-36})$$



Obr. 11 FCH 2. rádu pre $\xi = 0,5$

Hodnoty parametrov pre prenos (II-31) sú:

$$K = 3$$

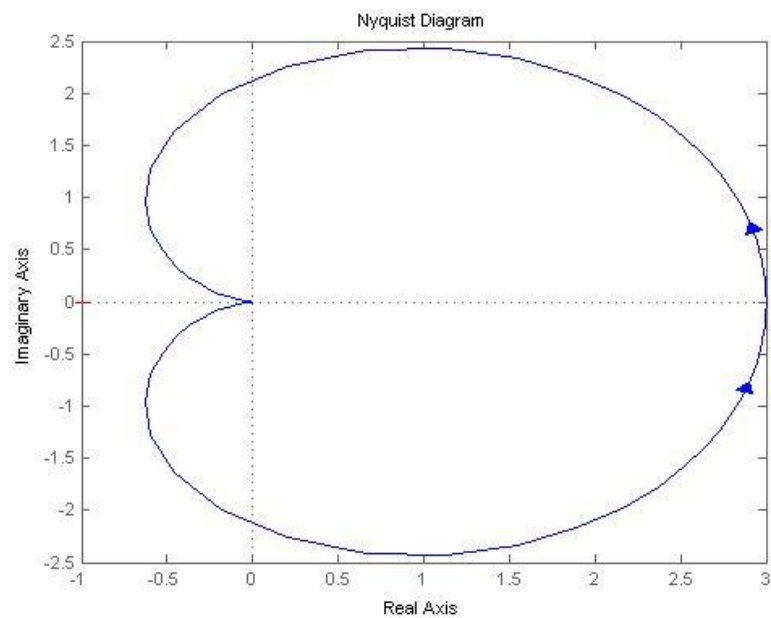
$$T = 4$$

$$\xi = -0,7$$

potom frekvenčný prenos bude v tvare

$$G_s(j\omega) = \frac{3}{16(j\omega)^2 - 5,6(j\omega) + 1} \quad (\text{II-37})$$

Na obr. 12, pre $\xi = -0,7$ bude systém (II-37) nestabilný, pretože kritický bod -1 sa nachádza po pravej strane od frekvenčnej charakteristiky v smere narastajúcej kruhovej frekvencie ω .



Obr. 12 FCH 2. rádu pre $\xi = -0,7$

Hodnoty parametrov pre prenos (II-31) sú:

$$K = 3$$

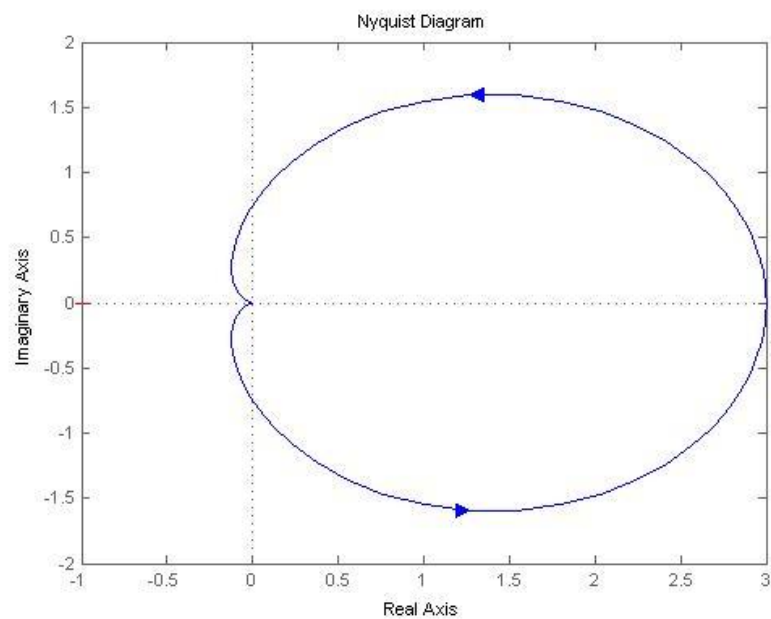
$$T = 4$$

$$\xi = -2$$

potom frekvenčný prenos bude v tvare

$$G_s(j\omega) = \frac{3}{16(j\omega)^2 - 16(j\omega) + 1} \quad (\text{II-38})$$

Na obr. 13 bude pre $\xi = -2$ systém (II-38) tiež nestabilný.

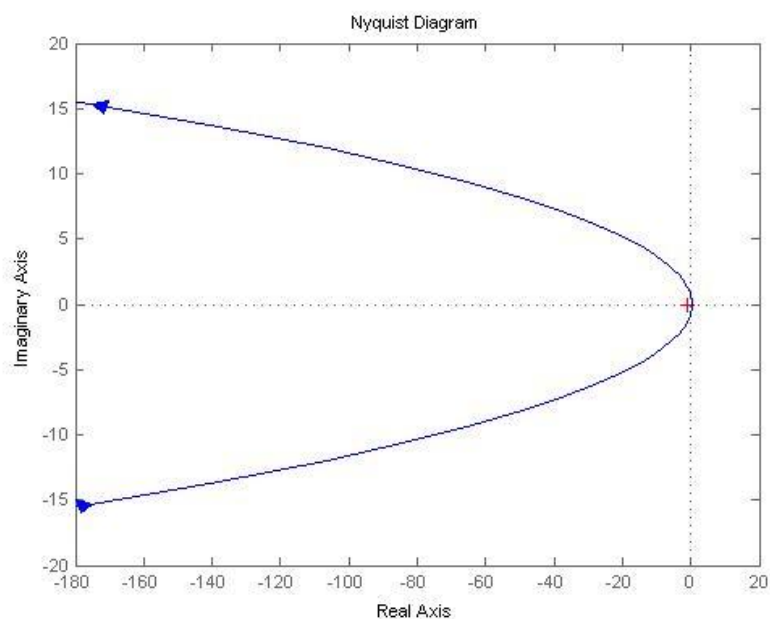


Obr. 13 FCH 2. rádu pre $\xi = -2$

Frekvenčný útlm pre systém druhého rádu je (obr. 14)

$$\frac{1}{G_s(j\omega)} = \frac{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega) + 1}{K} \quad (\text{II-39})$$

Parametre systému (II-39) sú $K = 3$, $T = 4$ a $\xi = 1$

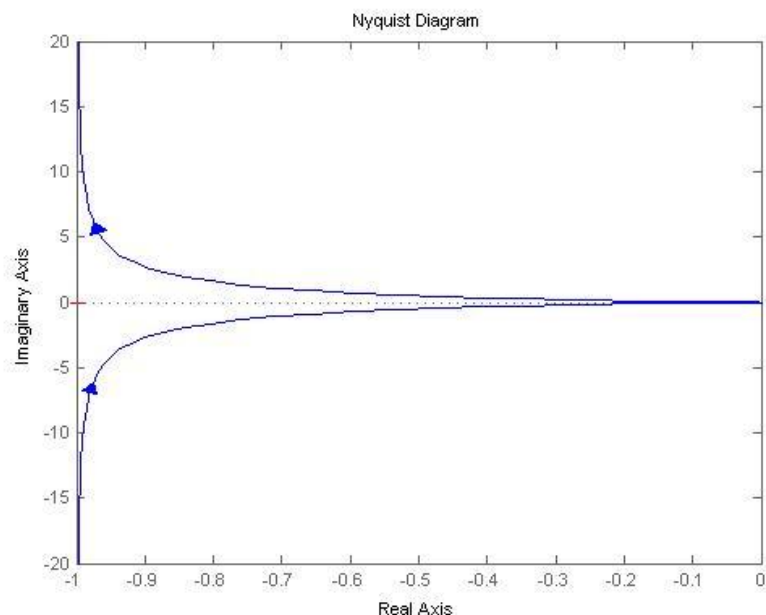


Obr. 14 FCH frekvenčného útlmu 2. rádu

Systém druhého rádu s integračnými vlastnosťami

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega)} \quad (\text{II-40})$$

Frekvenčná charakteristika prenosu (II-40) s parametrami $K = 4$, $T = 5$, $\xi = 1$ je na obr. 15.



Obr. 15 FCH 2. rádu s integračnými vlastnosťami

2.3 Frekvenčné charakteristiky pre systém vyššieho rádu

Všeobecne systému s prenosom

$$G_s(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (\text{II-41})$$

prislúcha frekvenčný prenos

$$G_s(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T)^n} = \frac{K}{(1 + \omega^2 T^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-j\varphi} \quad (\text{II-42})$$

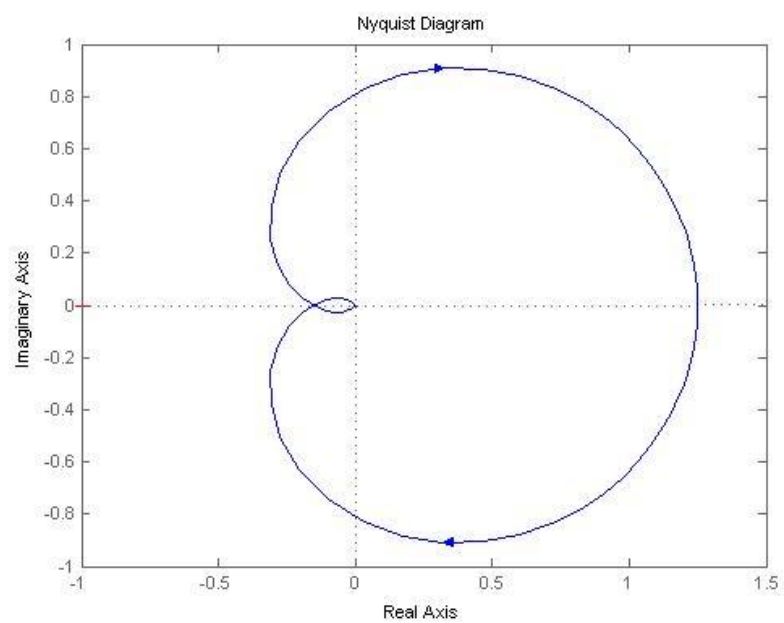
kde K – zosilnenie, T – časová konštanta, ω – uhlová frekvencia, φ – fázový posun, n – rád prenosu.

Z fázového posunu

$$\varphi = n \cdot \arctg(\omega T) \quad (\text{II-43})$$

vyplýva, že frekvenčná charakteristika prejde toľko kvadrantov, koľkého rádu je systém.[3]

Konkrétne systém tretieho rádu (obr. 16) prejde tromi kvadrantmi. Združená frekvenčná charakteristika tvorí zrkadlový obraz frekvenčnej charakteristiky okolo reálnej osi.



Obr. 16 FCH 3. rádu

3 Logaritmické frekvenčné charakteristiky

Logaritmická frekvenčná charakteristika je závislosť logaritmu modulu (amplitúdy) a argumentu (fázy) frekvenčného prenosu od logaritmu kruhovej frekvencie. Grafická konštrukcia je možná aj bez výpočtu konkrétnych hodnôt. Kreslí sa osobitne závislosť logaritmu modulu a osobitne závislosť logaritmu argumentu od logaritmu kruhovej frekvencie. Pritom sa hodnoty kreslia 20-krát väčšie, t.j. $20 \log |G_s(j\omega)|$ lebo jednotke, ktorej dĺžka je 20-krát menšia ako dĺžka zodpovedajúca $\log 10$, hovoríme decibel, t.j. $1 \text{ decibel} = 1 \text{ dB} = 0,05 \log 10$. Takúto závislosť nazývame amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika. Závislosť fázy od logaritmu kruhovej frekvencie nazývame zase fázová logaritmická frekvenčná charakteristika.[3]

3.1 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém prvého rádu

Je daný frekvenčný prenos so zosilnením $K = 1$

$$G_s(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\varphi} \quad (\text{III-1})$$

potom amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika vyjadrená v decibeloch sa určí z

$$20 \log |G_s(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (\text{III-2})$$

Pre $\omega \rightarrow 0 \quad \omega T \ll 1$

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} \quad (\text{III-3})$$

Prvou asymptotou k amplitúdovej charakteristike je os $\log \omega$.

