

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

# Moderní teorie řízení

Doc. Ing. Vladimír Havlena, CSc.

Prof. Ing. Jan Štecha, CSc.

1999

---

EDIČNÍ STŘEDISKO ČVUT, PRAHA 6, ZIKOVA 4



## Předmluva

Skriptum „Moderní teorie řízení“ je určeno posluchačům stejnojmenného předmětu ve 4. ročníku oboru „Technická kybernetika“. Skriptum je zpracováno podrobněji, než odpovídá odpřednášené látce, takže některé části mohou být užitečné i posluchačům volitelných předmětů „Odhadování a filtrace“ a „Adaptivní systémy“, případně mohou studentům poskytnout jistou orientaci při rozhodování o výběru těchto předmětů.

Pojem „moderní teorie řízení“ vznikl v 60. letech k odlišení přístupu založeném na stavovém popisu systémů od „klasické teorie“, vycházející téměř výhradně z popisu vnějšího. V současné době se oba přístupy (stavový a přenosový) silně prolínají. Charakteristickou vlastností „moderní“ teorie řízení však zůstává využívání **matematických modelů** k popisu řízených procesů. Je-li přesně specifikován model, inženýrskou úlohu návrhu regulátoru lze formulovat jako úlohu optimalizační. Místo přímého nastavování konstant regulátoru tedy inženýr nastavuje parametry kritéria optimality a případná omezení. Tento přístup je výhodný v tom, že některé vlastnosti získaných řešení (např. stabilita při kvadraticky optimálním řízení) jsou zajištěny implicitně. Spoléhání na přesný model s sebou přináší i některé nedostatky moderní teorie řízení, které motivují nové směry výzkumu tzv. **robustních metod**, které dovoluují zahrnout do formulace problému i neurčitost matematického modelu.

Přístup k návrhu regulačních obvodů založený na matematickém modelu též umožňuje rozsáhlé využití prostředků CAD, jako je například MATLAB. Jejich efektivní využívání pro řešení reálných problémů vyžaduje, aby inženýr byl schopen **matematicky formulovat** technický problém a **technicky interpretovat** získané řešení.

Z uvedených důvodů se moderní teorie řízení stává jednou z disciplín aplikované matematiky. Přestože jsou ve skriptu některé závěry formulovány ve formě vět, důraz není kladen na provádění formálních důkazů, ale na pochopení hlavních myšlenek a souvislostí a na získání inženýrského citu, který je nezbytný při aplikaci. Z tohoto důvodu je také zdůrazněna souvislost moderních výsledků s klasickými přístupy, především frekvenčními a metodou geometrického místa kořenů.

Při studiu tohoto skripta se předpokládá znalost základů lineární teorie systémů v rozsahu skripta (Štecha a Havlena, 1993), znalost základních partií lineární algebry, pravděpodobnosti a stochastických procesů. Pro zájemce o hlubší poznání moderní teorie řízení je uveden přehled vhodné literatury k dalšímu studiu.

Nezbytnou podmínkou porozumění a získání inženýrského citu je samostatné experimentování a řešení konkrétních úloh syntézy v laboratořích. Vzhledem k numerické náročnosti většiny postupů je velmi užitečná dobrá znalost MATLABu, s jehož využitím autoři při řešení úloh implicitně počítají.

Významná část tohoto skripta vznikla během pobytu autorů na Dipartimento di Sistemi et Informatica, Università di Firenze, uskutečněného v rámci projektu TEMPUS JEP 0886/92 „Higher Education in Control Engineering“ v srpnu a září 1993.

Autoři by též rádi poděkovali Prof. Ing. Vladimíru Kučerovi, DrSc., a Ing. Miroslavu Kárnému, DrSc., za řadu podnětných připomínek.

# Obsah

<b>I</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Řízení dynamických systémů</b>	<b>3</b>
1.1	Obecné zásady řízení dynamických systémů . . . . .	3
1.2	Zpětnovazební řízení . . . . .	9
1.2.1	Přenosové a frekvenční vlastnosti . . . . .	9
1.2.2	Zpětnovazební řízení při neurčitosti v popisu systému . . . . .	12
1.3	Diskretizace spojitého systému . . . . .	17
1.3.1	Diskretizace vnitřních popisů . . . . .	18
1.3.2	Diskretizace vnějších popisů . . . . .	19
1.3.3	Nesynchronní vzorkování vstupu a výstupu . . . . .	22
1.4	Diskrétní regulační obvod . . . . .	25
1.4.1	Realizovatelný zákon řízení . . . . .	25
1.4.2	Přenosy v regulačním obvodu . . . . .	28
1.4.3	Frekvenční charakteristiky diskrétního regulačního obvodu . . . . .	30
<b>II</b>	<b>Deterministické metody řízení</b>	<b>33</b>
<b>2</b>	<b>Kvadraticky optimální řízení</b>	<b>35</b>
2.1	Formulace problému . . . . .	35
2.2	Dvoubodový okrajový problém . . . . .	37
2.3	Dynamické programování . . . . .	46
2.4	Ustálené řešení Riccatiho rovnice . . . . .	49
2.4.1	Vlastnosti ustáleného řešení Riccatiho rovnice . . . . .	49
2.4.2	Metody výpočtu ustáleného řešení Riccatiho rovnice . . . . .	53
2.5	Frekvenční vlastnosti LQ regulátoru . . . . .	57
2.6	Úloha kvadraticky optimálního sledování . . . . .	61
2.6.1	Kvadraticky optimální servomechanismus . . . . .	61
2.6.2	Kvadraticky optimální programové řízení . . . . .	66
2.6.3	Robustní sledování konstantního referenčního signálu . . . . .	69

<b>3</b>	<b>Algebraické metody řízení I</b>	<b>73</b>
3.1	Jednorozměrové systémy . . . . .	73
3.1.1	Polynomy . . . . .	75
3.1.2	Polynomiální rovnice . . . . .	78
3.1.3	Stabilizující regulátory . . . . .	82
3.1.4	Modální řízení . . . . .	84
3.1.5	Prizpůsobení systému zvolenému modelu . . . . .	86
3.2	Časově optimální diskrétní řízení . . . . .	90
3.2.1	Časově optimální diskrétní ovládání . . . . .	91
3.2.2	Časově optimální diskrétní regulace s odchylkovým regulátorem . . .	93
3.2.3	Časově optimální diskrétní regulace se dvěma stupni volnosti . . . .	95
3.2.4	Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení . . . . .	98
3.3	Kvadraticky optimální diskrétní řízení . . . . .	98
3.3.1	Kvadraticky optimální diskrétní ovládání . . . . .	101
3.3.2	Kvadraticky optimální diskrétní řízení se dvěma stupni volnosti . . .	104
3.4	Sjednocení algebraického přístupu . . . . .	110
3.4.1	Okruhy a tělesa . . . . .	110
3.4.2	Stabilizující regulátory . . . . .	113
3.4.3	Silná stabilizace systému . . . . .	114
3.4.4	Kompenzace poruchy . . . . .	117
3.4.5	Asymptotické sledování žádané hodnoty . . . . .	118
3.4.6	Prizpůsobení systému danému modelu . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Algebraické metody řízení II</b>	<b>123</b>
4.1	Popis mnoharozměrových systémů . . . . .	123
4.1.1	Polynomiální matice . . . . .	124
4.1.2	Maticové polynomiální rovnice . . . . .	128
4.1.3	Maticové zlomky . . . . .	129
4.1.4	Realizace maticových zlomků . . . . .	138
4.2	Řízení mnoharozměrových systémů . . . . .	142
4.2.1	Zpětnovazební řízení . . . . .	142
4.2.2	Modální řízení . . . . .	144
4.2.3	Stabilizující regulátory . . . . .	145
4.2.4	Stabilní nesoudělná faktorizace přenosové matice systému . . . . .	147
4.2.5	Stabilizace . . . . .	150

<b>III</b>	<b>Stochastické systémy a jejich řízení</b>	<b>153</b>
<b>5</b>	<b>Analýza stochastických systémů</b>	<b>155</b>
5.1	Lineární stochastický systém . . . . .	155
5.2	Průchod náhodného signálu systémem . . . . .	158
5.3	Spektrální faktorizace diskrétního náhodného procesu . . . . .	164
5.4	Diskretizace spojitého stochastického systému . . . . .	168
<b>6</b>	<b>Přehled metod odhadování</b>	<b>173</b>
6.1	MS odhad . . . . .	173
6.2	LMS odhad . . . . .	176
6.3	MS a LMS odhad pro normálně rozdělené veličiny . . . . .	178
6.4	Numerické metody . . . . .	180
6.4.1	Podmiňování a integrace . . . . .	180
6.4.2	Určení sdružené hustoty pravděpodobnosti . . . . .	182
6.4.3	Algoritmus dyádové redukce . . . . .	182
6.5	ML odhad . . . . .	183
6.6	Bayesovské metody . . . . .	188
6.6.1	Bayesovský přístup k popisu neurčitosti . . . . .	189
6.6.2	Volba apriorní hustoty pravděpodobnosti . . . . .	193
6.6.3	Odhad parametrů normálního rozdělení $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . . . . .	196
6.6.4	Odhad parametrů lineárního normálního modelu . . . . .	203
<b>7</b>	<b>Filtrace, predikce a interpolace</b>	<b>209</b>
7.1	Rekurzivní odhadování . . . . .	209
7.2	Wienerův filtr . . . . .	214
7.2.1	Formulace problému . . . . .	214
7.2.2	Řešení W-H rovnice pro úlohu interpolace s nekonečným zpožděním . . . . .	216
7.2.3	Řešení W-H rovnice pro úlohu kauzální filtrace . . . . .	218
7.3	Kalmanův filtr . . . . .	223
7.3.1	Formulace problému . . . . .	224
7.3.2	Kalmanův filtr pro nekorelované šумы . . . . .	225
7.3.3	Kalmanův filtr pro korelované šумы . . . . .	227
7.3.4	Stochastické vlastnosti Kalmanova filtru . . . . .	230
7.3.5	Kalmanův filtr pro barevný šum . . . . .	232
7.3.6	Konvergence a stabilita Kalmanova filtru . . . . .	234
7.3.7	Frekvenční vlastnosti Kalmanova filtru . . . . .	240
7.4	Interpolace . . . . .	243
7.5	Rozšířený Kalmanův filtr . . . . .	248

<b>8</b>	<b>Kvadraticky optimální zpětná vazba od výstupu</b>	<b>251</b>
8.1	Úloha LQG regulátoru . . . . .	252
8.2	Vliv pozorovatele na vlastnosti regulátoru . . . . .	258
8.2.1	Metoda LTR . . . . .	258
8.2.2	Zpětná vazba od reziduí . . . . .	260
<b>IV</b>	<b>Identifikace dynamických systémů</b>	<b>263</b>
<b>9</b>	<b>Stochastické metody identifikace</b>	<b>265</b>
9.1	Model dynamického systému . . . . .	265
9.1.1	Souvislost úlohy modelování a řízení . . . . .	265
9.1.2	Struktura a parametry modelu . . . . .	266
9.1.3	Přehled používaných struktur lineárních modelů . . . . .	267
9.2	Identifikace parametrů lineárního regresního modelu . . . . .	274
9.2.1	Jednorázová identifikace . . . . .	275
9.2.2	Rekurzivní identifikace konstantních parametrů . . . . .	277
9.2.3	Sledování časově proměnných parametrů . . . . .	280
9.2.4	Omezené zapomínání . . . . .	285
9.2.5	Implementace algoritmu nejmenších čtverců . . . . .	288
9.2.6	Konvergence, návrh experimentu . . . . .	291

Část I

Úvod





# Kapitola 1

## Řízení dynamických systémů

### 1.1 Obecné zásady řízení dynamických systémů

#### Řízení a rozhodování

Každý z nás mnohokrát denně dělá v nejrůznějších situacích různá **rozhodnutí**. Jsou to rozhodování typu kam půjdu, co udělám, co udělám nyní a co později a podobně. Jistě platí, že úspěch člověka podstatnou měrou závisí na jeho správných rozhodnutích, zvláště v klíčových situacích.

Abychom se rozhodovali správně, vytváříme si, vědomě či nevědomě, ve své mysli **modely situací** a podle nich vážíme důsledky různých variant, které máme při rozhodování k dispozici. Rozhodneme se samozřejmě pro tu variantu, jejíž důsledek je pro nás nejpříznivější. Skutečný důsledek našeho rozhodnutí poznáme ale až později, při rozhodování možné důsledky odhadujeme (predikujeme) pouze pomocí modelu dané situace. Model si tedy vytváříme za účelem **predikce** budoucích důsledků našich možných rozhodnutí. Čím lepší model situace si vytvoříme, tím, po zvážení všech důsledků, máme lepší možnost vybrat si dobrou variantu pro naše rozhodnutí.

Naše rozhodnutí závisí tedy na tom, jak věrný model situace jsme si schopni vytvořit. Při tom se samozřejmě uplatňuje naše zkušenost, intuice a vědomosti. Často si model situace vytváříme při rozhovoru s přáteli a porovnáváme jejich názor (jejich model situace a jeho hodnocení) s názorem svým. Naše rozhodnutí závisí také na tom, jaké **kritérium** pro vážení různých důsledků si vybereme. Ani to není mnohdy věc jednoduchá. Při hodnocení rozhodnutí provedených v minulosti a jejich skutečných důsledků si často uvědomujeme, jak nevhodné kritérium jsme si v minulosti zvolili.

Při rozhodování se někdy uplatňuje časové omezení. V dané situaci je třeba se rychle rozhodnout, ale pro správné rozhodnutí je třeba vytvořit dobrý model situace, což vyžaduje určitý čas. Nutnost rychlého rozhodnutí stojí v přímém protikladu k časově náročnému procesu vytváření modelu dané situace. Při tom se uplatňuje také **složitost rozhodovacího algoritmu**, kterou je také třeba někdy omezit. Proto se často pod tlakem času musíme rozhodovat podle velmi zjednodušených modelů dané situace, které zahrnují pouze nejpodstatnější jevy.

Naopak nejsme-li při rozhodování v časové tísní, často provádíme různé testy, abychom lépe porozuměli rozhodovací situaci. Tak na příklad nakoupíme vzorek zboží, abychom poz-

nali jeho kvalitu; partnera podrobíme různým zkouškám, abychom lépe poznali jeho povahu a podobně.

**Diskrétní řízení dynamických systémů** je vlastně **posloupnost rozhodování** o volbě velikosti řídicí veličiny v různých časových okamžicích. Proto při řízení dynamických systémů postupujeme principiálně stejným způsobem jako při volbě našich rozhodnutí v nejrůznějších životních situacích.

### Dynamický systém

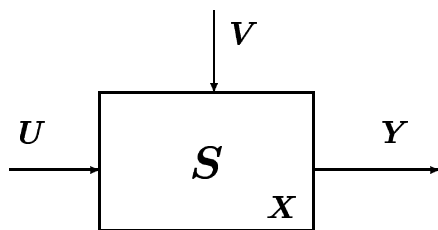
Řízením působíme na reálný svět. Tu část reality, kterou řídíme, nazýváme **objekt**. Abychom nějaký objekt dobře řídili, je třeba si vytvořit dobrý model objektu. To znamená, že na objektu si definujeme **systém**. Dynamický systém si vytváříme pro predikci chování objektu v budoucnosti. Existují v podstatě dva způsoby tvorby systému na daném objektu či procesu, a to **analytický** a **experimentální**.

Při prvním způsobu využíváme různé fyzikální, biologické, ekonomické a jiné zákonitosti a na jejich základě hledáme vztahy mezi veličinami, které nás zajímají. Tomuto způsobu vytváření modelu objektu se říká **matematicko - fyzikální analýza**. Dynamický systém vzniklý na základě matematicko-fyzikální analýzy je často složitý, a proto abychom ho mohli použít, je nezbytné ho zjednodušit. V tom je další úskalí. Ve vztazích mezi veličinami se vyskytují různé konstanty, jejichž velikost se mnohdy určuje obtížně.

Druhý způsob tvorby systému je založen na měření provedeném na skutečném objektu, rozboru změřených dat a tím určení vztahů mezi veličinami. Tomuto způsobu vytváření modelu objektu se říká **experimentální identifikace**. Systém si při tomto způsobu představujeme jako **černou skříňku** (black box). Při tomto způsobu tvorby modelu je třeba vzít v úvahu to, že měření má vždy omezenou přesnost, a proto je model objektu vzniklý tímto způsobem velmi často **stochastický systém**.

Samozřejmě nejlepší cesta je kombinace analytického a experimentálního způsobu tvorby systému. Pomocí analytického přístupu určíme například strukturu systému. Potom při experimentální identifikaci přistupujeme k systému jako k **šedé skříňce** (gray box), o které již máme částečné znalosti z analytického rozboru.

Modelem situace nebo objektu je tedy systém, a protože budeme sledovat časový průběh veličin, bude se jednat o **dynamický systém**. Systém je znázorněn na obr. 1.1.



Obrázek 1.1: Systém

Soubor všech veličin, které produkuje systém, se nazývá **stav systému**, značíme ho  $x$ . Stav systému je velmi důležitý pojem, který budeme v textu dále upřesňovat.

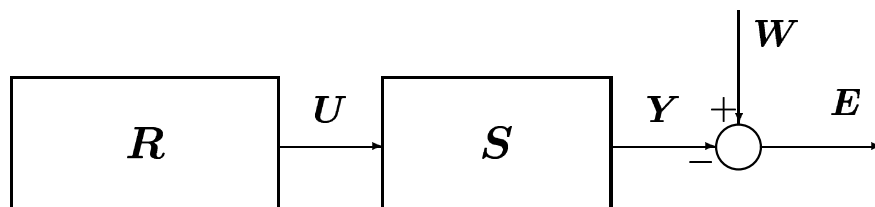
Veličiny, které na systém působí z okolí a jsou na systému nezávislé, nazýváme **vstupní veličiny**. Tyto veličiny rozdělujeme na dvě skupiny. Jedna skupina vstupních veličin jsou takové veličiny, které můžeme měnit podle potřeby. Ty nazýváme **řídící veličiny systému** a značíme je  $u$ . Řídící veličiny systému se také nazývají **akční veličiny**. Druhou skupinou vstupních veličin jsou takové veličiny, které působí na systém nezávisle na nás a nemáme možnost je měnit. Takové veličiny nazýváme **poruchové veličiny** a značíme je  $v$ . Pro účely řízení je třeba ještě poruchové veličiny rozdělit na poruchové veličiny měřitelné a neměřitelné.

Veličiny, které produkuje systém a které měříme, nazýváme **výstupní veličiny systému**. Veličiny, které chceme řídit nebo regulovat, nazýváme **regulované veličiny** a značíme je  $y$ . Výstupní veličiny systému nemusí být totožné s veličinami regulovanými.

### Požadavky kladené na řízení

Teorie automatického řízení zkoumá metody jak působit na systém, jak ho řídit, aby se řízený systém choval podle našich požadavků. Požadavky kladené na řízení mohou být různé.

- **Kompenzace vlivu poruchových veličin** (Disturbance Rejection)  
Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin, jejichž vliv na regulovanou veličinu je mnohdy nežádoucí. Někdy je poruchová veličina měřitelná a potom lze její vliv kompenzovat účinně tím způsobem, že signál od měřitelné poruchy zpracujeme v řídicím členu. Tak lze někdy vliv poruchy kompenzovat beze zbytku. Pokud se tímto způsobem porucha na výstupu systému vůbec neprojeví (řídící člen její vliv úplně kompenzuje), pak říkáme, že řízený systém je **invariantní vzhledem k poruše**.
- **Problém regulátoru** (Regulator Problem)  
Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující (například systém je nestabilní) a účelem řízení je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl potom vyhovující dynamické vlastnosti. Často chceme tímto způsobem **systém stabilizovat**.
- **Problém sledování** (Tracking Problem)  
Někdy požadujeme, aby výstupní veličina co nejvěrněji sledovala nějaký průběh určený **referenční veličinou**  $w$ , chceme tedy, aby byla co nejmenší takzvaná **regulační odchylka**  $e$ , která je rozdílem mezi požadovanou veličinou a skutečným výstupem ze systému (čili  $e = w - y$ ). Často je nutné respektovat různá omezení na velikost řídicí veličiny  $u$  či omezení na velikost celkové řídicí energie.
- **Optimální řízení** (Optimal Control)  
V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do **kritéria kvality řízení** a problém řízení je převeden na **optimalizační problém** minimalizace kritéria kvality řízení. Při tomto přístupu k řešení problému řízení existují dva zásadní problémy. Prvním problémem je vhodná volba kritéria kvality řízení, která by zahrнула všechny naše požadavky na kvalitu řízení. Druhým problémem je řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému. Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je kvadratické kritérium, které pro lineární systémy vede na **lineární zákon řízení**.

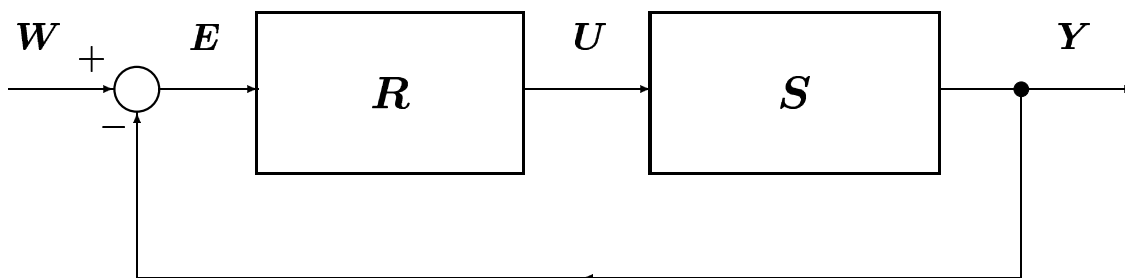


Obrázek 1.2: Řízení systému ovládáním

### Ovládání a regulace

Řídit systém znamená vhodně zvolit časový průběh řídicí veličiny  $u$ . Řízení systému můžeme v podstatě realizovat dvojím způsobem: ovládáním (Open Loop Control) a regulací (Feedback Control).

Při **přímovazebním řízení** neboli **ovládání** generujeme předem určený průběh řídicí veličiny  $u$  ve struktuře řízení podle obr. 1.2. Zařízení, které při ovládání generuje průběh řídicí veličiny, nazýváme **generátor řídicí veličiny** nebo také **přímovazební regulátor**. Při ovládání generátor řídicí veličiny nevyužívá žádnou informaci o tom, jaký je skutečný výstup systému. Ovládání je tedy řízení bez zpětné informace o skutečném výsledku řízení. Je zřejmé, že ovládání lze použít pouze u dobře poznaných objektů. Při řízení ovládáním celá naše **strategie řízení** musí být naprogramována v generátoru řídicí veličiny před začátkem řízení.



Obrázek 1.3: Řízení systému regulací

Druhý způsob řízení je **zpětnovazební řízení**, kterému říkáme **regulace**. Při tomto způsobu řízení řídicí člen (regulátor) využívá informace o výsledku řízení (průběhu regulované veličiny  $y$ ). Při řízení regulací existuje **zpětná vazba** z výstupu systému na jeho vstup, viz obr. 1.3. Pokud regulátor  $R$  zpracovává regulační odchylku  $e$ , říkáme tomuto způsobu řízení **odchylková regulace**, viz obr. 1.3.

### Výhody a nevýhody různých struktur řízení

Je důležité si uvědomit výhody a nevýhody obou způsobů řízení. Proto dále porovnáme vlastnosti přímovazebního řízení (ovládání) a zpětnovazebního řízení (regulace) z různých

hledisek. Půjde nám o kvalitativní porovnání těchto dvou zásadně odlišných způsobů řízení z hlediska stability, optimality, kompenzace poruch a citlivosti či robustnosti struktury řízení při změně parametrů systému.

