

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE**

**MOŽNOSTI RIADENIA TECHNOLOGICKÝCH PROCESOV
POMOCOU ZJEDNODUŠENÝCH MODELOV**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

FCHPT-5414-21507

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLOGIE

MOŽNOSTI RIADENIA TECHNOLOGICKÝCH PROCESOV
POMOCO U ZJEDNODUŠENÝCH MODELOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

FCHPT-5414-21507

Študijný program: Automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Číslo a názov študijného odboru: 5.2.14 automatizácia
Školiace pracovisko: Oddelenie informatizácie a riadenia procesov
Vedúci záverečnej práce/školiť: Ing. Mária Karšaiová, CSc.



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Lýdia Pavúková**
ID študenta: 21507
Študijný program: automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve
Študijný odbor: 5.2.14 automatizácia
Vedúca práce: Ing. Mária Karšaiová, CSc.
Miesto vypracovania: Bratislava

Názov práce: **Možnosti riadenia technologických procesov pomocou zjednodušených modelov**

Špecifikácia zadania:

- model technologického procesu
- metódy zjednodušenia modelu
- návrh riadiacej štruktúry

Rozsah práce: cca 60

Riešenie zadania práce od: 15. 02. 2010

Dátum odovzdania práce: 22. 05. 2010




Bc. Lýdia Pavúková
študentka


prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska


prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

POĎAKOVANIE

Touto cestou vyslovujem poďakovanie mojej vedúcej diplomovej práce Ing. Márii Karšaiovej, CSc. za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní diplomovej práce.

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne a uviedla som všetku použitú literatúru súvisiacu so zameraním diplomovej práce.

V Bratislave, 22.5.2010

.....

Podpis

Súhrn

Hlavnou úlohou diplomovej práce je zoznámenie sa s metódou agregácie, ako s účinným nástrojom pre spätnoväzbové riadenie pomocou redukovaného modelu, čím sa zníži rád systému. Redukovaný model zachováva základné znaky pôvodného systému a možno zvoliť viacero redukovaných modelov vzhľadom k cieľom, ktoré majú byť dosiahnuté a použitím rôznych agregáčnych techník. Na konkrétnych prípadoch sa dokáže vhodnosť riadenia pôvodného systému pomocou odpovedajúceho redukovaného modelu.

Kľúčové slová: agregácia, spätnoväzbové riadenie, redukovaný model

Abstract

The main task of this thesis is to get acquaintance with the method of aggregation, as an effective tool for feedback control using reduced-order model, thereby reducing the like system. Reduced-order model preserves the essential characteristics of the original system and can choose the number of reduced-order models with regard to the objectives to be achieved by using a different aggregation techniques to particular cases, can the full-order system through the corresponding reduced-order model.

Keywords: aggregation, feedback control, reduced-order model

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam tabuliek	10
Úvod	11
1. Čo je agregácia	12
1.1. Zjednodušujúce metódy.....	12
1.1.1. Presná agregácia.....	13
1.1.2. Modálna agregácia	14
1.1.3. Metóda vyváženej realizácie.....	15
1.1.4. Redukcia modelu	18
1.2. Vlastnosti agregovaného systému	19
2. Praktická časť	22
2.1. Stabilný systém.....	22
2.1.1. Presná agregácia.....	23
2.1.2. Modálna agregácia	27
2.1.3. Vyvážená realizácia	30
2.1.4. Redukcia modelu	33
2.2. Zásobníky kvapaliny	39
2.2.1. Presná agregácia.....	41
2.2.2. Modálna agregácia	42
2.2.3. Vyvážená realizácia	43
2.2.4. Redukcia modelu	45
2.3. Chemický reaktor	49
2.3.1. Presná agregácia.....	51
2.3.2. Modálna agregácia	53
2.4. Nestabilný systém.....	57
2.4.1. Presná agregácia.....	57
2.4.2. Modálna agregácia	59
Záver	63
Zoznam použitej literatúry	64

Zoznam obrázkov

Obr. 1 Schéma riadenia stabilného systému	25
Obr. 2 Výstup stabilného systému x_1 pri použití presnej agregácie	25
Obr. 3 Výstup stabilného systému x_2 pri použití presnej agregácie.....	26
Obr. 4 Výstup stabilného systému x_3 pri použití presnej agregácie.....	26
Obr. 5 Výstup stabilného systému x_1 pri použití modálnej agregácie	28
Obr. 6 Výstup stabilného systému x_2 pri použití modálnej agregácie	29
Obr. 7 Výstup stabilného systému x_3 pri použití modálnej agregácie	29
Obr. 8 Výstup stabilného systému x_1 pri použití metódy vyváženej realizácie.....	32
Obr. 9 Výstup stabilného systému x_2 pri použití metódy vyváženej realizácie.....	32
Obr. 10 Výstup stabilného systému x_3 pri použití metódy vyváženej realizácie.....	33
Obr. 11 Schéma riadenia pôvodného a agregovaného modelu pomocou PI regulátora	35
Obr. 12 Riadenie redukovaného systému na druhý rád PI regulátorom	35
Obr. 13 Riadenie redukovaného systému na prvý rád PI regulátorom	36
Obr. 14 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_1	37
Obr. 15 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_2	38
Obr. 16 Porovnanie agregáčnych techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_3	38
Obr. 17 Schéma troch zásobníkov	39
Obr. 18 Schéma riadenia zásobníkov kvapaliny	47
Obr. 19 Výška hladiny v prvom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník.....	48
Obr. 20 Výška hladiny v druhom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník.....	48
Obr. 21 Výška hladiny v treťom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník.....	49
Obr. 22 Schéma riadenia chemického reaktora	54
Obr. 23 Priebeh koncentrácie zložky A pri porovnaní agregáčnych techník	55
Obr. 24 Priebeh koncentrácie zložky B pri porovnaní agregáčnych techník.....	55
Obr. 25 Priebeh teploty reakčnej zmesi pri porovnaní agregáčnych techník	56
Obr. 26 Priebeh teploty chladiaceho média pri porovnaní agregáčnych techník	56
Obr. 27 Výstup nestabilného systému x_1 pri porovnaní agregáčnych techník	61

Obr. 28 Výstup nestabilného systému x_2 pri porovnaní agregáčnych techník	61
Obr. 29 Výstup nestabilného systému x_3 pri porovnaní agregáčnych techník	62

Zoznam tabuliek

Tabuľka 1 Konštanty zásobníkov kvapaliny	40
Tabuľka 2. Konštanty chemického reaktora	50

Zoznam príloh

Elektronická verzia diplomovej práce sa nachádza na priloženom CD

Zoznam symbolov, skratiek a značiek

F	prierez zásobníka
k_{ii}	prietoková konštanta v zásobníku
q	objemový prietok
V	objem
ρ	hustota
c_p	merná tepelná kapacita
f	oblasť prestupu
α	koeficient prestupu tepla
k_{0i}	frekvenčný faktor
g	konštanta
H	reakčná entalpia
r	reakčná rýchlosť
c	koncentrácia
T	teplota

Úvod

Problém agregácie bol predmetom rozsiahleho výskumu štúdií nielen v ekonomickej literatúre. Podmieňovalo to niekoľko rôznych motivácií.

Historicky sa začiatky vyšetrovania zaoberali otázkou vhodnosti analógie medzi mikroekonomickými a makroekonomickými vzťahmi. Normatívne poňatie dokonalej agregácie bolo tiež vyvinuté, pokiaľ ide o úpravu postupu pri zoskupovaní úvah tak, že medzi mikro a makro modelmi môže prevládať dokonalý súlad. Bol navrhnutý postup pre optimálnu agregáciu pomocou teórie štatistického rozhodovania a v súčasnosti sa zaoberá predpoveďami a zjednodušeniami.

Simon a Ando analyzovali štruktúru dynamického ekonomického systému zastúpeného takmer rozložiteľnými maticami. Tie ukázali, že krátkodobé správanie by mohlo byť stanovené pomocou dynamického podsystemu. Po pomerne dlhej dobe, intersystém spojky ovláda správanie sa systému pri zachovaní rovnovážneho stavu v rámci každého podsystemu. Ich výsledky teda oprávňujú ignorovať slabé väzby v štúdiu čiastkovej rovnováhy. Fisher navrhol postupné delenie pre agregáciu ekonomických modelov s výhradou minimalizácie nákladov určitého kritéria ([1]).

Záujem o výpočet skutočných číselných koeficientov v Leontiefovom vstupno-výstupnom modeli oživil záujem v riešení agregáčného problému, pretože vyžadujú nadmerný čas pre výpočty zapríčinené vysokými nákladmi na invertovanie veľkých matic. Hlavným cieľom bolo zistiť, či by agregácia mohla byť použitá na získanie približnej inverzie. Spolu s podobnými prípadmi boli preskúvané aj ekonometrické modely.

Z uvedeného vidieť, že oblasť agregácie má veľký význam v mnohých oblastiach. V oblasti kontroly je veľký záujem, pretože existuje možnosť, že ponúka zjednodušené modely, ktoré by mohli byť ľahko použiteľné v analýze a syntéze regulátorov.

Použitie agregáčnych konceptov v modeli zjednodušenia a kontroly veľkého množstva dynamických systémov propagoval Aoki. Ďalší vývoj a vypracovanie bolo predmetom mnohých výskumných prác. Ostatné techniky modelu postupnej redukcie, zjednodušenia a priblíženia sú už v súčasnosti k dispozícii.

1. Čo je agregácia

Jednou z možností riadenia systémov je znížiť rád systému použitím redukovaného modelu, navrhnúť riadenie pre redukovaný model a riadiť pôvodný systém. Redukovaný model zachováva základné znaky pôvodného systému a možno zvoliť viacero redukovaných modelov vzhľadom k cieľom, ktoré majú byť dosiahnuté a použitím rôznych agregáčnych techník. Agregáčne techniky možno využívať v problémoch hierarchického riadenia, aby sa zjednodušili niektoré alebo všetky podsystémy. Čím vyššia je úroveň, tým by mali byť jednoduchšie modely pre výkonné rozhodovanie. Navrhnuté riadenie nebude optimálne ale suboptimálne ([2]).

1.1. Zjednodušujúce metódy

Zjednodušujúce metódy vychádzajú z predpokladu, že sa zjednoduší celý systém tak, aby sa dosiahli určené ciele a neznížila sa kvalita riadenia alebo len čiastočne. Zjednodušiť systém znamená zjednodušiť jeho matematický model s cieľom získania jednoduchšej štruktúry riadenia. Medzi tieto zjednodušujúce metódy patria agregáčne metódy. V podstate je to zavedenie iného stavového priestoru premenných, ktorý zahŕňa určité kvalitatívne vlastnosti pôvodného systému. Druhú skupinu tvoria poruchové metódy, ktoré v sebe zahŕňajú určité postupy, pri ktorých sa vzniknuté dynamické interakcie v systéme neuvažujú. Využitie týchto metód sa uplatňuje pri systémoch, ktoré môžu byť aproximované systémom jednoduchšej štruktúry. Matematicky, rozdiel v odozve medzi skutočným a aproximovaným systémom je modelovaný ako poruchový člen pôsobiaci neskôr. Tieto poruchové metódy sa delia na slabé väzby, ktorých princíp spočíva v existencii nesingulárnych porúch, čo sa matematicky vyjadruje tak, že porucha vystupuje na pravej strane diferenciálnej rovnice. V prípade, že sa predpokladá $\varepsilon = 0$, jedná sa o nezávislé podsystémy a skúša sa kvantifikovať stupeň aproximácie, keďže v skutočnom systéme je $\varepsilon \neq 0$. Druhou metódou je metóda silných väzieb, ktorá je založená na existencii singulárnych porúch, t.j. poruchy vystupujú na ľavej strane diferenciálnej rovnice. Metódy singulárnych porúch ponúkajú viacero možností na získanie zjednodušených modelov filtrov a riadiacich systémov s hierarchickou štruktúrou ([3]).

1.1.1. Presná agregácia

Cieľom tejto časti je poskytnúť úvodné informácie o predmete agregáčného modelovania veľkých dynamických systémov.

Nech je dynamický systém opísaný stavovými rovnicami ([4], [5], [6], [11], [12]):

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad 1.1a$$

$$\mathbf{y}(t) = C \mathbf{x}(t) \quad 1.1b$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavových veličín v čase t rozmeru n

$\mathbf{u}(t)$ je vektor riadiacich veličín v čase t rozmeru m

$\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupných veličín v čase t rozmeru p

Matice A, B a C sú matice konštant rozmerov $n \times n$, $n \times m$ a $r \times n$ a trojica (A, B, C) je plne ovládateľná – pozorovateľná. Systém (1.1) má byť nahradený vyhovujúcim agregovaným modelom v tvare:

$$\mathbf{z}'(t) = F \mathbf{z}(t) + G \mathbf{u}(t) \quad 1.2a$$

$$\mathbf{w}(t) = H \mathbf{z}(t) \quad 1.2b$$

kde $\mathbf{z}(t)$ je vektor agregovaných stavových veličín v čase t rozmeru r

$\mathbf{w}(t)$ je vektor agregovaných výstupných veličín v čase t rozmeru q

Stavový opis agregovaného modelu je považovaný za uspokojivý, ak pre danú triedu vstupov $\mathbf{u}(t)$, sú agregované výstupy $\mathbf{w}(t)$ dobrou aproximáciou pôvodných výstupov $\mathbf{y}(t)$ a platí $m \leq r \leq n$. Je potrebné poznamenať, že oba dynamické modely (1.1) a (1.2) používajú rovnaké vstupno-výstupné informácie, aj keď ich dynamické popisy sú rôzne. Vzťah medzi pôvodným a redukovaným modelom je:

$$\mathbf{z}(t) = L \mathbf{x}(t) \quad 1.3$$

kde L je agregáčna matica konštánt $r \times n$, ktorú je možné navrhnuť viacerými spôsobmi. Agregáčna matica L tvorí množinu primárnych návrhov parametrov v konštantnom agregáčnom modeli. Daná správnosť (voľnosť) znamená vybrať elementy L tak, že L má najviac jeden vstup v každom stĺpci, potom u zložiek x môže byť zoskupených do najviac r separátnych skupín. Táto procedúra tvorí metódu pre určenie agregáčnej matice. Možno vidieť, že tento postup má za následok rozdelenie $x(t)$ do r -rozmerného podsystému

Podobnosť medzi pôvodným a redukovaným modelom zabezpečujú podmienky:

$$FL = LA \quad 1.4$$

$$G = LB \quad 1.5$$

$$z(0) = L x(0) \quad 1.6$$

Tieto podmienky sa nazývajú aj podmienkami agregovateľnosti a splnenie rovníc 1.4 a 1.5 predstavuje presnú agregáciu ([11], [12], [8]).

Matica F musí byť nasledovná:

$$F = LAL^T[LL^T]^{-1} \quad 1.7$$

Matica L sa určí tak, aby vlastné čísla matice F boli obsiahnuté vo vlastných číslach matice A .

1.1.2. Modálna agregácia

Modálna agregácia je špeciálnym prípadom presnej agregácie. Základnou vlastnosťou modálnej agregácie je zachovanie l dominantných vlastných čísel systému. V súčasnosti existujú viaceré metódy modálnej agregácie (Davison) ([7], [8]).

Postup pri riešení tohto typu agregácie spočíva v nájdení modálnej matice k matici A .

$$A = M_A J_A M_A^{-1} \quad 1.8$$

kde J_A je diagonálna (resp. Jordanova) matica, ktorá má vlastné čísla matice A na diagonále.