Pre $\omega \rightarrow \infty \quad \omega T \gg 1$

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \sqrt{\omega^2 T^2} = -20 \log \omega - 20 \log T \quad (\text{III-4})$$

Druhou asymptotou k amplitúdovej charakteristike je rovnica (III-4). V závislosti od $\log \omega$ je to rovnica priamky so sklonom -20 dB/dek .

Priesečník priamky (III-4) s osou $\log \omega$ sa vyjadrí z rovnosti

$$20 \log |G_s(j\omega)| = 20 \log \omega T = 0 \quad (\text{III-5})$$

potom musí platiť

$$\omega = \frac{1}{T} \quad (\text{III-6})$$

Najväčší rozdiel medzi skutočnou amplitúdovou charakteristikou a asymptotami sa nazýva chybou.

Chyba, ktorá vznikne, je práve v bode (III-6).

$$\Delta = 20 \log \sqrt{1 + \frac{T^2}{T^2}} = 20 \log 2 \approx 3 \text{ dB} \quad (\text{III-7})$$

Fázový posun sústavy s frekvenčným prenosom (III-1) je

$$\varphi = -\text{arctg}(\omega T) \quad (\text{III-8})$$

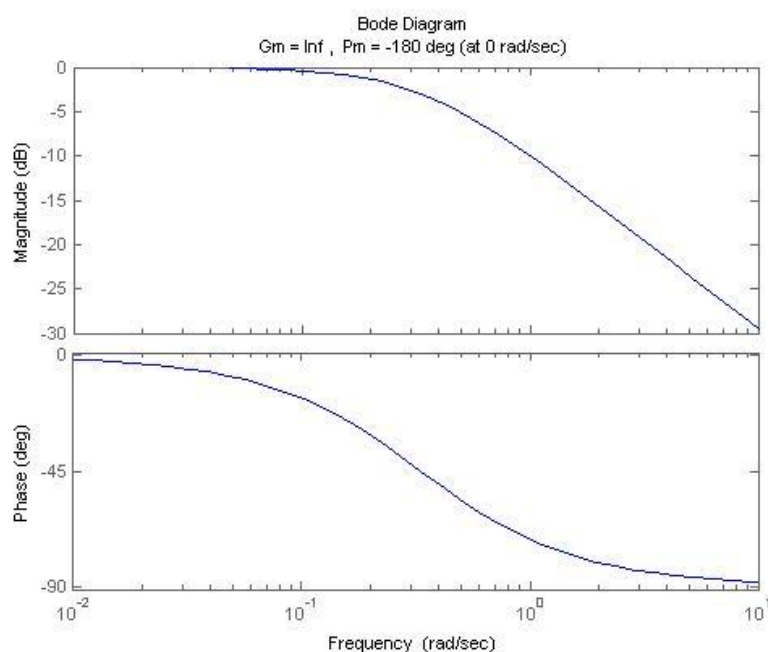
Pre $\omega \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow 0$

Prvou asymptotou k fázovej charakteristike je os $\log \omega$.

Pre $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Druhou asymptotou k fázovej charakteristike je rovnobežka s osou $\log \omega$ v bode $-\frac{\pi}{2}$.

Fázová charakteristika má esovitý tvar (obr. 17a) s inflexným bodom v bode $\omega = \frac{1}{T}$.



Obr. 17a Logaritmickej FCH 1. rádu

Pre $\omega = \frac{1}{T}$ $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

Nech $y = \log \omega$, potom sklon dotýčnice v inflexnom bode bude

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{\frac{1}{1 + \omega^2 T^2} T}{\frac{1}{2,3\omega}} = \frac{2,3}{1 + \omega^2 T^2} \omega T \quad (\text{III-9})$$

Dosadením za $\omega = \frac{1}{T}$ bude sklon dotyčnice

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{2,3}{2} \text{ rad / dek} = 1,151 \text{ rad / dek} = 66^\circ / \text{dek} \quad (\text{III-10})$$

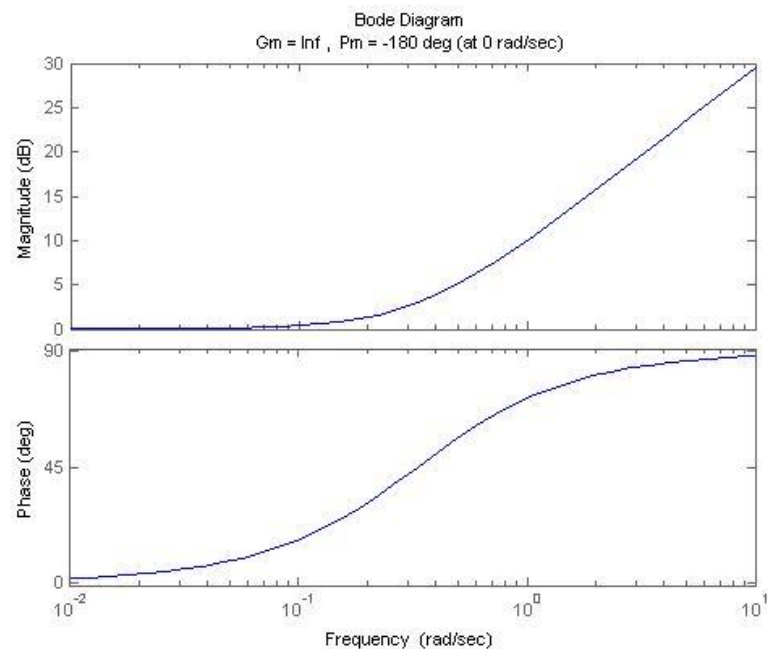
Najväčšia chyba, ktorá vznikne je práve v priesečníku dotyčnice s asymptotami

$$\Delta = 11^\circ 40' \quad (\text{III-11})$$

Pre systém s frekvenčným prenosom

$$G_s(j\omega) = 1 + j\omega T \quad (\text{III-12})$$

je postup pri zobrazovaní logaritmickú frekvenčnú charakteristiku rovnaký, ale sklon asymptoty pre $\omega \rightarrow \infty$ je 20 dB/dek a fáza sa bude meniť od nuly po $\frac{\pi}{2}$ (obr. 17b).



Obr. 17b Logaritmická FCH 1. rádu

3.2 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém druhého rádu

Prenos systému druhého rádu pre $K = 1$ má tvar

$$G_s(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (\text{III-13})$$

Korene sústavy sú

$$s_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{1}{T} \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{III-14})$$

Ak $\xi^2 < 1$, čo je vlastná sústava druhého rádu, jej frekvenčný prenos bude

$$G_s(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + 2\xi T j\omega} \quad (\text{III-15})$$

Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika je

$$20 \log |G_s(j\omega)| = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \quad (\text{III-16})$$

$$\text{Pre } \omega \rightarrow 0 \quad 20 \log |G_s(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1} = 0 \quad (\text{III-17})$$

Prvou asymptotou je opäť os $\log \omega$.

$$\text{Pre } \omega \rightarrow \infty \quad 20 \log |G_s(j\omega)| = -20 \log \sqrt{\omega^4 T^4} = -40 \log(\omega T) \quad (\text{III-18})$$

Druhou asymptotou je rovnica (III-18) so sklonom -40 dB/dek , ktorá pretína os $\log \omega$ v bode

$$\omega = \frac{1}{T}.$$

Chyba, ktorá v tomto bode vznikne je

$$\Delta = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{T^2}{T^2}} = -20 \log 2\xi \approx -6 - 20 \log \xi \quad (\text{III-19})$$

Na základe rovnice (III-19) závisí chyba od veľkosti ξ .

Fázový posun systému (III-13) je

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi T \omega}{1 - \omega^2 T^2}\right) \quad (\text{III-20})$$

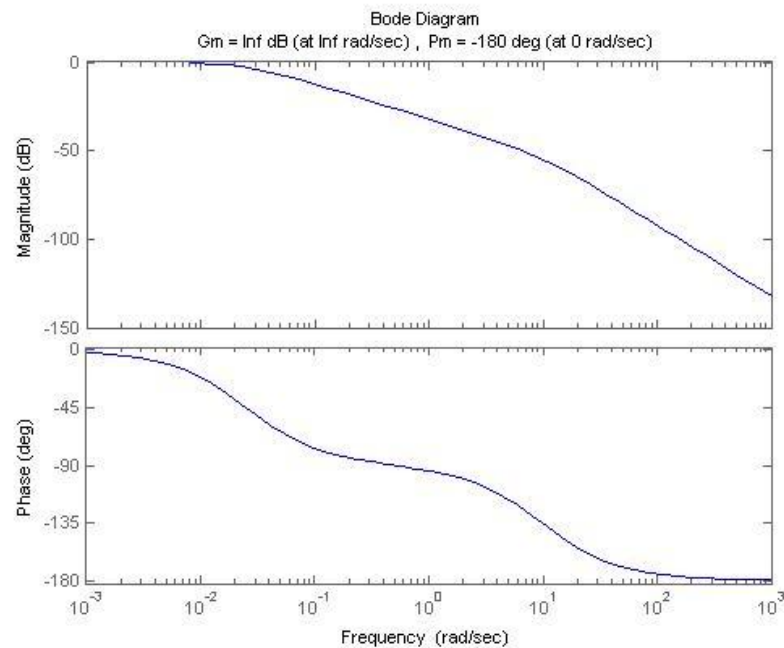
$$\text{Pre } \omega \rightarrow 0 \quad \varphi = 0$$

$$\text{Pre } \omega \rightarrow \infty \quad \varphi = -\pi$$

$$\text{Pre } \omega = \frac{1}{T} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

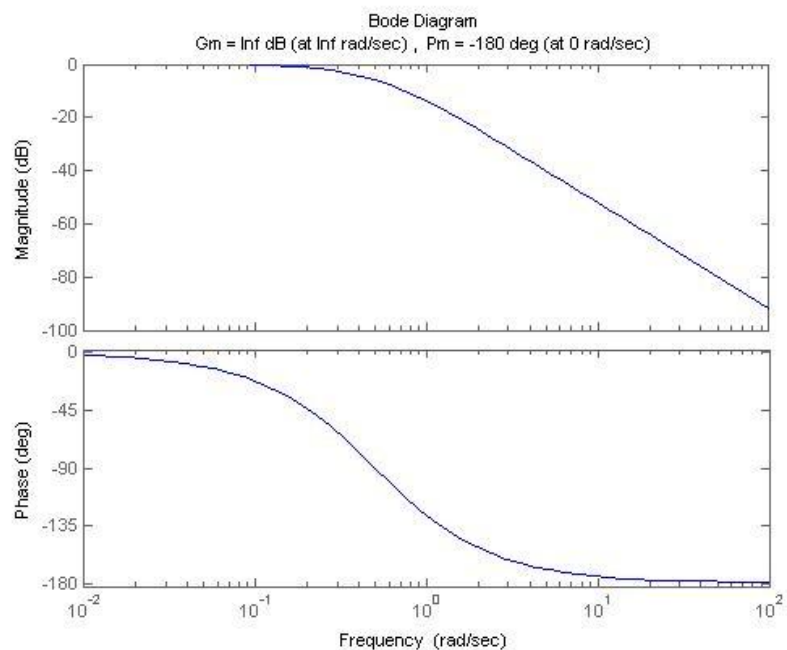
Dotyčnica má v bode $\omega = \frac{1}{T}$ sklon $\frac{2,3}{\xi} \text{ rad / dek} = \frac{132^\circ}{\xi} / \text{dek}$.