- **Stabilita**

Je-li řízený systém  $S$  nestabilní, nelze ho ovládním stabilizovat, neboť seriová kombinace systémů je nestabilní, je-li nestabilní kterýkoliv subsystém. Naopak zpětnovazebním řízením lze nestabilní systém stabilizovat vždy, pokud jeho nestabilita není skrytá, to znamená, že se projeví na výstupu a je ovlivnitelná vstupem. Zpětnou vazbou lze vždy stabilizovat systém, který je stabilizovatelný a rekonstruovatelný. V tom je velká výhoda zpětnovazebního řízení.

Je třeba si ale uvědomit, že pokud je samotný systém stabilní, nemůžeme při jeho řízení ovládním stabilitu ztratit, pokud generátor řídicí veličiny je sám stabilní. Naopak nevhodným zpětnovazebním řízením můžeme destabilizovat i stabilní systém.

- **Optimalita**

Optimální řízení dosahujeme vhodným výběrem řídicí veličiny  $u$  řízeného systému. Přitom je v zásadě lhostejné, jakým způsobem budeme optimální průběh řídicí veličiny realizovat. Z tohoto hlediska je přímovazební řízení a zpětnovazební řízení rovnocenné. Naopak, při zpětnovazebním řízení je třeba vždy prvořadě zaručit stabilitu zpětnovazebního regulačního obvodu, a proto je při zpětnovazebním řízení někdy nutno slevit z optimality na úkor stability. Proto z hlediska optimality je řízení ovládním nejlepší způsob řízení. Protože při ovládním nejsme schopni odstranit případnou nestabilitu systému, je tuto strukturu řízení možno použít pouze pro stabilní systém.

Tato úvaha platí ale pouze při přesném modelu a deterministickém systému. Při stochastickém modelu je zpětnovazební řízení jediná možná struktura řízení.

- **Kompenzace poruch**

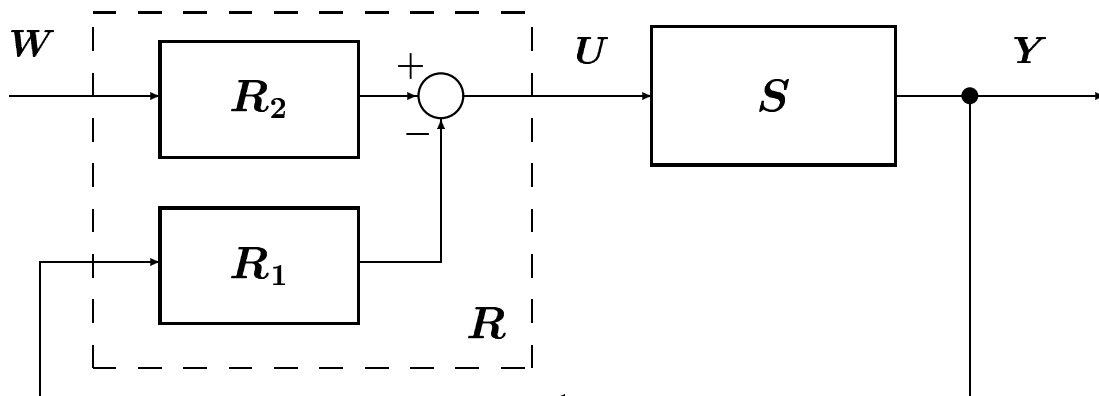
Chceme-li kompenzovat vliv neměřitelných poruchových veličin, pak je zpětnovazební řízení jediná možná struktura řízení, která kompenzaci neměřitelných poruch umožní. Při řízení ovládním se řídicí člen nedozví o působení poruchy. Teprve zpětnovazební struktura dodá řídicímu členu informaci o působení poruchy. Z hlediska kompenzace neměřitelných poruch je tedy volba optimální struktury řízení jednoznačná.

- **Citlivost a robustnost**

Je zřejmé, že model objektu není nikdy úplně věrný. Proto je nutné zkoumat změny vlastností systému při změně jeho parametrů nebo jeho struktury. Tyto problémy řeší citlivostní analýza systému, která zkoumá změny vlastností systému při infinitezimálně malých změnách jeho dynamických vlastností. Robustnost naopak analyzuje vlastnosti systému při větších, ale omezených změnách dynamických vlastností systému. Je zřejmé, že při ovládním se veškeré změny vlastností systému plně projeví na jeho výstupu. Při ovládním nemáme možnost změny vlastností systému kompenzovat. Při zpětnovazebním řízení je možno navrhnout řídicí systém tak, aby podstatným způsobem kompenzoval změnu vlastností řízeného systému. Přitom platí omezení, že kompenzaci nelze provést v celém kmitočtovém rozsahu. I zde platí zásada „něco za něco“ - v určité oblasti kmitočtů jsme schopni citlivost na změnu vlastností systému potlačit na úkor toho, že v jiné oblasti kmitočtů citlivost při zpětnovazebním

řízení zhoršíme. Přesto z hlediska robustnosti a citlivosti je zpětnovazební řízení jediná vhodná struktura řízení.

Shrneme-li předchozí závěry, pak při jakýchkoli nepřesnostech, šumech měření nebo změnách parametrů systému a podobně je zpětnovazební struktura řízení jediná použitelná struktura řízení.



Obrázek 1.4: Řízení systému se dvěma stupni volnosti

Abychom využili výhod obou struktur řízení, používáme **strukturu řízení se dvěma stupni volnosti** podle na obr. 1.4. Regulátor má odlišnou zpětnovazební a přímovazební část. Přitom je tento regulátor realizován jako systém se dvěma vstupy a jedním výstupem. Není tedy realizován jako dva samostatné bloky, jak by se na první pohled mohlo zdát z obr. 1.4. Kdyby se tento regulátor zrealizoval chybně jako dva samostatné bloky, pak bychom museli zaručit stabilitu přímovazební části regulátoru, což není při správné realizaci nutné. Struktura řízení se dvěma stupni volnosti podle obr. 1.4 je nejobecnější strukturou řízení.

### Meze řízení

Syntéza řízení systému je složitý problém, na který není možno dát jednoznačný návod.

Ze základního kurzu teorie systémů víme, že **stavovou zpětnou vazbou** (stavovým regulátorem) můžeme libovolně měnit dynamické vlastnosti dosažitelného systému. Jediné omezení je při násobných pólech, kde indexy dosažitelnosti omezují rozměr invariantních polynomů.

Pokud není stav systému měřitelný, můžeme stavovou veličinu pozorovatelného systému zrekonstruovat **pozorovatelem stavu**. Pro pozorovatelný systém můžeme stavovou injekcí zajistit libovolnou dynamiku pozorovatele. Také zde omezují indexy pozorovatelnosti rozměry invariantních polynomů při násobných pólech pozorovatele.

Spojením stavového regulátoru a pozorovatele získáme zpětnovazební systém, jehož dynamické vlastnosti jsou sjednocením vlastností stavového regulátoru a pozorovatele stavu. Platí zde takzvaný **separační princip**. Použitím rekonstruovaného stavu z pozorovatele ale můžeme ztratit některé příznivé vlastnosti stavového regulátoru - zmenší se robustnost při změně parametrů.

Přitom některé vlastnosti systému nemůžeme změnit žádným způsobem a někdy stojí naše požadavky na řízení přímo proti sobě. Žádnou strukturou řízení nelze zmenšit relativní řád systému a odstranit jeho nestabilní nuly.

**Relativní řád systému** je určen rozdílem stupňů polynomů jmenovatele a čitatele jeho přenosu. U diskretních systémů je relativní řád systému roven počtu kroků zpoždění jeho reakce na vstupní signál. Žádnou strukturou řízení nelze zmenšit relativní řád systému.

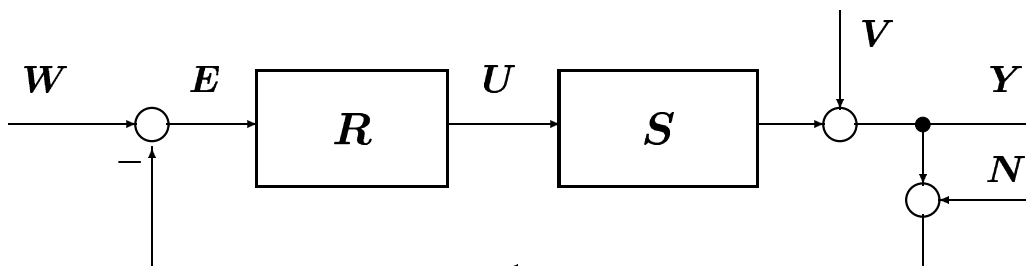
**Nestabilní nuly** v přenosu systému nelze žádnou strukturou řízení odstranit bez ztráty stability. Systém s nestabilními nulami nazýváme **systémem s neminimální fází**. Nestabilní nuly systému musí zůstat v přenosu řízení. S nestabilními nulami systému se můžeme pouze smířit, nic jiného nám nezbyvá. To je zajímavé omezení možností řízení, neboť nestabilní systém můžeme při velmi slabých omezeních stabilizovat zpětnovazebním řízením, ale neminimálně fázový systém nelze žádným způsobem změnit na systém s minimální fází.

## 1.2 Zpětnovazební řízení

V této sekci ukážeme některé vlastnosti zpětnovazebního obvodu. Budeme se zabývat reakcí regulačního obvodu na různé vstupní signály a také budeme analyzovat toleranci regulačního obvodu na neurčitosti v řízeném systému. Ukážeme, že syntéza regulačního obvodu je často kompromisem mezi protichůdnými požadavky na vlastnosti regulačního obvodu.

### 1.2.1 Přenosové a frekvenční vlastnosti

Uvažujme tedy zpětnovazební regulační obvod podle obr. 1.5. Vstupem regulačního obvodu je kromě řídicí veličiny  $W$  také porucha  $V$  působící na výstupu systému a šum  $N$  měření regulované veličiny. Přenosová matice řízeného systému je rovna  $S$  a řídicího systému (regulátoru) je rovna  $R$ .



Obrázek 1.5: Standardní zpětnovazební struktura

**Přenosová matice rozpojeného regulačního obvodu** je  $SR$ , nebo  $RS$  podle toho, jestli regulační obvod rozpojíme na výstupu systému nebo na vstupu systému. Uvědomme si, že vlivem záporné zpětné vazby je přenos mezi vstupem a výstupem v místě rozpojení ve skutečnosti roven  $-SR$ , nebo  $-RS$ .

**Matice zpětné difference regulačního obvodu** je definována jako relativní rozdíl signálů na vstupu a výstupu rozpojeného regulačního obvodu. V našem případě je matice zpětné difference rovna  $(I + SR)$ , případně  $(I + RS)$ .



Inverze matice zpětné diference je **citlivostní operátor**  $\mathcal{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}$ . Je zřejmé, že bychom měli rozlišovat **výstupní citlivostní operátor**  $(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}$  a **vstupní citlivostní operátor**  $(\mathbf{I} + \mathbf{RS})^{-1}$ . V literatuře se zavádí také **doplňkový citlivostní operátor**  $\mathcal{T} = \mathbf{SR}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}$ . Zřejmě platí  $\mathcal{T} = \mathbf{I} - \mathcal{S}$ .

Pokud je zpětnovazební regulační obvod stabilní, pak má následující vlastnosti, které jsou určeny jeho přenosovými maticemi mezi různými veličinami regulačního obvodu a jeho vlastnostmi při změně parametrů systému.

- **Přenosové vlastnosti.** Obraz výstupu, regulační odchylky a akční veličiny při působení řízení, poruchy a šumu měření jsou po řadě rovny

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{SR}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{N}) + (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}\mathbf{V}, \\ \mathbf{E} = \mathbf{W} - \mathbf{Y} &= (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{V}) + \mathbf{SR}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}\mathbf{N}, \\ \mathbf{U} &= \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{V} - \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

- **Citlivost zpětnovazebního obvodu** při změně dynamických vlastností systému je určena následujícím vztahem

$$\mathcal{S}_{cl} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}'\mathbf{R})^{-1}\mathcal{S}_{ol}, \quad (1.2)$$

kde  $\mathcal{S}_{cl}$  a  $\mathcal{S}_{ol}$  jsou po řadě citlivostní matice zpětnovazebního obvodu (closed loop) a citlivostní matice nominálně ekvivalentního přímovazebního obvodu (open loop), při změně dynamických vlastností systému  $\mathbf{S}' = \mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}$ .

Rovnice (1.1) až (1.2) ukazují hlavní výhody, které má zpětnovazební struktura řízení. Regulační odchylka  $\mathbf{E}$  při působení řízení  $\mathbf{W}$  a poruchy  $\mathbf{V}$  může být libovolně malá za předpokladu, že je malý citlivostní operátor  $\mathcal{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1}$ , který je roven inverzi matice zpětné diference.

Podobně z (1.2) plyne, že citlivost zpětnovazebního obvodu se zlepšuje za stejných podmínek jako v předchozím případě, pokud se přenosová matice  $\mathbf{S}'$  příliš neliší od nominální přenosové matice systému  $\mathbf{S}$ .

Uvedené podmínky jsou zřejmé pro jednorozměrový zpětnovazební regulační obvod. Zde požadujeme, aby skalární komplexní funkce  $[1 + S(j\omega)R(j\omega)]^{-1}$  měla malou amplitudu. To znamená, že zpětná diference  $[1 + S(j\omega)R(j\omega)]$ , která je rovna její inverzi, musí mít velkou amplitudu. Tuto velkou amplitudu požadujeme pro takové frekvence, v nichž leží frekvenční spektrum řídicí veličiny  $W$  a poruchy  $V$  a na nichž je také podstatná změna přenosu systému  $\Delta S(j\omega)$ .

Proto pro jednorozměrové systémy jsou požadavky na dobré chování zpětnovazebního obvodu vyjádřeny ve frekvenční oblasti následující nerovností

$$f(\omega) \leq |1 + S(j\omega)R(j\omega)|, \quad \forall \omega \leq \omega_0, \quad (1.3)$$

kde  $f(\omega)$  je kladná, „dostatečně velká“ funkce a  $\omega_0$  ohraničuje aktivní frekvenční rozsah.

Tento požadavek můžeme v mnoharozměrovém regulačním obvodu vyjádřit podobně, když zvolíme spektrální normu jako míru velikosti matice. Účelnost spektrální normy matice vysvětlíme následující úvahou. Pro skalární veličinu  $a$  a vektor  $\mathbf{x}$  platí  $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$ . To

znamená, že norma vektoru  $a\mathbf{x}$  je rovna normě vektoru  $\mathbf{x}$  násobené absolutní hodnotou zesílení  $a$ . Pro matice je „ zesílení“ směrově závislé. Platí totiž

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \in [\underline{\sigma}(\mathbf{A})|\mathbf{x}|, \bar{\sigma}(\mathbf{A})|\mathbf{x}|],$$

kde  $\underline{\sigma}(\mathbf{A})$  je minimální a  $\bar{\sigma}(\mathbf{A})$  je maximální singulární číslo matice  $\mathbf{A}$ . Singulární čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou rovna

$$\sigma_i(\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{\frac{1}{2}},$$

kde  $\lambda_i(\cdot)$  jsou vlastní čísla matice. Minimální a maximální singulární čísla se také nazývají **základní zesílení** (principal gains).

Potom požadavek ekvivalentní požadavku (1.3) pro jednorozměrové systémy je v mnoharozměrovém případě

$$f(\omega) \leq \underline{\sigma}[\mathbf{I} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)], \quad \forall \omega \leq \omega_0, \quad (1.4)$$

kde  $f(\omega)$  je opět kladná, „ dostatečně velká“ funkce a  $\omega_0$  ohraničuje aktivní frekvenční rozsah. Předchozí vztah je **podmínka kvality mnoharozměrového zpětnovazebního regulačního obvodu ve frekvenční oblasti**. Tato podmínka musí být splněna pro frekvenční rozsah, v němž leží frekvenční spektrum řídicí veličiny  $\mathbf{W}$ , poruchy  $\mathbf{V}$  a v němž nastává změna přenosu systému  $\Delta\mathbf{S}(j\omega)$ .

Podmínka (1.4) na matici zpětné difference ( $\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{R}$ ) vyjadřuje obecně známý požadavek: Dobré vlastnosti zpětnovazebního obvodu vyžadují velké zesílení ve zpětnovazební smyčce, neboli jak se také říká hodně „ utaženou smyčku“. Samozřejmě přitom musíme zachovat stabilitu zpětnovazebního obvodu, což je často požadavek, který je v přímém protikladu k požadavku velkého zesílení ve zpětnovazební smyčce. Požadavek velkého zesílení ve smyčce je ještě více zřejmý z nerovnosti

$$\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)] - 1 \leq \underline{\sigma}[\mathbf{I} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)] \leq \underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)] + 1. \quad (1.5)$$

Odtud plyne, že velikost matice zpětné difference můžeme aproximovat zesílením v rozpojené smyčce  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$ , pokud je toto zesílení podstatně větší než jedna.

Požadavek velkého zesílení ve zpětnovazební smyčce je také v protikladu k požadavku redukce šumu  $\mathbf{N}$ , vznikajícího při měření regulované veličiny. Velké  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$  na velkém frekvenčním rozsahu způsobí, že šum měření projde na výstup s nezměněnou amplitudou. To je zřejmé z následujícího vztahu

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega))^{-1}\mathbf{N} \approx -\mathbf{N}, \quad (1.6)$$

kteřý platí, pokud minimální singulární číslo rozpojeného regulačního obvodu je větší než jedna na frekvencích, ve kterých leží frekvenční spektrum šumu měření. Šum měření omezuje proto frekvenční rozsah regulačního obvodu.

Stejná potíž vznikne při velkých zesíleních ve smyčce s velikostí akční veličiny  $\mathbf{U}$ . To je zřejmé z následujícího vztahu

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega))^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{V} - \mathbf{N}) \approx \mathbf{S}^{-1}(j\omega)(\mathbf{W} - \mathbf{V} - \mathbf{N}), \quad (1.7)$$

kde pro jednoduchost předpokládáme, že přenosová matice  $\mathbf{S}$  je čtvercová a invertovatelná. Z předchozího vztahu plyne, že vliv řízení, poruchy i šumu měření na akční veličinu  $\mathbf{U}$  se

zesiluje, pokud jejich frekvenční rozsah podstatně přesáhne frekvenční rozsah systému, to je takový obor frekvencí  $\omega$ , pro které  $\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)] \ll 1$ , neboť potom

$$\underline{\sigma}[\mathbf{S}^{-1}(j\omega)] = \frac{1}{\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)]} \gg 1. \quad (1.8)$$

Se všemi těmito protikladnými požadavky se vyrovná syntéza lineárních systémů podle kvadratických kritérií kvality řízení (LQG syntéza), neboť v kvadratickém kritériu můžeme vyjádřit své požadavky na kvalitu řízení, kompenzaci poruch i šumu měření a omezenou amplitudu vstupní veličiny systému.

Další podstatné omezení na zesílení ve smyčce vyplyne z požadavků na toleranci regulačního obvodu na neurčitost v přenosu systému. Tomuto problému budeme věnovat následující sekci.

### 1.2.2 Zpětnovazební řízení při neurčitosti v popisu systému

Nejprve je třeba popsat neurčitosti v řízeném systému. Jistě platí, že systém nikdy nepopisuje úplně věrně vlastnosti reálného objektu. Proto je účelné nominální model, reprezentovaný například přenosovou maticí systému, doplnit nějakým modelem neurčitostí.

#### Strukturované a nestruturované neurčitosti

Pokud určíme rozsah neurčitostí v parametrech systému, pak mluvíme o **strukturovaných neurčitostech**. Při strukturovaných neurčitostech je struktura systému pevná a neurčitosti jsou pouze v parametrech systému. Strukturované neurčitosti vzniknou při nepřesné znalosti fyzikálních parametrů reálného objektu.

**Nestruturované neurčitosti** jsou neurčitosti v celé přenosové matici systému, přičemž je blíže nestruturovujeme. Z různých typů nestruturovaných neurčitostí si zde uvedeme aditivní a multiplikatívni nestruturované neurčitosti.

- **Aditivní nestruturovaná neurčitost** je vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{S}'(j\omega) = \mathbf{S}(j\omega) + \Delta\mathbf{S}_a(j\omega), \quad (1.9)$$

kde  $\mathbf{S}(j\omega)$  je nominální přenosová matice systému a  $\mathbf{S}'(j\omega)$  je perturbovaná matice systému. Aditivní neurčitost  $\Delta\mathbf{S}_a(j\omega)$  v přenosové matici  $\mathbf{S}(j\omega)$  je amplitudově omezena

$$\bar{\sigma}[\Delta\mathbf{S}_a(j\omega)] < f_a(\omega) \quad (1.10)$$

pro všechny nezáporné frekvence  $\omega$  a kde  $f_a(\omega)$  je nezáporná funkce, frekvenčně závislá, která určuje okolí nominálního modelu  $\mathbf{S}(j\omega)$ . Tato nestruturovaná neurčitost může vzniknout různým způsobem, například změnou parametrů systému, zanedbanou dynamikou, nelinearitami v systému, aproximací systému s rozloženými parametry, systémem se soustředěnými parametry a řadou dalších nespecifikovaných jevů.

- **Multiplikatívni nestrukturovaná neurčitost** je vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{S}'(j\omega) = [\mathbf{I} + \Delta\mathbf{S}_m(j\omega)]\mathbf{S}(j\omega), \quad (1.11)$$

kde multiplikatívni neurčitost  $\Delta\mathbf{S}_m(j\omega)$  v přenosové matici  $\mathbf{S}(j\omega)$  je omezena

$$\bar{\sigma}[\Delta\mathbf{S}_m(j\omega)] < f_m(\omega) \quad (1.12)$$

pro všechny nezáporné frekvence  $\omega$  a kde  $f_m(\omega)$  je nezáporná funkce, která určuje relativní okolí nominálního modelu  $\mathbf{S}(j\omega)$ . Tato neurčitost vzniká ze stejných příčin jako aditivní neurčitost.

Existují i jiné modely nestrukturovaných neurčitostí, dále však budeme používat pouze multiplikatívni nestrukturovanou neurčitost (1.11). Získání modelu neurčitosti podle (1.11) a (1.12) může být složitý problém, zvláště v mnohazměrovém případě. Je zřejmé, že každou strukturovanou neurčitost můžeme vyjádřit také jako nestrukturovanou neurčitost, ale obráceně to nelze provést.

**Poznámka:** Nestrukturovanou multiplikatívni neurčitost můžeme v jednorozměrovém případě vyjádřit ve tvaru

$$\frac{S'(j\omega)}{S(j\omega)} - 1 = \Delta S_m(j\omega).$$

V tomto případě můžeme frekvenční přenos  $S_m(j\omega)$  považovat za pevnou váhovou funkci popisující meze neurčitosti. Proměnná stabilní přenosová funkce  $|\Delta| \leq 1$  je v podstatě měřítkový faktor velikosti změn a reprezentuje také změnu fáze. V jednorozměrovém případě je tedy neurčitost omezena  $|S_m(j\omega)| = f_m(\omega) > 0$ ,  $|\Delta| \leq 1$ .  $\square$

**Příklad:** Nominální přenos systému je roven  $S(s) = \frac{K}{(1+s)^3}$ . Přitom zanedbáváme dopravní zpoždění, které leží v intervalu  $0 \leq T_d \leq 0.1$ . Nalezněte váhovou funkci  $S_m(j\omega)$ , která umožní uvedenou neurčitost popsat jako multiplikatívni neurčitost. Ukažte, že pro ni platí

$$|e^{j\omega T_d} - 1| = |S_m(j\omega)|; \quad 0 \leq T_d \leq 0.1.$$

Ověřte, že vyhovující váhová funkce je  $S_m(j\omega) = \frac{0.21s}{0.1s+1}$ . Uvažujte stejnou soustavu s proměnným zesílením  $K$  v rozsahu  $5 \leq K \leq 10$ .  $\square$

Dále budeme předpokládat, že systém  $\mathbf{S}'$  zůstane ryzí a má stejný počet nestabilních pólů jako nominální model  $\mathbf{S}$ . Přitom jejich poloha nemusí být totožná. Model známe obvykle dosti přesně na nízkých frekvencích, na vysokých frekvencích naše nejistota o přesnosti modelu roste. Proto nezáporná funkce  $f_m(\omega)$  je na malých frekvencích podstatně menší než 1 a pro velké frekvence může být i větší než jedna.