Nech vlastné čísla sú v J_A usporiadané zostupne

$$M_A = \begin{bmatrix} M_R & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad 1.9$$

kde M_R má rozmery redukovaného systému $l \times l$

Nech $P = [I_{l \times l} \ 0_{l \times (n-l)}]$

Potom agregáčnā matica má tvar

$$L = M_R P M_A^{-1} \quad 1.10$$

a matice agregovaného systému sú

$$A_r = M_R P J_A P^T M_R^{-1} \quad 1.11$$

$$B_r = M_R P M_A^{-1} B \quad 1.12$$

Matica A_r je typu $l \times l$ a matica B_r je typu $l \times m$.

Uvedená metóda sa hodí na všetky prípady, pokiaľ systém nemá násobné vlastné čísla.

1.1.3. Metóda vyváženej realizácie

Postup pre diagonalizačný algoritmus, ktorý využíva vyváženú realizáciu systému (balanced realization) spočíva v transformácii stavového modelu na vyváženú realizáciu a následnej agregácii, t.j. redukcii modelu, teda vyváženej realizácie ([9]).

Nech je autonómny system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad 1.13a$$

$$y(t) = Cx(t) \quad 1.13b$$

$$x(0) = x_0 \quad 1.13c$$

Gramián pozorovateľnosti

$$Y_0 = \int_0^{\infty} e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau \quad 1.14$$

je riešením rovnice:

$$A^* Y_0 + Y_0 A + C^* C = 0 \quad 1.15$$

v prostredí MATLAB môžeme na jeho výpočet použiť príkaz

$$Y_0 = \text{lyap}(A', C' C)$$

Riešením autonómneho systému je rovnica

$$y(t) = C e^{A t} x_0 \quad 1.16$$

čo je energia výstupu

$$\|y\|^2 = x_0^* Y_0 x_0 \quad 1.17$$

Ak je daný systém s riadením

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad 1.18a$$

$$x(-\infty) = 0 \quad 1.18b$$

Gramián riaditeľnosti

$$X_C = \int_0^{\infty} e^{At} BB^* e^{A^*t} dt \quad 1.19$$

je riešením rovnice:

$$AX_C + X_C A^* + BB^* = 0 \quad 1.20$$

v prostredí MATLAB môžeme na jeho výpočet použiť príkaz

$$XC = \text{lyap}(A, BB')$$

Odozva systému na vstup $u(t)$ pôsobiaci na časovom intervale $(-\infty, 0]$ je

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad 1.21$$

a optimálny vstup, ktorý prevedie systém z nuly do stavu x_0

$$\|u_{opt}\|^2 = x_0^* X_C^{-1} x_0 \quad 1.22$$

Zosúladenie smerov riaditeľnosti a pozorovateľnosti vedie k vyváženej realizácii.

Nech (A, B, C) je pozorovateľná, riaditeľná realizácia. Potom existuje regulárna transformačná matica T taká, že transformovaný systém

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \quad 1.23$$

vyhovuje podmienke

$$\tilde{X}_C = \tilde{Y}_0 = \Sigma \quad 1.24$$

kde $\Sigma > 0$ je diagonálna matica

V prostredí MATLAB sa metódou vyváženej realizácie redukuje systém na nižší rád pomocou príkazu `balreal`

$$[Gsa, G1, T, Ti] = \text{balreal}(Gs) \quad 1.25$$

kde Gsa je transformovaný systém v stavovom priestore, $G1$ je diagonálna matica – Hankelove singulárne čísla, T je transformačná matica, Ti je inverzná transformačná matica a nakoniec Gs je pôvodná prenosová funkcia.

1.1.4. Redukcia modelu

Nech je vyvážení model taký, že pre príslušné gramiány riaditeľnosti a pozorovateľnosti platí ([9])

$$\tilde{X}_C = \tilde{Y}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad 1.26$$

Nech $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n$

potom redukovaný model (A_r, B_r, C_r) bude predstavovať prvých r stavov z (A, B, C)

$$A = \begin{bmatrix} A_r & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{bmatrix} \quad 1.27$$

$$B = \begin{bmatrix} B_r \\ \vdots \\ B_{nn} \end{bmatrix} \quad 1.28$$

$$C = [C_r \quad \dots \quad C_{nn}] \quad 1.29$$

Podmienka $\sigma_r \geq \sigma_{r+1}$ je dôležitá pre zabezpečenie stability aj agregovaného modelu. V prostredí MATLAB sa pre redukciu systému využíva príkaz `modred`.

1.2. Vlastnosti agregovaného systému

Ak sa zavedie chyba redukcie $e(t) = z(t) - Lx(t)$, požaduje sa, aby $e(t) = 0$ pre všetky $t \geq 0$ ak $z(0) = L x(0)$ alebo $e(t) \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow \infty$ pre $z(0) \neq L x(0)$ a F bude vybratá tak, aby bola asymptoticky stabilná. Pôvodný kvadratický funkcionál, s váhovými koeficientmi Q a R , ktorého minimalizáciou sa získa optimálne riadenie, je nahradený funkcionálom ([3], [10]).

$$\min J_a = \frac{1}{2} \int_0^t [z^T(t)Q_r z(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad 1.30$$

a zákon riadenia pre redukovaný model je

$$u(t) = -R^{-1}GK_r z(t) \quad 1.31$$

kde K_r je pozitívne definitné riešenie rovnice

$$K_r F + F^T K_r - K_r G R^{-1} G K_r + Q_r = 0 \quad 1.32$$

a pre maticu Q_r platí

$$Q_r = [LL^T]^{-1} L Q L^T [LL^T]^{-1} \quad 1.33$$

pri použití transformácie

$$\mathbf{x}(t) = T \mathbf{y}(t) \quad 1.34$$

transformuje pôvodný systém do Jordanovej kanonickej formy

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = J \mathbf{y}(t) + S \mathbf{u}(t) \quad 1.35$$

kde $J = T^{-1} A T$ a $S = T^{-1} B$

Pri výbere agregáčnej matice v tvare

$$L = [I_r; 0_{r \times (n-r)}] T^{-1} \quad 1.36$$

kde $n > r$ je rád pôvodného a redukovaného modelu a T je transformačná matica zabezpečujúca zachovanie hlavných vlastností pôvodného systému v redukovanom modeli a je možné zabezpečiť, aby póly uzavretého systému ostali v určitej obmedzenej oblasti. Modifikuje sa pôvodný funkcionál a odpovedajúci funkcionál redukovaného modelu bude

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2} \int_0^t \exp(2\alpha t) [\mathbf{z}^T(t) Q_r \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\mathbf{z}_a^T(t) Q_a \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}_a^T(t) R \mathbf{u}_a(t)] dt \end{aligned} \quad 1.37$$

Redukovaný model a matica zesílení

$$\mathbf{z}_a(t) = [F - I_r] \mathbf{z}_a(t) + G \mathbf{u}_a(t) \quad 1.38$$

$$Z = R^{-1} G K_a \quad 1.39$$

kde K_a je řešením maticové rovnice:

$$K_a F + F^T K_a - K_a G R^{-1} G K_a + (Q_a + 2\alpha I_r) = 0 \quad 1.40$$

2. Praktická časť

Uvedené prístupy redukcie modelov boli aplikované na modeli stabilného systému, chemického reaktora a troch zásobníkov kvapaliny bez interakcie. Samozrejme, princíp agregácie môže byť aplikovaný aj na iné systémy ako stabilné, preto bol informatívne spracovaný aj nestabilný systém.

2.1. Stabilný systém

Na nasledujúcom stabilnom systéme, ktorého matematický model v stavovom priestore vyplýva z fyzikálnych, chemických a konštrukčných vlastností procesu, bol aplikovaný prístup agregácie k riešeniu.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

s kvadratickou účelovou funkciou

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a

$$R = [1]$$

Úlohou je navrhnúť agregovaný model a následne spätnoväzbové riadenie, ktoré posúva všetky vlastné hodnoty systému do určitej stabilnej oblasti v komplexnej rovine.

2.1.1. Presná agregácia

Najprv boli vypočítané vlastné čísla matice A , ktoré musia byť obsiahnuté aj v agregovanej matici F

vlastné čísla [- 5.3615 - 3.1674 - 0.4711]

Z vlastných čísel matice A , je zrejmé, že systém je stabilný. Následne bola vypočítaná transformačná matica T v prostredí MATLAB pomocou príkazu

$$[T, D] = \text{eig}(A)$$

kde D je matica s vlastnými číslami matice na diagonále a transformačná matica T je

$$T = \begin{bmatrix} 0.5474 & 0.1535 & -0.8227 \\ -0.2318 & -0.9168 & -0.3253 \\ -0.8041 & 0.3688 & -0.4662 \end{bmatrix}$$

hodnota inverznej matice T^{-1} je

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5474 & -0.2318 & -0.8041 \\ 0.1535 & -0.9168 & 0.3688 \\ -0.8227 & -0.3253 & -0.4662 \end{bmatrix}$$

pomocou ktorej bola navrhnutá agregáčnā matica L z rovnice 1.36, t.z., že matica L je prvý riadok matice T^{-1}

$$L = [0.5474 \quad -0.2318 \quad -0.8041]$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc F a G

$$F = - 5.3615$$

$$G = -0.8041$$

teda dynamický model z rovnice 1.2a je

$$\mathbf{z}'(t) = -0.4711\mathbf{z}(t) - 0.8041\mathbf{u}(t)$$

potom modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

$$Q_r = 1$$

Riccatiho rovnica tohto agregovaného modelu, ktorá je popísaná rovnicou 1.40 je

$$-0.6466 K_a - 8.7229 K_a^2 + 3 = 0$$

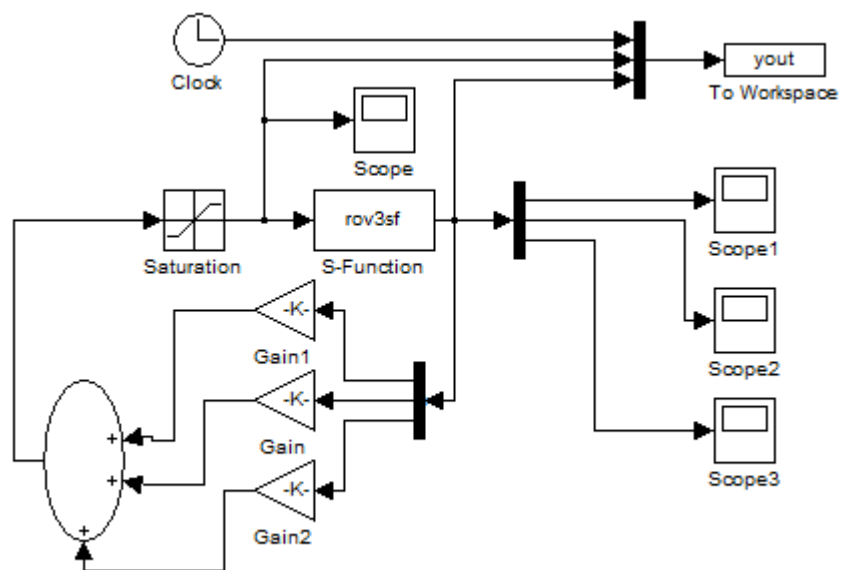
a výsledok Riccatiho rovnice podľa rovnice 1.39 je

$$K_a = 11.1175$$

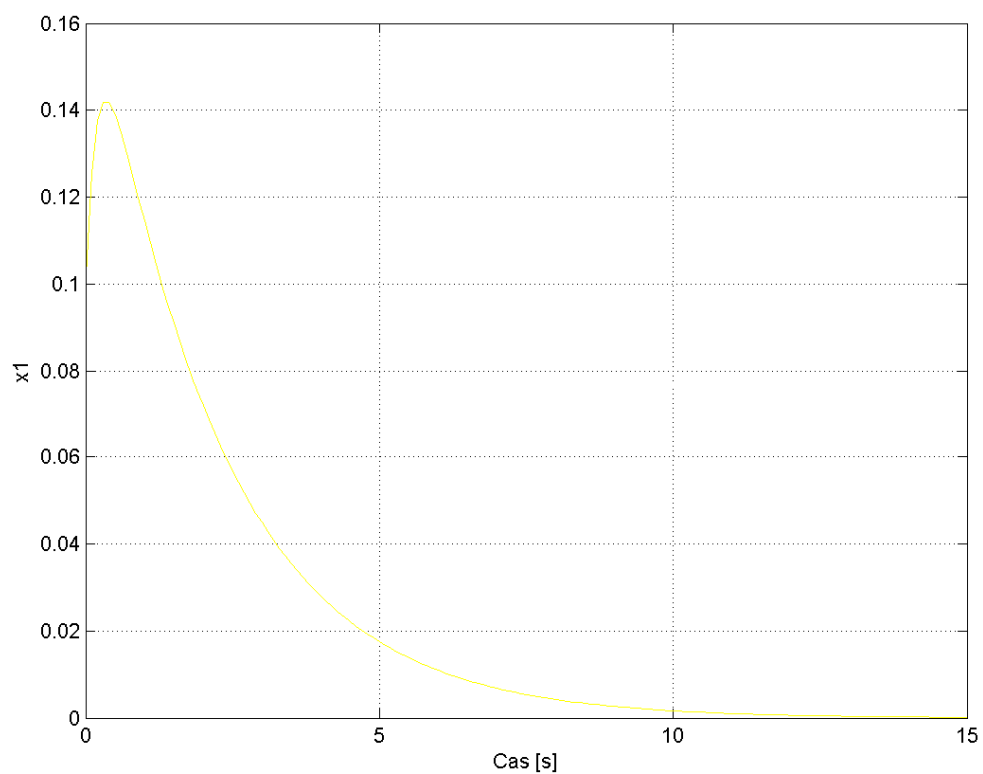
a nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

$$\mathbf{u}(t) = 6.0857x_1(t) - 2.5771x_2(t) - 8.9399x_3(t)$$

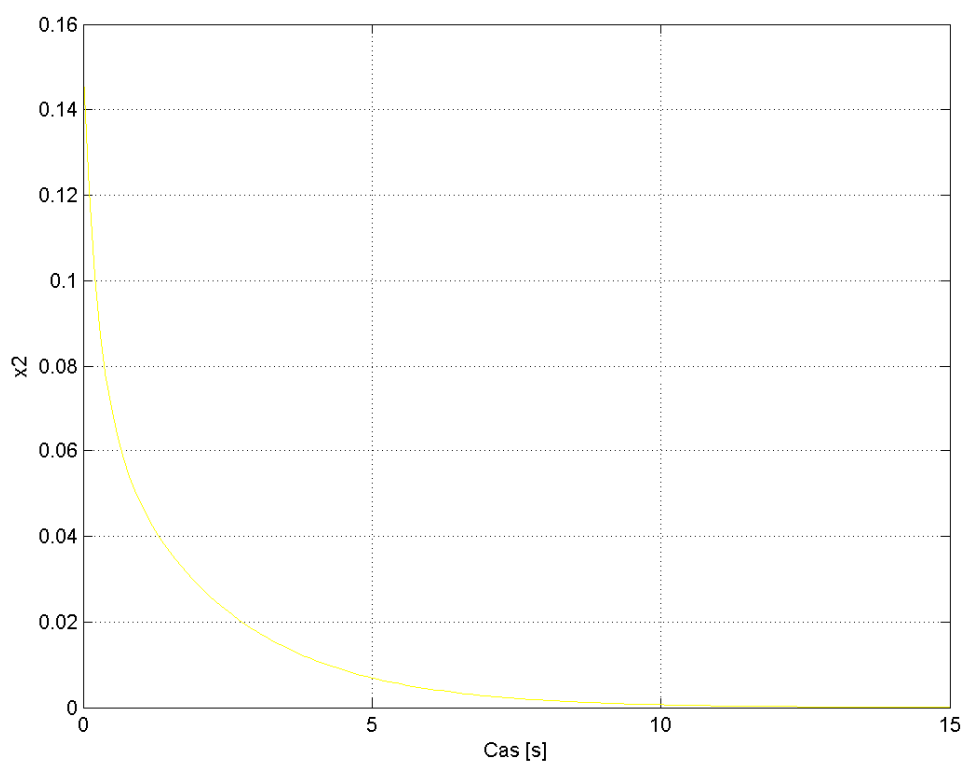
Schéma riadenia stabilného systému je znázornená na Obr. 1, kde akčný zásah vstupuje do s-funkcie a výstupy systému sú zobrazené na Obr.2 – Obr. 4