1.) Nech $T = 2$, $\xi = 10$, potom pre systém (III-13) bude prenos $G_s(s) = \frac{1}{4s^2 + 40s + 1}$, ktorý je na obr. 18. Z rovnice (III-19) je chyba $\Delta = 26dB$ a dotyčnica má v bode $\omega = \frac{1}{2}$ sklon $13,2^\circ/dek$.



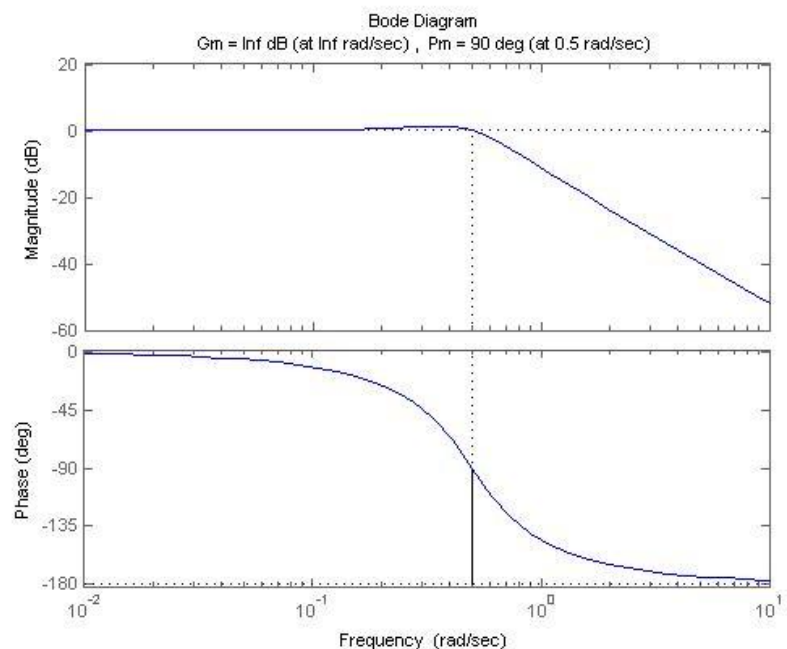
Obr. 18 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 10$

2.) Nech $T = 2$, $\xi = 1$, potom pre systém (III-13) bude prenos $G_s(s) = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1}$, ktorý je na obr. 19. Z rovnice (III-19) je chyba $\Delta = 6dB$ a dotyčnica má v bode $\omega = \frac{1}{2}$ sklon $132^\circ/dek$.



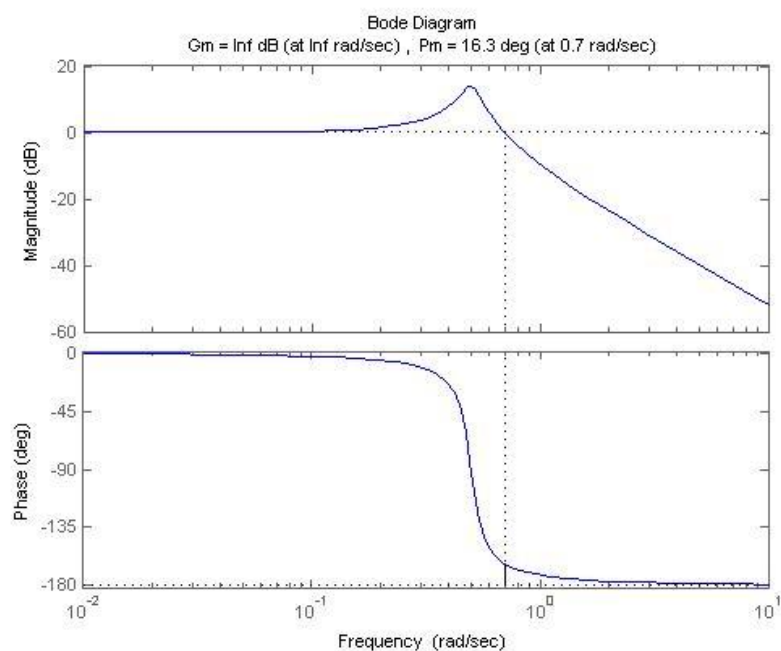
Obr. 19 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 1$

3.) Nech $T = 2$, $\xi = 0,5$, potom pre systém (III-13) bude prenos $G_s(s) = \frac{1}{4s^2 + 2s + 1}$, ktorý je zobrazený na obr. 20. Z rovnice (III-19) je chyba $\Delta = 0dB$.



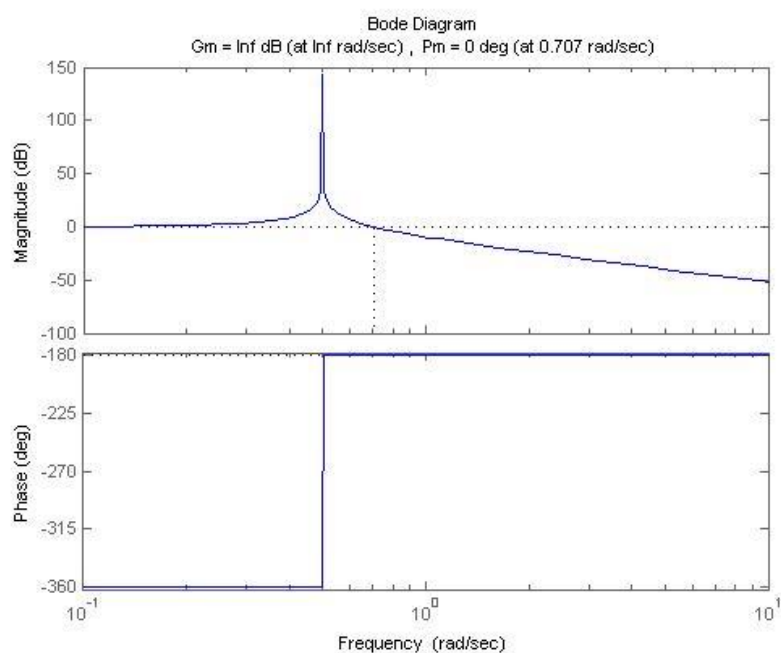
Obr. 20 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0,5$

4.) Nech $T = 2$, $\xi = 0,1$, potom pre systém (III-13) bude prenos $G_s(s) = \frac{1}{4s^2 + 0,4s + 1}$, ktorý je zobrazený na obr. 21.



Obr. 21 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0,1$

5.) Nech $T = 2$, $\xi = 0$, potom pre systém (III-13) bude prenos $G_s(s) = \frac{1}{4s^2 + 1}$, ktorý je zobrazený na obr. 22. Z rovnice (III-19) je chyba $\Delta = \infty dB$.



Obr. 22 Logaritmická FCH 2. rádu pre $\xi = 0$

3.3 Logaritmické frekvenčné charakteristiky pre systém vyššieho rádu

Systém s prenosom

$$G_s(s) = \frac{1}{(Ts+1)^n} \quad (\text{III-21})$$

má frekvenčný prenos

$$G_s(j\omega) \frac{1}{(1+j\omega T)^n} = \frac{1}{(1+\omega^2 T^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-j\varphi} \quad (\text{III-22})$$

Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika je

$$20 \log |G_s(j\omega)| = -n \cdot 20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad (\text{III-23})$$

Pre $\omega \rightarrow \infty$ je sklon asymptoty $-n \cdot 20$ dB/dek.

Chyba v bode $\omega = \frac{1}{T}$ je

$$\Delta = -n \cdot 3 \text{ dB} \quad (\text{III-24})$$

Fázový posun je

$$\varphi = n \cdot \arctg(\omega T) \quad (\text{III-25})$$

Pre $\omega \rightarrow 0$ $\varphi = 0$

Pre $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi = -n \cdot \frac{\pi}{2}$

Pre $\omega = \frac{1}{T}$ $\varphi = -n \cdot \frac{\pi}{4}$

V inflexnom bode je sklon dotyčnice $-n \cdot 66^\circ / \text{dek}$.

Chyba v priesečníku dotyčnice s asymptotami je $n \cdot 11^\circ 40'$.

Konkrétne pre prenos v tvare

$$G_s(s) = \frac{1}{(s+1)(0,5s+1)(0,1s+1)} \quad (\text{III-26})$$

bude frekvenčný prenos

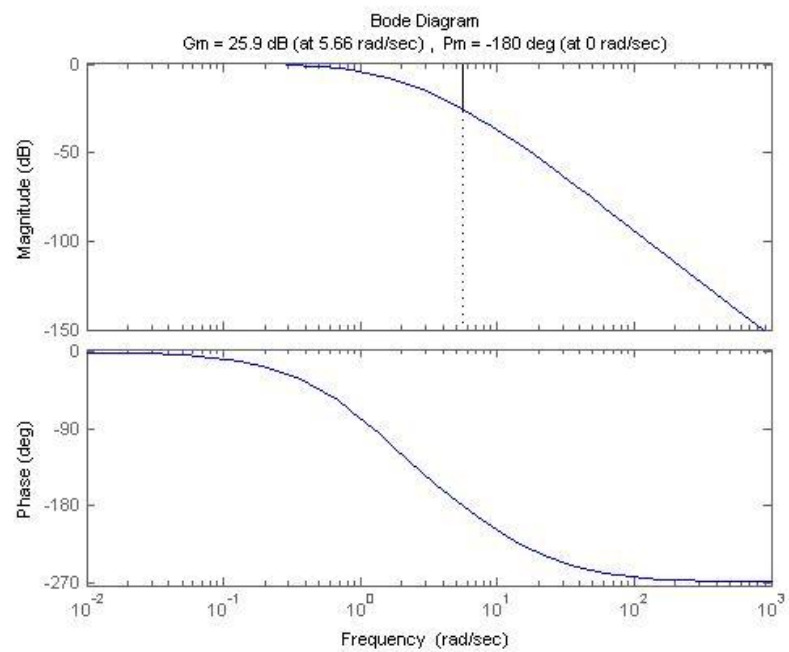
$$G_s(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(0,5j\omega+1)(0,1j\omega+1)} \quad (\text{III-27})$$

Amplitúdová logaritmická frekvenčná charakteristika je na obr. 23.

$$20 \log |G_s(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2} - 20 \log \sqrt{1+0,25\omega^2} - 20 \log \sqrt{1+0,01\omega^2}$$

Fázový posun je

$$\varphi = -\arctg \omega - \arctg 0,5\omega - \arctg 0,1\omega \quad (\text{III-28})$$



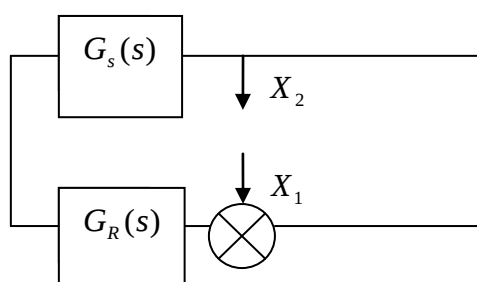
Obr. 23 Logaritmická FCH 3. rádu

4 Návrh regulátora

Nech je regulačný obvod na niektorom mieste rozpojený (obr. 24) a vstupuje do neho harmonická veličina $x_1(t) = \sin \omega t$. Ak existuje frekvencia, pre ktorú bude amplitúda $A = 1$ a fázový posun $\varphi = (2k + 1)\pi$ $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, potom na výstupe z otvoreného regulačného obvodu bude vystupovať veličina $x_2(t) = -\sin(\omega t - \pi) = \sin(\omega t) = x_1(t)$.