Nyní budeme analyzovat vliv multiplikatívni neurčitosti na vlastnosti zpětnovazebního obvodu.

### Zpětnovazební řízení a neurčitost

Při návrhu řídicího systému  $\mathbf{R}$  při nestrukturované neurčitosti v řízeném systému  $\mathbf{S}$  je třeba splnit tři přirozené požadavky:

- Řídicí systém  $\mathbf{R}$  musí zajistit stabilitu nominálního zpětnovazebního regulačního obvodu. Potom je stabilní přenosová matice  $\mathbf{SR}[\mathbf{I} + \mathbf{SR}]^{-1}$ .
- Zpětnovazební systém musí být také stabilní při všech možných nestrukturovaných změnách řízeného systému. To znamená, že přenosová matice  $\mathbf{S}'\mathbf{R}[\mathbf{I} + \mathbf{S}'\mathbf{R}]^{-1}$  musí být stabilní při všech možných  $\mathbf{S}'$  podle (1.11).
- kvalita řízení musí být zaručena pro všechny možné  $\mathbf{S}'$  podle (1.11) a (1.12).

Tyto požadavky budeme nyní formulovat ve frekvenční oblasti. Uvidíme, že povedou na omezení nominální přenosové matice  $\mathbf{SR}$  rozpojeného regulačního obvodu.

### Nyquistovo kritérium stability

Frekvenční podmínky stability mnohazměrového zpětnovazebního regulačního obvodu jsou určeny mnohazměrovou formou Nyquistova kritéria stability.

Podle **Nyquistova kritéria stability pro jednorozměrové systémy** je zpětnovazební regulační obvod stabilní, pokud Nyquistova křivka obíhá bod  $(-1, j0)$  v záporném směru tolikrát, kolik má rozpojený regulační obvod nestabilních pólů. Připomínáme, že Nyquistova křivka je zobrazení  $S(s)R(s)$ , kde komplexní proměnná  $s$  obíhá hranici nestabilní oblasti v záporném smyslu (to je ve směru pohybu hodinových ruček). Pro spojitě systémy leží komplexní proměnná  $s$  na tak zvané D-křivce. Nyquistova křivka je v podstatě určena frekvenční charakteristikou rozpojeného regulačního obvodu. Přitom je třeba zaručit, aby na hranici oblasti neležel žádný pól a samotná frekvenční charakteristika rozpojeného regulačního obvodu nesmí procházet kritickým bodem  $(-1, j0)$ .

**Nyquistovo kritérium stability pro mnohazměrové systémy** je formulováno podobným způsobem. Mnohazměrový zpětnovazební regulační obvod je stabilní právě tehdy, když Nyquistova křivka  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)\mathbf{R}(s))$  neprochází počátkem souřadnic a obíhá počátek souřadnic v záporném směru tolikrát, kolik má rozpojený mnohazměrový regulační obvod nestabilních pólů.

Odvození Nyquistova kritéria stability pro mnohazměrové systémy opět vychází z věty o argumentu. V jednorozměrovém případě jsme vyšetřovali Nyquistovu křivku výrazu  $1 + S(s)R(s)$ , nebo pouze výrazu  $S(s)R(s)$ , při počátku posunutém do bodu  $(-1, j0)$ , což je totéž. V čitateli výrazu  $1 + S(s)R(s)$  je charakteristický polynom zpětnovazebního obvodu a v jeho jmenovateli je samozřejmě charakteristický polynom rozpojeného regulačního obvodu.

V mnohazměrovém případě je situace obdobná. V čitateli výrazu  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)\mathbf{R}(s))$  je charakteristický polynom uzavřeného mnohazměrového regulačního obvodu a v jeho jmenovateli je charakteristický polynom rozpojeného mnohazměrového regulačního obvodu. Další postup je stejný jako v jednorozměrovém případě. V mnohazměrovém Nyquistovu kritériu pouze nelze posouvat počátek souřadnic do bodu  $(-1, j0)$ .

### Podmínky zachování stability při neurčitosti

Podmínky pro robustní stabilitu odvodíme nejprve pro jednorozměrový regulační obvod. Pro jednoduchost budeme nejprve předpokládat, že nominální rozpojený regulační obvod je stabilní. Potom nominální uzavřený regulační obvod je také stabilní, když Nyquistova křivka  $S(j\omega)R(j\omega)$  neobkličuje bod  $(-1, j0)$ .

Nyquistova křivka přenosu  $S'(j\omega)R(j\omega)$  při respektování neurčitosti neobkličuje také bod  $(-1, j0)$ , když vzdálenost  $|S(j\omega)R(j\omega) - S'(j\omega)R(j\omega)|$  mezi body frekvenční charakteristiky  $S(j\omega)R(j\omega)$  a  $S'(j\omega)R(j\omega)$  je menší než vzdálenost  $|S(j\omega)R(j\omega) + 1|$  bodu  $S(j\omega)R(j\omega)$  od bodu  $(-1, j0)$ . Potom se nemění počet oběhů Nyquistovy křivky při respektování neurčitosti a regulační obvod zůstane stabilní i při neurčitosti. Pak tedy

$$|S'(j\omega)R(j\omega) - S(j\omega)R(j\omega)| < |S(j\omega)R(j\omega) + 1|, \quad \forall \omega,$$

neboli

$$\left| \frac{S'(j\omega)R(j\omega) - S(j\omega)R(j\omega)}{S(j\omega)R(j\omega)} \right| \cdot \left| \frac{S(j\omega)R(j\omega)}{S(j\omega)R(j\omega) + 1} \right| < 1, \quad \forall \omega.$$

Po dosazení za  $S'(j\omega) = (1 + \Delta S_m(j\omega))S(j\omega)$  dostaneme

$$|\Delta S_m(j\omega)| \cdot \left| \frac{S(j\omega)R(j\omega)}{S(j\omega)R(j\omega) + 1} \right| < 1, \quad \forall \omega.$$

neboli

$$\left| \frac{S(j\omega)R(j\omega)}{S(j\omega)R(j\omega) + 1} \right| < \left| \frac{1}{\Delta S_m(j\omega)} \right| < \frac{1}{f_m(\omega)}, \quad \forall \omega.$$

Není-li nominální regulační obvod stabilní, pak předchozí podmínky platí i v tomto případě, pokud ovšem neurčitost nemění počet nestabilních pólů. Při respektování neurčitosti se předchozí postačující podmínky staly podmínkami nutnými a postačujícími, protože jejich nesplněním lze nalézt přenos  $S'(j\omega)$ , který destabilizuje regulační obvod.

Zavedením doplňkového citlivostního operátoru  $\mathcal{T}$  můžeme podmínku robustní stability v jednorozměrovém případě vyjádřit ve tvaru

$$f_m(\omega) |\mathcal{T}| < 1, \quad \forall \omega.$$

Abychom zajistili stabilitu mnoharozměrového zpětnovazebního regulačního obvodu i při nestructurovaných změnách přenosové matice systému, je nutno zaručit, aby počet oběhů Nyquistovy křivky výrazu  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{S}'(s)\mathbf{R}(s))$  byl stejný jako počet oběhů výrazu  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)\mathbf{R}(s))$ , pro všechny  $\mathbf{S}'(s)$  omezené podle (1.12). Připomínáme, že dle předpokladu je počet nestabilních pólů  $\mathbf{S}'(s)$  vždy stejný jako počet nestabilních pólů nominálního systému  $\mathbf{S}(s)$ . Předchozí podmínka bude splněna právě tehdy, když  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{S}'(s)\mathbf{R}(s))$  zůstane nenulový, když se přenosová matice  $\mathbf{S}(s)$  spojitě mění na  $\mathbf{S}'(s)$ . To vede na podmínku

$$0 < \underline{\sigma}[\mathbf{I} + [\mathbf{I} + \epsilon \Delta \mathbf{S}_m(s)]\mathbf{S}(s)\mathbf{R}(s)]$$

pro všechny  $0 \leq \epsilon \leq 1$ ,  $s$  ležící na hranici oblasti stability a  $\Delta \mathbf{S}_m(s)$  takové, že splňuje (1.12). Po úpravě předchozího výrazu dostaneme nakonec podmínku

$$\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)(\mathbf{I} + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega))^{-1}] < \frac{1}{f_m(\omega)}, \quad (1.13)$$

pro  $0 \leq \omega \leq \infty$ .

Tím je omezen frekvenční průběh maximálního singulárního čísla přenosové matice řízení. Pokud je neurčitost velká ( $f_m(\omega) \gg 1$ ), dostaneme z (1.13) omezení na amplitudu

frekvenčního přenosu rozpojeného obvodu

$$\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)] < \frac{1}{f_m(\omega)}, \quad (1.14)$$

pro takové frekvence  $\omega$ , pro které  $f_m(\omega) \gg 1$ .

Předchozí podmínka je vlastně zobecnění požadavku pro jednorozměrové systémy: zesílení ve smyčce musí být malé, kdykoliv nestrukturovaná neurčitost je velká. Předchozí podmínka také plyne z takzvané **věty o malém zesílení** (Small gain theorem):

Aby zpětnovazební regulační obvod byl stabilní, stačí, aby byla splněna nerovnost

$$|\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)| < 1 \quad \text{pro} \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Přitom se v této postačující podmínce předpokládá, že systém i regulátor jsou stabilní. Obdobně pro mnohazměrové systémy je postačující podmínka stability mnohazměrového regulačního obvodu

$$\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)]\bar{\sigma}[\mathbf{R}(j\omega)] < 1 \quad (1.15)$$

pro  $0 \leq \omega < \infty$  a stabilní systém i regulátor.

Předchozí podmínky jsou zřejmé z Nyquistova kritéria stability. Pokud je zesílení ve smyčce menší než jedna, nemůže Nyquistova křivka obklíčit bod  $(-1, j0)$ , a pokud je rozpojený regulační obvod stabilní, bude stabilní i uzavřený regulační obvod.

Podmínka stability (1.13), resp. (1.14) při nestrukturované neurčitosti je nutná a postačující. Není tedy zbytečně konzervativní, jak by se mohlo na první pohled zdát. Pokud ji nesplníme, lze nalézt přípustnou přenosovou matici systému, která destabilizuje uzavřený regulační obvod.

### Podmínky na kvalitu řízení při neurčitosti

Opět budeme nejprve diskutovat uvedené podmínky pro jednorozměrový regulační obvod. Pro jeho stabilitu byl důležitý bod  $(-1, j0)$  a počet jeho obklíčení Nyquistovou křivkou rozpojeného regulačního obvodu. Bod  $(-1, j0)$  má velký význam i pro kvalitu regulačního obvodu. Požadavky na dobré frekvenční vlastnosti byly vyjádřeny vztahem  $f(\omega) \leq |1 + \mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)|$  pro  $f(\omega)$  dostatečně velkou kladnou funkci na aktivním rozsahu kmitočtů  $\omega \leq \omega_0$  - viz (1.3). To znamená, že frekvenční charakteristika rozpojeného regulačního obvodu v aktivním pásmu kmitočtů  $\omega \leq \omega_0$  leží mimo kruh se středem v bodě  $(-1, j0)$  a poloměrem  $f(\omega)$ . Požadavek na kvalitu nominálního systému můžeme vyjádřit podle (1.3) ve tvaru  $f(\omega) |\mathcal{S}| \leq 1$ ,  $\omega \leq \omega_0$ , kde  $\mathcal{S}$  je citlivostní operátor.

Tyto vlastnosti musíme zachovat i při neurčitosti. Připomeňme si, že podmínky robustní stability jsou  $f_m(j\omega) |\mathcal{T}| \leq 1$  na celém rozsahu kmitočtů, kde  $\mathcal{T}$  je doplňkový citlivostní operátor. Při multiplikativní neurčitosti se citlivostní operátor  $\mathcal{S}$  změní na  $\mathcal{S}'$ , kde

$$\mathcal{S}' = \frac{1}{1 + (1 + \Delta S_m(j\omega))\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)} = \frac{\mathcal{S}}{1 + \Delta S_m(j\omega) \mathcal{T}}.$$

Je možno ukázat, že v jednorozměrovém případě jsou nutné a postačující podmínky kvality řízení při neurčitosti

$$f(j\omega) |\mathcal{S}| + f_m(j\omega) |\mathcal{T}| \leq 1.$$

Frekvenční podmínky na kvalitu řízení v mnoharozměrovém případě byly uvedeny v (1.4). V našem případě při neurčitosti budou tyto podmínky vyjádřeny ve tvaru

$$f(\omega) \leq \underline{\sigma}[\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{S}_m(j\omega))\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)], \quad \forall \omega \leq \omega_0, \quad (1.16)$$

kde  $\Delta\mathbf{S}_m(j\omega)$  je multiplikativní neurčitost omezená (1.12),  $f(\omega)$  je kladná funkce „dostatečně velká“ (velikost této funkce v podstatě zajišťuje kvalitu řízení) a  $\omega_0$  ohraničuje aktivní frekvenční rozsah.

Úpravou předchozího výrazu dostaneme postačující podmínku pro zajištění kvality regulace při neurčitosti ve tvaru

$$\frac{f(\omega)}{1 - f_m(\omega)} \leq \underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]. \quad (1.17)$$

Předchozí nerovnost musí být splněna pro takové  $\omega$ , pro které je  $f_m(\omega) < 1$  a nejmenší singulární číslo  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)] \gg 1$ .

Předchozí vztah je opět zobecnění známého pravidla pro jednorozměrové systémy: pokud existují nějaké nestrukturované neurčitosti, pak nominální zesílení ve smyčce musí být dostatečně velké, aby zpětnovazební obvod byl schopen neurčitosti kompenzovat.

Podmínky stability a kvality řízení pro mnoharozměrové systémy jsou obdobné jako pro jednorozměrové systémy s tím, že místo klasických amplitudových frekvenčních charakteristik používáme frekvenční průběhy singulárních čísel. Singulární čísla nahrazují v mnoharozměrovém případě absolutní hodnoty. Vzhledem k tomu, že platí

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \in [\underline{\sigma}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|, \bar{\sigma}(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|],$$

musíme volit minimální singulární číslo, pokud je nerovnost typu  $\underline{\sigma} > (\dots)$ , a naopak maximální singulární číslo v případě nerovnosti typu  $\bar{\sigma} < (\dots)$ .

Podmínky robustní stability jsou obvykle zaručeny na vyšších frekvencích, kde je singulární číslo rozpojeného obvodu  $\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$  dostatečně malé. Naopak kvalita je zaručena obvykle na nízkých frekvencích, kde singulární číslo  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$  rozpojeného obvodu je dostatečně velké. Kolem mezní frekvence  $\omega_c$  (crossover frequency), kde  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}\mathbf{R}] \approx 1$  a také  $\bar{\sigma}[\mathbf{S}\mathbf{R}] \approx 1$ , je kvalita i robustní stabilita špatná. Kolem této mezní frekvence je třeba vyšetřovat sklon průběhu  $\underline{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$  a také  $\bar{\sigma}[\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{R}(j\omega)]$ , což odpovídá vyšetření fázových charakteristik v jednorozměrovém případě.

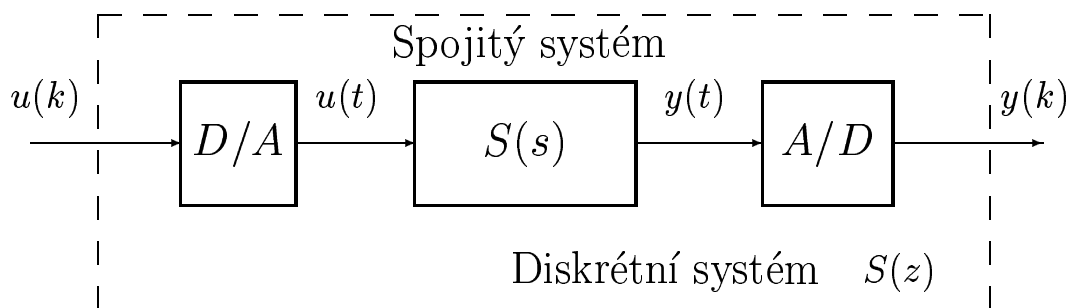
Protože se v dalších kapitolách skripta budeme převážně zabývat problematikou diskrétního řízení, věnujeme následující dvě sekce diskretizaci spojitého systému a analýze diskrétního regulačního obvodu.

### 1.3 Diskretizace spojitého systému

Při diskrétním řízení spojitého systému obvykle zařazujeme na jeho vstup číslicovo-analogový převodník a na jeho výstup převodník analogo-číslcový. Tyto převodníky tvoří interface mezi spojitym procesem a diskrétním řídicím členem realizovaném nejčastěji číslicovým počítačem. Spojitý systém spolu s převodníky je na obr. 1.6.

Připojením převodníků na vstup a výstup spojitého systému jsme vytvořili diskrétní systém - provedli jsme **diskretizaci spojitého systému**. Uvedeme proto souvislost vnitř-





Obrázek 1.6: Spojitý systém spolu se vstupním i výstupním převodníkem

ních a vnějších popisů původního spojitého systému a diskrétního systému vzniklého jeho diskretizací.

### 1.3.1 Diskretizace vnitřních popisů

Lineární spojitý systém je popsán stavovou rovnicí

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{1.18}$$

jejíž řešení je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}_c t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

kde  $\mathbf{x}(t_0)$  je počáteční stav systému v čase  $t_0$  a  $e^{\mathbf{A}_c t}$  je stavová matice přechodu spojitého systému.

Převodník analogo-číslíkový (A/D převodník) vybírá periodicky vzorky výstupní veličiny  $\mathbf{y}(t)$  spojitého systému. Proto se analogo-číslíkový převodník také nazývá **vzorkovací člen** nebo **vzorkovač**. Na výstupu tohoto převodníku je tedy posloupnost  $\mathbf{y}(k)$  a platí

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(t) \Big|_{t=kT_s},$$

kde  $T_s$  je perioda vzorkování převodníku.

Na vstupu převodníku D/A je diskrétní posloupnost  $\mathbf{u}(k)$  a na jeho výstupu je analogový signál  $\mathbf{u}(t)$ , který vstupuje do spojitého systému. Převodník D/A provádí „tvarování“ vstupní posloupnosti a proto se nazývá také **tvarovač** nebo **tvarovací člen**.

Převodník D/A, na jehož výstupu je po částech konstantní signál, se nazývá také **tvarovač nultého řádu**. Jeho výstup je tedy

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k) \quad \text{pro} \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s.$$

Předpokládejme nejprve, že oba převodníky pracují se stejnou periodou vzorkování a synchronně a vstupní převodník je tvarovač nultého řádu.

Řešení stavové rovnice (1.18) v čase  $t = kT_s$  je rovno

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T_s) &= e^{\mathbf{A}_c T_s} \mathbf{x}(kT_s) + e^{\mathbf{A}_c T_s} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{-\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c \mathbf{u}(kT_s) \\ \mathbf{y}(kT_s) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(kT_s) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(kT_s). \end{aligned}$$

Nahradíme-li nyní čas  $t = kT_s$  diskrétním časem  $k$ , mají předchozí stavové rovnice tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= e^{\mathbf{A}_c T_s} \mathbf{x}(k) + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (1.19)$$

To je vnitřní popis (stavové rovnice) diskrétního systému, který vznikl diskretizací spojitého systému. Spojitý systém určený maticemi  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c)$  jsme pomocí vstupního a výstupního převodníku převedli na ekvivalentní diskrétní systém určený maticemi  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , kde

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c T_s}, \quad \mathbf{B} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c. \quad (1.20)$$

Matice  $\mathbf{A}$  ekvivalentního diskrétního systému je rovna stavové matici přechodu spojitého systému pro  $t = T_s$ . Můžeme ji počítat numericky či analyticky podle vztahu

$$\mathbf{A} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \right\}_{t=T_s} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T_s + \frac{\mathbf{A}_c^2 T_s^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}_c^i T_s^i}{i!} + \dots \quad (1.21)$$

Podobně matici  $\mathbf{B}$  můžeme počítat podle vztahu

$$\mathbf{B} = \mathcal{L} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \frac{1}{s} \right\}_{t=T_s} = \left( \mathbf{I} T_s + \frac{\mathbf{A}_c T_s^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}_c^i T_s^{i+1}}{(i+1)!} + \dots \right) \mathbf{B}_c. \quad (1.22)$$

Nemáme-li velké nároky na přesnost výpočtu matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , můžeme v předchozích rozvoji uvažovat pouze členy prvního řádu. Pak přibližně platí

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T_s, \quad \mathbf{B} \doteq \mathbf{B}_c T_s.$$

Předchozí přibližné vztahy dostaneme také náhradou derivace první dopřednou diferencí ve stavových rovnicích spojitého systému. Předchozí přibližné vztahy lze použít při malých periodách vzorkování ve srovnání s dynamickými vlastnostmi systému.

### 1.3.2 Diskretizace vnějších popisů

Uvažujme opět spojitého systému s převodníky na vstupu i výstupu podle obr. 1.6. Vnější popis spojitého systému je určen jeho přenosem  $S(s)$  (při jedné vstupní i výstupní veličině). Diskrétní systém vzniklý spojením převodníků a spojitého systému podle obr. 1.6. bude mít vnější popis opět určený jeho přenosem  $S(z)$ , který souvisí s přenosem spojitého systému  $S(s)$  a závisí též na vlastnostech převodníků.

Nejprve se budeme zabývat vnějším popisem diskretizovaného systému při tvarovacím členu nultého řádu.

Obecně platí, že impulsní posloupnost  $g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}$  diskrétního systému s přenosem  $G(z)$  je rovna odezvě diskrétního systému na posloupnost  $u(k) = \delta(k)$ , (čili  $u(k) = 0$  pro

všechna  $k \neq 0$  a  $u(0) = 1$ ). Podle obr. 1.6 můžeme odezvu diskrétního systému, vzniklého diskretizací spojitého systému, snadno určit následujícím postupem.

Je-li  $u(k) = \delta(k)$ , pak na výstupu číslico-analogového převodníku (tvarovacího členu nultého řádu) je jednotkový puls o délce trvání rovné periodě vzorkování, čili  $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_s)$ . Odezva spojitého systému na jednotkový skok je přechodová funkce, která je rovna  $\int_0^t g(\tau) d\tau$ , kde  $g(t)$  je impulsní funkce spojitého systému.

Výstup  $y(t)$  spojitého systému, je-li vstupem  $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_s)$ , je tedy roven

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau - T_s) d\tau = \int_{t-T_s}^t g(\tau) d\tau.$$

Výstupem analogo-číslicového převodníku bude potom posloupnost

$$g_d(k) = y(t) \quad \text{pro} \quad t = kT_s,$$

vzniklá vzorkováním výstupu ze spojitého systému. Odtud plyne, že impulsní posloupnost diskretizovaného systému je rovna

$$g_d(k) = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} g(\tau) d\tau. \quad (1.23)$$

Jednotlivé členy impulsní posloupnosti  $g_d(k)$  diskretizací vzniklého diskrétního systému získáme podle předchozího vztahu integrací impulsní posloupnosti  $g(t)$  spojitého systému přes celou předchozí periodu vzorkování.  $\mathcal{Z}$  obraz impulsní posloupnosti  $g_d(k)$  je roven diskrétnímu přenosu  $S(z)$ .