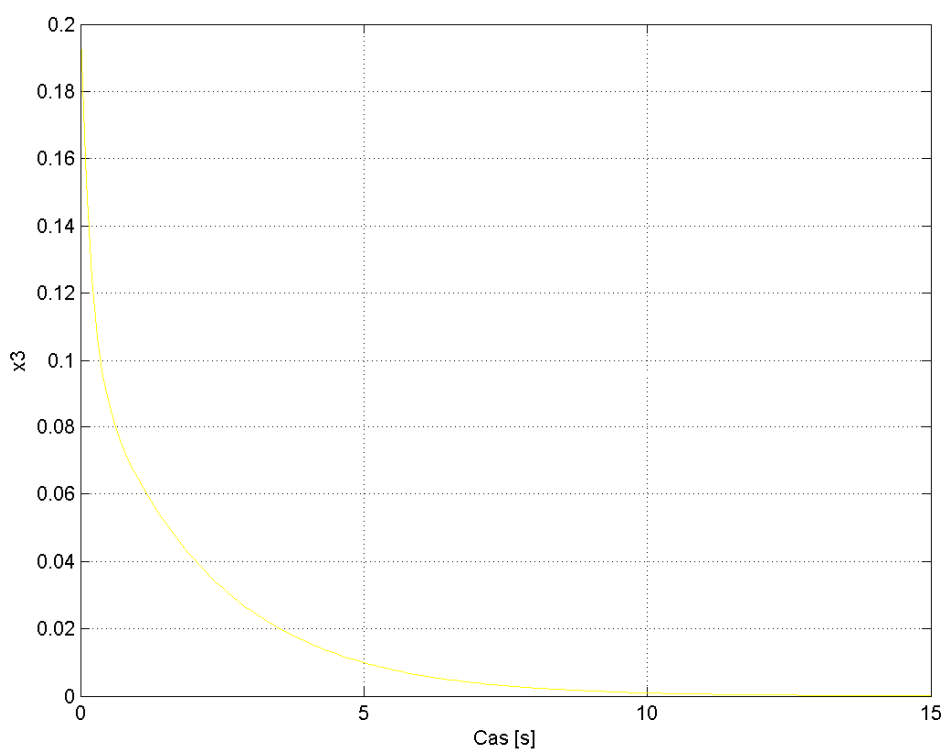
Obr. 1 Schéma riadenia stabilného systému



Obr. 2 Výstup stabilného systému x_1 pri použití presnej agregácie



Obr. 3 Výstup stabilného systému x_2 pri použití presnej agregácie



Obr. 4 Výstup stabilného systému x_3 pri použití presnej agregácie

2.1.2. Modálna agregácia

Pre porovnanie agregáčnych techník bol vypočítaný zákon riadenia aj využitím modálnej agregácie:

Jordanova matica s vlastnými číslami matice A obsiahnutými na diagonále, ktoré boli vypočítané v predošlej metóde, bola navrhnutá pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$[Ma, Ja] = \text{jordan}(A)$$

$$J_A = \begin{bmatrix} -0.4711 & 0 & 0 \\ 0 & -5.3615 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1674 \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici A je podľa rovnice 1.9

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.6768 & 0.2996 & 0.0236 \\ 0.2676 & -0.1269 & -0.1407 \\ 0.3836 & -0.4402 & 0.0566 \end{bmatrix}$$

potom agregáčna matica z rovnice 1.10 je

$$L = [0.6768 \quad 0.2676 \quad -0.3836]$$

kde M_R je rozmerov redukovaného systému $l \times l$ a $P = [I_{l \times l} \quad 0_{l \times (n-l)}]$.

Matice redukovaného systému vypočítané z rovníc 1.11 a 1.12 sú

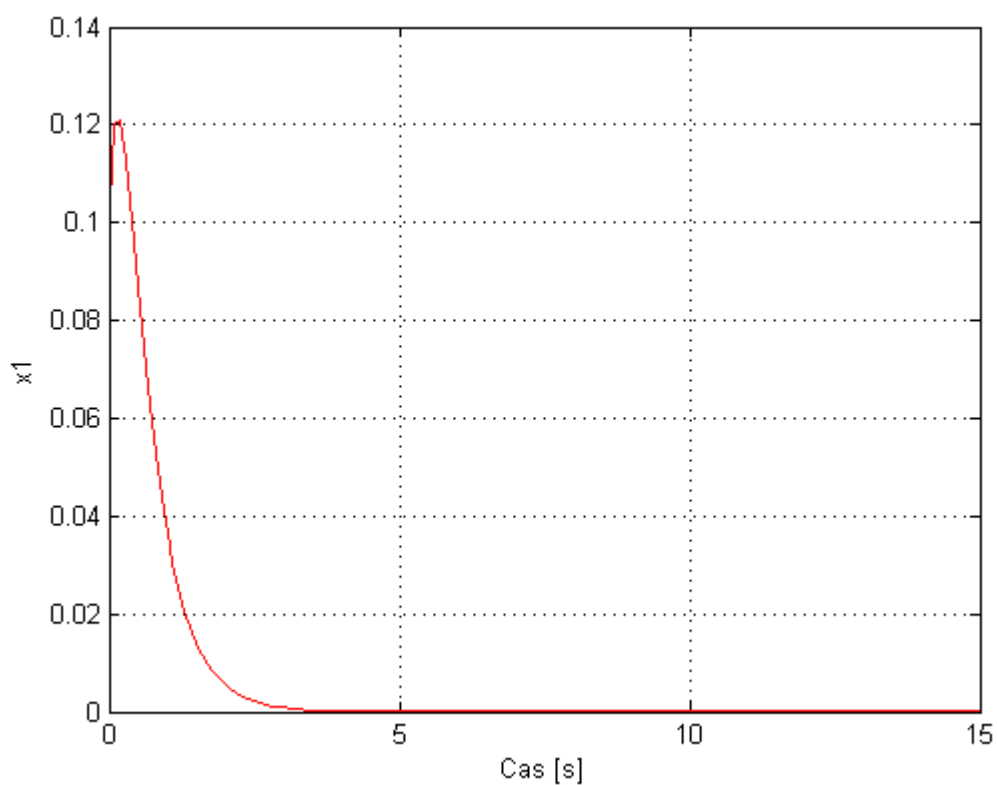
$$A_r = -0.4711$$

$$B_r = 0.3836$$

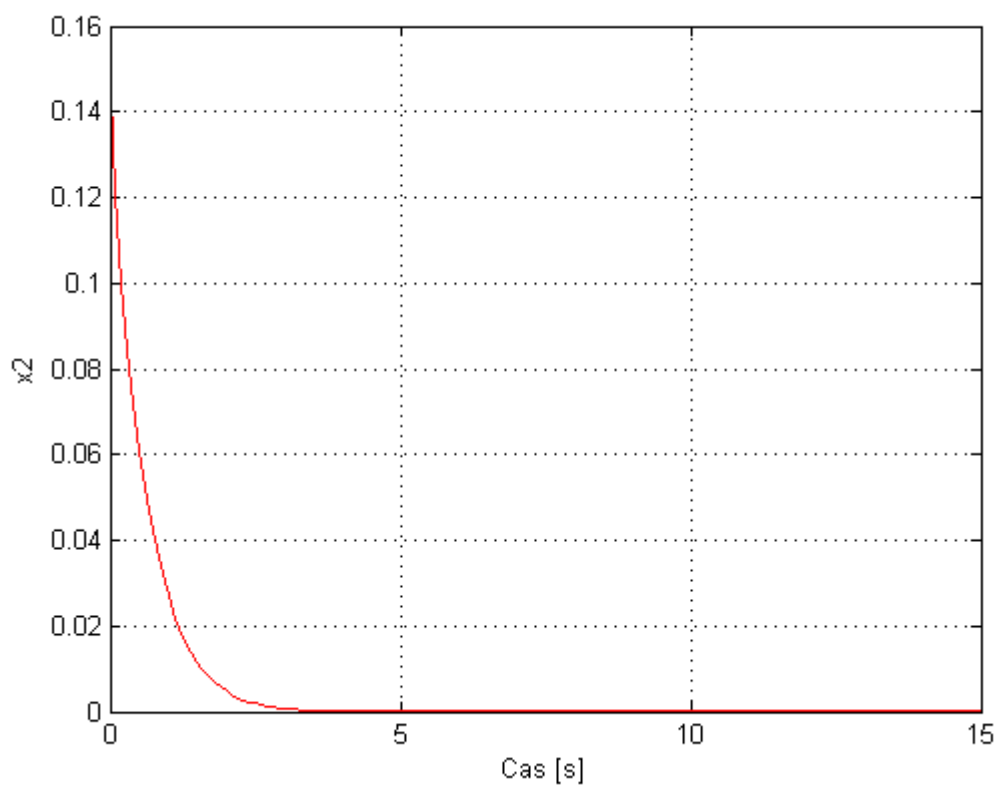
Zákon riadenia sa vypočíta obdobne ako pri agregácii opísanej vyššie a je nasledovný

$$\mathbf{u}(t) = 2.5029\mathbf{x}_1(t) + 0.9897\mathbf{x}_2(t) + 1.4185\mathbf{x}_3(t)$$

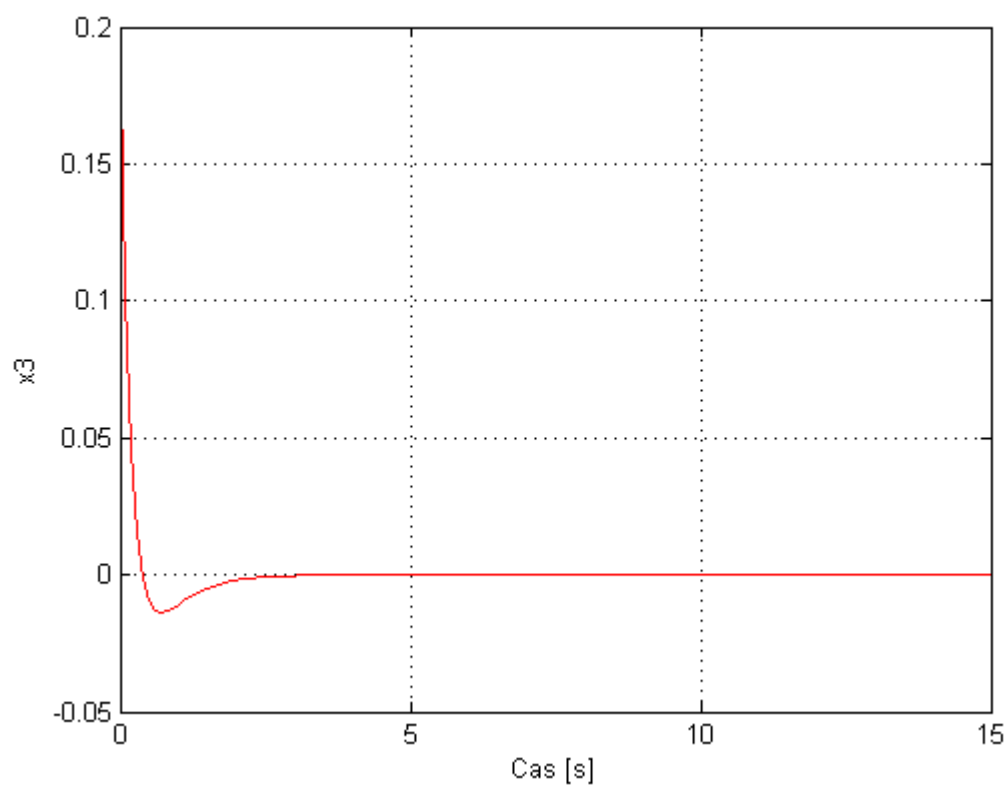
Na Obr. 5 – Obr. 7 sú znázornené výstupy stabilného systému pri použití modálnej agregácie.



Obr. 5 Výstup stabilného systému x_1 pri použití modálnej agregácie



Obr. 6 Výstup stabilného systému x_2 pri použití modálnej agregácie



Obr. 7 Výstup stabilného systému x_3 pri použití modálnej agregácie

2.1.3. Vyvážená realizácia

Pre transformovaný stabilný systém na prenosovú funkciu bola najskôr vypočítaná vyvážená realizácia pomocou príkazu v prostredí MATLAB z rovnice 1.25

$$[Gsa, G1, T, Ti] = \text{balreal}(Gs)$$

kde

$$G(s) = \frac{2s + 6}{s^3 + 9s^2 + 21s + 8}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1.0763 & -0.6331 & -0.3283 \\ 1.0802 & 0.1647 & -0.0197 \\ 0.0922 & -0.0370 & 0.0041 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0027 & 0.6659 & 3.0114 \\ -0.2802 & 1.1728 & -17.0087 \\ -2.4965 & -4.4444 & 22.9242 \end{bmatrix}$$

pomocou ktorej bola navrhnutá agregáčna matica L z rovnice 1.36, t.z., že matica L je prvý riadok matice T^{-1}

$$L = [0.5474 \quad -0.2318 \quad -0.8041]$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matic F a G

$$F = -3.9572$$

$$G = 3.0114$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -3.9572\mathbf{z}(t) + 3.0114\mathbf{u}(t)$$

Potom transformovaný systém v stavovom priestore bude z rovnice 1.23

$$AA = \begin{bmatrix} 1.8625 & 5.2700 & -30.6387 \\ -5.7489 & -10.6198 & 35.2357 \\ -0.4763 & -0.6514 & -0.2427 \end{bmatrix}$$

$$BB = \begin{bmatrix} -0.3283 \\ -0.0197 \\ 0.0041 \end{bmatrix}$$

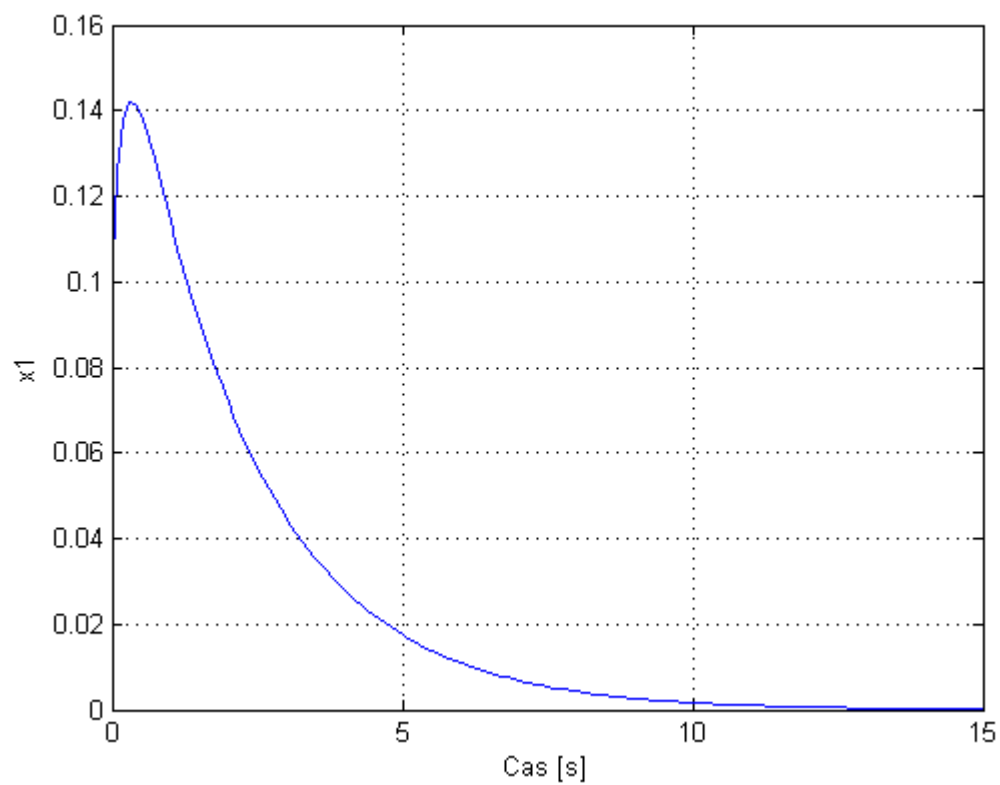
$$CC = [-0.0027 \quad 0.6659 \quad 3.0114]$$

Modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

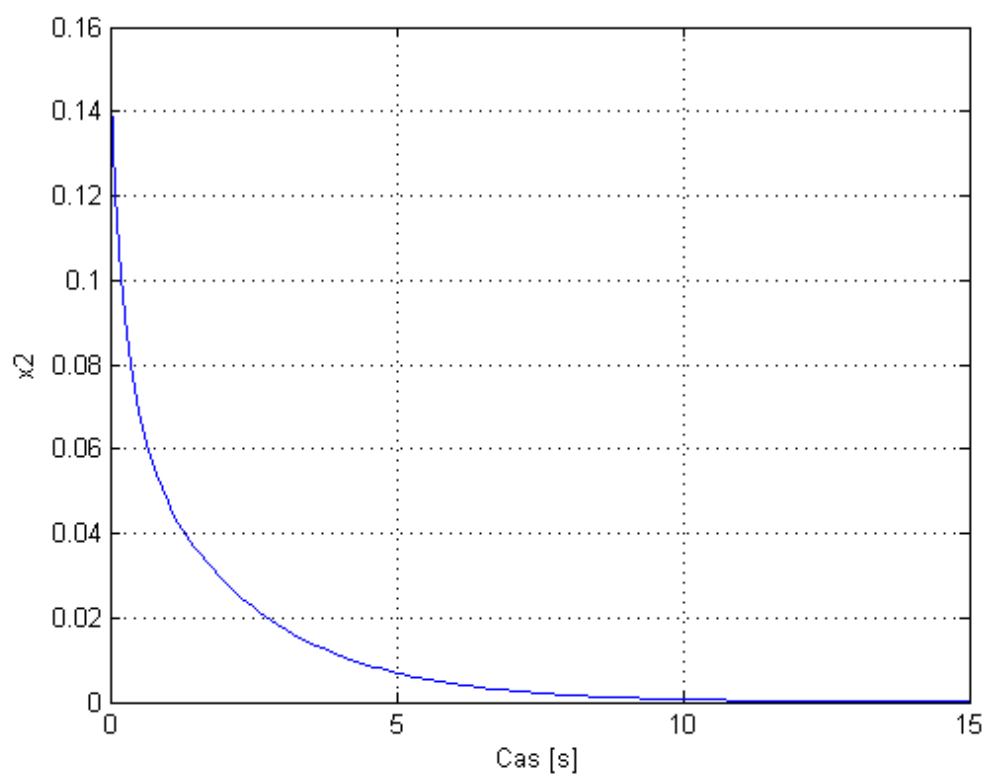
$$Q_r = 1$$

a nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

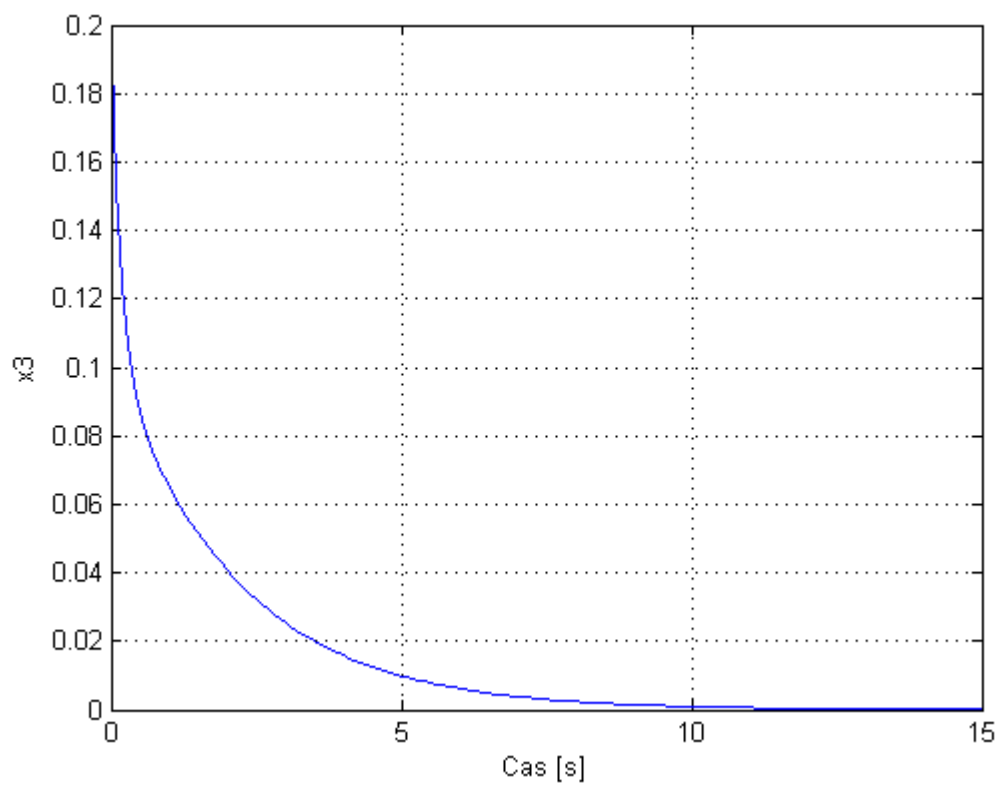
$$\mathbf{u}(t) = 0.0075x_1(t) - 1.8206x_2(t) - 8.2332x_3(t)$$



Obr. 8 Výstup stabilného systému x_1 pri použití metódy vyváženej realizácie



Obr. 9 Výstup stabilného systému x_2 pri použití metódy vyváženej realizácie



Obr. 10 Výstup stabilného systému x_3 pri použití metódy vyváženej realizácie

2.1.4. Redukcia modelu

Vyvážená realizácia pôvodného stabilného systému je

$$A1 = \begin{bmatrix} -0.3625 & -0.7759 & 0.06206 \\ 0.7759 & -5.874 & 1.019 \\ 0.06206 & -1.019 & -2.764 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} -0.5382 \\ 0.5401 \\ 0.04611 \end{bmatrix}$$

$$C1 = [-0.5382 \quad -0.5401 \quad 0.04611]$$

$$D1 = [0]$$

Z takto získanej vyváženej realizácie bol systém zredukovaný na druhý rád pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$Gs2 = \text{modred}(Gsa, [3])$$

$$A2 = \begin{bmatrix} -0.3611 & -0.7988 \\ 0.7988 & -6.249 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} -0.5371 \\ 0.5571 \end{bmatrix}$$

$$C2 = [-0.5371 \quad -0.5571]$$

$$D2 = [0.0007693]$$

Z tohto stavového opisu bola vypočítaná prenosová funkcia v tvare

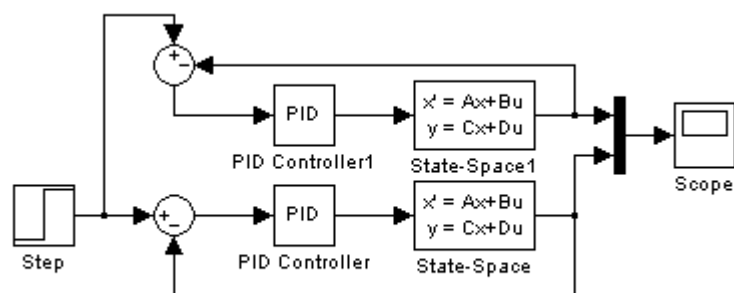
$$G2(s) = \frac{-0.0168s + 2.171}{s^2 + 6.61s + 2.895}$$

a metódou umiestnenia pólov bol navrhnutý regulátor s parametrami

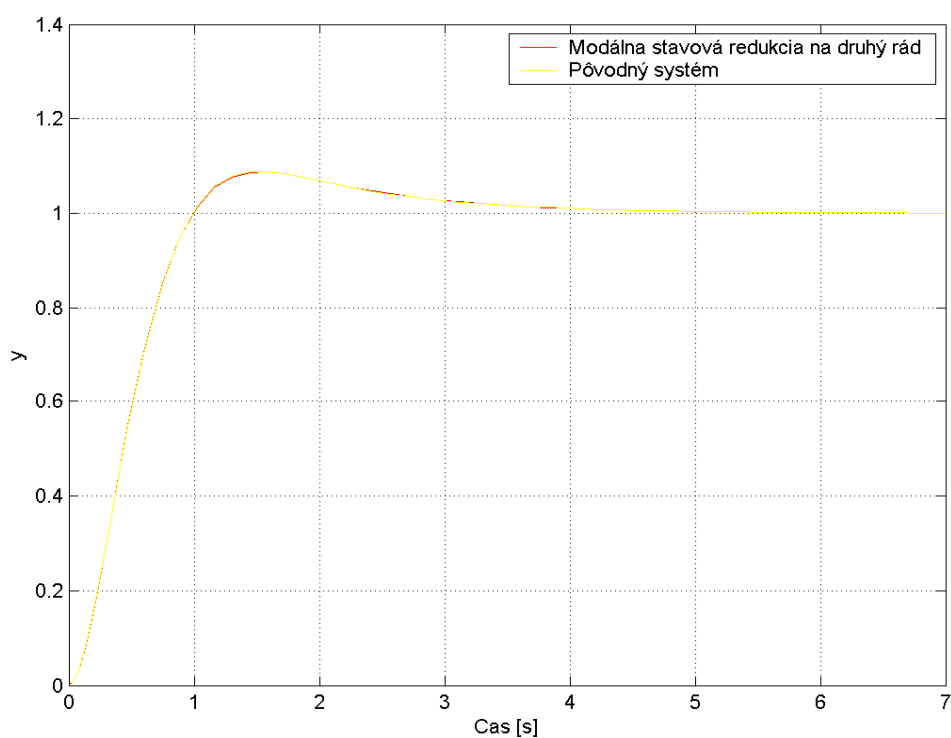
$$Zr = 5.6667$$

$$Ti = 1.3333$$

Schéma riadenia pôvodného systému a agregovaného modelu s použitím PI regulátora je na Obr. 11. Žiadaná hodnota bola nastavená na 1. Na Obr. 12 je zobrazené riadenie redukovaného systému na druhý rád použitím PI regulátora.



Obr. 11 Schéma riadenia pôvodného a agregovaného modelu pomocou PI regulátora



Obr. 12 Riadenie redukovaného systému na druhý rád PI regulátorom

Pre redukciu systému na prvý rád bol použitý príkaz v prostredí MATLAB

```
Gs2 = modred(Gsa, [2, 3])
```

kde stavový opis systém potom bude

$$A3 = [-0.4632]$$

$$B3 = [-0.6083]$$

$$C3 = [-0.6083]$$

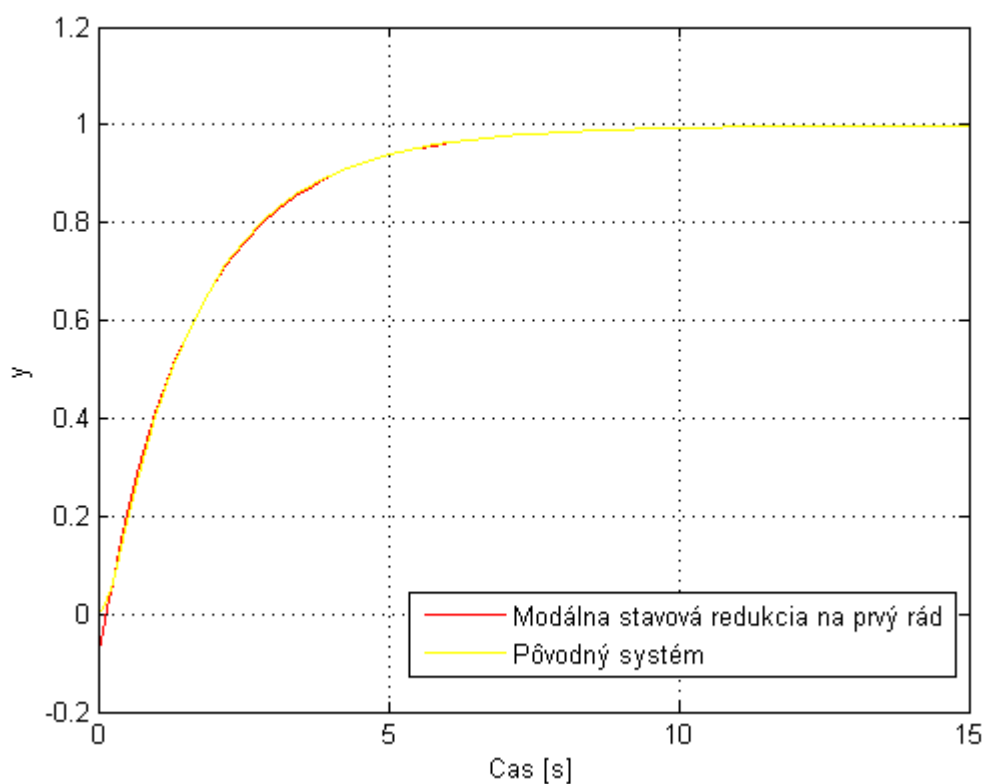
$$D3 = [-0.0489]$$

Pre tento zredukovaný systém bol navrhnutý PI regulátor s parametrami

$$Z_r = 1.6465$$

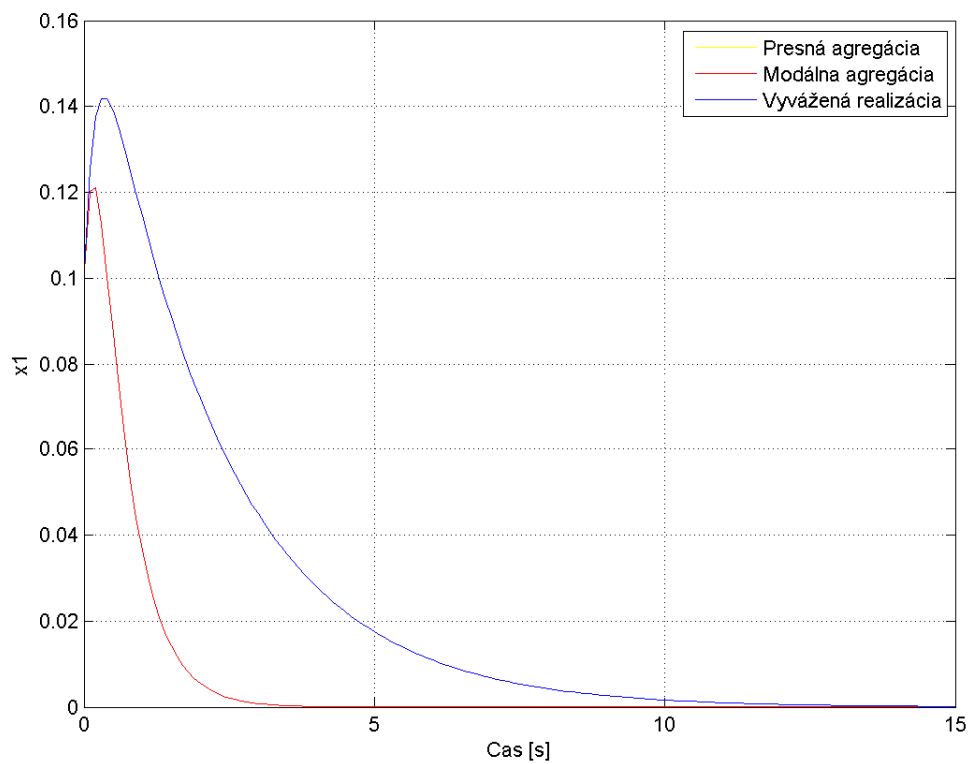
$$T_i = 2.2881$$

Na Obr. 13 je zobrazené riadenie redukovaného systému na prvý rád použitím PI regulátora. Žiadaná hodnota bola nastavená na 1