Vstupná aj výstupná veličina budú rovnaké. Takýto otvorený regulačný obvod bude na hranici stability a frekvenčná charakteristika bude prechádzať kritickým bodom -1.

Keď sa rozpojený obvod opäť spojí, bude naďalej kmitať s tou istou frekvenciou aj amplitúdou a URO bude tiaž na hranici stability.



Obr. 24 Rozpojený regulačný obvod

Ľubovoľne zvolený systém tretieho rádu má prenos

$$G_s(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{IV-1})$$

Frekvenčný prenos je

$$G_s(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-2})$$

Náhodne zvolený prenos proporcionálneho regulátora je

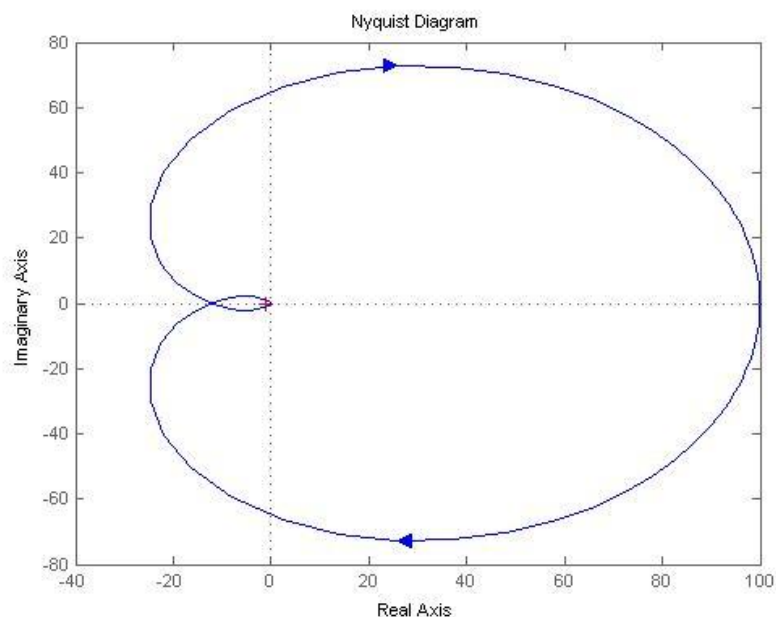
$$G_R(j\omega) = 50 \quad (\text{IV-3})$$

Potom prenos otvoreného regulačného obvodu bude

$$G_o(j\omega) = G_s(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{2.50}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-4})$$

Z frekvenčnej charakteristiky na obr. 25 sa dá jasne vidieť, že pôjde o nestabilný systém, preto cieľom bude nájsť také kritické hodnoty veličín K_{KR} , ω_{KR} a T_{KR} , aby bol systém na hranici stability.

Určiť sa dajú buď pomocou frekvenčných charakteristík, alebo ručným výpočtom, vygenerovaných v simulačnom prostredí Matlab.



Obr. 25 FCH otvoreného regulačného obvodu

4.1 Určenie kritických hodnôt pomocou frekvenčných charakteristík

Z obr. 26 možno vyčítať hodnotu G_m (bezpečnosť v amplitúde), ktorá udáva, o koľko x treba zmeniť hodnotu zosilnenia, aby bol systém na hranici stability.

Platí:

$$|G_o(j\omega)| = 20\log 2 + 20\log 50 + 20\log x \quad (\text{IV-5})$$

kde

$$20\log x = G_m = -21,9\text{dB} \quad (\text{IV-6})$$

$$x = 10^{\frac{-21,9}{20}} = 0,08$$

Výsledná hodnota kritického zosilnenia

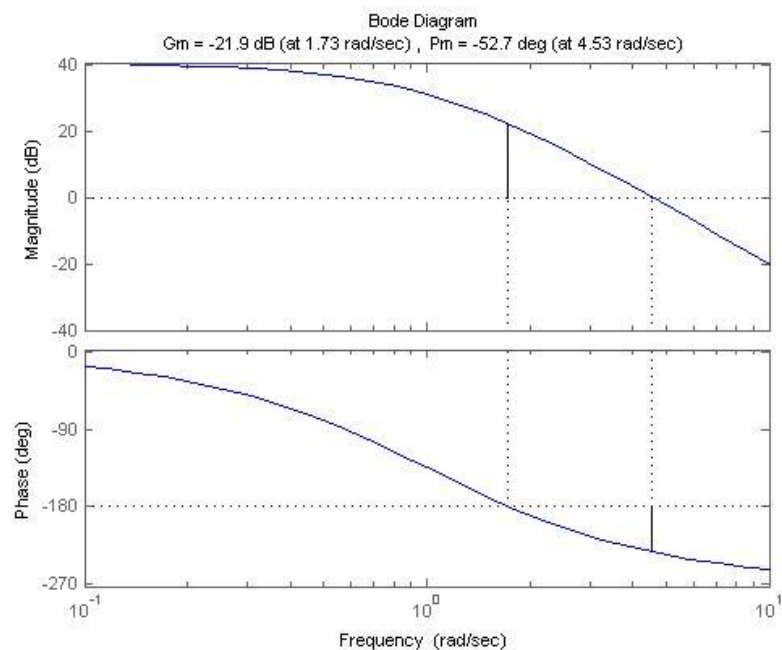
$$K_{KR} = 50 \cdot 0,08 = 4 \quad (\text{IV-7})$$

Kritická hodnota uhlovej frekvencie ω_{KR} je z obr. 26 rovná

$$\omega_{KR} = 1,73\text{rad/sec} \quad (\text{IV-8})$$

z čoho

$$T_{KR} = \frac{2\pi}{1,73} = 3,632\text{sec/rad} \quad (\text{IV-9})$$

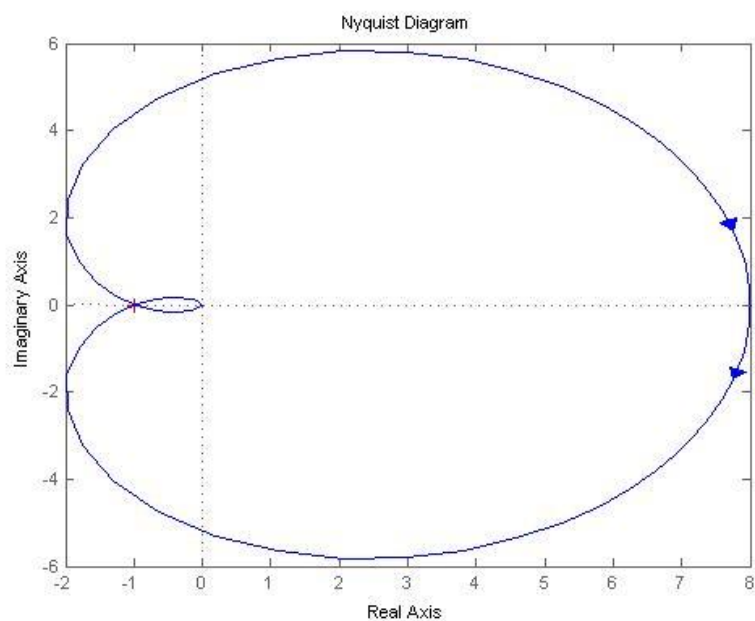


Obr. 26 Logaritmická FCH pre otvorený regulačný obvod

Z vypočítaných hodnôt bude prenos otvoreného regulačného obvodu:

$$G_O(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{2.4}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-10})$$

a prislúchajúca frekvenčná charakteristika na obr. 27.



Obr. 27 FCH otvoreného regulačného obvodu na hranici stability

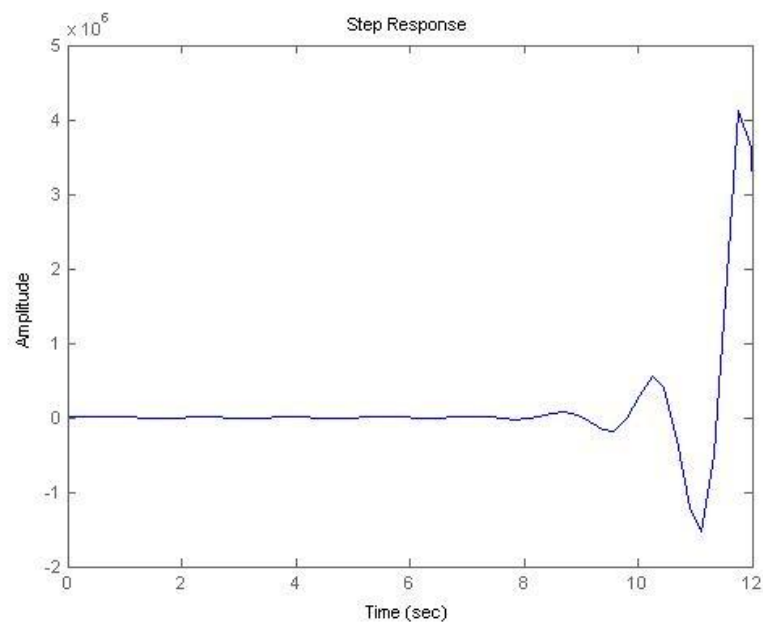
4.2 Určenie kritických hodnôt ručným výpočtom

Hodnota kritického zosilnenia K_{KR} sa určí pomocou Routhovo – Schurovho kritéria stability, pre ktoré treba poznať charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu (URO).

Prenos URO je:

$$G_W(s) = \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (\text{IV-11})$$

Prechodová charakteristika URO je na obr. 28.



Obr. 28 Prechodová charakteristika URO

Charakteristická rovnica URO má tvar:

$$1 + G_S(s)G_R(s) = 0 \quad (\text{IV-12})$$

Pre neznáme K_{KR} platí z rovníc (IV-2) a (IV-3) rovnosť

$$1 + \frac{2K_{KR}}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 0 \quad (\text{IV-13})$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + 2K_{KR}) = 0 \quad (\text{IV-14})$$

Routhov – Schurov algoritmus:

1	<u>3</u>	3	$\frac{1+2K_{KR}}{3}$	$k = \frac{1}{3}$
$-3\frac{1}{3}$		$-(1+2K_{KR})\frac{1}{3}$		
	3	$3-(1+2K_{KR})\frac{1}{3}$	$\frac{1+2K_{KR}}{3}$	

$$3-(1+2K_{KR})\frac{1}{3} = 0$$

$$K_{KR} = 4 \quad (IV-15)$$

Výpočet hodnoty kritickej časovej konštanty T_{KR} :

$$3s^2 + 1 + 2K_{KR} = 0$$

$$s^2 = -\frac{1+2K_{KR}}{3}$$

$$(j\omega)^2 = \pm i \sqrt{\frac{1+2K_{KR}}{3}} \quad (IV-16)$$

$$3-(1+2K_{KR})\frac{1}{3} = 0$$

$$3-\omega^2 = 0$$

$$\omega_{KR} = \sqrt{3} = 1,732 \text{ rad/sec} \quad (IV-17)$$

$$T_{KR} = \frac{2\pi}{\omega_{KR}} \quad (IV-18)$$

$$T_{KR} = \frac{2\pi}{1,732} = 3,628 \text{ sec/rad}$$

Porovnanie výsledných hodnôt K_{KR} a T_{KR} nasvedčuje o použiteľnosti a presnosti obidvoch spôsobov na výpočet kritických hodnôt pre návrh regulátorov. Výhodou práce v simulačnom prostredí Matlab je fakt, že kritické hodnoty sa určia priamo z logaritmickkej frekvenčnej charakteristiky prenosu otvoreného regulačného obvodu (obr. 26).