Nyní se budeme zabývat vnějším popisem diskrétního systému vzniklého diskretizací spojitého systému při libovolném tvarovacím členu na vstupu spojitého systému.

Nejprve vyjádříme vstupní posloupnost  $u(k)$  ve tvaru

$$u^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) \delta(t - kT_s), \quad (1.24)$$

kde  $\delta(t - kT_s)$  je Diracův impuls v čase  $t = kT_s$ . Signál  $u^*(t)$  je výstupem **impulsního modulátoru**, který posloupností  $u(k)$  moduluje posloupnost Diracových impulsů a vytváří tak analogový signál  $u^*(t)$  podle předchozího vztahu. Tento impulsní modulátor ve skutečnosti neexistuje, umožňuje nám ale provést další úvahy.

Vlastní tvarovací člen tvaruje výstupní signál z impulsního modulátoru. Protože vstupní i výstupní signál z vlastního tvarovacího členu je analogový signál, je tvarovací člen spojitý systém, a pokud je lineární, pak jeho přenos označíme  $H(s)$ . Tvarovací člen nultého řádu má impulsní funkci  $h_0(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_s)$ , a proto jeho přenos je roven  $H_0(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_s})$ .

Výstupní signál ze spojitého systému je roven konvoluci impulsní funkce  $g(t)$  spojitého systému, impulsní funkce  $h(t)$  tvarovače a vstupního signálu  $u^*(t)$  z impulsního modulátoru

$$y(t) = g(t) * h(t) * u^*(t) = \int_0^{\infty} u^*(\tau) \int_0^{\infty} h(\nu) g(t - \tau - \nu) d\nu d\tau. \quad (1.25)$$

Po dosazení za  $u^*(t)$  z (1.24) dostaneme

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) \int_0^{\infty} h(\nu)g(t - kT_s - \nu)d\nu.$$

Z výstupního signálu  $y(t)$  spojitého systému vytváří analogo-číslicový převodník posloupnost  $y(k)$ , pro kterou platí  $y(k) = y(t)$ , pro  $t = kT_s$ . Podle předchozího vztahu tedy pro výstupní posloupnost  $y(i)$  platí

$$y(i) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) \int_0^{\infty} h(\nu)g(iT_s - kT_s - \nu)d\nu. \quad (1.26)$$

$\mathcal{Z}$ -obraz této posloupnosti je

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y(i)z^{-i}$$

a po dosazení

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \int_0^{\infty} h(\nu)g((i - k)T_s - \nu)d\nu z^{-i}.$$

Po změně sumační proměnné  $i - k = j$  dostaneme

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} h(\nu)g(jT_s - \nu)d\nu z^{-j}. \quad (1.27)$$

Předchozí vztah řeší náš problém souvislosti vnějších popisů spojitého systému a jeho diskretizací vzniklého systému diskrétního. Označíme  $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$  obraz vstupní diskrétní posloupnosti. Dále označíme  $g_c(t)$  impulsní funkci celé spojité části, pak

$$g_c(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau)h(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{S(s)H(s)\}. \quad (1.28)$$

Z (1.27) plyne

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{S(s)H(s)\}U(z), \quad (1.29)$$

kde výraz  $\mathcal{Z}\{S(s)H(s)\}$  chápeme tak, že provedeme nejprve součin přenosů spojitého systému a tvarovače  $S(s)H(s)$ , provedeme zpětnou transformaci tohoto součinu a podle (1.29) dostaneme impulsní funkci  $g_c(t)$  celé spojité části. Nyní za spojité čas  $t$  dosadíme  $kT_s$  a z impulsní funkce  $g_c(t)$  spojité části dostaneme posloupnost  $g_d(k) = g_c(t)$  pro  $t = kT_s$ . Konečně  $\mathcal{Z}$ -obraz posloupnosti  $g_d(k)$  je hledaný výraz  $\mathcal{Z}\{S(s)H(s)\}$ .

Přenos diskrétního systému  $S(z)$  vzniklého diskretizací spojitého systému podle obr. 1.6 je tedy roven

$$S(z) = \mathcal{Z}\{S(s)H(s)\}. \quad (1.30)$$

Předchozí vztah platí pro libovolný tvarovací člen (libovolný D/A převodník) popsany přenosem  $H(s)$ . Pro tvarovací člen nultého řádu platí

$$S(z) = \mathcal{Z}\{S(s)H_0(s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}(1 - e^{-sT_s})S(s)\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{S(s)\frac{1}{s}\right\}, \quad (1.31)$$

neboť dopravní zpoždění o celou periodu vzorkování se diskretizací změní na zpoždění o jeden krok, čili  $\mathcal{Z}\{e^{-sT_s}G(s)\} = z^{-1}G(z)$ . Přenos diskrétního systému můžeme také určit z jeho vnitřního popisu. Platí

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Pokud nemáme velké nároky na přesnost diskrétního popisu, můžeme použít přibližné metody převodu spojitého popisu na diskrétní. Tyto metody vycházejí z přibližných metod integrace diferenciálních rovnic spojitého systému.

Použijeme-li nejjednodušší obdélníkovou metodu integrace, pak

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(s) \Big|_{s = \frac{1}{T_s}(z-1)}.$$

Diskrétní přenos  $\mathbf{S}(z)$  získáme tedy podle předchozího výrazu tak, že do přenosu spojitého systému dosadíme za komplexní proměnnou  $s$  výraz  $\frac{1}{T_s}(z-1)$ .

Použijeme-li lichoběžníkovou metodu přibližné integrace, dostaneme následující vztah pro převod spojitého systému na systém diskrétní

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}},$$

nazývaný též **bilineární transformace**. Bilineární transformace transformuje mez stability spojitých systémů, kterou je imaginární osa, na mez stability diskrétních systémů, kterou je jednotková kružnice. Bilineární transformace se používá při vyšetřování stability diskrétních systémů spojitými kritérii a také při určování frekvenčních charakteristik diskrétních systémů.

### 1.3.3 Nesynchronní vzorkování vstupu a výstupu

Při diskrétním řízení spojitého systému často nepracují převodníky D/A a A/D synchronně. Budeme předpokládat, že výstupní převodník A/D provádí vzorkování výstupního signálu o čas  $\varepsilon T_s$  později, kde  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Převodník A/D vzorkuje tedy výstup systému  $y(t)$  v časech  $(k + \varepsilon)T_s$ , kde  $\varepsilon \in [0, 1)$  je relativní posunutí vzorkování výstupu vzhledem k vzorkování vstupního signálu - viz obr. 1.7.

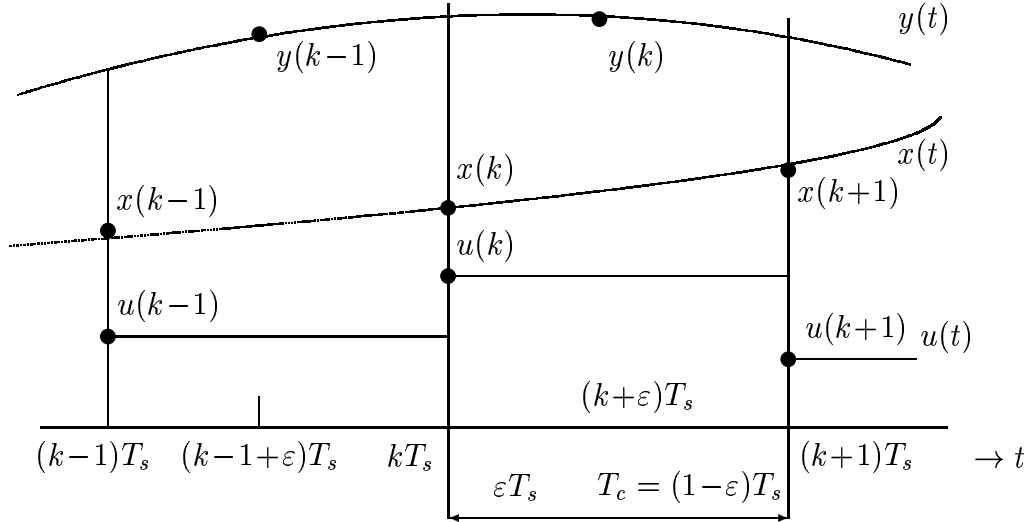
#### Nesynchronní vzorkování - souvislost vnitřních popisů

Vzorkování stavu nebudeme posouvat, a proto matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  budou stejné jako při synchronním vzorkování. Výstup systému je však vzorkován v čase  $t = (k + \varepsilon)T_s$ , a proto

$$\mathbf{y}((k + \varepsilon)T_s) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k + \varepsilon)T_s + \mathbf{D}_c \mathbf{u}((k + \varepsilon)T_s) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k + \varepsilon)T_s + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(k).$$

Poslední úprava plyne z toho, že během periody vzorkování je vstupní signál  $u(t)$  konstantní. Stav  $\mathbf{x}((k + \varepsilon)T_s)$  je roven

$$\mathbf{x}((k + \varepsilon)T_s) = e^{\mathbf{A}_c T_s \varepsilon} \mathbf{x}(kT_s) + \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k).$$



Obrázek 1.7: Nesynchronní vzorkování vstupu a výstupu

Po dosažení je výstup  $\mathbf{y}((k + \varepsilon)T_s)$  roven

$$\mathbf{y}((k + \varepsilon)T_s) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c T_s \varepsilon} \mathbf{x}(kT_s) + \left( \mathbf{C}_c \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \right) \mathbf{u}(k).$$

Spojité čas  $t$  nahradíme diskretním časem  $k$  a výstupní posloupnost  $\mathbf{y}(k)$  je podle předchozího vztahu rovna

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c T_s \varepsilon} \mathbf{x}(k) + \left( \mathbf{C}_c \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \right) \mathbf{u}(k). \quad (1.32)$$

Předchozí vztah je výstupní rovnice ekvivalentního diskretního systému při nesynchronním vzorkování. Matice  $\mathbf{A}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{B}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{C}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{D}_\varepsilon$  ekvivalentního diskretního systému při nesynchronním vzorkování dle obr. 1.7 jsou tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\varepsilon &= \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c T_s}, \\ \mathbf{B}_\varepsilon &= \mathbf{B} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c, \\ \mathbf{C}_\varepsilon &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}_c T_s \varepsilon}, \\ \mathbf{D}_\varepsilon &= \mathbf{D} + \mathbf{C} \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c. \end{aligned} \quad (1.33)$$

### Nesynchronní vzorkování - souvislost vnějších popisů

Pro vnější popisy budeme opět předpokládat, že systém má jedinou vstupní i výstupní veličinu. Výstup  $y(t)$  vzorkujeme v čase  $t = (k + \varepsilon)T_s$ . Proto platí

$$y(t) = y((k + \varepsilon)T_s) = y(k, \varepsilon, T_s).$$

Tím jsme získali posloupnost  $y(k, \varepsilon, T_s)$ , která má relativní posunutí  $\varepsilon$  a periodu vzorkování  $T_s$  jako parametr.  $\mathcal{Z}$  transformaci této posloupnosti provedeme podle vztahu

$$\mathcal{Z}\{y(k, \varepsilon, T_s)\} = Y(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k, \varepsilon, T_s) z^{-k}. \quad (1.34)$$

Obraz, který jsme označili  $Y(z, \varepsilon)$ , je závislý na parametru  $\varepsilon$ . Předchozí vztah definuje tak zvanou **modifikovanou  $\mathcal{Z}$  transformaci**. Předchozí vztah můžeme schematicky zapsat ve tvaru

$$Y(z, \varepsilon) = \mathcal{Z}_\varepsilon\{y(t)\}, \quad \text{nebo také} \quad Y(z, \varepsilon) = \mathcal{Z}_\varepsilon\{Y(s)\}, \quad (1.35)$$

kde  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ .

Obdobným postupem jako v předchozím odstavci odvodíme diskrétní přenos spojitého systému při nesynchronním vzorkování vstupních a výstupních převodníků. Platí

$$S(z, \varepsilon) = \mathcal{Z}_\varepsilon\{S(s)H(s)\},$$

kde  $S(s)$  je přenos spojitého systému a  $H(s)$  je přenos tvarovacího členu. Pro tvarovací člen nultého řádu, to je  $H = H_0$ , platí pro převod vztah

$$S(z, \varepsilon) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_\varepsilon\left\{S(s) \frac{1}{s}\right\}. \quad (1.36)$$

Přenos  $S(z, \varepsilon)$  můžeme získat také z vnitřního popisu systému  $(\mathbf{A}_\varepsilon, \mathbf{B}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{D}_\varepsilon)$ . Platí

$$\mathbf{S}(z, \varepsilon) = \mathbf{C}_\varepsilon(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_\varepsilon)^{-1}\mathbf{B}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon. \quad (1.37)$$

### Nesynchronní vzorkování pro $\varepsilon \rightarrow 1$

Někdy budeme provádět diskretizaci pro mezní případ, když  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Toto mezní posunutí vzorkování výstupu systému využijeme v následující sekci při rozboru činnosti zpětnovazebního diskrétního řídicího systému a uvažování doby výpočtu akčního zásahu. Odvodíme proto souvislost vnějších a vnitřních popisů pro  $\varepsilon = 0$  a vnějších a vnitřních popisů pro  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z, 0) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \\ \mathbf{S}(z, 1) &= \mathbf{C}_1(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1, \end{aligned} \quad (1.38)$$

kde matice  $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$  jsou rovny  $\mathbf{A}_\varepsilon, \mathbf{B}_\varepsilon, \mathbf{C}_\varepsilon, \mathbf{D}_\varepsilon$  pro  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Platí tedy

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}cT_s} = \mathbf{C}\mathbf{A}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D} + \mathbf{C} \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}c\tau} d\tau \mathbf{B}_c = \mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathbf{S}(z, 1) = \mathbf{C}\mathbf{A}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Předchozí vztah můžeme upravit dosazením

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = z^{-1}\mathbf{I} + z^{-2}\mathbf{A} + \dots + z^{-i-1}\mathbf{A}^i + \dots$$

Potom dostaneme

$$S(z, 1) = z \left[ C(zI - A)^{-1} B \right] + D. \quad (1.40)$$

Z předchozího porovnáním s (1.38) plyne, že přímá vazba mezi vstupem a výstupem systému je v přenosové matici  $S(z, 1)$  nezměněna a ryze dynamická část je násobena  $z$ . Je-li přenos  $S(z)$  (pro  $\varepsilon = 0$ ) ve tvaru

$$S(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0},$$

oddělíme přímou vazbu mezi vstupem a výstupem a dostaneme

$$S(z) = b_n + \frac{\bar{b}(z)}{a(z)} = D + C(zI - A)^{-1} B,$$

kde  $\bar{b}_i = b_i - b_n a_i$ . Přenos  $S(z, 1)$  je potom roven

$$S(z, 1) = b_n + z \frac{\bar{b}(z)}{a(z)}, \quad (1.41)$$

neboli

$$S(z, 1) = zS(z) + b_n(1 - z). \quad (1.42)$$

Předchozí vztah ukazuje souvislost vnějšího diskrétního popisu  $S(z)$  při synchronním vzorkování a diskrétního popisu  $S(z, 1)$  pro  $\varepsilon \rightarrow 1$ , což je vlastně také „synchronní vzorkování“, ale s posunutím o celou periodu vzorkování. Ryze dynamická část se násobí  $z$  a přímá vazba mezi vstupem a výstupem je beze změny. Často je v přenosu  $S(z)$  koeficient  $b_n = 0$ . To nastane tehdy, když původní spojitý systém je přísně ryzí. Potom je souvislost přenosů při diskretizaci jednoduchá a je rovna

$$S(z, 1) = zS(z) = z \frac{b(z)}{a(z)} \quad \text{pro } b_n = 0.$$

## 1.4 Diskrétní regulační obvod

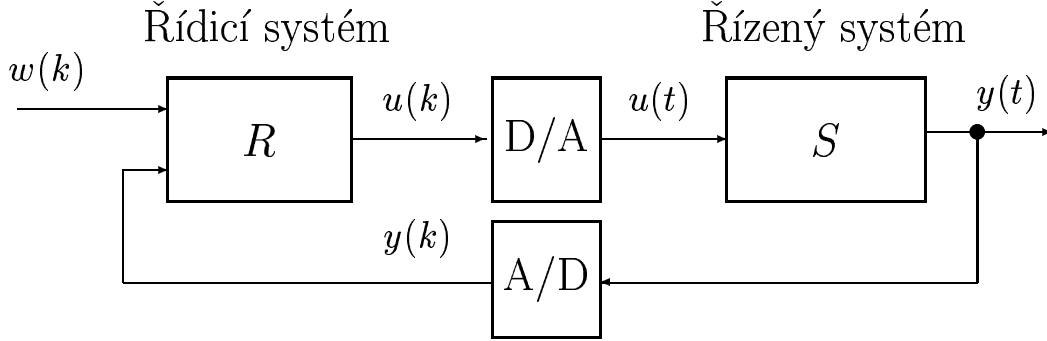
### 1.4.1 Realizovatelný zákon řízení

Blokové schéma číslicového regulačního obvodu je na obr. 1.8. Výstupem spojitého řízeného systému  $S$  je analogový signál (regulovaná veličina)  $y(t)$ . Tento signál se analogo-číslícovým převodníkem vzorkuje a vzorkovaný signál (posloupnost)  $y(k)$  vstupuje do řídicího členu  $R$ .

V řídicím členu (regulátoru)  $R$  doba výpočtu akčního zásahu  $u(t)$  ze změřených hodnot regulované veličiny  $y$  a žádané veličiny  $w$  může být krátká vzhledem k periodě vzorkování, je však vždy nenulová. Přitom řídicí systém může realizovat pouze kauzální zpětnovazební zákon řízení. To znamená, že akční zásah  $u(t)$  realizovaný za D/A převodníkem ve spojitém čase  $kT_s \leq t < (k+1)T_s$  může být vypočtený z regulované veličiny  $y$  změřené v čase  $t < kT_s$  a zpracované převodníkem A/D.

Abychom respektovali konečnou dobu výpočtu akčního zásahu  $u$ , je třeba zavést nesynchronní vzorkování vstupu a výstupu řízeného systému. Na obr. 1.9 je uvedeno indexování všech veličin regulačního obvodu.





Obrázek 1.8: Číslicové řízení spojitého systému

Časový interval  $T_c = (1 - \varepsilon)T_s$  (viz obr. 1.9) musí být vždy větší než doba výpočtu akčního zásahu v každém kroku. Časový interval  $T_c$  závisí na operační rychlosti řídicího členu a složitosti algoritmu řízení.

Pro výpočet akčního zásahu  $u(k)$  v čase  $t = kT_s$  je možno využít hodnoty regulované veličiny  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ ,  $\dots$ , a také řídicí veličiny  $w(k)$ ,  $w(k-1)$ ,  $w(k-2)$ ,  $\dots$ . Požadavek znalosti řídicí veličiny  $w(k)$  je přirozený, neboť řízení  $u(k)$  navrhujeme tak, aby se výstup  $y(k) \rightarrow w(k)$ . Pro určení akčního zásahu  $u(k)$  nelze tedy použít hodnotu regulované veličiny  $y(k)$ , neboť ji změříme až později. Tento poznatek je pro realizovatelný zákon řízení podstatný.

V některých případech (na příklad při programovém řízení) můžeme využít pro výpočet akčního zásahu  $u(k)$  i budoucí hodnoty řídicí veličiny  $w$ , to je i hodnoty  $w(k+1)$ ,  $\dots$

Proto je realizovatelný zákon řízení popsán vztahem

$$u(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, w(k), w(k-1), \dots).$$

Pokud je předchozí diferenční rovnice lineární, pak ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} u(k) = & -p_1u(k-1) - p_2u(k-2) - \dots - p_nu(k-n) - \\ & -q_0y(k-1) - q_1y(k-2) - \dots - q_ny(k-n-1) + \\ & +r_0w(k) + r_1w(k-1) + \dots + r_nw(k-n), \end{aligned} \quad (1.43)$$

kde  $p_i$ ,  $q_i$  a  $r_i$  jsou volitelné konstanty lineárního řídicího systému (číslicového regulátoru).  $\mathcal{Z}$ -transformací předchozí diferenční rovnice odvodíme přenos číslicového regulátoru. Zavedeme polynomy

$$\begin{aligned} p(z^{-1}) &= 1 + p_1z^{-1} + \dots + p_nz^{-n}, \\ q(z^{-1}) &= q_0 + q_1z^{-1} + \dots + q_nz^{-n}, \\ r(z^{-1}) &= r_0 + r_1z^{-1} + \dots + r_nz^{-n}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Obraz výstupu řídicího členu je potom roven

$$U(z) = -\frac{q(z^{-1})}{p(z^{-1})}z^{-1}Y(z) + \frac{r(z^{-1})}{p(z^{-1})}W(z). \quad (1.45)$$

Řídicí systém je diskrétní systém se dvěma vstupy  $Y$  a  $W$  a jedním výstupem  $U$ . Označme



Při tomto způsobu indexování diskretních veličin v regulačním obvodu má vždy řídicí člen ve zpětnovazební větvi zpoždění alespoň jeden krok a naopak řízený systém je bez zpoždění (pokud v původním spojitém řízeném systému není dopravní zpoždění).

Při syntéze řídicího systému jsme tedy omezeni tím, že zpětnovazební část regulátoru musí mít zpoždění alespoň jeden krok. Tuto formální závadu - řídicí systém (to je systém, který navrhujeme) musí mít zpoždění a naopak daný řízený systém je bez zpoždění - můžeme obejít následujícím způsobem

- Určíme vnitřní či vnější popis řízeného systému (regulované soustavy) pro zvolené nesynchronní vzorkování vstupu a výstupu, které závisí na době výpočtu  $T_c$  akčního zásahu. Tím dostaneme diskretní popis řízeného systému, který je často bez zpoždění.
- Jeden krok zpoždění, které musí mít realizovatelný zákon řízení, formálně přidáme do regulované soustavy a řídicí člen navrhujeme potom bez zpoždění. Syntézu řídicího členu můžeme tedy provádět bez omezení (samozřejmě řídicí zákon musí být kauzální).
- Zpoždění, které jsme formálně přidali k regulované soustavě, vrátíme po provedené syntéze regulátoru zpět do zpětnovazební větve řídicího členu, viz obr. 1.10.