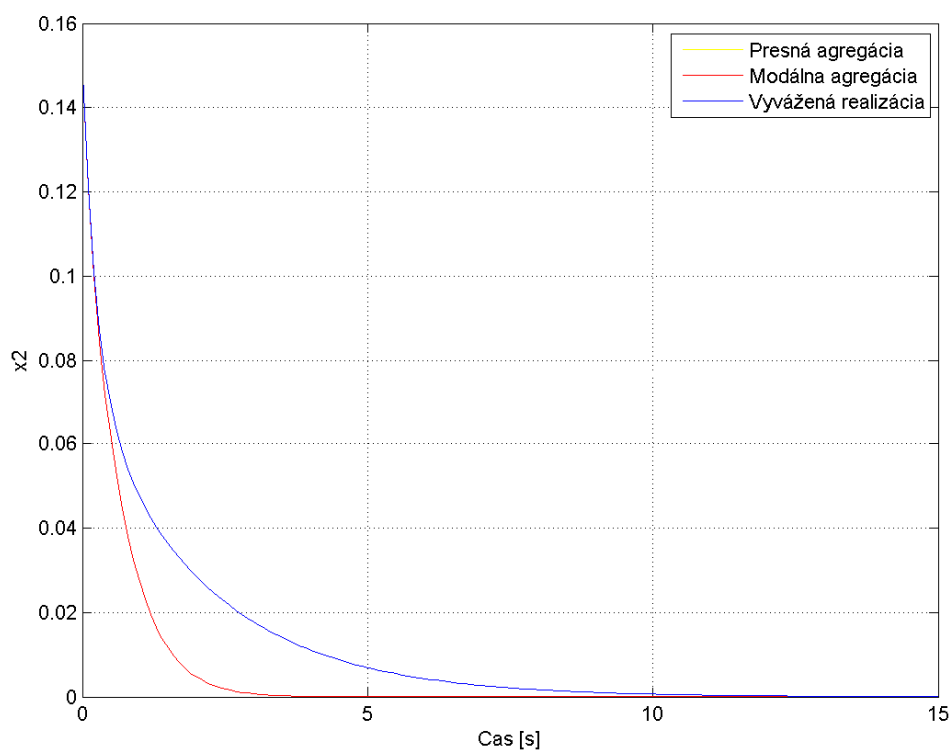


Obr. 13 Riadenie redukovaného systému na prvý rád PI regulátorom

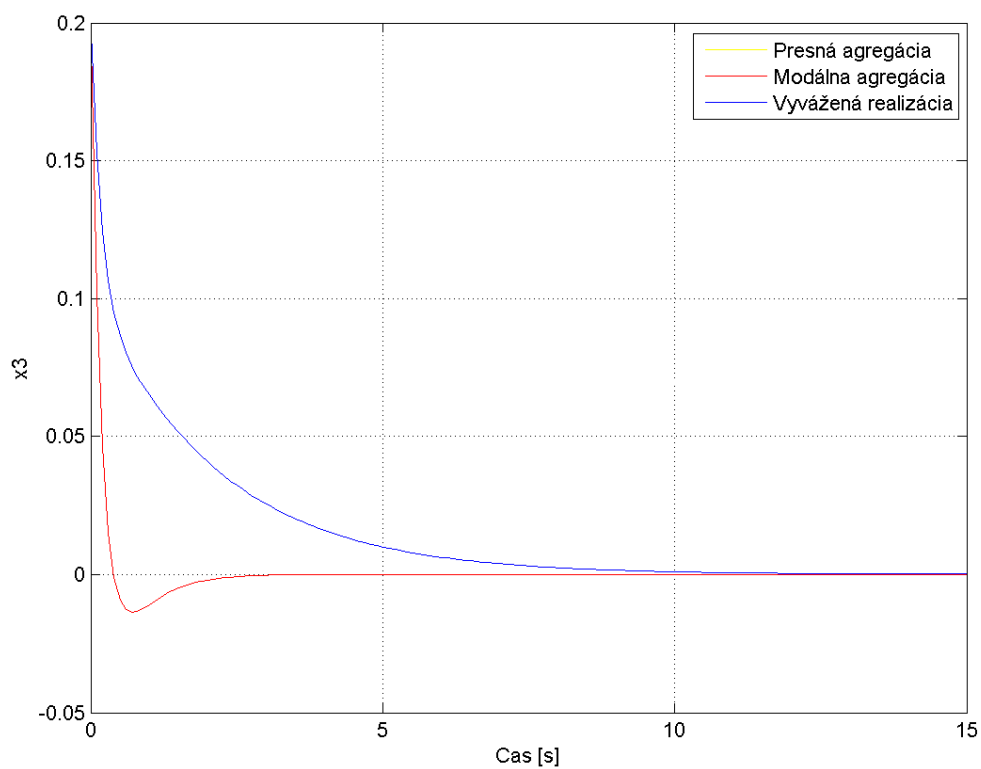
Na Obr. 14 - Obr. 16 sú znázornené výstupy stabilného systému pre presnú agregáciu, modálnu agregáciu a vyváženú realizáciu. Pri porovnaní priebehov vidieť, že vyvážená realizácia a presná agregácia sa úplne zhodujú. Systém použitím modálnej agregácie sa rýchlejšie ustáli na žiadanej hodnote oproti zvyšným dvom metódam. Žiadaná hodnota bola v tomto prípade rovná nule,



Obr. 14 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_1



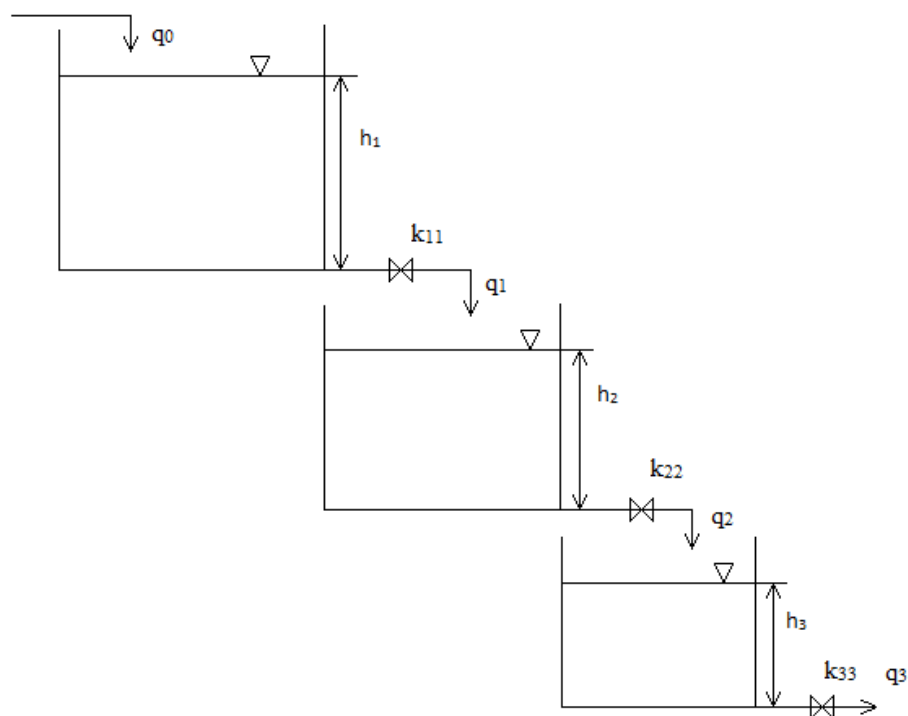
Obr. 15 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_2



Obr. 16 Porovnanie agregačných techník aplikovaných na stabilný systém na výstupe x_3

2.2. Zásobníky kvapaliny

Nech je systém troch zásobníkov kvapaliny zapojených do série bez interakcie podľa Obr. 17, kde prvý zásobník je zásobovaný vstupným prúdom q_0 .



Obr. 17 Schéma troch zásobníkov

Z matematického hľadiska zásobníky predstavujú nelineárny model, ktorý sa dá opísať bilančnými rovnicami:

$$q_0 = k_{11}\sqrt{h_1} + F_1 \frac{dh_1}{dt}$$

$$k_{11}\sqrt{h_1} = k_{22}\sqrt{h_2} + F_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$k_{22}\sqrt{h_2} = k_{33}\sqrt{h_3} + F_3 \frac{dh_3}{dt}$$

$$h_1(0) = h_1^s$$

$$h_2(0) = h_2^s$$

$$h_3(0) = h_3^s$$

Tabuľka 1 Konštanty zásobníkov kvapaliny

$F_1 \text{ [m}^2\text{]}$	$F_2 \text{ [m}^2\text{]}$	$F_3 \text{ [m}^2\text{]}$	$k_{11}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$	$k_{22}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$	$k_{33}[\text{m}^{2.5}\text{s}^{-1}]$	$q_0^s [\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$
9	8.28	6	1.25	1.25	1.25	1

V ustálenom stave platí

$$q_0^s = k_{11}\sqrt{h_1^s}$$

$$k_{11}\sqrt{h_1^s} = k_{22}\sqrt{h_2^s}$$

$$k_{22}\sqrt{h_2^s} = k_{33}\sqrt{h_3^s}$$

kde s predstavuje ustálený stav.

Výšky hladín v zásobníkoch potom sú

$$h_1^s = \left(\frac{q_0^s}{k_{11}} \right)^2 = 0.64m$$

$$h_2^s = \left(\frac{q_0^s}{k_{22}} \right)^2 = 0.64m$$

$$h_3^s = \left(\frac{q_0^s}{k_{33}} \right)^2 = 0.64m$$

Matice systému sú

$$A = \begin{bmatrix} -0.0868 & 0 & 0 \\ 0.0944 & -0.0944 & 0 \\ 0 & 0.7813 & -0.7813 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1111 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vlastné čísla matice A

vlastné čísla [-0.7813 -0.0944 -0.0868]

2.2.1. Presná agregácia

Transformačná matica

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0531 \\ 0 & 0.6603 & 0.6634 \\ 1 & 0.7510 & 0.7464 \end{bmatrix}$$

z čoho bola vypočítaná hodnota inverznej matice T^{-1}

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1545 & -1.1374 & 1 \\ -18.9308 & 1.5145 & 0 \\ 18.8415 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ktorá bola ďalej použitá pri hľadaní agregáčnej matice L z rovnice 1.36

$$L = \begin{bmatrix} 0.1545 & -1.1374 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc F a G

$$F = -0.7813$$

$$G = 0.0172$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -0.7813\mathbf{z}(t) + 0.0172\mathbf{u}(t)$$

potom modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

$$Q_r = 1$$

A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

$$\mathbf{u}(t) = 3.9522x_1(t) - 29.0881x_2(t) + 25.5751x_3(t)$$

2.2.2. Modálna agregácia

Pre porovnanie agregáčnych metód bol vypočítaný zákon riadenia aj použitím modálnej agregácie

Jordanova matica s vlastnými číslami matice A obsiahnutými na diagonále

$$J_A = \begin{bmatrix} -0.0868 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0944 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7813 \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici A je

$$M_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12.5000 & -12.5000 & 0 \\ 14.0625 & -14.2170 & 0.1545 \end{bmatrix}$$

potom agregáčná matica je z rovnice 1.10

$$L = [1 \ 0 \ 0]$$

kde M_R je rozmerov redukovaného systému $l \times l$ a $P = [I_{l \times l} \ 0_{l \times (n-l)}]$.

Matice redukovaného systému z rovníc 1.11 a 1.12 sú

$$A_r = -0.0868$$

$$B_r = 0.1111$$

Zákon riadenia sa vypočíta obdobne ako pri agregácii opísanej vyššie a je nasledovný

$$u(t) = 16.6180x_1(t)$$

2.2.3. Vyvážená realizácia

Pre transformovaný systém bola najskôr vypočítaná vyvážená realizácia pomocou príkazu z rovnice 1.25

$$[G_s, G_1, T, Ti] = \text{balreal}(G_s)$$

kde

$$G(s) = \frac{0.1111s^2 + 0.0973s + 0.0082}{s^3 + 0.9624s^2 + 0.1497s + 0.0064}$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.6667 & -0.2919 & -0.0984 \\ 0.0052 & 0.0011 & -0.0005 \\ 0.0037 & -0.0004 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.0528 & 0.1809 \\ -0.0017 & 0.2281 & -0.6153 \\ -0.0048 & -1.0344 & 0.5994 \end{bmatrix} * 1.0e+003$$

ktorá bola ďalej použitá pri hľadaní agregačnej matice L z rovnice 1.36

$$L = \begin{bmatrix} 0.1545 & -1.1374 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc F a G

$$F = -0.5845$$

$$G = -0.0003$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -0.7813\mathbf{z}(t) + 0.0172\mathbf{u}(t)$$

Potom transformovaný systém bude z rovnice 1.23

$$AA = \begin{bmatrix} -0.2872 & -89.1665 & 81.9178 \\ -0.0009 & -0.4940 & 0.4347 \\ 0.0002 & 0.0835 & -0.1812 \end{bmatrix}$$

$$BB = \begin{bmatrix} -0.0741 \\ 0.0006 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$$

$$CC = \begin{bmatrix} -0.0027 & 0.6659 & 3.0114 \\ -0.2802 & 1.1728 & -17.0087 \\ -2.4965 & -4.4444 & 22.9242 \end{bmatrix}$$

Modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

$$Q_r = 1$$

a nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

$$\mathbf{u}(t) = 3.9522x_1(t) - 29.0881x_2(t) + 25.5751x_3(t)$$

2.2.4. Redukcia modelu

Vyvážená realizácia pôvodného systému zásobníkov kvapaliny z rovnice 1.25 je

$$A1 = \begin{bmatrix} -0.0867 & -0.001362 & -0.0009712 \\ 0.001362 & -0.1969 & -0.2447 \\ 0.0009712 & -0.2447 & -0.6788 \end{bmatrix}$$

$$B1 = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 0.002619 \\ 0.001867 \end{bmatrix}$$

$$C1 = [-0.3333 \quad -0.002619 \quad -0.001867]$$

$$D1 = [0]$$

Z takto získanej vyváženej realizácie bol systém zredukovaný na druhý rád pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$Gs2 = \text{modred}(Gsa, [3])$$

kde matice redukovaného systému sú

$$A2 = \begin{bmatrix} -0.0867 & -0.001012 \\ 0.001012 & -0.1087 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 0.001946 \end{bmatrix}$$

$$C2 = [-0.3333 \quad -0.001946]$$

$$D2 = [0]$$

Prevodom zo stavového opisu bola získaná prenosová funkcia v tvare

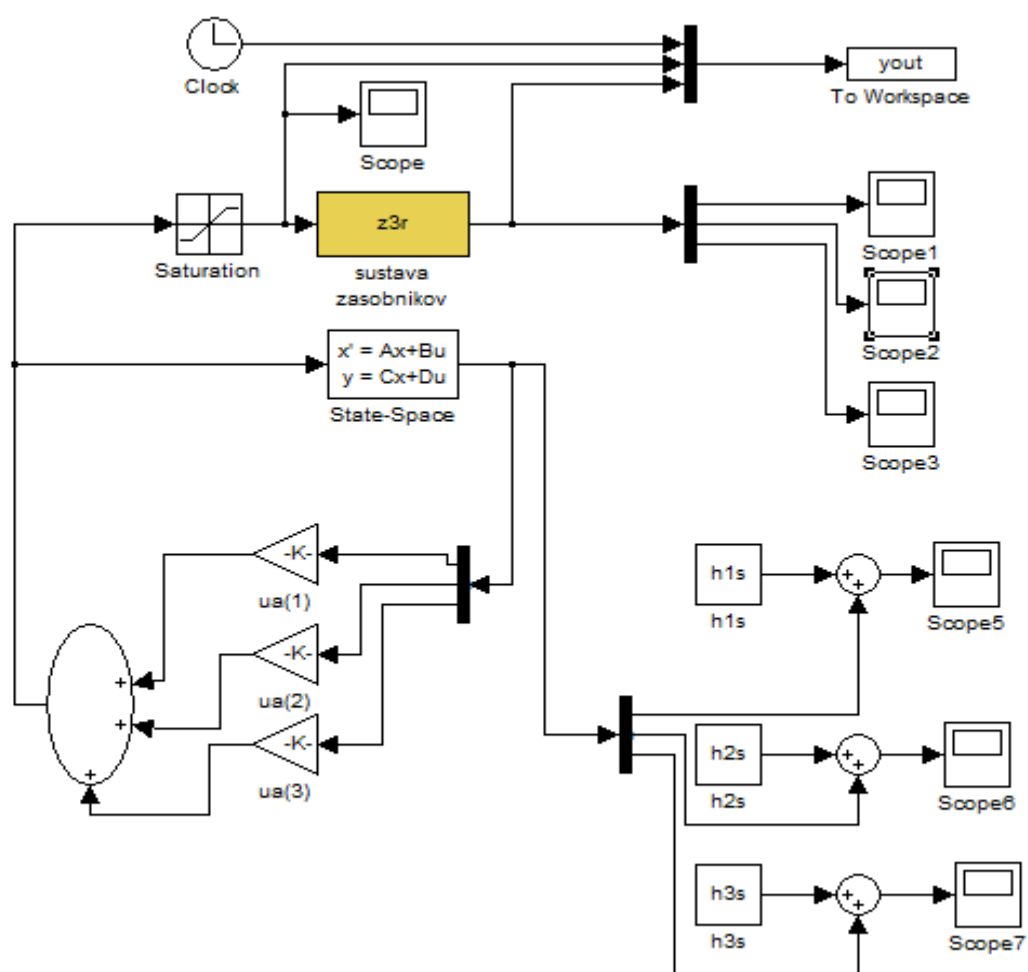
$$G2(s) = \frac{0.1111s + 0.0121}{s^2 + 0.1954s + 0.0094}$$

a metódou umiestnenia pólov bol navrhnutý regulátor s parametrami

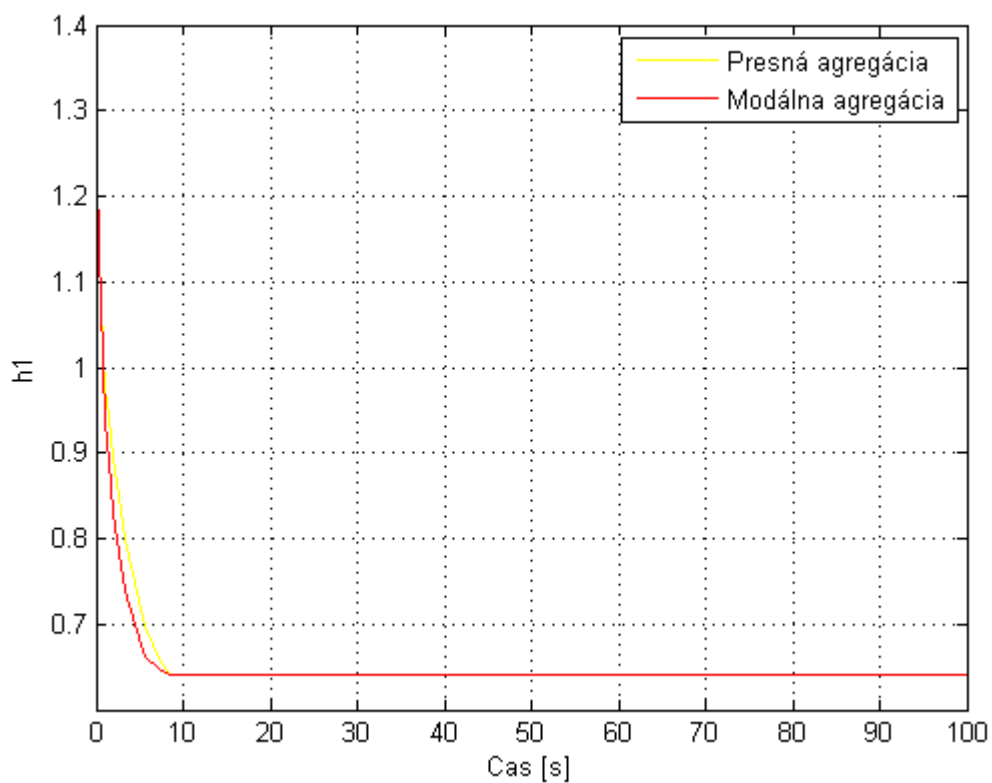
$$Z_r = 38.7453$$

$$T_i = 0.1377$$

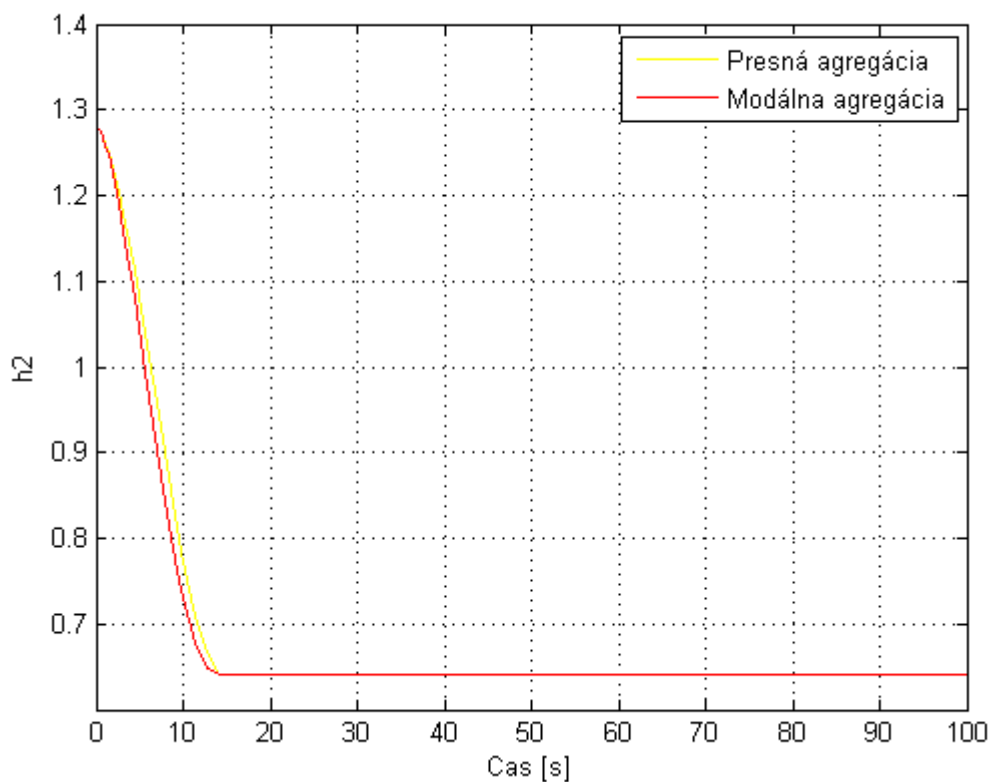
Schéma riadenia zásobníkov kvapaliny je znázornená na Obr. 18, kde na stavový opis pôsobí akčný zásah, ktorý vstupuje do s-funkcie a výstupy zo zásobníkov, čo sú výšky hladín v jednotlivých zásobníkoch sú zobrazené na Obr. 19 – Obr. 21. Z porovnania priebehov presnej agregácie a modálnej agregácie možno povedať, že sú podobné. Vplyvom modálnej agregácie sa však systém ustáli na žiadanej hodnote o niečo rýchlejšie.



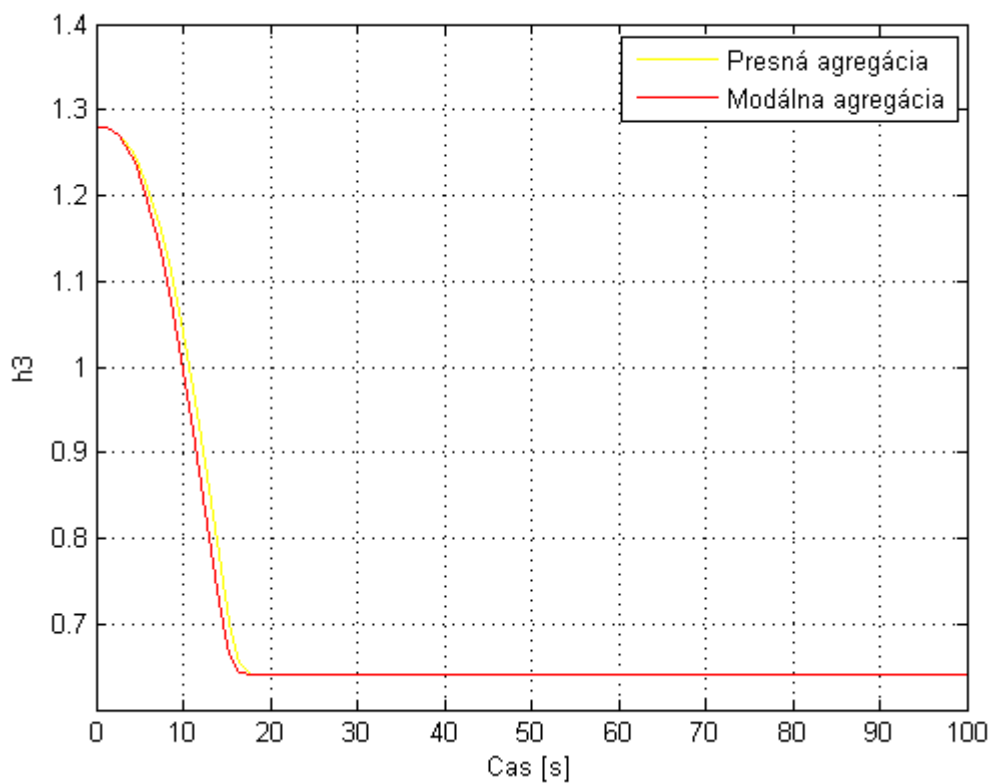
Obr. 18 Schéma riadenia zásobníkov kvapaliny



Obr. 19 Výška hladiny v prvom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník



Obr. 20 Výška hladiny v druhom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník



Obr. 21 Výška hladiny v treťom zásobníku kvapaliny pri porovnaní agregáčnych techník

2.3. Chemický reaktor

Majme nelineárny systém, ako je chemický reaktor

$$\begin{aligned}\frac{dc_A(t)}{dt} &= \frac{q}{V} c_{Av}(t) - \frac{q}{V} c_A(t) + r_A(t) \\ \frac{dc_B(t)}{dt} &= \frac{q}{V} c_{Bv}(t) - \frac{q}{V} c_B(t) - r_A(t) + r_B(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{q}{V} T_v(t) + \frac{Q_r}{V\rho c_p} - \frac{q}{V} T(t) - \frac{Q_c}{c_p\rho} \\ \frac{dT_c(t)}{dt} &= \frac{q_c}{V_c} T_{cv}(t) + \frac{Q_c}{V_c c_{pc} \rho_c} - \frac{q_c}{V_c} T_c(t)\end{aligned}$$

začiatkové podmienky:

$$c_A(0) = c_{A0} = c_A^s$$

$$c_B(0) = c_{B0} = c_B^s$$

$$T(0) = T_0 = T^s$$

$$T_c(0) = T_{c0} = T_c^s$$

kde

$$Q_c = f\alpha(T - T_c)$$

$$Q_r = V(H_1 r_1 + H_2 r_2)$$

$$k_i = k_{0i} \exp\left(-\frac{g_i}{T}\right)$$

$$r_1 = k_1 c_A$$

$$r_2 = k_2 c_B$$

$$r_A = -r_1$$

$$r_B = r_1 - r_2$$

Tabuľka 2. Konštanty chemického reaktora

q [m ³ min ⁻¹]	0.21
q _c [m ³ min ⁻¹]	0.11
V [m ³]	1.2
V _c [m ³]	0.64
ρ [kgm ⁻³]	796
ρ _c [kgm ⁻³]	998
c _p [kJkg ⁻¹ K ⁻¹]	3.94
c _{pc} [kJkg ⁻¹ K ⁻¹]	4.182
f [m ²]	5.6
α [kJm ⁻² K ⁻¹ min ⁻¹]	41.2
k ₀₁	2.703.10 ⁸
k ₀₂	2.223.10 ²⁷
g ₁ [K]	6896
g ₂ [K]	23453
H ₁ [kJkmo ⁻¹]	15500
H ₂ [kJkmol ⁻¹]	12000
c _{Av} [kmolm ³]	6.1
c _{Bv} [kmolm ³]	0
T _c [K]	293
T _v [K]	336

$$qc_A^s + k_1^s c_A^s V = qc_{Av}^s$$

$$qc_B^s + k_2^s c_B^s V - 2k_1^s c_A^s V = qc_{Bv}^s$$

$$qT_v^s = qc_B^s + k_2^s c_B^s V - 2k_1^s c_A^s V$$

$$qc_{Bv}^s = qc_B^s + k_2^s c_B^s V - 2k_1^s c_A^s V$$

sa vyznačuje maticou systému a riadiacou maticou

$$A = \begin{bmatrix} -0.8577 & 0 & -0.0483 & 0 \\ 0.6827 & -0.1622 & 0.0371 & 0 \\ 3.3739 & 0.0491 & 0.0453 & 0.0613 \\ 0 & 0 & 0.0864 & -0.2583 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -28.9303 \end{bmatrix}$$

Vlastné čísla matice A

vlastné čísla $[-0.6054 \quad -0.3299 \quad -0.1488 + 0.0166i \quad -0.1488 - 0.0166i]$

2.3.1. Presná agregácia

Transformačná matica T je

$$T = \begin{bmatrix} -0.1790 & -0.0580 & 0.0506 - 0.0012i & 0.0506 + 0.0012i \\ 0.1975 & 0.0960 & 0.1760 - 0.2788i & 0.1760 + 0.2788i \\ 0.9353 & 0.6344 & -0.7434 & -0.7434 \\ -0.2327 & -0.7649 & -0.5732 + 0.0870i & -0.5732 - 0.0870i \end{bmatrix}$$

hodnota inverznej matice T^{-1}

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -9.4327 & 0.0799 & -0.7215 & 0.1274 \\ 6.5962 & -0.3211 & 1.0968 & -0.9386 \\ -3.1197 + 4.1743i & -0.0867 + 1.8751i & -0.6585 + 0.4823i & -0.3203 + 0.3187i \\ -3.1197 - 4.1743i & -0.0867 - 1.8751i & -0.6585 - 0.4823i & -0.3203 - 0.3187i \end{bmatrix}$$

pomocou ktorej bola navrhnutá agregáčnā matica L z rovnice 1.36

$$L = [-9.4327 \quad 0.0799 \quad -0.7215 \quad 0.1274]$$

Pomocou rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matic F a G

$$F = -0.6054$$

$$G = -3.6860$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -0.6054\mathbf{z}(t) - 3.6860\mathbf{u}(t)$$

potom modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

$$Q_r = 1$$

A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

$$\mathbf{u}(t) = 14.4250x_1(t) - 0.1222x_2(t) + 1.1033x_3(t) - 0.1948x_4(t)$$

2.3.2. Modálna agregácia

Jordanova matica s vlastnými číslami matice A obsiahnutými na diagonále bola navrhnutá pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$[Ma, Ja] = \text{jordan}(A)$$

$$J_A = \begin{bmatrix} -0.6054 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3299 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1488 + 0.0166i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1488 - 0.0166i \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici A z rovnice 1.9 je

$$M_A = \begin{bmatrix} -0.1790 & -0.0580 & 0.0506 - 0.0012i & 0.0506 + 0.0012i \\ 0.1975 & 0.0960 & 0.1760 - 0.2788i & 0.1760 + 0.2788i \\ 0.9353 & 0.6344 & -0.7434 & -0.7434 \\ -0.2327 & -0.7649 & -0.5732 + 0.0870i & -0.5732 - 0.0870i \end{bmatrix}$$

potom agregáčnā matica z rovnice 1.10 je

$$L = [1.6887 \quad -0.0143 \quad 0.1292 \quad -0.0228]$$

kde M_R je rozmerov redukovaného systému $l \times l$ a $P = [I_{xl} \quad 0_{l \times (n-l)}]$.