4.3 Výpočet parametrov regulátora Ziegler – Nicholsovou metódou

Tab. 1: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora Ziegler-Nicholsovou metódou

	Z_R	T_I	T_D
P	$0,5K_{KR}$	—	—
PI	$0,45K_{KR}$	$0,85T_{KR}$	—
PID	$0,6K_{KR}$	$0,5T_{KR}$	$0,125T_{KR}$

Pre zistené hodnoty $K_{KR} = 4$ a $T_{KR} = 3,632 \text{ sec/rad}$ sú parameter regulátora uvedené v tab. 2.

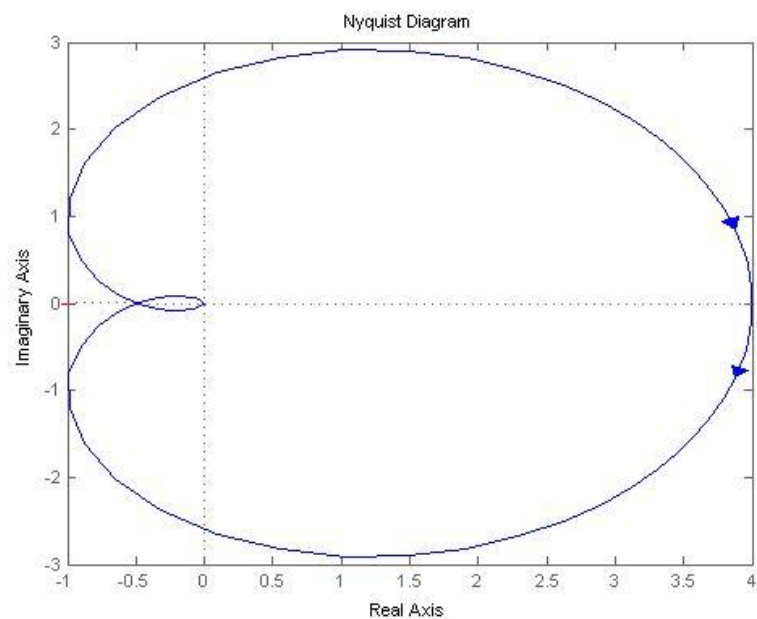
Tab. 2: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora pre určené hodnoty K_{KR} , T_{KR}

	Z_R	T_I	T_D
P	2	—	—
PI	1,8	3,1	—
PID	2,4	1,8	0,45

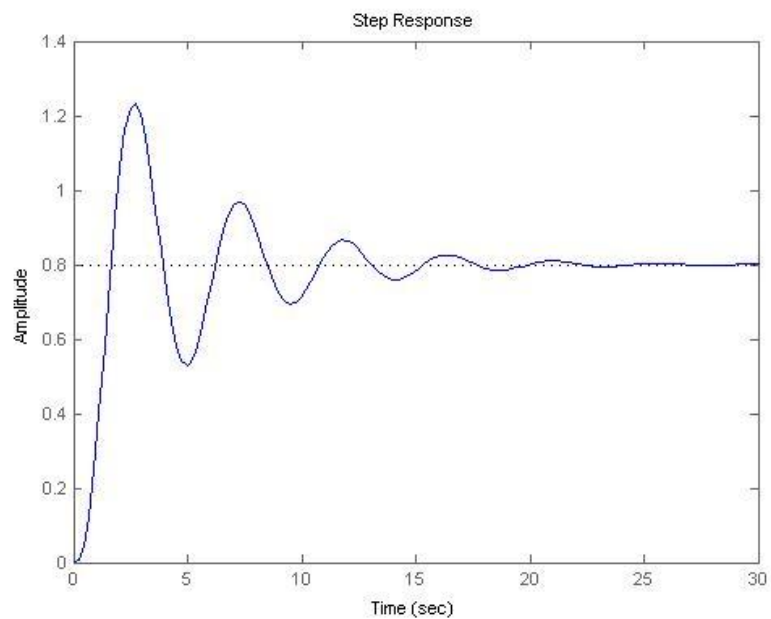
Prenos otvoreného regulačného obvodu s P regulátorom

$$G_O(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{2.2}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-19})$$

Na obr. 29 je zobrazená frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu s P regulátorom, ktorý je stabilný, potom aj URO bude stabilný (obr. 30).



Obr. 29 FCH otvoreného regulačného obvodu s P regulátorom

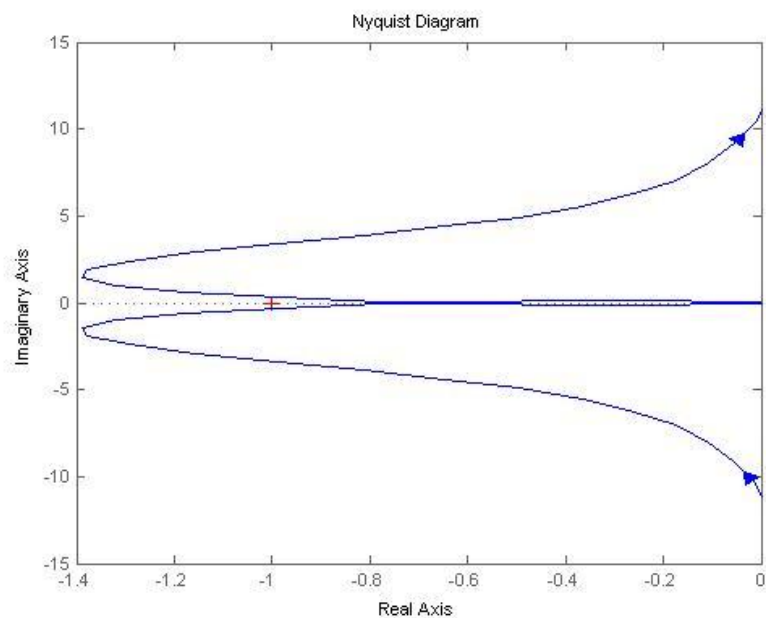


Obr. 30 Prechodová charakteristika URO s P regulátorom

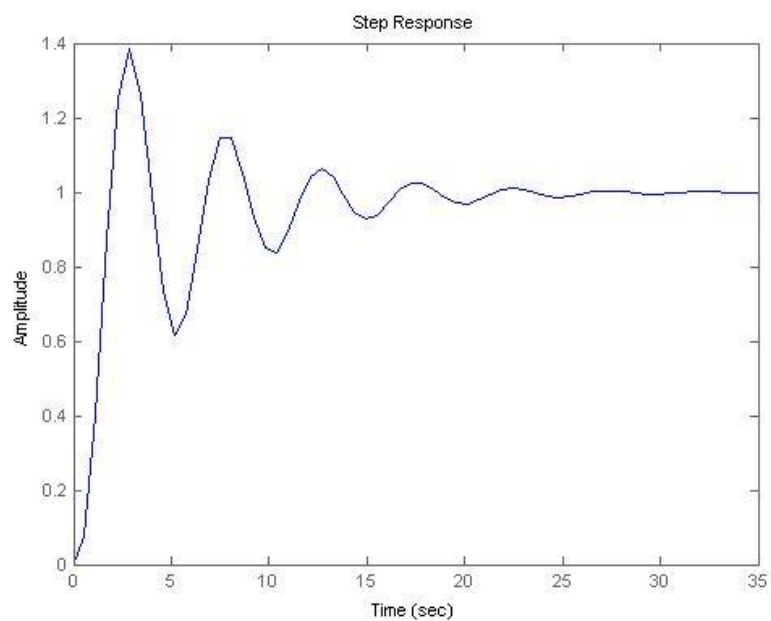
Prenos otvoreného regulačného obvodu s PI regulátorom:

$$G_O(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{2.1,8 \left(1 + \frac{1}{3,1(j\omega)} \right)}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-20})$$

Na obr. 31 je frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu s PI regulátorom, ktorý je stabilný, potom aj URO bude stabilný (obr. 32). Stabilita otvoreného regulačného obvodu zaručuje stabilitu URO.



Obr. 31 FCH otvoreného regulačného obvodu s PI regulátorom

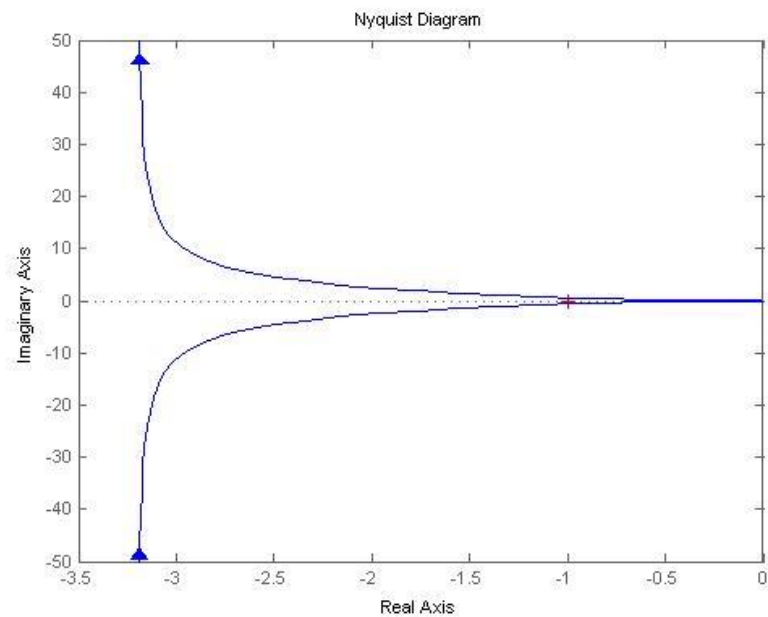


Obr. 32 FCH uzavretého regulačného obvodu s PI regulátorom

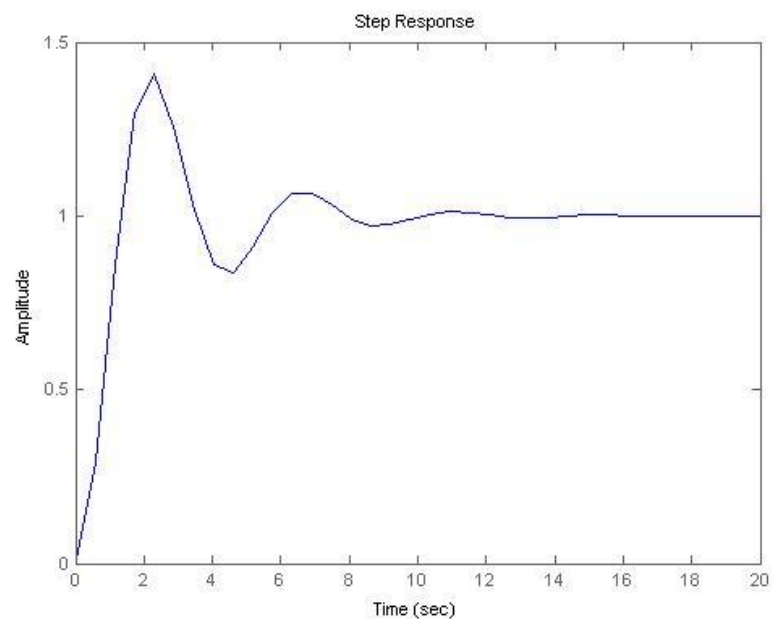
Prenos otvoreného regulačného obvodu s PID regulátorom

$$G_O(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{2.2,4 \left(1 + \frac{1}{1,8(j\omega)} + 0,45(j\omega) \right)}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \quad (\text{IV-21})$$

Na obr. 33 je frekvenčná charakteristika otvoreného regulačného obvodu s PID regulátorom, ktorý je stabilný, potom aj URO bude stabilný (obr. 34).