### 1.4.2 Přenosy v regulačním obvodu

Uvažujme zpětnovazební regulační obvod podle obr. 1.8. Určíme modifikovaný  $\mathcal{Z}$  obraz posloupnosti  $y(k, \nu, T_s) = y((k+\nu)T_s)$ , vzniklé vzorkováním výstupu  $y(t)$  spojitého řízeného systému v čase  $t = (k+\nu)T_s$ . Modifikační faktor  $\nu$  zde je proto, že výstup je analogový signál. Pro  $0 \leq \nu < 1$  popisuje posloupnost  $y(k, \nu, T_s)$  výstup  $y(t)$  ve všech časových okamžicích. Modifikovaný obraz výstupu je roven

$$Y(z, \nu) = S(z, \nu)U(z), \quad (1.47)$$

kde výstup řídicího systému je roven (viz obr. 1.10)

$$U(z) = -z^{-1}R_1(z)Y(z, \varepsilon) + R_2(z)W(z). \quad (1.48)$$

Modifikační faktor  $\varepsilon$  závisí na době výpočtu  $T_c$  akčního zásahu. Připomeňme, že  $T_c = (1 - \varepsilon)T_s$ , a proto můžeme modifikační faktor  $\varepsilon$  vyjádřit jako

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_c}{T_s}. \quad (1.49)$$

Dosazením (1.48) do (1.47) dostaneme

$$Y(z, \nu) = S(z, \nu)(-z^{-1}R_1(z)Y(z, \varepsilon) + R_2(z)W(z)).$$

Pro  $\nu = \varepsilon$  plyne z předchozí rovnice

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{S(z, \varepsilon)R_2(z)}{1 + S(z, \varepsilon)z^{-1}R_1(z)}W(z). \quad (1.50)$$

Z (1.47) plyne

$$\frac{Y(z, \nu)}{Y(z, \varepsilon)} = \frac{S(z, \nu)}{S(z, \varepsilon)}.$$

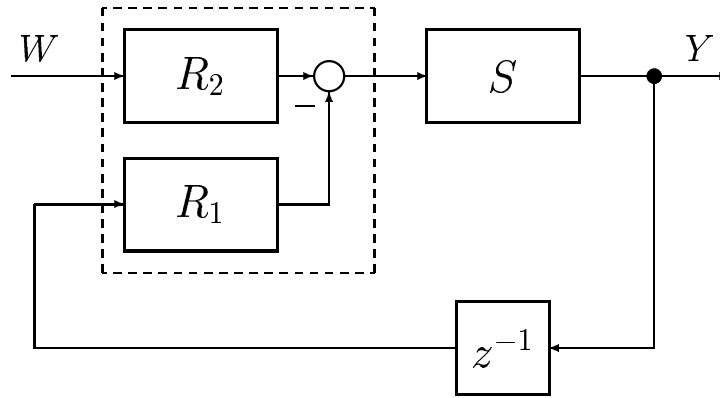
Proto z (1.50) plyne

$$Y(z, \nu) = \frac{S(z, \nu)R_2(z)}{1 + S(z, \varepsilon)z^{-1}R_1(z)}W(z) = G_w(z, \nu)W(z). \quad (1.51)$$

Přenos

$$G_w(z, \nu) = \frac{Y(z, \nu)}{W(z)} = \frac{S(z, \nu)R_2(z)}{1 + S(z, \varepsilon)z^{-1}R_1(z)} \quad (1.52)$$

nazýváme **modifikovaný přenos řízení**.



Obrázek 1.10: Realizovatelný regulační obvod

**Poznámka:** Uvědomme si znovu, že modifikační faktor  $\varepsilon = 1 - \frac{T_c}{T_s}$  ve jmenovateli přenosu řízení je určen dobou výpočtu akčního zásahu. Naopak modifikační faktor  $\nu$  váže diskrétní čas  $k$  se spojitým časem  $t$  vztahem  $t = (k + \nu)T_s$ .  $\square$

Označme přenosy řízeného systému

$$\begin{aligned} \frac{Y(z, \nu)}{U(z)} &= S(z, \nu) = \frac{b_\nu(z^{-1})}{a(z^{-1})}, \\ \frac{Y(z)}{U(z)} &= S(z, 0) = S(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}, \end{aligned}$$

kde  $a(z^{-1})$ ,  $b(z^{-1})$ ,  $b_\nu(z^{-1})$  jsou polynomy v  $z^{-1}$ . Po dosazení za přenosy  $R_1$  a  $R_2$  z (1.46) je přenos řízení roven

$$G_w(z, \nu) = \frac{b_\nu(z^{-1})r(z^{-1})}{a(z^{-1})p(z^{-1}) + b_\varepsilon(z^{-1})z^{-1}q(z^{-1})}.$$

Obraz odchylky  $e(k) = w(k) - y(k)$  je roven

$$E(z, \varepsilon) = W(z) - Y(z) = W(z) - G_w(z, \varepsilon)W(z) = (1 - G_w(z, \varepsilon))W(z),$$

a tudíž přenos odchylky je roven

$$G_e(z, \varepsilon) = \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{1 + (z^{-1}R_1(z) - R_2(z))S(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}R_1(z)S(z, \varepsilon)} =$$

$$\frac{a(z^{-1})p(z^{-1}) + b_{\varepsilon}(z^{-1})(z^{-1}q(z^{-1}) - r(z^{-1}))}{a(z^{-1})p(z^{-1}) + b_{\varepsilon}(z^{-1})z^{-1}q(z^{-1})}.$$

Řídíme-li regulační odchylkou, je zpětnovazební i přímovazební část regulátoru totožná (až na znaménko ve zpětnovazební větvi), a proto přenos odchylky je v tomto případě roven

$$G_e(z, \varepsilon) = \frac{a(z^{-1})p(z^{-1}) + b_{\varepsilon}(z^{-1})(z^{-1} - 1)q(z^{-1})}{a(z^{-1})p(z^{-1}) + b_{\varepsilon}(z^{-1})z^{-1}q(z^{-1})}. \quad (1.53)$$

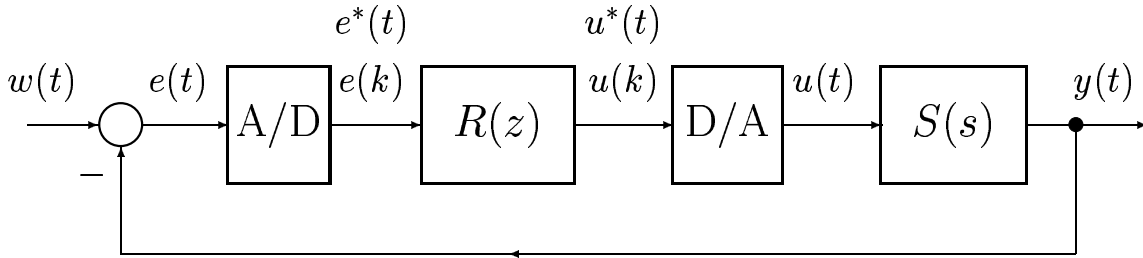
Zřejmě platí

$$G_e(z, \varepsilon) + G_w(z, \varepsilon) = 1. \quad (1.54)$$

### 1.4.3 Frekvenční charakteristiky diskrétního regulačního obvodu

V diskrétním regulačním obvodu pracuje řídicí systém (regulátor) diskrétním způsobem. Řízený systém jsme dosud při uvažování převodníků na jeho vstupu i výstupu popisovali také diskrétním způsobem. Je však třeba si uvědomit, že řízený systém je často spojitý systém a jeho výstupem je analogový signál, a tudíž nás zajímá průběh výstupu nejen v okamžicích vzorkování.

Proto je zajímavý „spojitý“ pohled na číslicový regulační obvod. Abychom to mohli provést, překreslíme si regulační obvod tak, že převodníky A/D i D/A umístíme před a za diskrétní řídicí systém - viz obr. 1.11.



Obrázek 1.11: Blokové schéma diskrétního řízení spojitého systému

**Poznámka:** Je třeba si uvědomit, že uvažujeme-li regulační obvod podle obr. 1.11, je tento regulační obvod nestacionární. Jeho odezva se liší podle toho, jak je vstupní signál  $w(t)$  synchronizovaný s periodou vzorkování. Nestacionarita se projeví pouze na frekvencích, které jsou násobkem Nyquistovy frekvence. Protože nás ale zajímá frekvenční rozsah  $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$ , nepřipadá toto omezení v úvahu.  $\square$

Vlastnosti všech členů regulačního obvodu jsme již podrobně diskutovali. Stručně je zopakujeme pro další úvahy.

Převodník A/D je vzorkovací člen, který provádí vzorkování regulační odchylky  $e(t)$ . Jeho výstup je

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(t)\delta(t - kT_s), \quad (1.55)$$

což je posloupnost Diracových impulsů modulovaná velikostí odchylky  $e(t)$  v časových okamžicích  $t = kT_s$ . Při tomto způsobu vzorkování (impulsní modulaci) je spektrum  $E^*(j\omega)$  výstupního signálu vzorkovače

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j(\omega - k\omega_s)), \quad (1.56)$$

kde  $\omega_s$  je vzorkovací frekvence a  $E(j\omega)$  je spektrum vstupního signálu vzorkovače. Je-li spektrum signálu  $e(t)$  omezené, pak platí věta o vzorkování. Pro základní frekvence  $\omega < \omega_s/2$  má vzorkovací člen zesílení  $1/T_s$ . Parazitní spektra můžeme zanedbat, pokud jsou filtrována řízeným systémem, který je ve většině případů dolnofrekvenční propust'. Další naše úvahy budou tedy platit pouze pro frekvence  $\omega < \omega_s/2$ . Mezní frekvence  $\omega_s/2 = \omega_N$  se nazývá **Nyquistova frekvence**.

**Poznámka:** Výstup převodníku A/D je ve skutečnosti číslicový - je to posloupnost čísel  $e(k)$ . Při „spojitém“ pohledu na číslicový regulační obvod místo posloupnosti  $e(k)$  uvažujeme signál  $e^*(t)$  definovaný (1.55), vzniklý impulsní modulací.

Podobně je tomu i na výstupu regulátoru  $R$ , kde místo posloupnosti  $u(k)$  uvažujeme signál  $u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t - kT_s)$ . Výstup číslicové (diskrétní) části regulačního obvodu - akční veličina  $u(t)$  - je touto impulsní modulací nezměněn.  $\square$

Diskrétní regulátor má přenos  $R(z)$ . Jeho frekvenční přenos označíme  $R(j\omega)$  a platí

$$R(j\omega) = R(z) \Big|_{z = e^{j\omega T_s}} = R(z^{-1}) \Big|_{z^{-1} = e^{-j\omega T_s}}. \quad (1.57)$$

Předchozí vztah názorně plyne z této úvahy. Je-li  $e^*(t) = \delta(t)$ , pak výstup regulátoru  $R$  je roven

$$u^*(t) = r_0\delta(t) + r_1\delta(t - T_s) + r_2\delta(t - 2T_s) + \dots, \quad (1.58)$$

kde  $r_i$  jsou hodnoty impulsní posloupnosti regulátoru. Platí tedy

$$R(z^{-1}) = \frac{q(z^{-1})}{p(z^{-1})} = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + \dots. \quad (1.59)$$

Laplaceův obraz rovnice (1.58) je roven

$$U^*(s) = r_0 + r_1e^{-sT_s} + r_2e^{-2sT_s} + \dots.$$

Přenos regulátoru v diskretní Laplaceově transformaci je roven

$$R^*(s) = \frac{U^*(s)}{E^*(s)} = r_0 + r_1e^{-sT_s} + r_2e^{-2sT_s} + \dots. \quad (1.60)$$

Porovnáním (1.59) a (1.60) plyne pro  $s = j\omega$  vztah (1.57).

Dalším členem v regulačním obvodu je D/A převodník - tvarovací člen. Uvažujeme-li tvarovací člen nultého řádu, je jeho frekvenční přenos roven

$$H_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_s}). \quad (1.61)$$

Konečně frekvenční přenos spojitého systému je  $S(j\omega)$ . Z předchozích úvah plyne, že

frekvenční přenos rozpojeného diskrétního regulačního obvodu je roven

$$G_{ol}(j\omega) = \frac{1}{T_s} S(j\omega) H_0(j\omega) R(z) \Big|_{z = e^{j\omega T_s}}. \quad (1.62)$$

Předchozí vztah určuje frekvenční charakteristiku rozpojeného diskrétního regulačního obvodu. Přitom je třeba stále mít na paměti existenci postranních pásem vzniklých vzorkováním spojitého signálu regulační odchylky. To znamená, že předchozí vztah pro frekvenční charakteristiku rozpojeného regulačního obvodu je použitelný pouze pro  $\omega < \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$ .

Známe-li frekvenční charakteristiku rozpojeného regulačního obvodu, můžeme používat pojmy jako je amplitudová a fázová bezpečnost, šířka pásma, stabilita podle Nyquista, frekvenční citlivostní funkce a podobně. Podle frekvenčních metod můžeme volit strukturu a parametry regulátoru tak, abychom splnili požadavky na průběh frekvenční charakteristiky rozpojeného či uzavřeného diskrétního regulačního obvodu.

## Část II

# Deterministické metody řízení





## Kapitola 2

# Kvadraticky optimální řízení

### 2.1 Formulace problému

Charakteristickým rysem „moderní“ teorie řízení je, že úloha návrhu regulátoru je formulována jako optimalizační problém. Zatímco při klasických metodách návrhu se k získání stabilního přenosu uzavřené regulační smyčky s požadovanou šířkou pásma a dostatečnou amplitudovou a fázovou bezpečností nastavovaly přímo parametry regulátoru, moderní metody obvykle splňují řadu základních požadavků implicitně (např. stabilitu) a navíc vedou na v jistém smyslu nejlepší regulátor. Inženýrským nástrojem k ladění regulátoru je pak nastavování parametrů optimalizačního kritéria.

Typickými příklady kritérií jsou například

$$J_1 = \sum_{t=0}^{N-1} 1, \quad \mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f,$$

jehož optimalizací dosáhneme přechodu z libovolného počátečního stavu  $\mathbf{x}(0)$  do žádaného koncového stavu  $\mathbf{x}_f$  v minimálním čase (počtu kroků), kritérium

$$J_2 = \sum_{t=0}^{N-1} |\mathbf{u}(t)|, \quad \mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f,$$

jehož optimalizací dosáhneme přechodu z libovolného počátečního stavu  $\mathbf{x}(0)$  do žádaného stavu  $\mathbf{x}_f$  s minimální „spotřebou paliva“, která je úměrná amplitudě řídicího vstupu, nebo kritérium

$$J_3 = \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f,$$

jehož optimalizací dosáhneme přechodu z libovolného počátečního stavu  $\mathbf{x}(0)$  do žádaného stavu  $\mathbf{x}_f$  s minimální vynaloženou energií, která je úměrná kvadratické funkci amplitudy řídicího vstupu. Není-li koncový stav pevně specifikován, ale chceme dosáhnout kompromisu mezi vynaloženou energií řízení a zároveň kompenzovat odchylky stavu systému od jeho

nulové (popř. referenční) hodnoty, dostaneme kvadratické kritérium ve tvaru

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\},$$

kde posloupnost matic  $\mathbf{R}(t)$  váží vynaloženou energii řízení a posloupnost matic  $\mathbf{Q}(t)$  váží odchylky stavu od nulové hodnoty.

Podobně chceme-li, aby výstup řízeného systému sledoval danou referenční trajektorii  $\mathbf{r}(t)$  a dosáhnout přitom kompromisu mezi vynaloženou řídicí energií a kvalitou sledování referenční hodnoty, je vhodné použít kvadratické kritérium ve tvaru

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ (\mathbf{y}(t) - \mathbf{r}(t))^T \mathbf{Q}_y(t) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\},$$

kde posloupnost matic  $\mathbf{R}(t)$  váží vynaloženou energii řízení a posloupnost matic  $\mathbf{Q}_y(t)$  váží odchylky výstupu od referenční hodnoty.

Zatímco vlastní optimalizace je spíše záležitostí matematickou, kritérium optimality volí inženýr, který navrhuje regulátor, tak, aby co nejlépe reprezentovalo požadované vlastnosti regulátoru; zároveň však je třeba formulovat kritérium tak, aby optimalizační úloha byla řešitelná v rozumném čase, regulátor byl snadno implementovatelný a aby bylo možno garantovat vlastnosti regulátoru významné z hlediska praktického použití (stabilita, robustnost apod.).

V teorii řízení je velmi často používané kvadratické kritérium. Vede k tomu řada důvodů; uvedme například skutečnost, že:

- úlohy kvadratické optimalizace jsou poměrně snadno řešitelné
- řadu optimalizačních kritérií lze v okolí jejich minima aproximovat kvadratickou funkcí
- pro soustavu linearizovanou v okolí daného pracovního bodu je optimální regulátor rovněž lineární a lze ho realizovat stavovou zpětnou vazbou
- pro nekonečný horizont optimalizace lze najít časově invariantní regulátor, který stabilizuje (za známých podmínek) řízenou soustavu
- tento časově invariantní regulátor má příznivé vlastnosti z hlediska robustnosti (zvláště ve spojitém případě).

V této kapitole problematiku **kvadraticky optimálních** regulátorů pro **lineární** systémy, nazývané též LQ (linear quadratic) regulátory, podrobně rozebereme. Budeme přitom rozlišovat dvě základní úlohy. Úloha **kvadraticky optimální regulace** řeší problém optimálního přechodu z daného stavu  $\mathbf{x}_0$  do počátku. Lze ji interpretovat např. jako úlohu optimální kompenzace poruch, jejichž působením byl stav systému vychýlen z požadované nulové (referenční) hodnoty. Obecnější úlohou je úloha **kvadraticky optimálního sledování**, kdy požadujeme, aby výstup soustavy sledoval požadovanou (nenulovou) referenční trajektorii. V obou případech budeme nejprve předpokládat, že stav řízeného systému je plně měřitelný.

Nejprve odvodíme nutné podmínky optimality, jejichž splnění vede na řešení tzv. dvoubodového okrajového problému, a ukážeme alternativní způsob řešení úlohy metodou

dynamického programování. Dále ukážeme některé významné vlastnosti LQ optimálních regulátorů a některé výpočetní metody použitelné pro návrh regulátoru. Nakonec se budeme věnovat úloze optimálního sledování a ukážeme některé modifikace optimálního regulátoru, zvyšující jeho praktickou využitelnost.

Jestliže stav řízeného systému není dostupný, je třeba ho vhodným způsobem rekonstruovat. Řešení úlohy kvadraticky optimální regulace využívající pouze zpětné vazby od **výstupu** řízené soustavy ukážeme v kapitole 8.

## 2.2 Dvoubodový okrajový problém

Uvažujme diskrétní dynamický systém popsáný diferenční rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Budeme hledat řízení  $\mathbf{u}(0), \dots, \mathbf{u}(N-1)$ , které minimalizuje ztrátovou funkci (kritérium optimality) ve tvaru

$$J = \Phi(\mathbf{x}(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (2.2)$$

kde  $N$  nazýváme **horizont optimalizace**.

Z hlediska matematického programování jde o problém minimalizace kritéria (2.2) s  $N$  omezujícími podmínkami typu rovnosti (2.1). Tuto třídu úloh lze řešit použitím **Lagrangeových multiplikátorů**  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ . Definujme rozšířené kritérium

$$\bar{J} = \Phi(\mathbf{x}(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t+1) \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \mathbf{x}(t+1) \right) \right\}. \quad (2.3)$$

Definujeme-li dále skalární posloupnost

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t+1) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (2.4)$$

kde  $t = 0, \dots, N-1$ , lze rozšířené kritérium zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \Phi(\mathbf{x}(N)) - \boldsymbol{\lambda}^T(N) \mathbf{x}(N) + H(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), 0) + \\ &+ \sum_{t=1}^{N-1} \left\{ H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{x}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pro zjednodušení budeme dále používat stručný zápis

$$\begin{aligned} H(t) &= H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ L(t) &= L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned}$$

a podobně i pro další použité funkce.

Je-li funkce  $\bar{J}$  diferencovatelná vzhledem k proměnným  $\mathbf{x}(t)$  a  $\mathbf{u}(t)$ , lze přírůstek kritéria  $\bar{J}$  podél dané trajektorie stavu a řízení určit jako

$$\begin{aligned} d\bar{J} &= \left[ \frac{\partial \Phi(N)^T}{\partial \mathbf{x}(N)} - \boldsymbol{\lambda}^T(N) \right] d\mathbf{x}(N) + \frac{\partial H(0)^T}{\partial \mathbf{x}(0)} d\mathbf{x}(0) + \frac{\partial H(0)^T}{\partial \mathbf{u}(0)} d\mathbf{u}(0) + \\ &+ \sum_{t=1}^{N-1} \left\{ \left[ \frac{\partial H(t)^T}{\partial \mathbf{x}(t)} - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \right] d\mathbf{x}(t) + \frac{\partial H(t)^T}{\partial \mathbf{u}(t)} d\mathbf{u}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Přitom pro vektor (vektor bez transpozice považujeme vždy za **sloupcový** vektor)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a skalární funkci vektorového argumentu  $g(\mathbf{x})$  definujeme derivaci této funkce podle vektorového argumentu (gradient funkce  $g$ ) jako vektor

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

a přírůstek této funkce pak je

$$dg(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n.$$

Je-li funkce  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  definována jako

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

potom její derivace jsou

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

a

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Pro vektorovou funkci vektorového argumentu  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  definujeme derivaci této funkce podle vektorového argumentu jako **matici**

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^T}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m^T}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Tuto matici nazýváme **Jacobiho matice**.

Diferenciální změny  $d\mathbf{x}(t)$  způsobené diferenciálními změnami  $d\mathbf{u}(t)$  mohou být určeny na základě (2.1) jako

$$d\mathbf{x}(t+1) = \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} d\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} d\mathbf{u}(t),$$

uvažování jejich vlivu se však můžeme vyhnout, **zvolíme-li** hodnoty Lagrangeových multiplikátorů tak, aby přírůstky  $d\mathbf{x}(t)$  rozšířené kritérium neovlivňovaly. Formálně lze tuto podmínku formulovat tak, že požadujeme  $\partial \bar{J} / \partial \mathbf{x}(t) = 0$ . Dostaneme tak podmínky

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} - \boldsymbol{\lambda}(t) &= 0, \quad t = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial \Phi(N)}{\partial \mathbf{x}(N)} - \boldsymbol{\lambda}(N) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

a odtud na základě definice funkcí  $H(t)$  (2.4) plynou diferenční rovnice

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{\partial L(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \boldsymbol{\lambda}(t+1), \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (2.8)$$

s koncovou podmínkou

$$\boldsymbol{\lambda}(N) = \frac{\partial \Phi(N)}{\partial \mathbf{x}(N)}. \quad (2.9)$$

Přírůstek kritéria (2.6) pro takto určené Lagrangeovy multiplikátory pak bude mít hodnotu

$$d\bar{J} = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{u}(t)}^T d\mathbf{u}(t), \quad (2.10)$$

neboť pro pevně danou počáteční podmínku  $\mathbf{x}(0)$  je rovněž  $d\mathbf{x}(0) = 0$ . Výraz  $\partial H(t) / \partial \mathbf{u}(t)$  lze interpretovat jako gradient kritéria  $J$  vzhledem k posloupnosti řízení  $\mathbf{u}(t)$  s respektováním omezení daných rovnicemi systému (2.1). Nutnou podmínkou optimality řízení  $\mathbf{u}^*(t)$  je, aby přírůstek kritéria (2.10) byl v okolí optimální trajektorie vstupu  $\mathbf{u}^*(t)$  nulový pro libovolné  $d\mathbf{u}(t)$ . To znamená, že posloupnost  $\mathbf{u}^*(t)$  musí být **stacionárním bodem** kritéria  $J$ . Musí tedy platit

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0, \quad t = 0, \dots, N-1. \quad (2.11)$$

Shrneme-li dosavadní úvahy, pak k nalezení stacionárního bodu kritéria je třeba nalézt řešení soustavy diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \frac{\partial H(t)}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &= \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} = \frac{\partial L(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \boldsymbol{\lambda}(t+1), \quad t = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \boldsymbol{\lambda}(N) &= \frac{\partial \Phi(N)}{\partial \mathbf{x}(N)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

a řízením  $\mathbf{u}^*(t)$  splňujícím

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}(t)} + \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \boldsymbol{\lambda}(t+1) = 0. \quad (2.14)$$

Protože okrajové podmínky (2.13) jsou rozdělené do dvou časových bodů, počáteční podmínky pro  $\mathbf{x}$  jsou dány v čase  $t = 0$  a počáteční podmínky pro  $\boldsymbol{\lambda}$  jsou dány v čase  $t = N$ , nazýváme tento problém **dvoubodový okrajový problém** (two-point boundary-value problem). Všimněte si dále, že rovnice (2.12) jsou vzájemně provázány prostřednictvím řízení  $\mathbf{u}(t)$ , které je dáno rovnicí (2.14). Řešení tohoto problému je proto – až na speciální případy, mezi které patří též problém kvadraticky optimálního řízení – velmi obtížné.