Matice redukovaného systému z rovníc 1.11 a 1.12 sú

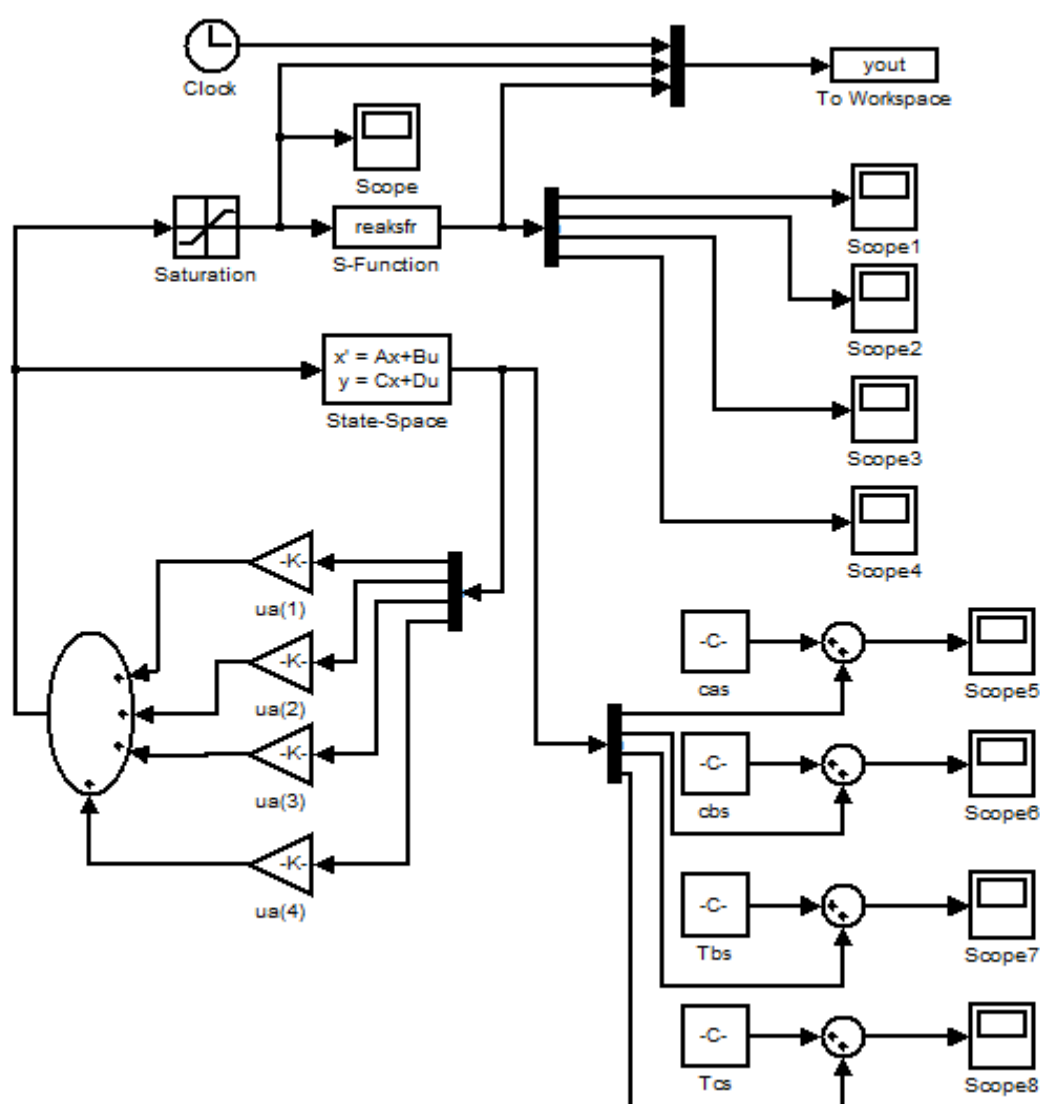
$$A_r = -0.6054$$

$$B_r = 0.6599$$

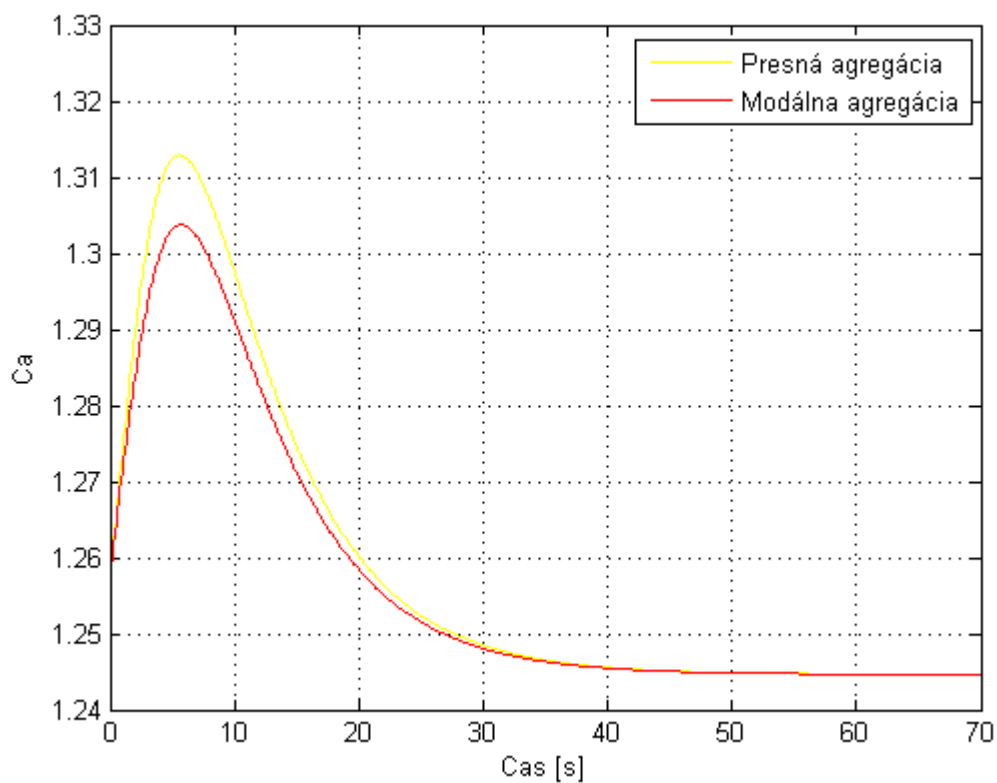
Zákon riadenia sa vypočíta obdobne ako pri agregácii opísanej vyššie a je nasledovný

$$\mathbf{u}(t) = 3.7877x_1(t) - 0.0321x_2(t) + 0.2897x_3(t) - 0.0512x_4(t)$$

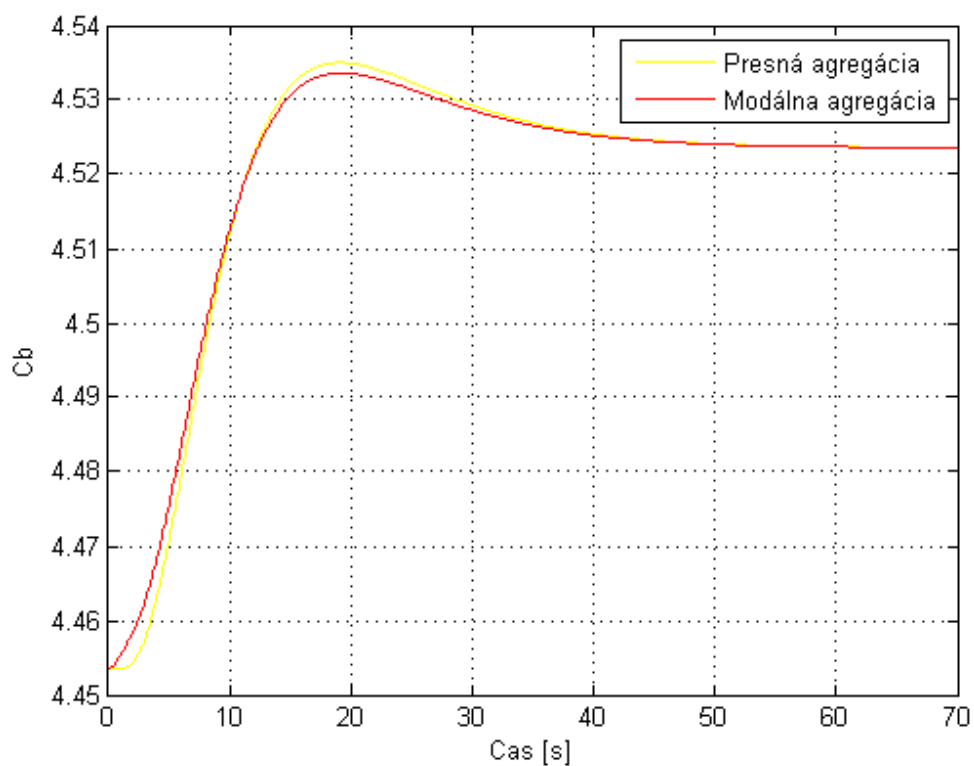
Schéma riadenia chemického reaktora je znázornená na Obr. 22, kde na stavový opis pôsobí akčný zásah, ktorý vstupuje do s-funkcie a výstupy z reaktora, v tomto prípade koncentrácie zložiek A a B a teploty reakčnej zmesi a chladiaceho média, sú zobrazené na Obr. 23 – Obr. 25. Z porovnania priebehov presnej agregácie a modálnej agregácie možno tak isto ako pri zásobníkoch povedať, že sú podobné. Vplyvom modálnej agregácie sa systém ustáli na žiadanej hodnote o niečo rýchlejšie.



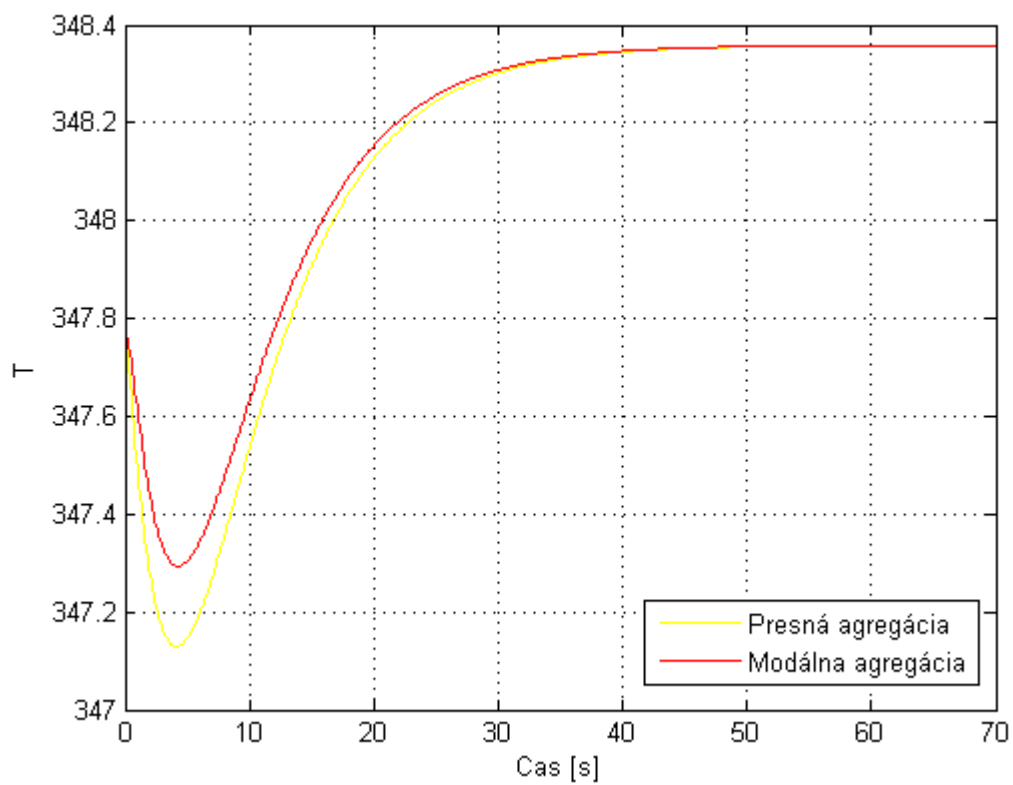
Obr. 22 Schéma riadenia chemického reaktora



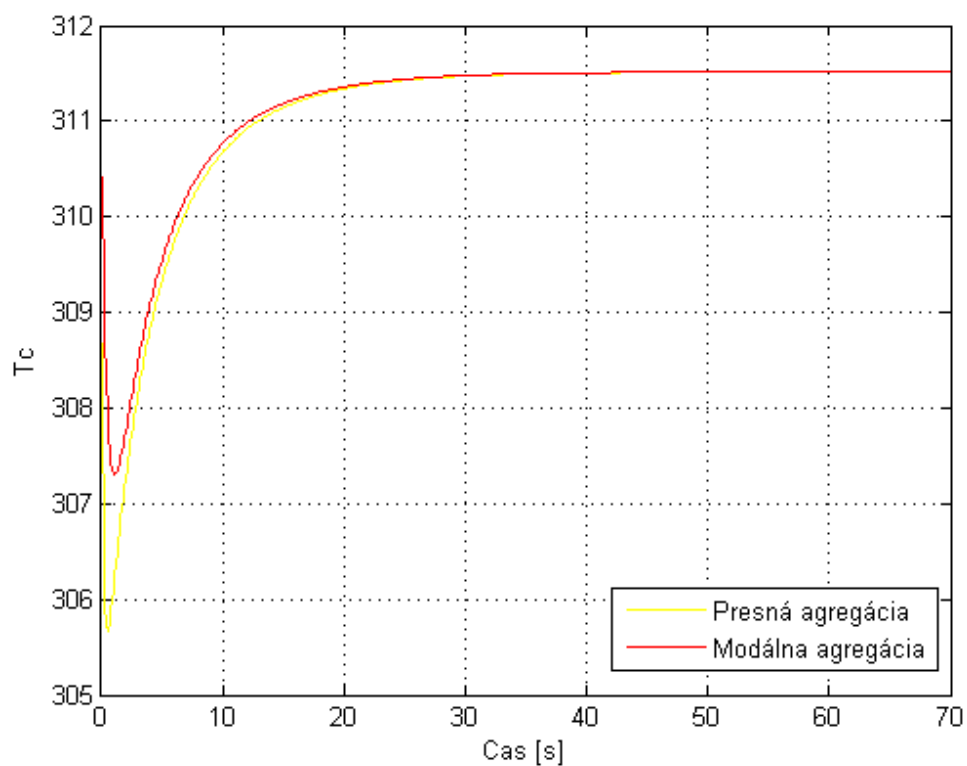
Obr. 23 Pribeh koncentrácie zložky A pri porovnaní agregáčnych techník



Obr. 24 Pribeh koncentrácie zložky B pri porovnaní agregáčnych techník



Obr. 25 Pribeh teploty reakčnej zmesi pri porovnaní agregáčnych techník



Obr. 26 Pribeh teploty chladiaceho média pri porovnaní agregáčnych techník

2.4. Nestabilný systém

Na nasledujúcom nestabilnom systéme boli informatívne aplikované agregáčné techniky ako agregácia modelu a modálna agregácia.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

s kvadratickou účelovou funkciou

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a

$$R = [1]$$

Úlohou je navrhnúť agregovaný model a spätnoväzbové riadenie, ktoré posúva všetky vlastné hodnoty systému do určitej stabilnej oblasti v komplexnej rovine.