Obr. 33 FCH otvoreného regulačného obvodu s PID regulátorom



Obr.34 Prechodová charakteristika URO s PID regulátorom

5 Riadenie prietokového chemického reaktora pomocou frekvenčných kritérií

V prietokovom chemickom reaktore (obr. 35) prebiehajú dve paralelné exotermické reakcie prvého poriadku a to tak, že z východiskovej látky A vzniká produkt B pri optimálnej teplote. Pri vyššej teplote než je optimálna vzniká z látky A nežiaduci produkt C. Aby neprebiehala nežiaduca chemická reakcia, treba v reaktore zabezpečiť udržiavanie optimálnej teploty reakčnej zmesi θ , čo bude riadená veličina v systéme. Riadiacou veličinou je prietok chladiaceho média q_c .

Hodnoty riadiacej veličiny q_c a stavových veličín, keď je systém v ustálenom stave sú:

Prietok chladiaceho média $q_c^s = 0,004 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$

Koncentrácia látky A $c_A^s = 0,49 \text{ kmol m}^{-3}$

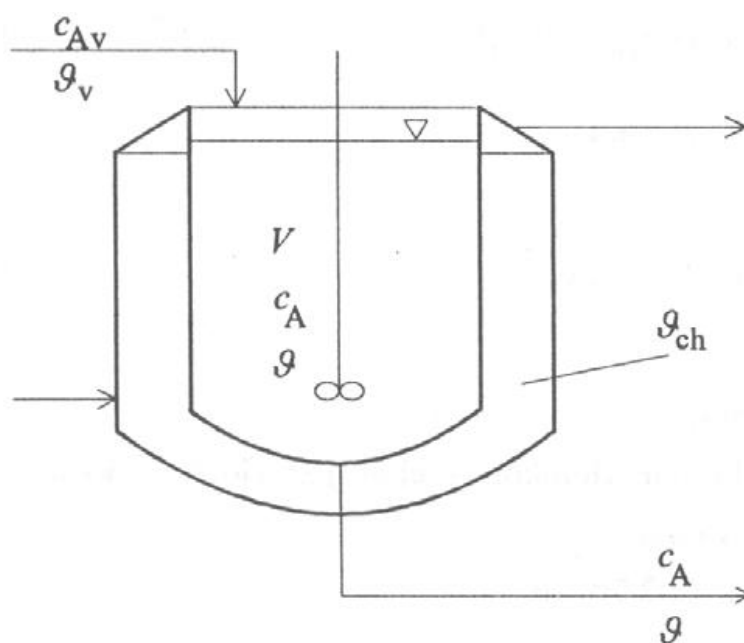
Koncentrácia látky B $c_B^s = 2,00 \text{ kmol m}^{-3}$

Koncentrácia látky C $c_C^s = 1,72 \text{ kmol m}^{-3}$

Teplota reakčnej zmesi $\theta^s = 363,61 \text{ K}$

Teplota chladiaceho média $\theta_c^s = 350,15 \text{ K}$

Pri riadení je žiadaná optimálna teplota reakčnej zmesi 359K, pri ktorej sa získa najviac produktu B.

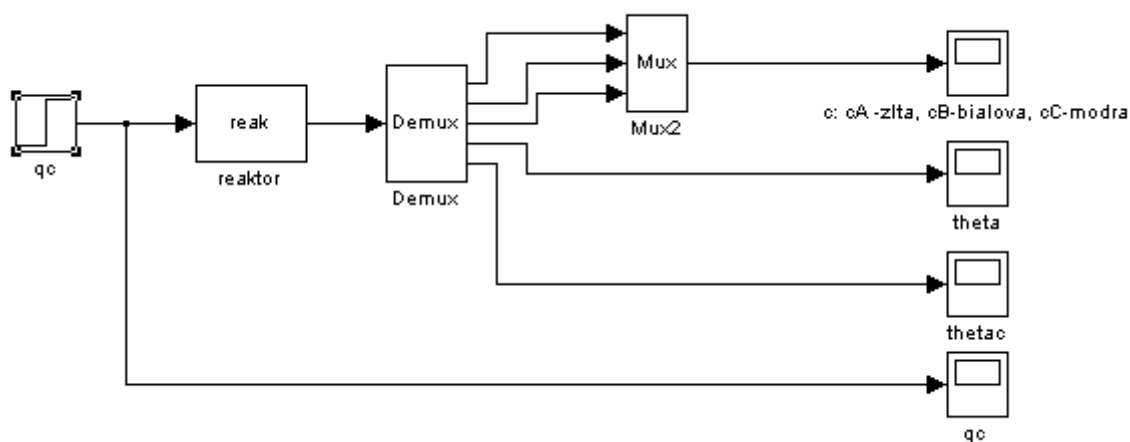


Obr. 35 Prietokový chemický reaktor s miešaním

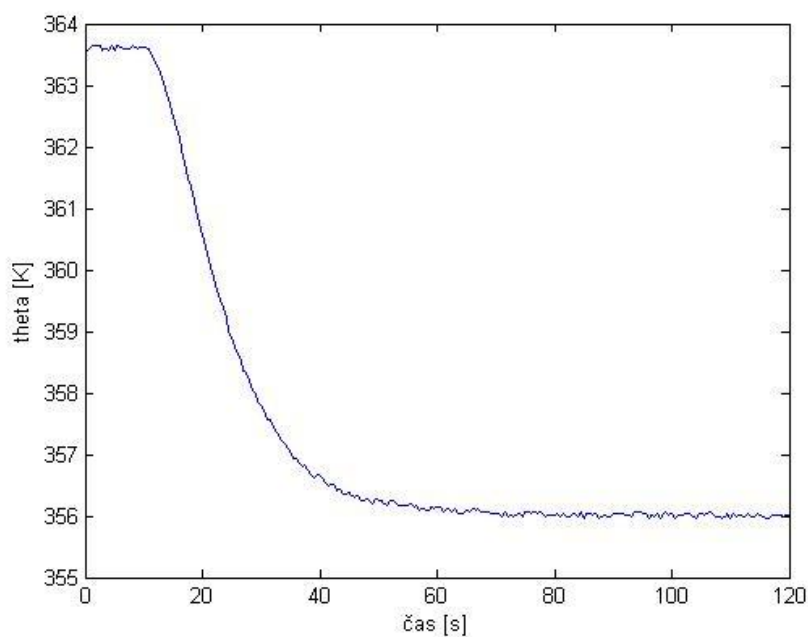
Na obr. 36 je zobrazená simulačná schéma, ktorou identifikujeme reaktor ako sústavu vyššieho rádu.

Na identifikáciu prenosu reaktora sa simuluje prechodová charakteristika a to tak, že q_c sa v čase $t = 10 \text{ min}$ zmení z pôvodnej hodnoty $q_c^s = 0,004 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ na hodnotu $q_c = 0,010 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$.

Prechodová charakteristika je na obr. 37, z ktorej možno určiť parametre na identifikáciu prenosu reaktora.



Obr. 36 Simulačná schéma na realizáciu skokovej zmeny prietoku chladiaceho média



Obr. 37 Prechodová charakteristika odozvy systému na skokovú zmenu prietoku q_c

Parametre na identifikáciu prenosu reaktora sú:

$$\begin{aligned}u_0 &= 0,004 \\u_\infty &= 0,01 \\y_0 &= 363,62 \\y_\infty &= 356 \\t_0 &= 10 \\t_1 &= 12 \\t_2 &= 32\end{aligned}\tag{V-1}$$

Pomocou programu PIDTool bol systém identifikovaný nasledovne:

$$\begin{aligned}n &= 3 \\K &= -1272,1767 \\T &= 3,2225 \\D &= 0,24806\end{aligned}\tag{V-2}$$

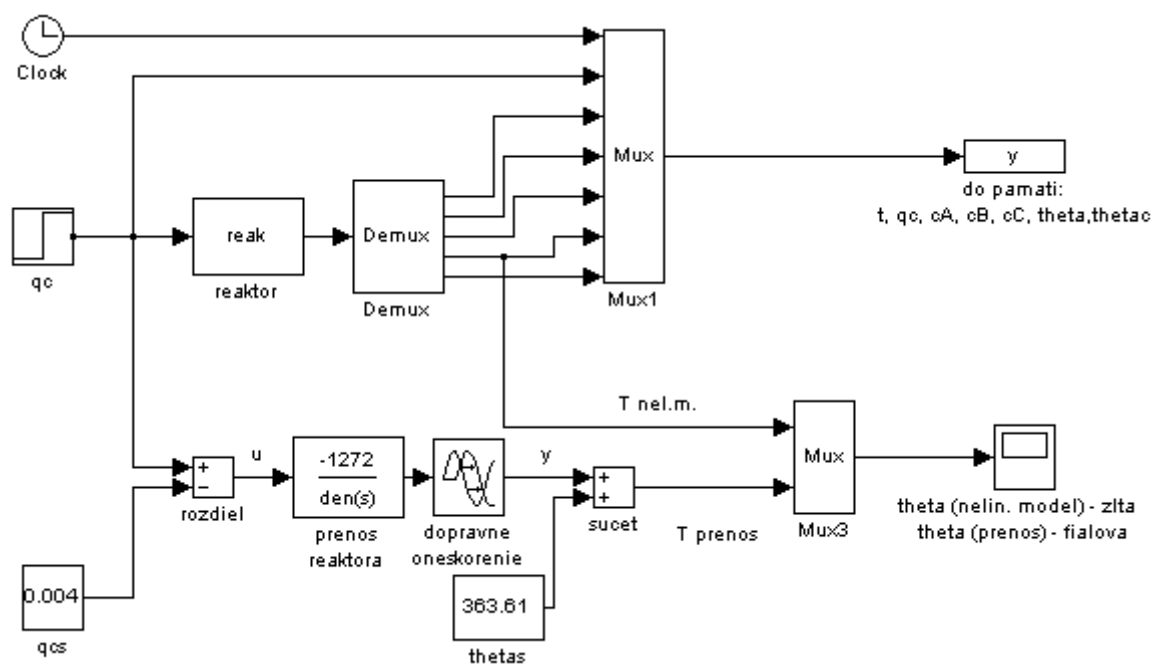
Výsledný prenos je:

$$G_s(s) = \frac{-1272}{(3,223s + 1)^3} e^{-0,248s}\tag{V-3}$$

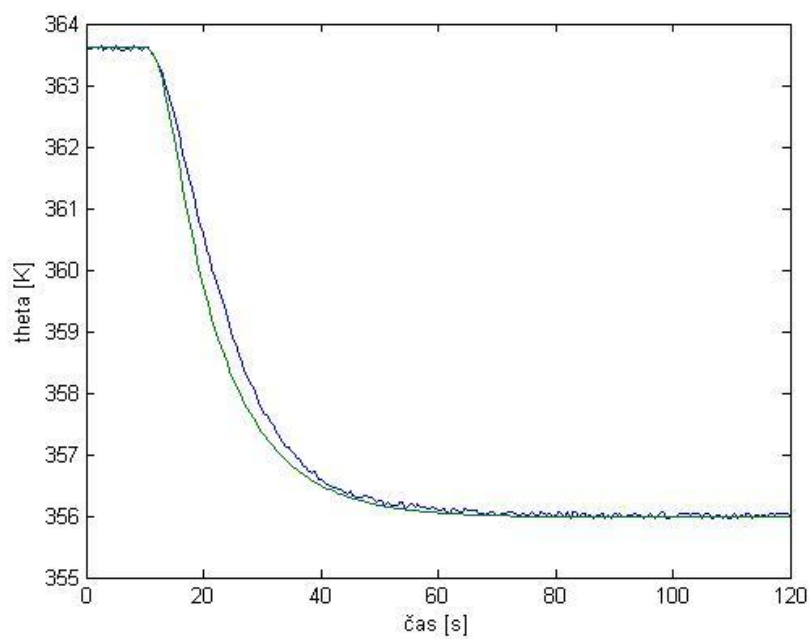
Dopravné oneskorenie sa v ďalšom výpočte zanedbá pre jeho malú hodnotu.

$$G_s(j\omega) = \frac{-1272}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1}\tag{V-4}$$

Na obr. 38 je simulačná schéma na overenie správnosti identifikovaného systému pomocou odozvy na skokovú zmenu chladiaceho média z pôvodnej hodnoty $q_c^s = 0,004m^3 \min^{-1}$ na hodnotu $q_c = 0,010m^3 \min^{-1}$. Z obr. 39 možno vyčítať, že výsledný prenos je približne zhodný s pôvodným nelineárnym modelom reaktora.