Rovnice (2.12)–(2.14) popisují pouze **nutné** podmínky extrému kritéria pro posloupnost  $\mathbf{u}^*(t)$ . Aby kritérium nabývalo pro posloupnost  $\mathbf{u}^*(t)$  lokálního minima, je třeba určit přírůstek kritéria  $d^2 J$ , tj. včetně členů druhého řádu. Protože  $\mathbf{u}^*(t)$  je stacionární bod, je přírůstek daný členy 1. řádu nulový a platí

$$\begin{aligned} d^2 J &= \frac{1}{2} d\mathbf{x}^T(N) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}(N) \partial \mathbf{x}(N)} d\mathbf{x}(N) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^T(t) & d\mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(t)}{\partial \mathbf{x}(t) \partial \mathbf{x}(t)} & \frac{\partial^2 H(t)}{\partial \mathbf{x}(t) \partial \mathbf{u}(t)} \\ \frac{\partial^2 H(t)}{\partial \mathbf{u}(t) \partial \mathbf{x}(t)} & \frac{\partial^2 H(t)}{\partial \mathbf{u}(t) \partial \mathbf{u}(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}(t) \\ d\mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde matice druhých derivací je definována jako

$$\frac{\partial^2 H(t)}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

Hodnoty přírůstků  $d\mathbf{x}(t)$  způsobené změnami  $d\mathbf{u}(t)$  jsou dány podle (2.1) diferenciální rovnicí

$$d\mathbf{x}(t+1) = \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} d\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} d\mathbf{u}(t) \quad (2.16)$$

s počáteční podmínkou  $d\mathbf{x}(0) = 0$ . Postačující podmínkou (druhého řádu) pro minimum kritéria (2.2) pak je  $d^2 J_f(d\mathbf{u}) \geq 0$  – viz např. (Bryson a Ho, 1975), kde symbolem  $d^2 J_f$  označujeme přírůstek kritéria s respektováním omezení (2.16).

Nyní budeme aplikovat tyto výsledky na problém optimálního řízení **lineárního** systému s **kvadratickým** kritériem optimality. Uvažujme lineární diskrétní časově proměnný systém popsany stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.17)$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  a kvadratické kritérium optimality

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\}, \quad (2.18)$$

kde  $\mathbf{Q}(t)$ ,  $t = 0, \dots, N$  je posloupnost pozitivně semidefinitních matic a  $\mathbf{R}(t)$ ,  $t = 0, \dots, N-1$  je posloupnost pozitivně definitních matic.

Posloupnost funkcí  $H(t)$  bude podle (2.4) dána

$$H(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t+1) (\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)). \quad (2.19)$$

Aby posloupnost  $\mathbf{u}^*(t)$  vedla na stacionární bod kritéria (2.18) s omezením (2.17), musí podle (2.12)–(2.14) platit

$$\mathbf{x}(t+1) = \frac{\partial H(t)}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t+1)} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t+1), \quad \boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N), \quad (2.21)$$

$$0 = \frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t+1). \quad (2.22)$$

Z rovnice (2.22) dostaneme

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t+1), \quad (2.23)$$

kde inverze matice  $\mathbf{R}(t)$  existuje vzhledem k předpokladu, že matice  $\mathbf{R}(t)$  jsou pozitivně definitní. Dosazením tohoto řízení do (2.20) a (2.21) dostaneme výslednou soustavu lineárních diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t+1), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\lambda}(t+1), & \boldsymbol{\lambda}(N) &= \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tuto soustavu můžeme zapsat maticově jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{Q}(t) & \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Řešení tohoto dvoubodového okrajového problému pak umožňuje určit optimální řídicí posloupnost (2.23). Soustavu (2.24) můžeme též zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ 0 & \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & 0 \\ -\mathbf{Q}(t) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

a pro matici  $\mathbf{A}(t)$  regulární, což za předpokladu, že diskretní systém vznikl vzorkováním spojitého systému (bez dopravního zpoždění), platí vždy,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & 0 \\ -\mathbf{Q}(t) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ 0 & \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(t) & \mathbf{A}^{-1}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \\ \mathbf{Q}(t) \mathbf{A}^{-1}(t) & \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{A}^{-1}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Tato soustava se již vyvíjí celá zpět v čase. Do rovnice (2.27) lze také snadno zahrnout počáteční podmínku rovnice (2.21)

$$\boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N),$$



neboť v čase  $t = N-1$  lze psát

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(N-1) \\ \boldsymbol{\lambda}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(N-1) & 0 \\ -\mathbf{Q}(N-1) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}(N-1)\mathbf{R}^{-1}(N-1)\mathbf{B}^T(N-1) \\ 0 & \mathbf{A}^T(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}(N) \end{bmatrix} \mathbf{x}(N). \quad (2.29)$$

Odtud je vidět, že pro regulární matice  $\mathbf{A}(t)$  lze v každém časovém okamžiku vyjádřit vektor Lagrangeových multiplikátorů  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  ve tvaru

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t),$$

kde  $\mathbf{P}(t)$  je vhodná matice. Zjistili jsme tedy, že stav systému a vektor Lagrangeových multiplikátorů (nazývaný též **kostav** nebo stav **adjungovaného systému**) jsou na sobě lineárně závislé. Této vlastnosti lze využít k řešení dvoubodového okrajového problému (tzv. backward sweep method). Předpokládejme, že  $\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$ . Potom (2.22) lze psát jako

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{x}(t+1) \\ &= \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)(\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)) \\ &= [\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)]\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Z (2.30) dostaneme pro řízení  $\mathbf{u}(t)$  vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -[\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Regularita matice  $\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)$  plyne z regularity matice  $\mathbf{R}(t)$ . Tato podmínka je však zbytečně omezující a místo požadavku regularity matice  $\mathbf{R}(t)$  stačí nadále předpokládat, že je splněna slabší podmínka, kterou je regularita matice  $\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)$ .

Kvadraticky optimální řízení tedy vede na zákon řízení ve tvaru časově proměnné zpětné vazby od stavu systému se zesílením

$$\mathbf{K}(t) = [\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t). \quad (2.32)$$

Dosazením tohoto zákona řízení do rovnice (2.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \\ &\quad - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) [\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Tato podmínka bude splněna pro libovolný stav  $\mathbf{x}(t)$ , jestliže posloupnost matic  $\mathbf{P}(t)$  bude vyhovovat **maticové diferencční rovnici**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \\ &\quad - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) [\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

s koncovou podmínkou

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N), \quad (2.34)$$

která plyne z koncové podmínky rovnice (2.21). Rovnici (2.33) nazýváme **Riccatiho diferenciální rovnice**.

Riccatiho diferenciální rovnici lze též upravit na tvar

$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t))^T \mathbf{P}(t+1) (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)) + \mathbf{K}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (2.35)$$

(ukážte!), kde matice  $\mathbf{P}(t)$  je dána (je-li matice  $\mathbf{P}(t+1)$  symetrická a pozitivně semidefinitní) součtem symetrických pozitivně semidefinitních matic. Plyne odtud důležitá vlastnost řešení Riccatiho rovnice, že pro počáteční podmínku  $\mathbf{Q}(N) = \mathbf{Q}^T(N) \geq 0$  jsou všechny matice  $\mathbf{P}(t)$  rovněž **symetrické** a **pozitivně semidefinitní**. Z tohoto hlediska je rovnice (2.35) pro výpočet vhodnější než (2.33), kde může dojít ke ztrátě pozitivní semidefinitnosti matice  $\mathbf{P}(t)$  vlivem numerických chyb při odčítání.

Posloupnost kroků při hledání optimálního řízení je tedy následující: nejprve řešíme **zpětně v čase** Riccatiho rovnici, tj. začneme počáteční podmínkou (2.34) a pokračujeme pro čas  $t = N-1, N-2, \dots, 0$ . Získáme posloupnost matic  $\mathbf{P}(t)$ , kterou uložíme. Posloupnost optimálního řízení je dána podle (2.31) časově proměnnou zpětnou vazbou od stavu se zesílením (2.33). Protože dimenze vektoru řízení je většinou menší než dimenze vektoru stavu, je výhodnější při řešení Riccatiho rovnice napočítat přímo koeficienty stavové zpětné vazby (2.33) a ukládat posloupnost  $\mathbf{K}(t)$  místo posloupnosti  $\mathbf{P}(t)$ .

Řešení Riccatiho diferenciální rovnice lze získat rovněž na základě rovnic (2.27) a (2.29). Předpokládejme, že matice  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{Y}(t)$  jsou řešením diferenciální rovnice (2.27), tj. platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & 0 \\ -\mathbf{Q}(t) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \\ 0 & \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t+1) \\ \mathbf{Y}(t+1) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

s koncovou podmínkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(N) \\ \mathbf{Y}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{Q}(N) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Potom pro libovolný koncový stav  $\mathbf{x}(N)$  platí ve zpětnovazebním obvodu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t)\mathbf{x}(N), \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &= \mathbf{Y}(t)\mathbf{x}(N). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Protože zároveň pro libovolný koncový stav  $\mathbf{x}(N)$  platí

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{x}(N) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{x}(N),$$

dostaneme tak (pro  $\mathbf{X}(t)$  regulární) řešení Riccatiho rovnice ve tvaru

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{X}^{-1}(t).$$

Řešení Riccatiho diferenciální rovnice, což je **kvadratická** maticová diferenciální rovnice, lze tedy určit z řešení **lineární** maticové diferenciální rovnice (2.36). Tento výsledek použijeme později k nalezení ustáleného řešení Riccatiho rovnice v případě optimalizace na nekonečném horizontu.

Ukázali jsme, že optimální řídicí posloupnost vyhovující nutným podmínkám optimality, tj. podmínkám prvního řádu, lze nalézt pomocí řešení Riccatiho rovnice. Ukážeme nyní též postačující podmínky optimality, tj. podmínky druhého řádu. Pro obecné kritérium jsme odvodili přírůstek kritéria  $d^2J$  (2.15). V případě kvadratického kritéria (2.18) dostaneme

$$\begin{aligned} d^2J &= \frac{1}{2}d\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)d\mathbf{x}(N) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}^T(t) & d\mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x}(t) \\ d\mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

s omezením plynoucím z (2.17)

$$d\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)d\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)d\mathbf{u}(t) \quad (2.40)$$

s počáteční podmínkou  $d\mathbf{x}(0) = 0$ . Všimneme-li si, že platí

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t+1)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N) - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0), \end{aligned}$$

můžeme kritérium (2.18) upravit přičtením levé a odečtením pravé strany této rovnosti a využitím počáteční podmínky Riccatiho rovnice  $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N)$  na tvar

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t+1)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{x}(t+1) + \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní za  $\mathbf{x}(t+1)$  podle (2.17), dostaneme

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t))\mathbf{x}(t) + \right. \\ &\quad + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \\ &\quad \left. + \mathbf{u}^T(t)(\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) + \mathbf{R}(t))\mathbf{u}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Nahradíme-li nyní první člen sumace podle Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t) = \\ &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t), \end{aligned}$$

dostaneme po úpravě výraz pro kritérium optimality ve tvaru

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) + \quad (2.41)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\| \mathbf{u}(t) + \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \right\|_{\mathbf{R}(t)+\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)}^2,$$

kde výrazem

$$\| \mathbf{x} \|_P^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

značíme čtverec normy vektoru s maticí  $\mathbf{P}$ . Odtud je vidět, že volíme-li řízení podle optimálního zákona řízení (2.31), je optimální hodnota kritéria

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0). \quad (2.42)$$

Protože předchozí úvahu můžeme provést i pro libovolný počáteční čas  $t_0$ , dospěli jsme tak k zajímavé interpretaci matice  $\mathbf{P}(t_0)$  jako jádra kvadratické formy, určující optimální hodnotu kvadratického kritéria.

Nyní tento výsledek využijeme k dokončení odvození postačujících podmínek optimality. Protože výraz pro přírůstek kritéria  $d^2 J$  (2.39) a omezení (2.40) mají pro lineární systém a kvadratické kritérium shodný tvar s rovnicemi původního kritéria a systému, lze vztah (2.39) upravit na základě (2.41) na tvar

$$\begin{aligned} d^2 J &= \frac{1}{2} d\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) d\mathbf{x}(0) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\| d\mathbf{u}(t) + \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) d\mathbf{x}(t) \right\|_{\mathbf{R}(t)+\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tento přírůstek kritéria nabývá svého minima, je-li při perturbaci počátečního stavu  $d\mathbf{x}(0)$  posloupnost přírůstků řízení určena jako

$$d\mathbf{u}(t) = - \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) d\mathbf{x}(t).$$

Uvažujeme-li nyní optimální trajektorii  $\mathbf{x}^*(t)$ , danou počátečním stavem  $\mathbf{x}_0$  a optimální řídicí posloupností  $\mathbf{u}^*(t)$ , plyne z počáteční podmínky  $d\mathbf{x}(0) = 0$  pro pozitivně definitní matice

$$\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) > 0, \quad (2.44)$$

že rovněž  $d\mathbf{u}(0) = 0$ , odtud z (2.40) rovněž  $d\mathbf{x}(1) = 0$  a postupně  $d\mathbf{u}(t) = 0$ ,  $d\mathbf{x}(t+1) = 0$  pro všechna  $t = 0, \dots, N-1$ . Proto pro  $d\mathbf{x}(0) = 0$  je za předpokladu (2.44) pro libovolná  $d\mathbf{u}(t) \neq 0$  přírůstek kritéria

$$dJ = 0, \quad d^2 J > 0, \quad (2.45)$$

což je právě **postačující** podmínka pro minimum kritéria.

Shrneme-li výsledky tohoto odstavce, pak řízení lineárního systému (2.17) minimalizující kritérium (2.18) je dáno stavovou zpětnou vazbou (2.32). Posloupnost časově proměnných zesílení  $\mathbf{K}(t)$  je dána (2.31) a závisí na posloupnosti matic  $\mathbf{P}(t)$ , daných za předpokladu, že  $\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) > 0$  pro všechna  $t$ , řešením Riccatiho diferenční rovnice (2.33) s počáteční podmínkou (2.34). Přitom obě posloupnosti lze napočítat předem, neboť nezávisí na počáteční hodnotě stavu systému  $\mathbf{x}_0$ . Postačující podmínkou pro minimum pak je nerovnost (2.44) a může být rovněž ověřena předem.

### 2.3 Dynamické programování

Úlohu kvadraticky optimálního řízení lze řešit alternativním způsobem použitím tzv. **dynamického programování**. Tato metoda je založená na myšlence, nazývané obvykle **princip optimality**. Předpokládejme, že pro každý počáteční čas  $t_0$  je definována **ztrátová funkce**

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}_{t_0}^{N-1}, t_0), \quad \text{kde } \mathbf{u}_{t_0}^{N-1} = \{\mathbf{u}(t_0), \dots, \mathbf{u}(N-1)\},$$

kteřá je aditivní, tj. celková ztráta je součtem ztrát v jednotlivých podintervalech horizontu optimality. Budeme hledat řízení, které tuto ztrátovou funkci minimalizuje. Princip optimality předpokládá, že optimální řízení je určeno posloupností funkcí stavu řízeného systému a ukazuje, že tato posloupnost funkcí nezávisí na předchozí historii systému. Lze jej formulovat takto :

**Věta 1 (Princip optimality.)** *Předpokládejme, že  $\mathbf{u}(\cdot)$  je optimální řídicí posloupnost na horizontu  $t = 0, 1, \dots, N-1$  a že do času  $t$  byla aplikována posloupnost řízení  $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(t-1)$ , která přivedla soustavu do stavu  $\mathbf{x}(t)$ . Potom také zbývající hodnoty řízení  $\mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(N-1)$  musejí být optimální řídicí posloupností ve smyslu minimalizace ztrátové funkce  $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t)$ .*

Princip optimality je přímým důsledkem aditivity ztrátové funkce: pokud by totiž posloupnost  $\mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}(N-1)$  nebyla optimální ve smyslu minimalizace zvolené ztrátové funkce  $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t)$ , potom by existovala posloupnost řízení  $\mathbf{v}(t), \dots, \mathbf{v}(N-1)$  minimalizující tuto ztrátovou funkci a platilo by

$$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}_t^{N-1}, t) \leq V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t).$$

Označíme-li  $V_0^{t-1}$  hodnotu ztrátové funkce na horizontu  $t = 0, 1, \dots, t-1$ , pak pro celkovou ztrátu na horizontu  $t = 0, 1, \dots, N-1$  bude vzhledem k aditivě ztrátové funkce platit

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}_0^{N-1}, 0) &= V_0^{t-1} + V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t) \\ &\geq V_0^{t-1} + V(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}_t^{N-1}, t), \end{aligned}$$

tj. posloupnost

$$\{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(t-1), \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t+1), \dots, \mathbf{v}(N-1)\}$$

by vedla na menší hodnotu ztrátové funkce, a proto by posloupnost  $\mathbf{u}(\cdot)$  nebyla optimální řídicí posloupností na celém horizontu  $t = 0, 1, \dots, N-1$ . Poznamenejme, že podobnou úvahu lze provést i pro ztrátovou funkci, která má multiplikatívni charakter.

Uvažujme opět diskretní dynamický systém popsany diferencíální rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.46}$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Definujme ztrátovou funkci ve tvaru

$$V(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}_{t_0}^{N-1}, t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \tag{2.47}$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{N-1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$$

a kritérium optimality

$$J = V(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}_0^{N-1}, 0). \quad (2.48)$$

Toto kritérium jsme vzhledem ke kritériu (2.18) rozšířili o členy  $\mathbf{S}(t)$  vážící součiny stavu a vstupu. Budeme předpokládat, že složená matice kritéria je pozitivně semidefinitní, z čehož plyne, že matice  $\mathbf{Q}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$  a rovněž matice  $\mathbf{Q}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{S}^T(t)$  jsou pozitivně semidefinitní matice (proč?). Označíme-li optimální hodnotu ztrátové funkce pro stav  $\mathbf{x}(t)$  v čase  $t$

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(\cdot)} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t), \quad (2.49)$$

pak princip optimality lze formálně zapsat rovnicí

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(t), t) &= \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + V^*(\mathbf{x}(t+1), t+1) \right\} \\ &= \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + V^*(\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), t+1) \right\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

a v čase  $t = N$  platí

$$V^*(\mathbf{x}(N), N) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N). \quad (2.51)$$

Na základě výsledků předchozího odstavce víme, že optimální hodnotu ztrátové funkce můžeme odhadnout ve tvaru kvadratické formy i v ostatních časových okamžicích, takže budeme předpokládat

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t). \quad (2.52)$$

Tento předpoklad nyní dokážeme indukcí. Podle (2.51) v čase  $t = N$  platí

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N). \quad (2.53)$$

Předpokládejme dále, že v čase  $t+1$  platí

$$V^*(\mathbf{x}(t+1), t+1) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t+1) \mathbf{P}(t+1) \mathbf{x}(t+1).$$

Potom rovnici (2.50), popisující jeden krok algoritmu dynamického programování, můžeme psát jako

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(t), t) &= \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t))^T \mathbf{P}(t+1) (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)) \right\} = \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$= \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) & \mathbf{S}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) & \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \right\}.$$

Optimální řízení  $\mathbf{u}^*(t)$  tedy lze získat v každém kroku minimalizací kvadratické funkce (2.54). Efektivním způsobem, jak takovou minimalizaci provádět, je tzv. **doplnění na úplný čtverec**. Uvažujme kvadratickou formu

$$q(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{u} + c \right),$$

kde  $\mathbf{A}$  je **symetrická pozitivně definitní** matice. Tuto kvadratickou formu budeme chtít minimalizovat vzhledem k  $\mathbf{u}$ . Kvadratickou formu můžeme upravit na tvar

$$2q(\mathbf{u}) = \left( \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \right)^T \mathbf{A} \left( \mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \right) + c - \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

kterému říkáme doplnění na úplný čtverec. Kvadratická forma je nyní rozdělena na dvě části, z nichž první část je vzhledem k tomu, že matice  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní, vždy nezáporná, a druhá část nezávisí na hodnotě  $\mathbf{u}$ . Minimum této kvadratické formy tedy bude dosaženo pro  $\mathbf{u} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = 0$ , neboť první člen nemůže nabývat záporné hodnoty. Dostaneme tak optimální hodnotu  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.55)$$

Optimální (minimální) hodnota kvadratické formy pak bude

$$q^* = q(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \left( c - \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \right). \quad (2.56)$$

Použijeme-li tento postup k minimalizaci kvadratické formy (2.54), můžeme tuto kvadratickou formu upravit na tvar

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{u}(t)) &= \left[ \mathbf{u}(t) + (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) \right]^T \\ &\quad (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)) \\ &\quad \left[ \mathbf{u}(t) + (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) \right] \\ &+ \mathbf{x}^T(t) \left[ \mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) - (\mathbf{S}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)) \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)) \right] \mathbf{x}^T(t), \end{aligned} \quad (2.57)$$

a proto ztrátová funkce  $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t^{N-1}, t)$  nabývá minima pro

$$\mathbf{u}^*(t) = -(\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) \quad (2.58)$$

a optimální hodnota ztrátové funkce je kvadratickou funkcí stavu

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad (2.59)$$

kde matice  $\mathbf{P}(t)$  je dána podle (2.57)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \\ &\quad - (\mathbf{S}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t)) (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t)). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Tím jsme dospěli opět k Riccatiho diferenční rovnici, která pro  $\mathbf{S}(t) = 0$  je ekvivalentní s výsledkem (2.33). Navíc jsme jiným způsobem ukázali, že kvadratická forma stavu (2.59) má význam **optimální hodnoty** ztrátové funkce a je (pro úlohu optimální regulace) závislá pouze na počátečním stavu řízeného systému.

Poznamenejme ještě, že úlohu s nenulovými váhami  $\mathbf{S}$  lze pro  $\mathbf{R} > 0$  jednoduchou úpravou transformovat na úlohu s nulovými váhami  $\mathbf{S}$ . Doplníme-li kvadratické formy v kritériu (2.47) na úplný čtverec, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} &= (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{x}) + \\ &+ \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^T) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Definujeme-li nyní novou řídicí proměnnou

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{S}^T(t) \mathbf{x}(t), \quad (2.62)$$

pak řešení optimalizační úlohy s kritériem (2.47) pro systém popsaný stavovou rovnicí (2.46) je na základě transformace kritéria (2.61) ekvivalentní s řešením optimalizační úlohy pro systém, jehož stavové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{S}^T(t)) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}'(t), \quad (2.63)$$

tj. matice systému jsou modifikovány na

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{S}^T(t) \\ \mathbf{B}'(t) &= \mathbf{B}(t). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Matice kritéria (2.61) pak jsou modifikovány na

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'(t) &= \mathbf{Q}(t) - \mathbf{S}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{S}^T(t) \\ \mathbf{R}'(t) &= \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{S}'(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Z předpokladu pozitivní semidefinitnosti složené matice kritéria plyne pozitivní semidefinitnost matice  $\mathbf{Q}'(t)$ . Proto můžeme při analýze vlastností Riccatiho rovnice bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice  $\mathbf{S}(t) = 0$ .