2.4.1. Presná agregácia

Najprv boli vypočítané vlastné čísla matice A , ktoré musia byť obsiahnuté aj v agregovanej matici F

vlastné čísla [- 4.6603 - 3.1045 2.7648]

Z vlastných čísel matice A , je zrejmé, že systém je nestabilný. Následne bola vypočítaná transformačná matica T pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$[T, D] = \text{eig}(A)$$

kde D je matica s vlastnými číslami matice na diagonále

$$T = \begin{bmatrix} 0.3081 & 0.1012 & -0.9460 \\ -0.1855 & -0.9688 & -0.1641 \\ -0.9331 & 0.2261 & -0.2797 \end{bmatrix}$$

hodnota inverznej matice T^{-1}

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3081 & -0.1855 & -0.9331 \\ 0.1012 & -0.9688 & 0.2261 \\ -0.9460 & -0.1641 & -0.2797 \end{bmatrix}$$

pomocou ktorej bola navrhnutá agregačná matica L z rovnice 1.36

$$L = [0.3081 \quad -0.1855 \quad -0.9331]$$

Z rovníc 1.4 - 1.7 boli vypočítané hodnoty redukovaných matíc F a G

$$F = -4.6603$$

$$G = -0.9331$$

teda dynamický model je

$$\mathbf{z}'(t) = -4.6603\mathbf{z}(t) - 0.9331\mathbf{u}(t)$$

potom modifikovaný tvar váhovej matice Q_r z rovnice 1.33

$$Q_r = 1$$

Riccatiho rovnica tohto agregovaného modelu, ktorá je popísaná rovnicou 1.40 je

$$-0.8707 K_a - 7.3206 K_a^2 + 3.0000 = 0$$

a výsledok Riccatiho rovnice podľa rovnice 1.39 je

$$K_a = 8.2108$$

A nakoniec zákon riadenia z rovnice 1.31 je

$$\mathbf{u}(t) = 2.5294x_1(t) - 1.5235x_2(t) - 7.6615x_3(t)$$

2.4.2. Modálna agregácia

Jordanova matica s vlastnými číslami matice A obsiahnutými na diagonále bola navrhnutá pomocou príkazu v prostredí MATLAB

$$[M_A, J_A] = \text{jordan}(A)$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 2.7648 & 0 & 0 \\ 0 & -4.6603 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1045 \end{bmatrix}$$

a modálna matica k matici A z rovnice 1.9 je

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.8949 & 0.0949 & 0.0102 \\ 0.1552 & -0.0572 & -0.0981 \\ 0.2646 & -0.2874 & 0.0229 \end{bmatrix}$$

potom agregáčn  matica z rovnice 1.10 je

$$L = [0.8949 \quad 0.1552 \quad 0.2646]$$

kde M_R je rozmerov redukovaného systému $l \times l$ a $P = [I_{l \times l} \quad 0_{l \times (n-l)}]$.

Matice redukovaného systému z rovníc 1.11 a 1.12 s 

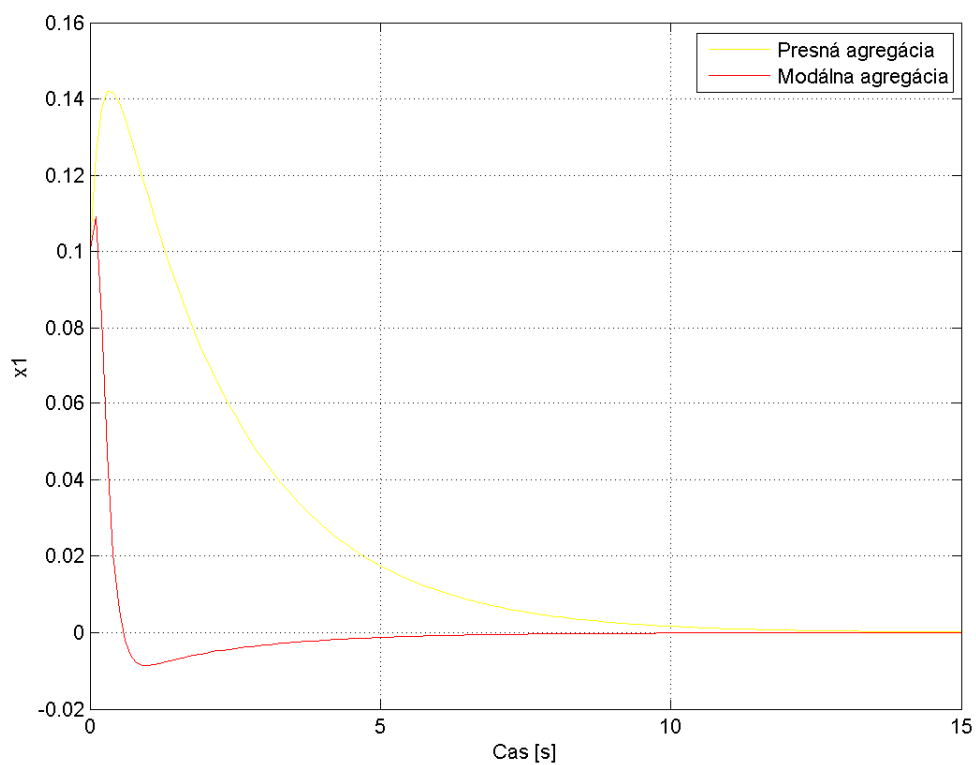
$$A_r = 2.7648$$

$$B_r = 0.2646$$

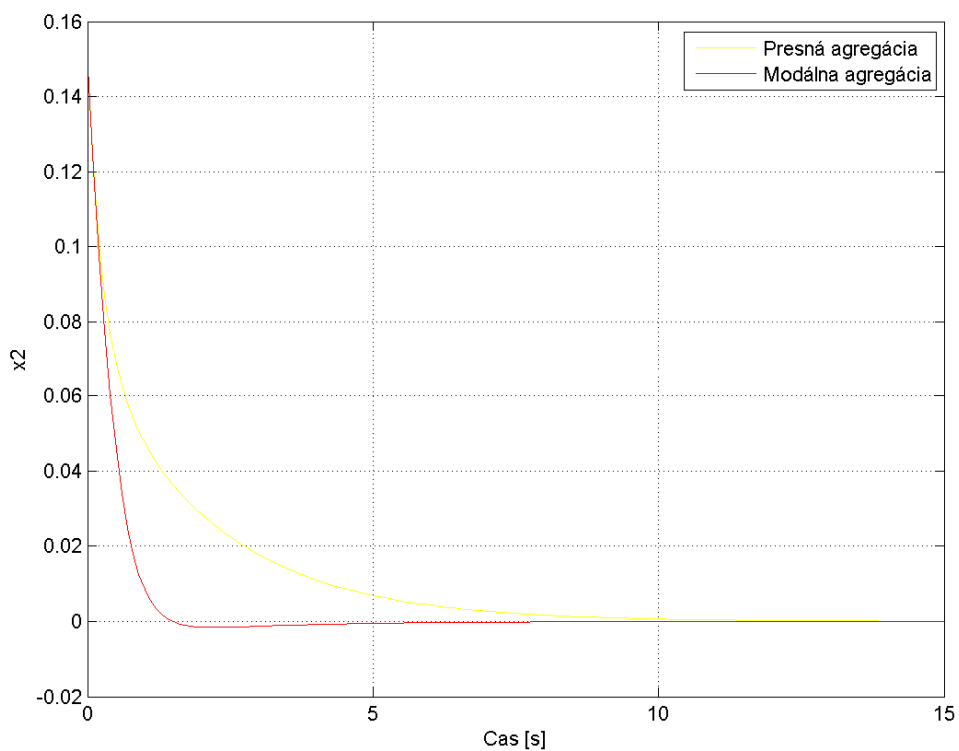
Zákon riadenia sa vypočíta obdobne ako pri agregácii opísanej vy  šie a je nasledovn 

$$\mathbf{u}(t) = 25.5654x_1(t) + 4.4348x_2(t) + 7.5584x_3(t)$$

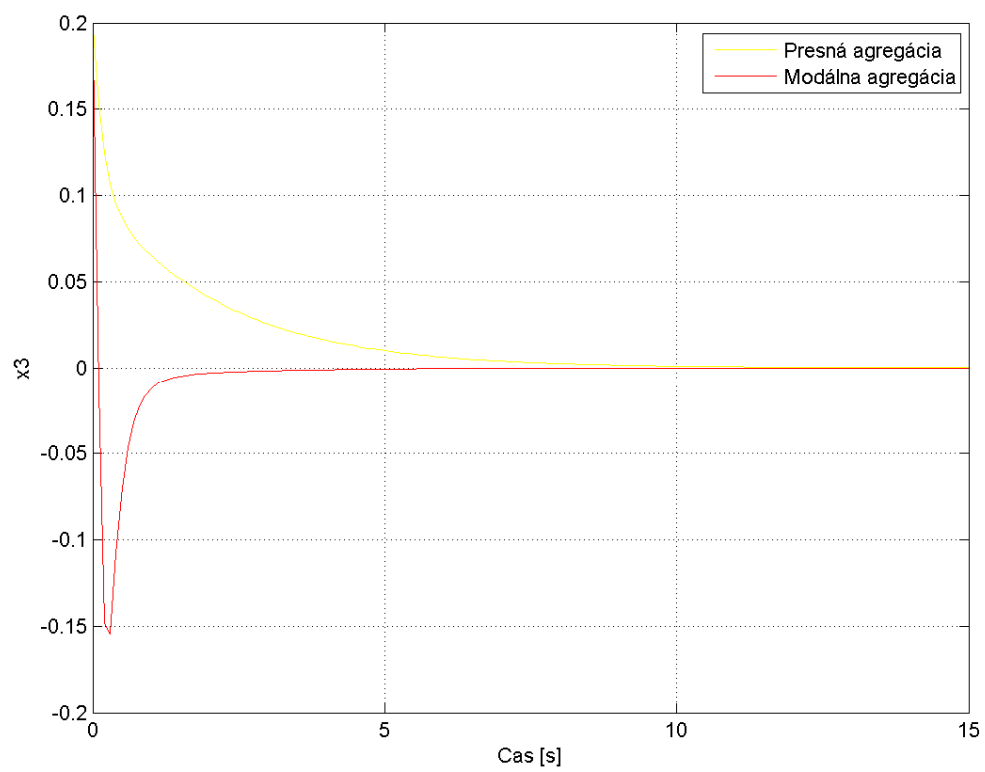
Schéma riadenia nestabilného systému je podobn  schéme riadenia stabilného systému a je zn zornen  na Obr. 1. Výstupy nestabilného systému sú zobrazen  na Obr. 27 – Obr. 29. Z porovnania priebehov presnej agregácie a modálnej agregácie možno tak isto ako pri stabilnom systéme povedať, že vplyvom modálnej agregácie sa systém ustáli na  iadan j hodnote o niečo rýchlejšie.  iadan  hodnota bola v tomto prípade rovn  nule.



Obr. 27 Výstup nestabilného systému x_1 pri porovnaní agregčných techník



Obr. 28 Výstup nestabilného systému x_2 pri porovnaní agregčných techník



Obr. 29 Výstup nestabilného systému x_3 pri porovnaní agregáčnych techník

Záver

Diplomová práca bola zameraná na oboznámenie sa s rôznymi spôsobmi riadenia systémov ako aj ich aplikáciou na konkrétnych prípadoch systémov ako chemický reaktor alebo zásobníky kvapaliny.

Jej cieľom bolo overiť vhodnosť riadenia pôvodného systému použitím odpovedajúceho redukovaného modelu, ktorý bol navrhnutý pomocou rôznych agregáčnych techník. V tejto diplomovej práci boli použité techniky ako presná agregácia, modálna agregácia, metóda vyváženej realizácie a redukcia modelu.

Pri riadení stabilného systému boli aplikované všetky spomenuté metódy a z porovnania priebehov vidieť, že vyvážená realizácia a presná agregácia sa úplne zhodujú. Systém použitím modálnej agregácie sa rýchlejšie ustáli na žiadanej hodnote oproti zvyšným dvom metódam.

Riadenie zásobníkov kvapaliny a chemického reaktora pri použití presnej agregácie a modálnej agregácie bolo veľmi podobné, nakoľko z porovnania priebehov agregáčnych techník možno vidieť, že vplyvom modálnej agregácie sa systém ustáli na žiadanej hodnote o niečo rýchlejšie.

V diplomovej práci bol skúmaný aj nestabilný systém a z dosiahnutých výsledkov sa usudzuje vhodnosť riadenia pôvodného nestabilného systému použitím odpovedajúceho redukovaného modelu. Ako možno vidieť z výsledkov, tieto metódy môžu byť aplikované aj na systémy s viacerými nestabilnými vlastnými hodnotami s použitím redukovaného modelu vyššieho rádu.

Ako najúčinnější metóda zo všetkých sa prejavila metóda modálnej agregácie v dôsledku rýchleho ustálenia na žiadanej hodnote a do ustálených stavov a to pre všetky skúmané systémy.

V budúcnosti by sa mohol ďalší výskum hlbšie venovať metóde modálnej agregácie ako odporúčanému najvhodnejšiemu prostriedku na riadenie pôvodného systému použitím odpovedajúceho redukovaného modelu.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Chmúrny, D. - Dvoran, J. - Karšaiová, M. - Bakošová, M.: Coordination in Hierarchical Control Structure for Linear and Non – linear Large – Scale Chemical – technological Systems. System Analysis, Modeling and Simulation 8, 1991.
- [2] Genesio, R. - Milanese, M. : A Note on Derivation and Use of Reduced Order Models. IEEE Trans. On Automatic Control, 1976.
- [3] Siset, J. - Michailesco, G. - Bertrand, P. : Representation of Linear Dynamical Systems by Aggregated Models. Int. J. Control, 1977.
- [4] Aoki, M. - Control of Large-Scale Dynamical Systems by Aggregation, IEEE Trans. Autom. Control AC-13, 1968.
- [5] Aoki, M. – Aggregation. In: Wismer, D. A. (ed.): Optimisation Methods for Large-Scale Systems (with Application). McGraw Hill, New York 1971.
- [6] Cirlin, A. M. : Optimal'noje upravlenije technologičeskimi processami. Energoatomizdat, Moskva 1986.
- [7] Davison, E. J.: A new Method for Simplifying linear dynamic systems. IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC – 13, 1968.
- [8] Bízik, J. – Mudrončík, D.: Teória veľkých systémov. ES SVŠT, Bratislava 1985.
- [9] Redukcia modelu, Vyvážená realizácia. Dostupné na http://www.kasr.elf.stuba.sk/predmety/rstp/Prednasky/Prednasky_RSTP.pdf, On line 15.5.2010
- [10] Levine, J. - Rouchon, P. : Quality Control Aggregated Distillation Columns Via Nonlinear Aggregated Models. Automatica, 1991.
- [11] Čapkovič, F.: Príspevok ku optimálnemu riadeniu rozsiahlych lineárnych dynamických systémov s využitím metód agregácie. Kandidátska dizertačná práca. ÚTK SAV, Bratislava 1979.
- [12] Jamshidi, M.: An Over view on the Aggregation of Large-Scale Systems. IFAC Congres, Kyoto (Japan) 1981.