Obr. 38 Simulačná schéma na overenie správnosti identifikácie



Obr. 39 Prechodová charakteristika pôvodného a identifikovaného systému

5.1 Určenie kritických hodnôt pomocou frekvenčných charakteristík

Z obr. 40 možno vyčítať hodnotu G_m (bezpečnosť v amplitúde).

Platí:

$$|Go(j\omega)| = 20\log(-1272) + 20\log(-50) + 20\log x \quad (V-5)$$

kde

$$20\log x = G_m = -75,2\text{dB} \quad (V-6)$$

$$x = 10^{\frac{-75,2}{20}} = 1,738 \cdot 10^{-4}$$

Náhodne zvolený prenos proporcionálneho regulátora je:

$$G_R(s) = -50 \quad (V-7)$$

Potom výsledná hodnota kritického zosilnenia je:

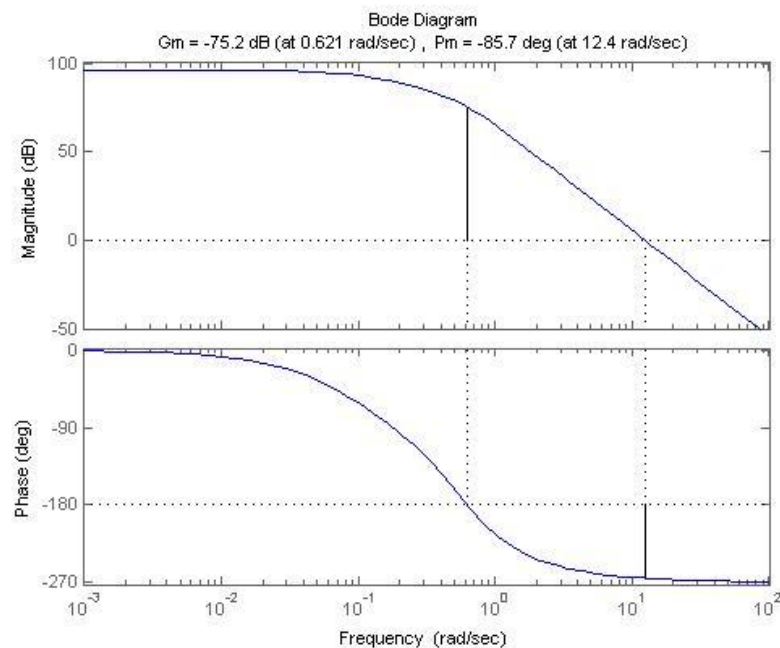
$$K_{KR} = -50 \cdot 1,738 \cdot 10^{-4} = -0,00865 \quad (V-8)$$

Kritická hodnota uhlovej frekvencie ω_{KR} je z obr. 40 rovná:

$$\omega_{KR} = 0,621\text{rad/sec} \quad (V-9)$$

z čoho

$$T_{KR} = \frac{2\pi}{0,621} = 10,118\text{sec/rad} \quad (V-10)$$



Obr. 40 LFCH otvoreného regulačného obvodu reaktora

5.2 Určenie kritických hodnôt ručným výpočtom

Zidentifikovaný systém má prenos v tvare:

$$G_S(s) = \frac{-1272}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1} \quad (\text{V-11})$$

Prenos náhodne zvoleného proporcionálneho regulátora je:

$$G_R(s) = -50 \quad (\text{V-12})$$

Potom prenos otvoreného regulačného obvodu (obr. 41) bude:

$$G_O(s) = G_S(s)G_R(s) = \frac{-1272 \cdot (-50)}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1} \quad (\text{V-13})$$

a prenos URO (obr. 42):

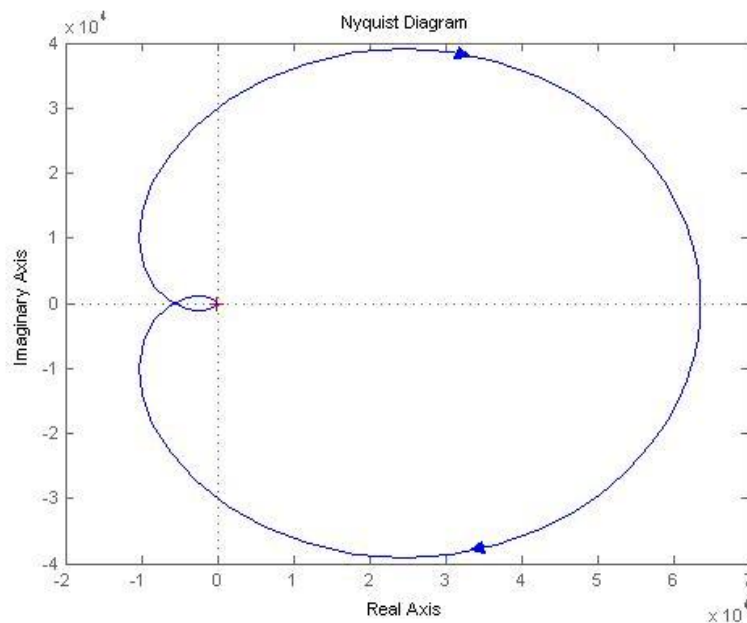
$$G_W(s) = \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} = \frac{\frac{-1272 \cdot (-50)}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1}}{1 + \frac{-1272 \cdot (-50)}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1}} \quad (\text{V-14})$$

Charakteristická rovnica URO má tvar:

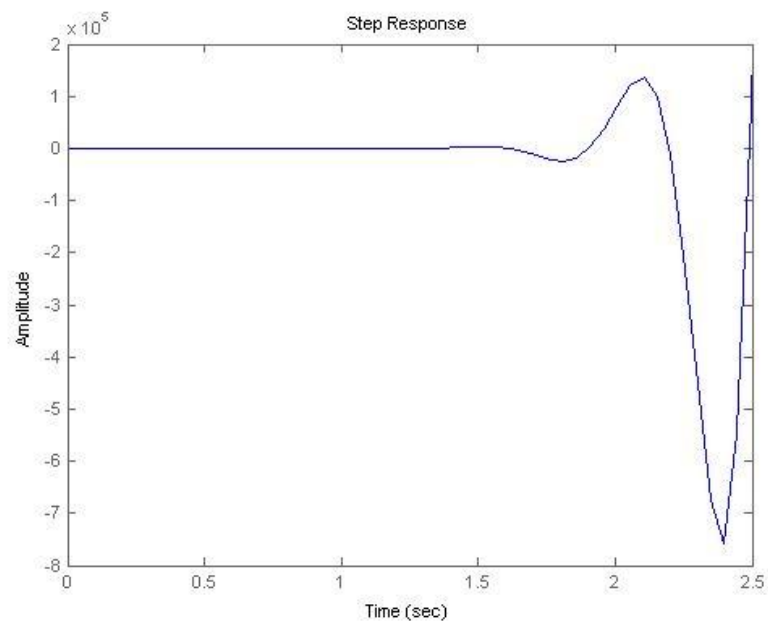
$$1 + G_S(s)G_R(s) = 0 \quad (\text{V-15})$$

$$1 + \frac{-1272K_{KR}}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1} = 0 \quad (\text{V-16})$$

$$33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + (1 - 1272K_{KR}) = 0 \quad (\text{V-17})$$



Obr. 41 FCH otvoreného regulačného obvodu reaktora



Obr. 42 Prechodová charakteristika URO reaktora

Routhov – Schurov algoritmus:

33,46	<u>31,15</u>	12,89	$\frac{1-1272K_{KR}}{31,15}$	$k = \frac{33,46}{31,15}$
$-31,15 \frac{33,46}{31,15}$		$-(1-1272K_{KR}) \frac{33,46}{31,15}$		
	31,15	$12,89 - (1-1272K_{KR}) \frac{33,46}{31,15}$	$1-1272K_{KR}$	

$$12,89 - (1-1272K_{KR}) \frac{33,46}{31,15} = 0$$

$$K_{KR} = -0,00865 \quad (V-18)$$

Výpočet hodnoty kritickej časovej konštanty T_{KR} :

$$31,15s^2 + (1-1272K_{KR}) = 0$$

$$s^2 = -\frac{(1-1272K_{KR})}{31,15} \quad (V-19)$$

$$(j\omega)^2 = \pm i \sqrt{\frac{1-1272K_{KR}}{31,15}}$$

$$12,89 - \frac{33,46}{31,15}(1-1272K_{KR}) = 0$$

$$12,89 - 33,46\omega^2 = 0$$

$$\omega_{KR} = \sqrt{\frac{12,89}{33,46}} = 0,621 \text{ rad/sec} \quad (\text{V-20})$$

$$T_{KR} = \frac{2\pi}{\omega_{KR}} = \frac{2\pi}{0,621} = 10,118 \text{ sec/rad} \quad (\text{V-21})$$

5.3 Výpočet parametrov regulátora pre riadenie reaktora

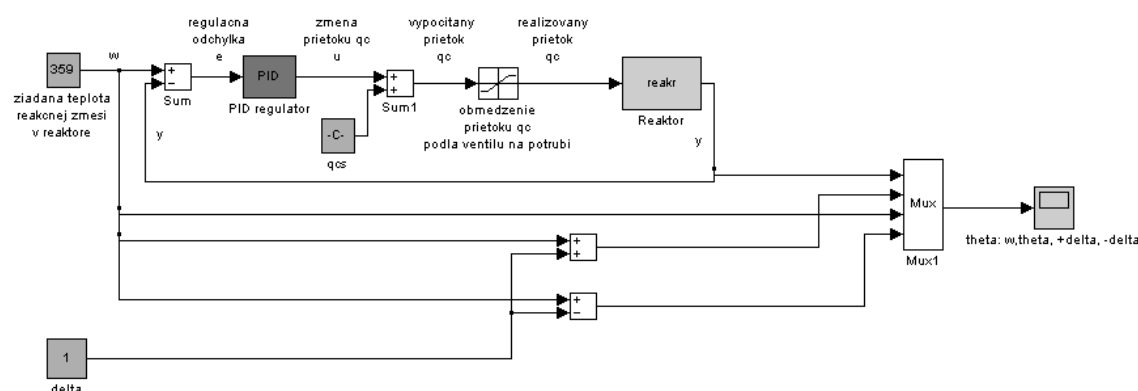
Parametre regulátora pre určené hodnoty $K_{KR} = -0,00865$ a $T_{KR} = 10,118 \text{ sec/rad}$ sú uvedené v tab. 3.