## 2.4 Ustálené řešení Riccatiho rovnice

### 2.4.1 Vlastnosti ustáleného řešení Riccatiho rovnice

Ukázali jsme, že pro lineární časově proměnný diskretní systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.66)$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  má optimální řízení minimalizující kritérium (2.18) tvar časově proměnné stavové zpětné vazby

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t), \quad (2.67)$$



kde optimální zesílení (nazývané též **Kalmanovo zesílení**)

$$\mathbf{K}(t) = \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) \quad (2.68)$$

určíme na základě matice  $\mathbf{P}(t)$ , kterou získáme řešením Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \\ &\quad - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \left[ \mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}(t) \right]^{-1} \mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}(t) \end{aligned} \quad (2.69)$$

s koncovou podmínkou

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N).$$

Předpokládejme nadále, že řízený systém je časově invariantní, tj. popsáný stavovou rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.70)$$

a rovněž matice kritéria jsou konstantní (až na  $\mathbf{Q}(N)$ , které může být odlišné). Protože posloupnost matic zesílení  $\mathbf{K}(t)$  je časově proměnná, je výsledný zpětnovazební systém

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t))\mathbf{x}(t) \quad (2.71)$$

rovněž časově proměnný. Vlastnosti takového zpětnovazebního regulátoru je poměrně obtížné vyšetřovat a navíc je k jeho implementaci potřebné uložit do paměti počítače celou posloupnost matic  $\mathbf{K}(t)$ . Proto je důležité zjistit, zda je možné časově proměnný kvadraticky optimální regulátor nahradit regulátorem suboptimálním, ale časově invariantním.

Pozorováním průběhu řešení Riccatiho rovnice zjistíme, že v mnoha případech se řešení  $\mathbf{P}(t)$  pro rostoucí  $N-t$  blíží jisté ustálené hodnotě  $\mathbf{P}$ . Této ustálené hodnotě matice  $\mathbf{P}$  pak odpovídá též ustálená hodnota zesílení

$$\mathbf{K} = \left[ \mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}. \quad (2.72)$$

Rovněž matice uzavřené regulační smyčky

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \quad (2.73)$$

pak je konstantní.

V odstavci 2.2 jsme ukázali, že pro kritérium optimality lze odvodit vztah (2.41). Použitím vztahu (2.68) lze tento výraz upravit na tvar

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{x}^T(t) \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t))^T \mathbf{P}(t+1) (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t)) + \mathbf{K}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{K}(t) + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(t) \right] \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Je-li zesílení určeno podle vztahu (2.68), je jádro kvadratických forem v (2.74) nulové a hodnota kritéria je dána jako

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0).$$

V opačném případě není zesílení optimální, jádro kvadratických forem v (2.74) je pozitivně semidefinitní (proč ?) a výsledná hodnota kritéria je větší než optimální hodnota.

Předpokládejme nyní, že prodlužujeme horizont optimalizace, tj.  $N \rightarrow \infty$ . Minimalizujeme tedy kritérium

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right\}, \quad (2.75)$$

kde váha koncového stavu je nulová. Jestliže posloupnost matic  $\mathbf{P}(t)$  konverguje, pak pro limitní hodnotu

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t+1)$$

bude platit vztah

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \left[ \mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}, \quad (2.76)$$

který nazýváme **algebraická Riccatiho rovnice**. Je zřejmé, že každé limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice musí vyhovovat algebraické Riccatiho rovnici. Protože však algebraická Riccatiho rovnice je maticová kvadratická rovnice, může mít obecně i další řešení, která nemusejí být symetrická a/nebo pozitivně semidefinitní a nemohou tedy být získána jako limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice. Proto se nyní pokusíme odpovědět na následující otázky:

- za jakých podmínek existuje omezené ustálené řešení diferenční Riccatiho rovnice (2.69) ?
- kdy je toto ustálené řešení nezávislé na volbě počáteční podmínky diferenční Riccatiho rovnice (2.70) ?
- kdy je matice uzavřené regulační smyčky odpovídající limitnímu řešení diferenční Riccatiho rovnice stabilní ?

K formulaci odpovědí je vhodné nejprve definovat fiktivní výstup řízené soustavy

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_Q \mathbf{x}(t),$$

kde matice  $\mathbf{C}_Q$  je dána vztahem

$$\mathbf{C}_Q^T \mathbf{C}_Q = \mathbf{Q}. \quad (2.77)$$

Základní vlastnosti limitního řešení diferenční Riccatiho rovnice pak popisují následující dvě věty.

**Věta 2 (Existence limitního řešení.)** *Nechť je dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  stabilizovatelná. Potom pro počáteční podmínku  $\mathbf{P}(N) = 0$  existuje pro  $N-t \rightarrow \infty$  omezené limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice  $\mathbf{P}$ . Toto řešení je zároveň symetrickým pozitivně semidefinitním řešením algebraické Riccatiho rovnice.*

Připomeňme, že systém je **stabilizovatelný**, jestliže všechny jeho nestabilní módy jsou dosažitelné. Postačující podmínkou pro stabilizovatelnost je tedy dosažitelnost systému (tj.

dosažitelnost všech módů systému), kterou lze jednoduše ověřit pomocí matice dosažitelnosti.

Pro  $\mathbf{P}(N) = 0$  konverguje řešení Riccatiho rovnice monotónně, pro  $\mathbf{P}(N) > 0$  je řešení Riccatiho rovnice nadále omezené, ale může oscilovat.

Souvislost mezi omezeností limitního řešení a stabilizovatelností systému je celkem přirozená: je-li některý nestabilní mód systému nedosažitelný, pak nemůže být stabilizován zavedením zpětné vazby od stavu systému a limitní hodnota kritéria nebude pro některé volby počáteční podmínky  $\mathbf{P}(N)$  (které způsobí, že se tento nestabilní mód projeví v kritériu) omezená.

Jestliže je systém stabilizovatelný, pak naopak k dosažení stabilní matice uzavřené smyčky je třeba regulátor vhodnou volbou kritéria „donutit“, aby všechny nestabilní módy stabilizoval. Nutné a postačující podmínky pro stabilitu matice uzavřené smyčky shrnuje tato věta:

**Věta 3 (Stabilita uzavřené smyčky.)** *Nechť  $\mathbf{C}_Q^T \mathbf{C}_Q = \mathbf{Q} \geq 0$ ,  $\mathbf{Q}(N) \geq 0$  a  $\mathbf{R} > 0$ . Potom dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  je stabilizovatelná a dvojice  $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{A})$  je pozorovatelná právě tehdy, když existuje pozitivně definitní limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice, které je zároveň jediným symetrickým pozitivně definitním řešením algebraické Riccatiho rovnice a odpovídající matice uzavřené smyčky  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  je asymptoticky stabilní.*

Základní myšlenky důkazu obou uvedených vět lze nalézt (pro řešení duálního problému optimální filtrace) v kapitole 7.3.

Tato věta zaručuje existenci zesílení, pro které je matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  asymptoticky stabilní. Optimální řízení tedy převede libovolný počáteční stav  $\mathbf{x}(0)$  pro  $t \rightarrow \infty$  do počátku, a protože hodnota kritéria je omezená a matice  $\mathbf{R} > 0$ , je rovněž energie tohoto řízení omezená. K dosažení těchto vlastností optimálního řízení stačí, aby též matice  $\mathbf{Q} > 0$ . Potom totiž má matice  $\mathbf{C}_Q$  plnou hodnotu a dvojice  $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{A})$  je vždy pozorovatelná.

Jestliže naopak dvojice  $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{A})$  není pozorovatelná, pak existuje nepozorovatelný mód této fiktivní soustavy. Je-li tento mód soustavy, který neovlivňuje hodnotu kritéria, nestabilní, pak matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  bude rovněž tento mód obsahovat a zůstane tedy nestabilní. Je-li naopak tento mód soustavy stabilní, pak i tento mód matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  bude stabilní. Na základě těchto úvah lze předpoklady uvedené věty oslabit na požadavek **detekovatelnosti** dvojice  $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{A})$ . Limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice je však potom pouze pozitivně semidefinitní.

Nalezením kvadraticky optimálního řízení tedy můžeme za předpokladů výše uvedené věty stabilizovat libovolnou (vícerozměrovou) soustavu. Všechny **stabilizující regulátory**, které takto můžeme získat, jsou **parametrizovány maticemi kritéria  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$** . Konkrétní volba těchto matic pak umožňuje „ladění“ regulátoru z hlediska požadovaných vlastností (přechodové a frekvenční charakteristiky, šířka pásma, omezení vstupních veličin atp.). Z inženýrského hlediska je proto kvadraticky optimální řízení významné tím, že implicitně zajišťuje stabilitu regulačního obvodu a navrhovatel se může soustředit na dosažení požadovaných vlastností systému.

### 2.4.2 Metody výpočtu ustáleného řešení Riccatiho rovnice

Nejjednodušší metodou nalezení limitního řešení diferenční Riccatiho rovnice je její iterační výpočet. Rychlost iterací můžeme zvýšit tak, že místo řešení diferenční Riccatiho rovnice řešíme přímo problém minimalizace kritéria (2.74) na nekonečném horizontu za předpokladu, že matice zpětné vazby  $\mathbf{K}(t)$  je na celém horizontu optimalizace konstantní. K určení hodnoty kritéria tedy v každém kroku řešíme Ljapunovovu rovnici a volbou  $\mathbf{K}$  hodnotu kritéria minimalizujeme. Tímto postupem lze odvodit diskrétní analogii tzv. Kleinmannova algoritmu pro výpočet limitního řešení  $\mathbf{P}$ , který lze popsat následujícími kroky:

- (i) zvolíme matici  $\mathbf{K}^{(0)}$  takovou, že matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}^{(0)}$  je stabilní.
- (ii) pro  $i = 0, 1, \dots$  určíme matici  $\mathbf{P}^{(i)}$ , která je řešením Ljapunovovy rovnice

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}^{(i)}\right)^T \mathbf{P}^{(i)} \left(\mathbf{A} - \mathbf{BK}^{(i)}\right) - \mathbf{P}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)T} \mathbf{R} \mathbf{K}^{(i)} - \mathbf{Q}.$$

- (iii) určíme zesílení

$$\mathbf{K}^{(i+1)} = \left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{B}\right]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{A}$$

a pokračujeme bodem (ii) pro další iteraci  $i = i+1$ .

Potom platí  $\mathbf{P}^{(i+1)} \geq \mathbf{P}^{(i)}$  a  $\lim \mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{P}$ . Tento algoritmus má kvadratickou rychlost konvergence, tj.

$$\left\| \mathbf{P}^{(i+1)} - \mathbf{P} \right\| \leq c \left\| \mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{P} \right\|^2,$$

ale jeho nevýhodou je potřeba inicializace maticí, která vede na stabilní matici uzavřené regulační smyčky.

Existuje též možnost analytického řešení diferenční Riccatiho rovnice, která - kromě ilustrace dalších zajímavých vlastností Riccatiho rovnice - vede i na efektivní možnost určení limitního řešení.

Ukázali jsme, že pokud je  $\mathbf{A}$  nesingulární, lze řešení problému kvadraticky optimálního řízení nalézt na základě řešení soustavy (2.28), kterou lze psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

kde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

je tzv. **diskrétní Hamiltonova matice**. Řešení Riccatiho rovnice pak je určeno vlastními čísly a vlastními vektory Hamiltonovy matice takto: označme

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Pro inverzi této matice platí

$$\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}. \quad (2.81)$$

Přímým dosazením lze ukázat, že Hamiltonova matice vyhovuje rovnici

$$\mathbf{H}^T \mathbf{J} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.82)$$

Matice s touto vlastností nazýváme **symplektické** matice. Na základě (2.82) lze nalézt jednoduchý vztah pro inverzi matice  $\mathbf{H}$ . Pokud tato inverze existuje, platí

$$\mathbf{H}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{H}^{-1}$$

a odtud

$$\mathbf{H}^{-1} = -\mathbf{J} \mathbf{H}^T \mathbf{J}.$$

Dostaneme tak inverzi Hamiltonovy matice

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{Q} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-T} \\ -\mathbf{A}^{-T} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^{-T} \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

kde  $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$  a vzhledem k symetrii  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ . Další významnou vlastností matice  $\mathbf{H}$  je skutečnost, že je-li  $\lambda$  nenulové vlastní číslo matice  $\mathbf{H}$ , je také  $1/\lambda$  vlastním číslem této matice. Abychom tuto vlastnost ukázali, předpokládejme, že  $\lambda$  je vlastní číslo a  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T]^T$  vlastní vektor matice  $\mathbf{H}$ . Podle definice tedy platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}.$$

Tuto soustavu rovnic můžeme přerovnat na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T & -\mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ -\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ -\mathbf{v}_1 \end{bmatrix},$$

kde matice na levé straně rovnice je právě transponovaná inverze Hamiltonovy matice  $\mathbf{H}^{-T}$ . Z této rovnice plyne, že  $\lambda$  je rovněž vlastním číslem matice  $\mathbf{H}^{-T}$ , a tedy i vlastním číslem matice  $\mathbf{H}^{-1}$ . Odtud plyne, že  $1/\lambda$  je vlastním číslem matice  $\mathbf{H}$ , což jsme chtěli ukázat.

Vlastní čísla matice  $\mathbf{H}$  tedy tvoří dvojice  $\{\lambda_i, 1/\lambda_i\}$  a můžeme je tedy uspořádat do diagonální matice

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_0 & \\ & \mathbf{\Lambda}_0^{-1} \end{bmatrix},$$

kde matice  $\mathbf{\Lambda}_0$  obsahuje na diagonále nestabilní vlastní čísla  $|\lambda_i| > 1$  a matice  $\mathbf{\Lambda}_0^{-1}$  obsahuje naopak pouze stabilní vlastní čísla  $|\lambda_i| < 1$ . Pro takto definovanou matici  $\mathbf{\Lambda}$  existuje regulární matice  $\mathbf{W}$  tvořená (po sloupcích) odpovídajícími vlastními vektory matice  $\mathbf{H}$  taková, že platí

$$\mathbf{W}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}.$$

Použijeme-li tuto matici  $\mathbf{W}$  k transformaci proměnných v diferenční rovnici (2.78)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix},$$

potom rovnice (2.78) v transformovaných souřadnicích bude

$$\mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t+1) \\ \boldsymbol{\mu}(t+1) \end{bmatrix},$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t+1) \\ \boldsymbol{\mu}(t+1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t+1) \\ \boldsymbol{\mu}(t+1) \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Řešení této rovnice s diagonální maticí  $\boldsymbol{\Lambda}$  určíme snadno jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_0^{(N-t)} & \\ & \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(N) \\ \boldsymbol{\mu}(N) \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Protože matice  $\boldsymbol{\Lambda}_0^{(N-t)}$  pro rostoucí  $N-t$  diverguje, přepíšeme rovnici (2.85) na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(N) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)} & \\ & \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(N) \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Koncové podmínky netransformované rovnice

$$\boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N)$$

dostaneme podle (2.78) jako

$$\mathbf{W}_{21}\mathbf{z}(N) + \mathbf{W}_{22}\boldsymbol{\mu}(N) = \mathbf{P}(N)(\mathbf{W}_{11}\mathbf{z}(N) + \mathbf{W}_{21}\boldsymbol{\mu}(N))$$

a odtud plyne

$$\boldsymbol{\mu}(N) = \mathbf{T}\mathbf{z}(N), \quad (2.87)$$

kde transformační matice  $\mathbf{T}$  je dána vztahem

$$\mathbf{T} = -(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{P}(N)\mathbf{W}_{12})^{-1}(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{P}(N)\mathbf{W}_{11}). \quad (2.88)$$

Podle (2.86) platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(t) &= \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}\boldsymbol{\mu}(N) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}\mathbf{T}\mathbf{z}(N) \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}\mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}\mathbf{z}(t), \end{aligned}$$

a tedy pro všechna  $t = 0, 1, \dots$  platí

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{z}(t), \quad (2.89)$$

kde transformační matice je

$$\mathbf{T}(t) = \boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}\mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}_0^{-(N-t)}. \quad (2.90)$$

Našli jsme tedy analytické vztahy pro řešení rovnice (2.78) v transformovaných souřadnicích a z nich jsme odvodili matici popisující jejich vzájemný vztah. V netransformovaných souřadnicích popisuje tento vztah právě matice  $\mathbf{P}(t)$ , která je hledaným řešením Riccatiho rovnice. Proto toto řešení lze získat zpětnou transformací (2.90). Podle (2.86) můžeme vztah

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(N)\mathbf{x}(t)$$

přepsat jako

$$\mathbf{W}_{21}\mathbf{z}(t) + \mathbf{W}_{22}\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{P}(t)(\mathbf{W}_{11}\mathbf{z}(t) + \mathbf{W}_{21}\boldsymbol{\mu}(t))$$

a odtud dosazením (2.89) dostaneme

$$(\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t))\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}(t)(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{21}\mathbf{T}(t))\mathbf{z}(t).$$

Tato rovnost musí platit pro všechny počáteční podmínky, a tedy i pro všechny trajektorie  $\mathbf{z}(t)$ . Musí tedy platit též

$$\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t) = \mathbf{P}(t)(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{21}\mathbf{T}(t))$$

a odtud plyne hledaný vztah

$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t))(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{21}\mathbf{T}(t))^{-1}. \quad (2.91)$$

Analytické řešení diferenční Riccatiho rovnice pro libovolnou koncovou podmínku  $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N)$  je tedy dáno rovnicemi (2.88), (2.90) a (2.91).

Významnou vlastností tohoto řešení je, že pro  $N-t \rightarrow \infty$  platí pro nestabilní matici  $\mathbf{\Lambda}_0$

$$\lim_{N-t \rightarrow \infty} \mathbf{\Lambda}_0^{-(N-t)} = 0,$$

a tedy také

$$\lim_{N-t \rightarrow \infty} \mathbf{T}(t) = 0.$$

Jestliže tedy existuje limitní řešení diferenční Riccatiho rovnice, pak toto řešení můžeme získat jako

$$\mathbf{P} = \lim_{T(t) \rightarrow 0} (\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t))(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{21}\mathbf{T}(t))^{-1} = \mathbf{W}_{21}\mathbf{W}_{11}^{-1}. \quad (2.92)$$

K získání limitního řešení Riccatiho rovnice tedy stačí nalézt vlastní vektory odpovídající nestabilním vlastním číslům matice  $\mathbf{H}$ , které tvoří matici

$$\mathbf{W}_- = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} \\ \mathbf{W}_{21} \end{bmatrix}.$$

Tento postup lze zobecnit i na systémy se singulární maticí  $\mathbf{A}$  (např. pro systémy s dopravním zpožděním), kde místo s vlastními čísly matice  $\mathbf{H}$  pracujeme se zobecněnými vlastními čísly tzv. maticové tužky (matrix pencil) (Pappas a další, 1980). Pro dvojici matic v rovnici (2.26) jsou tato zobecněná vlastní čísla definována vztahem

$$\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \\ 0 & \mathbf{A}^T(t) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & 0 \\ -\mathbf{Q}(t) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Všimněte si, že je-li některá z těchto matic regulární, lze tento vztah převést na standardní definici vlastního čísla matice. Tento postup též nahrazuje výpočet transformace do Jordanova kanonického tvaru, který je numericky málo robustní, výpočtem zobecněné Schurovy  $QZ$  faktorizace, která má podstatně lepší numerické vlastnosti.

## 2.5 Frekvenční vlastnosti LQ regulátoru

Klasické metody návrhu zpětnovazebních obvodů specifikují žádané vlastnosti regulačního obvodu pomocí jeho frekvenční charakteristiky (šířka pásma, amplitudová a fázová bezpečnost) nebo polohy pólů uzavřené regulační smyčky (absolutní a relativní tlumení). Vlastnosti limitního kvadraticky optimálního regulátoru, který je časově invariantní, lze rovněž popsat tímto způsobem. Ukážeme, jak pro kvadraticky optimální regulátor lze odvodit vztah pro zpětnou diferencii regulační smyčky a s jeho využitím najít jednoduché vztahy pro fázovou a amplitudovou bezpečnost. Ukážeme též, jak limitní řešení Riccatiho rovnice souvisí s úlohou **spektrální faktorizace**, pomocí které můžeme úlohu nalezení kvadraticky optimálního regulátoru převést na úlohu umístění pólů uzavřené regulační smyčky.

Uvažujme limitní LQ regulátor daný rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t),$$

kde  $\mathbf{K}$  je limitní hodnota Kalmanova zesílení. Je-li dvojice  $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{A})$  detekovatelná a dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  dosažitelná, pak takový regulátor existuje a matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  je stabilní.

Vytkneme-li z výrazu pro charakteristický polynom uzavřené smyčky výraz  $z\mathbf{I} - \mathbf{A}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_d(z) &= \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \\ &= \det\left((z\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BK})\right) \\ &= \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BK}), \end{aligned}$$

a využijeme-li vlastnost determinantu

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{XY}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{YX}),$$

dostaneme

$$\Delta_d(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}). \quad (2.93)$$

Přitom determinant  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$  je charakteristický polynom otevřené smyčky

$$\Delta(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (2.94)$$

a výraz  $\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  je přenos otevřené smyčky stavového regulátoru na obr. 2.1, přerušené na vstupu řízené soustavy. Výraz

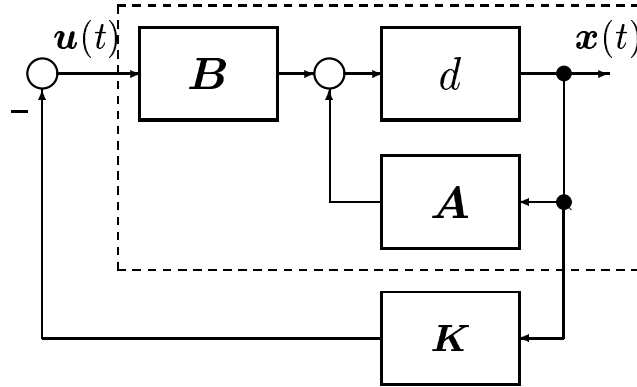
$$\mathbf{I} + \mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

který hraje roli „jmenovatele“ přenosu uzavřené smyčky, pak nazýváme **zpětná diference**.

K získání dalšího výsledku použijeme identitu

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = (z^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{A})^T \mathbf{P} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}) + (z^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{A})^T \mathbf{P} \mathbf{A},$$





Obrázek 2.1: Kvadraticky optimální regulátor

kteřou lze dokázat přímým výpočtem. Z algebraické Riccatiho rovnice použitím této identity dostaneme

$$(z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^T \mathbf{P}(z\mathbf{I}-\mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(z\mathbf{I}-\mathbf{A}) + (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^T \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{K}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{K} = \mathbf{Q}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici zleva výrazem  $\mathbf{B}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-T}$ , zprava výrazem  $(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  a přičteme-li k oběma stranám matici  $\mathbf{R}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{A}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ & + \mathbf{B}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-T} \mathbf{K}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{K} (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{R} \\ & = \mathbf{B}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-T} \mathbf{Q} (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Využijeme-li rovnosti

$$\mathbf{K}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R}) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{B},$$

kteřá plyne přímo z definice Kalmanova zesílení, můžeme levou stranu faktorizovat a dostaneme identitu

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} + \mathbf{K}(z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \right] (\mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R}) \left[ \mathbf{I} + \mathbf{K}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \right]^T \\ & = \mathbf{B}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-T} \mathbf{Q} (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Tento vztah popisuje vlastnosti zpětné diference otevřené regulační smyčky.

V případě spojitě kvadraticky optimálního regulátoru pro jednorozměrný systém má regulační smyčka amplitudovou bezpečnost v intervalu  $\langle 1/2, \infty \rangle$  a fázovou bezpečnost 60 stupňů (Anderson a Moore, 1990). Tyto vlastnosti ukazují, že spojitě LQ řízení má velmi dobré vlastnosti z hlediska citlivosti a robustnosti. Ukážeme, jak lze tyto vlastnosti popsat v případě diskrétního regulátoru. Intuitivně je zřejmé, že vzhledem k diskrétnímu charakteru vstupu nemůže mít diskrétní regulační obvod nekonečnou amplitudovou bezpečnost.