Tab. 3: Tabuľka na výpočet parametrov regulátora pre riadenie reaktora

	Z_R	T_I	T_D
P	-0,004325	—	—
PI	-0,003893	8,6003	—
PID	-0,005190	5,0590	1,2648

5.4 Simulácia riadenia reaktora s navrhnutými regulátormi

Riadenie reaktora sa bude simulovať pomocou schémy zobrazenej na obr. 43 pre všetky navrhnuté regulátory. Žiadaná hodnota optimálnej teploty reakčnej zmesi bude $359K$, a to s presnosťou $\pm 1K$. Pri tejto teplote vzniká z východiskovej látky A najviac produktu B a zabráni sa tak vzniku nežiaducej látky C.



Obr. 43 Simulačná schéma na riadenia reaktora

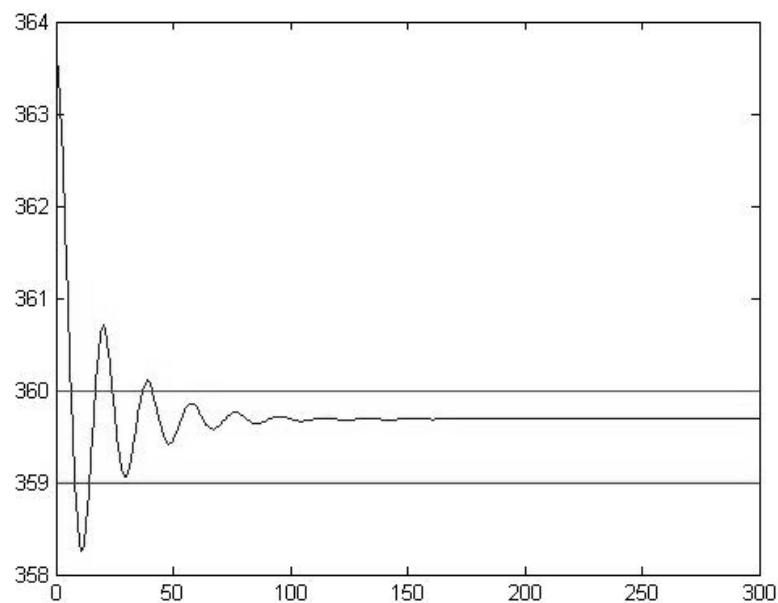
Identifikáciou získaný matematický opis riadeného reaktora je:

$$G_s(s) = \frac{-1272}{33,46s^3 + 31,15s^2 + 12,89s + 1} \quad (V-22)$$

Na základe kritických hodnôt zosilnenia K_{KR} a časovej konštanty T_{KR} , určených z logaritmickej frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu boli pomocou Ziegler – Nicholsovej metódy navrhnuté tri regulátory (tab. 3).

Prenos navrhnutého P regulátora je:

$$G_R(s) = -0,004325 \quad (V-23)$$

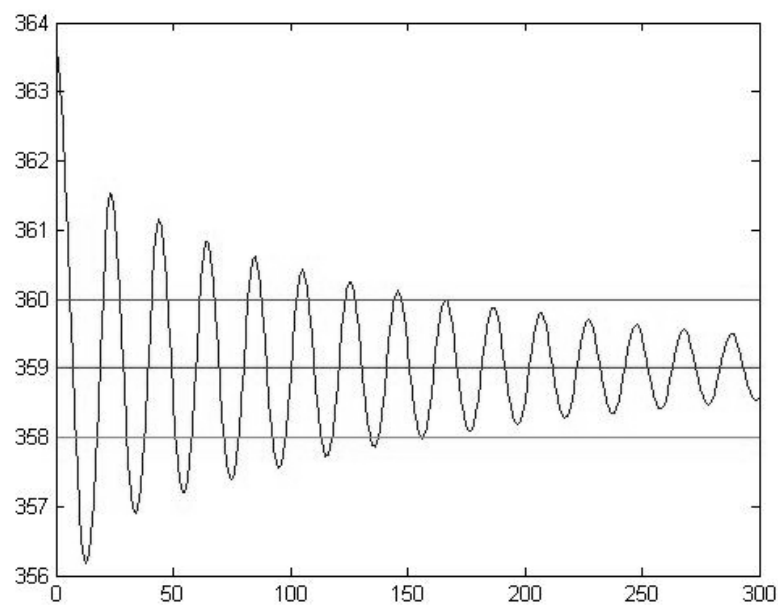


Obr. 44 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným P regulátorom

Ako vidieť z obr. 44, ak sa do obvodu zapojí navrhnutý P regulátor, teplota rekčnej zmesi sa ustáli nad žiadanou hodnotou 359K , ale s požadovanou presnosťou $\pm 1K$.

Prenos navrhnutého PI regulátora je:

$$G_R(s) = -0,003893 \left(1 + \frac{1}{8,6003s} \right) \quad (V-24)$$



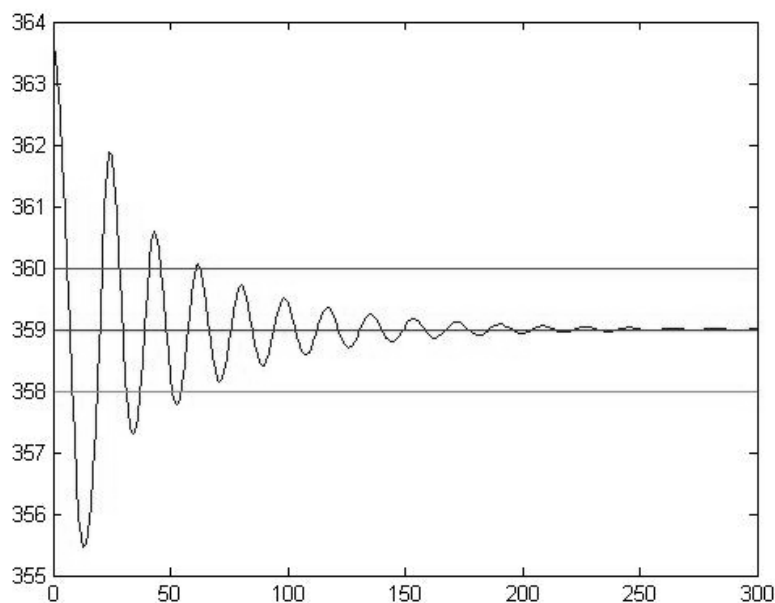
Obr. 45 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným PI regulátorom

Na obr. 45 je zobrazený priebeh výstupnej veličiny, ak sa do obvodu zapojí PI regulátor. Po istom čase simulácie sa výstupná veličina, teda teplota reakčnej zmesi, bude meniť v povolenom rozsahu $\pm 1K$ od žiadanej hodnoty teploty reakčnej zmesi.

Prenos navrhnutého PID regulátora je:

$$G_R(s) = -0,00519 \left(1 + \frac{1}{5,059s} + 1,2648s \right) \quad (V-25)$$

Ak sa do regulačného obvodu zapojí navrhnutý PID regulátor, teplota reakčnej zmesi sa ustáli na žiadanej hodnote (obr. 46). Porovnaním výsledkov zo simulácií riadenia reaktora zapojeného s navrhnutými regulátormi sa ukazuje ako najlepšie zapojenie obvodu s PID regulátorom, ktorý za pomerne krátky čas uradi daný systém na predpísanú hodnotu pre zadané podmienky.



Obr. 46 Simulácia riadenia reaktora so zaradeným PID regulátorom

6 Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo oboznámiť čitateľa s problematikou z oblasti frekvenčnej analýzy a získané poznatky aplikovať na riadenie technologického procesu pomocou frekvenčných kritérií. Úvodom boli definované základné pojmy, čo je to frekvenčný prenos, frekvenčná charakteristika, Nyquistovo kritérium stability a následne boli tieto termíny aplikované na rôznych príkladoch systému prvého rádu. Z Nyquistovho diagramu bola posúdená stabilita systémov a pre každý systém som uviedla príklady stabilného systému, na hranici stability a nestabilného systému. Pre systém druhého rádu boli vykreslené frekvenčné charakteristiky pre rôzne koeficienty tlmenia. Pre kladné hodnoty koeficientov tlmenia bol systém stabilný, a naopak pre záporné hodnoty nestabilný. Na systéme vyššieho rádu bolo vysvetlené, že frekvenčná charakteristika prejde toľko kvadrantov, koľkého rádu je systém [3].

Ďalšia časť práce sa zaoberala tzv. logaritmickými frekvenčnými charakteristikami. Konštrukcia týchto charakteristík bola ukázaná na jednotlivých typoch systémov prvého, druhého a vyšších rádov. Pre každý systém boli určené polohy asymptot k amplitúdovej a fázovej logaritmickej frekvenčnej charakteristike, inflexný bod, sklon dotyčnice v inflexnom bode a chyba, ktorá vznikla medzi skutočnou logaritmickou frekvenčnou charakteristikou a asymptotami.

Zabezpečenie stability systémov je úzko spojené s návrhom parametrov regulátorov. Pre prenos systému tretieho rádu a proporcionálny regulátor bol vytvorený prenos ORO a na základe frekvenčnej charakteristiky bol systém určený ako nestabilný. Z logaritmickej frekvenčnej charakteristiky som určila kritické zosilnenie a kritickú časovú konštantu a správnosť výpočtu som overila ručným výpočtom. Pre určené hodnoty kritických parametrov som na základe Ziegler – Nicholsovej metódy navrhla parametre P, PI a PID regulátorov. Potom som vykreslila frekvenčné charakteristiky ORO zapojeného s jednotlivými regulátormi. Graficky som demonštrovala, že stabilita ORO zaručuje stabilitu URO.

Na riadenie prietokového reaktora som potrebovala identifikovať riadený proces. Identifikovaný systém tretieho rádu som zapojila s proporcionálnym regulátorom a určila prenos ORO. Z logaritmickej frekvenčnej charakteristiky ORO som určila kritické zosilnenie a potom kritickú časovú konštantu. Správnosť výpočtu som overila ručným výpočtom. Z vypočítaných kritických parametrov som navrhla parametre P, PI a PID regulátorov. V závere som simulovala riadenie prietokového reaktora s navrhnutými regulátormi. Porovnaním výsledkov sa ukázalo ako najvhodnejšie zapojenie obvodu s PID regulátorom, ktorý za pomerne krátky čas uriadil daný systém na predpísanú hodnotu pre zadané podmienky.

Zoznam použitej literatúry

- [1] MIKLEŠ, J. – FIKAR, M. Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov 1: Modely a dynamické charakteristiky spojitých procesov. Bratislava: STU v Bratislave, 1999. 192 s. ISBN 80-227-1289-2
- [2] MIKLEŠ, J. – HUTLA, V. Teória automatického riadenia. Bratislava: Alfa, 1986. 477 s.
- [3] ŠALAMON, M. – ŠTEFULA, J. Teória riadenia I: Spojité lineárne obvody. Bratislava: STU v Bratislave, 1968. 210 s.
- [4] Metodická príručka pre návrh regulátorov: <http://kaia.mtf.stuba.sk/predmety/ppr/prirucka/>, 15. máj 2010
- [5] VESELÝ, V. – HYPIUSOVÁ, M. – GRMAN, Ľ. Nastavovanie parametrov regulátora pre reálne objekty: grman.tym.sk/php/download.php?file=2002_atp, 15. máj 2010
- [6] Stabilita regulačného obvodu. Kritériá stability: http://web.tuke.sk/sjf-kaar/stranky/Predmetove_str/TK/material/Teor.prik/4stab.pdf, 15. máj 2010