Uvažujme jednorozměrný systém a matice kvadratického kritéria  $\mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T$  a  $r = 1$ . Potom lze rovnici (2.95) přepsat jako

$$\left[ 1 + \mathbf{k}^T (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \right] (1 + \mathbf{b}^T \mathbf{P}\mathbf{b}) \left[ 1 + \mathbf{k}^T (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \right]^T \quad (2.96)$$

$$= 1 + \mathbf{b}^T (z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T} \mathbf{Q} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

a odtud

$$\left| 1 + \mathbf{k}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right|^2 (1 + \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}) = 1 + \left| \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right|^2. \quad (2.97)$$

Protože  $\left| \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right|^2 \geq 0$ , plyne odtud

$$\left| 1 + \mathbf{k}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right|^2 \geq \frac{1}{1 + \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}},$$

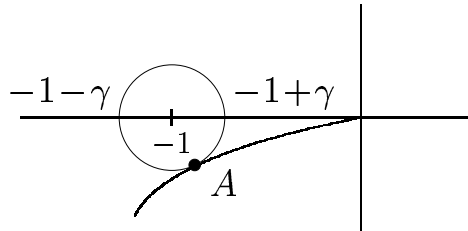
a tedy pro  $z = e^{j\omega T_s}$  dostaneme

$$\left| 1 + \mathbf{k}^T (e^{j\omega T_s} \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right| \geq \gamma, \quad (2.98)$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}}. \quad (2.99)$$

To znamená, že frekvenční charakteristika otevřené smyčky se vyhýbá kružnici se středem v kritickém bodě  $-1$  a poloměrem  $\gamma$ , znázorněné na obr. 2.2. Podle **kruhového kritéria** má tedy regulátor amplitudovou bezpečnost s **konečným** rozsahem  $\langle \frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1-\gamma} \rangle$  a určením bodu, ve kterém jednotková kružnice protne tuto  $\gamma$ -kružnici (bod  $A$  na obr. 2.2), lze ukázat, že fázová bezpečnost bude mít hodnotu  $\varphi = \arcsin \gamma$ . Lze ukázat, že při nevhodné volbě vah kritéria a/nebo periody vzorkování může být hodnota  $\gamma$  libovolně malá. Naopak vhodnou volbou periody vzorkování a matic vah kritéria lze dosáhnout hodnoty  $\gamma \rightarrow 1$ , tj. vlastností srovnatelných se spojitým regulátorem (Anderson a Moore, 1990).



Obrázek 2.2: Fázová a amplitudová bezpečnost LQ regulátoru

Využitím vztahu (2.93) dostaneme z (2.95) tzv. Chang-Letovovu rovnici

$$\Delta_{cl}(z)\Delta_{cl}(z^{-1}) = \frac{\det(\mathbf{H}^T(z^{-1})\mathbf{H}(z) + \mathbf{R})\Delta(z)\Delta(z^{-1})}{\det(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})}, \quad (2.100)$$

kde pro  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}.$$

Tento přenos a charakteristický polynom otevřené smyčky jsou dány pouze vlastnostmi systému a volbou matic kritéria. Výraz na pravé straně je symetrickým polynomem (jeho jmenovatel je pouze normalizační konstanta a neovlivní polohu jeho kořenů). Protože víme,

že charakteristický polynom uzavřené smyčky  $\Delta_{cl}(z)$  musí být stabilní, můžeme z (2.100) určit výběrem stabilních kořenů tohoto symetrického polynomu přímo žádané póly uzavřené smyčky a převést tak pro dosažitelné systémy (kdy v přenosu  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  nedochází ke krácení nul a pólů) úlohu kvadraticky optimálního řízení na úlohu umístění pólů.

Pro jednorozměrné systémy s kritériem  $\mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T$  navíc platí

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^T \frac{\mathbf{n}(z)}{\Delta(z)},$$

kde  $\mathbf{n}(z)$  je sloupcový vektor přenosu mezi vstupem a stavem systému. Rovnici (2.100) pak lze psát jako

$$\Delta_{cl}(z)\Delta_{cl}(z^{-1}) = \frac{\mathbf{n}^T(z^{-1})\mathbf{Q}\mathbf{n}(z) + r\Delta(z)\Delta(z^{-1})}{\mathbf{b}^T\mathbf{P}\mathbf{b} + r}. \quad (2.101)$$

Kořeny pravé strany (2.101) jsou právě nulové body výrazu

$$1 + \frac{1}{r} \frac{\mathbf{n}^T(z^{-1})\mathbf{Q}\mathbf{n}(z)}{\Delta(z)\Delta(z^{-1})}. \quad (2.102)$$

Chceme-li vyšetřit závislost polohy pólů kvadraticky optimálního regulátoru na volbě vah kritéria, lze využít podobnosti tohoto výrazu se vztahem používaným v klasické metodě **geometrického místa kořenů**. Je známo, že při změně zesílení  $K$  se pohybují **póly uzavřené smyčky**, tj. kořeny

$$1 + K G_{ol}(z) = 0$$

od **pólů otevřené smyčky k nulám otevřené smyčky** (s uvažováním nul v nekonečnu). Proto póly  $p_i$  kvadraticky optimálního regulátoru se při změně hodnoty  $1/r$  od nuly do nekonečna budou pohybovat od stabilních pólů součinu  $H(z^{-1})H(z)$  k jeho stabilním nulám. Při vyhodnocování tohoto geometrického místa kořenů je důležité si uvědomit, že příslušné nestabilní póly  $1/p_i$  se pohybují po trajektoriích symetrických vzhledem k jednotkové kružnici. Pro pól nebo nulu ležící na jednotkové kružnici je třeba tyto symetrické trajektorie uvažovat, abychom získali jejich správné násobnosti, které jsou rozhodující pro určení asymptot trajektorií, které vycházejí z pólu nebo nuly. Polohu nul (tj. limitní polohu pólů uzavřené smyčky) přitom můžeme měnit volbou matice kritéria  $\mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T$  a polohu pólů uzavřené smyčky na dráze od pólů otevřené smyčky k nulám otevřené smyčky můžeme nastavit volbou „zesílení“  $1/r$ .

**Poznámka:** Kromě uvedené souvislosti mezi volbou matic kritéria a vlastnostmi uzavřené smyčky lze využít při volbě kritéria i následující úvahy. Volba vah ovlivňuje amplitudy jednotlivých signálů v regulačním obvodu. Proto jako počáteční iteraci můžeme volit matice kritéria diagonální. Velikost diagonálních prvků pak určíme tak, že  $1/q_i$  je úměrné maximální přípustné střední kvadratické hodnotě stavu  $x_i$  a  $1/r_i$  je úměrné maximální přípustné střední kvadratické hodnotě  $u_i$ . Jestliže některé **lineární kombinace** stavů a/nebo vstupů nabývají nepřiměřeně velkých hodnot, rozšíříme v dalších iteracích matice kritéria o dyády  $\mathbf{q}_i d_{qi} \mathbf{q}_i^T$ , popř.  $\mathbf{r}_i d_{ri} \mathbf{r}_i^T$ , kde  $1/d_{qi}$ , popř.  $1/d_{ri}$ , je úměrné maximální přípustné střední kvadratické hodnotě  $\mathbf{q}_i^T \mathbf{x}$ , popř.  $\mathbf{r}_i^T \mathbf{u}$ .

Existuje také možnost volit matice kritéria **frekvenčně závislé**, čímž inženýr, který navrhuje regulátor, získá další „stupně volnosti“. Tento postup může být užitečný např. pro systémy s ostrými rezoncemi, jejichž potlačení není s přípustnou amplitudou řízení

možné. Volbou frekvenčně závislé matice  $\mathbf{R}$  lze pak dosáhnout zvýšením vah v oblasti rezonance snížení energie řízení v této části spektra. Kmitavé módy pak alespoň nejsou vstupním signálem vybudovány. Podobně lze potlačit energii řízení v oblasti (typicky vysokých) frekvencí, kde je naše znalost modelu nepřesná. Tak lze v některých případech zlepšit vlastnosti otevřené smyčky z hlediska citlivosti a robustnosti. Naopak snížením vah v oblasti nízkých frekvencí získáme řízení integračního charakteru. Frekvenčně závislých vah lze dosáhnout rozšířením systému o tvarovací filtry šumu (Anderson a Moore, 1990). V kritériu jsou váženy výstupy těchto filtrů. Výsledný regulátor pak není dán statickou zpětnou vazbou od stavu systému, ale je rovněž dynamický.  $\square$

## 2.6 Úloha kvadraticky optimálního sledování

V předchozích odstavcích jsme řešili úlohu nalézt kvadraticky optimální regulátor, který optimálním způsobem převede systém z libovolného stavu do počátku souřadného systému. Nyní budeme formulovat a řešit obecnější **úlohu o sledování**, kdy **výstup** systému má sledovat předepsanou **referenční trajektorii**. Ukážeme, že řešení této úlohy závisí na tom, jakým způsobem je tato referenční trajektorie definována.

Předpokládejme nejprve, že referenční trajektorie je generována lineárním dynamickým systémem jako odezva na jeho počáteční podmínky, přičemž tyto počáteční podmínky mohou být libovolné. Referenční trajektorie tedy může být libovolný signál z dané třídy signálů. Například pro referenční signál ve tvaru skoku s libovolnou amplitudou je takovým systémem sumátor (diskrétní integrátor), pro referenční signál ve tvaru rampy je takovým systémem dvojitý sumátor a podobně. Přivedeme-li na vstup takového systému vhodně zvolený impuls, dojde ke změně „počátečních podmínek“ pro další část odezvy. Při návrhu optimálního řízení obvykle předpokládáme, že k této impulsní změně počátečních podmínek během horizontu optimalizace nedojde. Tuto třídu úloh nazýváme úloha o **optimálním servomechanismu**. Chceme-li, aby výstup systému sledoval odezvu jiného dynamického systému, který budeme nazývat **model**, na referenční signál výše uvedených vlastností, dostaneme třídu úloh nazývanou úloha o optimálním **sledování modelu**. Zahrneme-li model do generátoru reference, jsou obě úlohy totožné.

Druhým možným přístupem je, že referenční trajektorie je dána předem jako známá funkce času na celém horizontu optimalizace. Typickým případem jsou tzv. dávkové procesy v chemickém průmyslu, programové řízení teploty a podobně. V tomto případě hovoříme o úloze o **programovém řízení**.

Upozorníme ještě, že použitá terminologie není v literatuře zcela jednotná. Zásadní rozdíl mezi oběma těmito přístupy vyplývá z následujících odstavců.

### 2.6.1 Kvadraticky optimální servomechanismus

Předpokládejme, že je dán lineární časově invariantní diskretní systém

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t+1) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}(t), \end{aligned} \tag{2.103}$$

kde  $\mathbf{y}(t)$  je  $m$ -rozměrný výstup, a generátor referenčního signálu  $\mathbf{r}(t)$  ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2(t+1) &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2(t).\end{aligned}\quad (2.104)$$

Jestliže výstup systému má na zvoleném horizontu délky  $N$  sledovat referenční signál, je přirozené definovat kvadratické kritérium optimality ve tvaru

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}'(N)\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}'\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}'\mathbf{u}(t) \right\}, \quad (2.105)$$

kde  $\mathbf{Q}'$  a  $\mathbf{R}'$  jsou pozitivně definitní matice a

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (2.106)$$

je **regulační odchylka**. Pro zjednodušení následujících úvah předpokládejme, že matice  $\mathbf{C}_1$  má hodnost  $m$ , to znamená, že výstupy řízeného systému mohou nabývat vzájemně nezávislých hodnot, a dvojice  $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_2)$  je pozorovatelná, tj. generátor referenčního signálu je systém minimálního řádu, který může generovat požadovanou trajektorii.

Zřejmě platí

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{D}_1\mathbf{u}(t)$$

a zavedeme-li rozšířený systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.107)$$

se stavem

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix},$$

dostaneme

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{D}_1\mathbf{u}(t). \quad (2.108)$$

Kritérium optimality pak lze upravit na tvar

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \sum_{t=t_0}^{N-1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

kde matice kritéria má strukturu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{S}_2 \\ \hline \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_2^T & \mathbf{R} \end{array} \right]$$

s prvky

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{C}_1^T\mathbf{Q}'\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{Q}_{12} &= -\mathbf{C}_1^T\mathbf{Q}'\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{Q}_{21} &= -\mathbf{C}_2^T\mathbf{Q}'\mathbf{C}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{C}_2^T \mathbf{Q}' \mathbf{C}_2 \\
\mathbf{S}_1 &= \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}_1 \\
\mathbf{S}_2 &= -\mathbf{C}_2^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}_1 \\
\mathbf{R} &= \mathbf{D}_1^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}_1 + \mathbf{R}'.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že výstupní rovnice diskrétního lineárního systému (2.103) obecně zahrnuje i přímou vazbu mezi vstupem a výstupem, tj. obsahuje nenulový člen  $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ , jsou v kritériu (2.109) nenulové křížové členy  $\mathbf{S}$ .

Tímto postupem jsme převedli úlohu na problém kvadraticky optimálního regulátoru, který jsme vyřešili v odstavci 2.3. Odtud plyne, že optimální regulátor tedy bude mít tvar časově proměnné stavové zpětné vazby

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t),$$

kde optimální (Kalmanovo) zesílení bude

$$\mathbf{K}(t) = \left( \mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B} \right)^{-1} \left( \mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A} \right). \quad (2.110)$$

Toto zesílení určíme na základě matice  $\mathbf{P}(t)$ , kterou získáme řešením Riccatiho rovnice

$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t))^T \mathbf{P}(t+1) (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t)) + \mathbf{K}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{K}(t) + \mathbf{Q} \quad (2.111)$$

s koncovou podmínkou

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'(N) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozdělíme-li matici  $\mathbf{P}$  na bloky odpovídající složkám stavu  $\mathbf{x}_1(t)$  a  $\mathbf{x}_2(t)$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{21}(t) & \mathbf{P}_{22}(t) \end{bmatrix}$$

a podobně rozdělíme i matici zesílení

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(t) & \mathbf{K}_2(t) \end{bmatrix},$$

můžeme optimální zákon řízení psát ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_1(t)\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{K}_2(t)\mathbf{x}_2(t), \quad (2.112)$$

kde jednotlivá zesílení budou podle (2.110) a (2.107)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1(t) &= \left( \mathbf{R} + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_{11}(t+1) \mathbf{B}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{S}_1^T + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_{11}(t+1) \mathbf{A}_1 \right) \\
\mathbf{K}_2(t) &= \left( \mathbf{R} + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_{11}(t+1) \mathbf{B}_1 \right)^{-1} \left( \mathbf{S}_2^T + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_{12}(t+1) \mathbf{A}_2 \right).
\end{aligned} \quad (2.113)$$

Tato zesílení závisí pouze na hodnotách bloků  $\mathbf{P}_{11}$  a  $\mathbf{P}_{12}$ . Pro tyto bloky dostaneme z Riccatiho rovnice (2.111) rekurentní vztahy

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{11}(t) &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1(t))^T \mathbf{P}_{11}(t+1) (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1(t)) + \\
&\quad + \mathbf{K}_1^T(t) \mathbf{R} \mathbf{K}_1(t) + \mathbf{Q}_{11} \\
\mathbf{P}_{12}(t) &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1(t))^T (\mathbf{P}_{12}(t+1) \mathbf{A}_2 - \mathbf{P}_{11}(t+1) \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2(t)) +
\end{aligned} \quad (2.114)$$

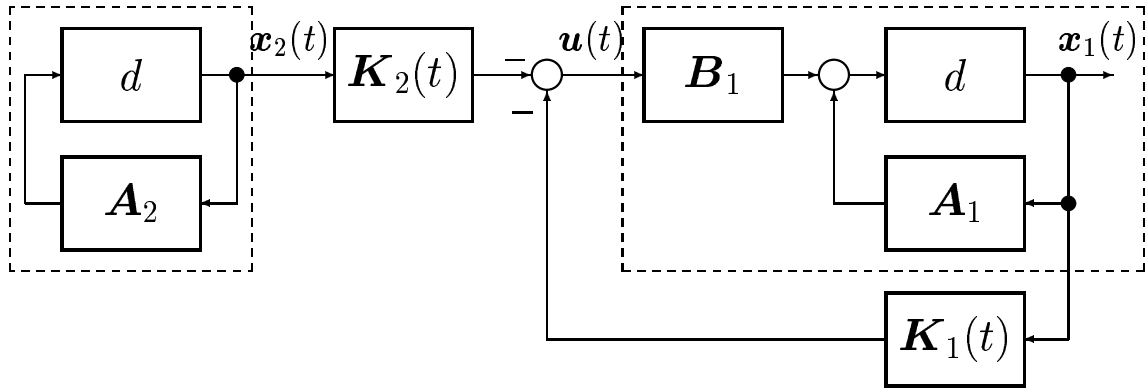
$$+ \mathbf{K}_1^T(t) \mathbf{R} \mathbf{K}_2(t) + \mathbf{Q}_{12}$$

s koncovými podmínkami

$$\mathbf{P}_{11}(N) = \mathbf{Q}(N)$$

$$\mathbf{P}_{12}(N) = 0.$$

Regulátor, znázorněný na obrázku 2.3, lze tedy rozdělit na **zpětnovazební část** a



Obrázek 2.3: Kvadraticky optimální servomechanismus

**přímovazební část.** Ze vztahů (2.113) a (2.114) je patrné, že zpětnovazební část regulátoru je nezávislá na vlastnostech generátoru referenčního signálu a její zesílení (a právě tak odpovídající část Riccatiho rovnice) je totožné s optimálním zesílením v úloze optimální regulace (do počátku). Přímovazební část regulátoru pak vyžaduje, aby byly měřitelné též všechny stavy generátoru referenčního signálu. V případě sledování konstantní reference však je situace zjednodušena tím, že hodnota stavu je pro  $\mathbf{C}_2 = 1$  totožná s hodnotou výstupu.

Roste-li horizont optimalizace, pak řešení Riccatiho rovnice pro blok  $\mathbf{P}_{11}$  konverguje za podmínek uvedených v odstavci 2.4 ke konstantní matici a zpětnovazební část regulátoru je časově invariantní. Pokusíme se nyní najít odpověď na otázku, zda i hodnota kritéria a signály v regulačním obvodu zůstanou omezené. Je zřejmé, že pro  $\mathbf{Q}' > 0$  a  $\mathbf{R}' > 0$  může být hodnota kritéria omezená pouze tehdy, když jak ustálená regulační odchylka, tak ustálená hodnota vstupu budou nulové. Pro nestabilní referenční signál to však nelze dosáhnout obecně a je třeba, aby platil tzv. **princip vnitřního modelu** (internal model principle) (Francis a Wonham, 1976). K odvození tohoto principu lze dojít následující úvahou. Odezvy generátoru referenčního signálu  $\mathbf{r}(t)$  i řízeného systému  $\mathbf{y}(t)$  jsou lineární kombinací geometrických řad  $\lambda_{1i}^t, \lambda_{2i}^t$ , kde  $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}$  jsou vlastní čísla systému a generátoru referenčního signálu. Koeficienty těchto lineárních kombinací závisí na počátečních podmínkách. Jestliže pro  $\mathbf{Q}' > 0$  a  $\mathbf{R}' > 0$  má být hodnota kritéria omezená, pak pro  $t \rightarrow \infty$  musí platit  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$  a zároveň  $\mathbf{u}(t) \rightarrow 0$ . Musí tedy existovat taková transformace stavů  $\mathbf{x}_1(t)$  a  $\mathbf{x}_2(t)$ , že transformovaná matice  $\mathbf{A}_2$  je rozdělena na nestabilní blok  $\mathbf{A}_{2-}$  a stabilní blok  $\mathbf{A}_{2+}$  a zároveň matice  $\mathbf{A}_1$  obsahuje tento nestabilní blok matice  $\mathbf{A}_2$ . Musí tedy platit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2-} & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2-} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{2+} \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Navíc po odeznění všech stabilních módů musí platit  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t)$  při  $\mathbf{u}(t) = 0$ , a tedy výstupní matice musejí mít tvar

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} k\mathbf{C}_{2-} & \times \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{2-} & \mathbf{C}_{2+} \end{bmatrix}, \quad (2.116)$$

kde  $k$  je vhodná konstanta. V této soustavě souřadnic pak lze psát

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1-}(t+1) \\ \mathbf{x}_{1+}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2-} & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1-}(t) \\ \mathbf{x}_{1+}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1-} \\ \mathbf{B}_{1+} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2-}(t+1) \\ \mathbf{x}_{2+}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2-} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{2-}(t) \\ \mathbf{x}_{2+}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Potom pro vhodně nastavené počáteční podmínky nestabilních módů  $\mathbf{x}_{1-}(t_0)$ ,  $\mathbf{x}_{2-}(t_0)$  v čase  $t_0$  a nulové počáteční podmínky stabilních módů  $\mathbf{x}_{1+}(t_0)$ ,  $\mathbf{x}_{2+}(t_0)$  (toto nastavení zajistí pro  $t_0 \rightarrow \infty$  regulátor, pokud je regulační obvod stabilní) platí pro  $(t-t_0) \rightarrow 0$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{C}_{2-}\mathbf{A}_{2-}^{(t-t_0)}\mathbf{x}_{2-}(t_0) - k\mathbf{C}_{2-}\mathbf{A}_{2-}^{(t-t_0)}\mathbf{x}_{1-}(t_0) = 0.$$

Tyto úvahy lze shrnout do následující věty.

**Věta 4 (Princip vnitřního modelu)** *Uvažujme úlohu o servomechanismu, kde generátor referenčního signálu obsahuje nestabilní módy. Potom existuje zpětnovazební regulátor ve tvaru (2.112) takový, že pro  $t \rightarrow \infty$  platí  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$  a zároveň  $\mathbf{u}(t) \rightarrow 0$ , jestliže existuje transformace souřadnic taková, že platí (2.115) a (2.116).*

Poznamenejme, že uvedený regulátor nemusí být právě regulátor kvadraticky optimální, ale jakýkoli regulátor stabilizující soustavu, získaný např. metodou umístění pólů.

Dokončíme nyní úvahu o konvergenci pro kvadraticky optimální regulátor. Platí-li rovnice (2.117), lze (2.103) a (2.104) z hlediska kritéria (2.105) spojit do soustavy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e-}(t+1) \\ \mathbf{x}_{1+}(t+1) \\ \mathbf{x}_{2+}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2-} & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e-}(t) \\ \mathbf{x}_{1+}(t) \\ \mathbf{x}_{2+}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1-} \\ \mathbf{B}_{1+} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{e}(t) &= \begin{bmatrix} k\mathbf{C}_{2-} & \times & \mathbf{C}_{2+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e-}(t) \\ \mathbf{x}_{1+}(t) \\ \mathbf{x}_{2+}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{x}_{e-}(t) = \mathbf{x}_{1-}(t) - 1/k\mathbf{x}_{2-}(t).$$

Potom je-li dvojice  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$  stabilizovatelná, je i tento systém stabilizovatelný (neboť je rozšířením této dvojice o matici  $\mathbf{A}_{2+}$ , která je stabilní). Kritérium (2.105) pak je kvadratickou formou stavu  $\mathbf{x}_{e-}(t)$  a řízení  $\mathbf{u}(t)$  a úloha je převedena na problém regulátoru, tj. podmínky pro omezenou hodnotu kritéria jsou dány větami v odstavci 2.4. Přitom je třeba provést modifikaci stavového popisu a kritéria podle odstavce 2.3, neboť uvedené věty vyžadovaly nulové křížové členy v kritériu.

V případě sledování konstantního referenčního signálu lze dosáhnout splnění podmínek daných principem vnitřního modelu - pokud jim řízená soustava sama nevyhovuje - jednoduchým rozšířením řízené soustavy o integrátory na jejích vstupech nebo výstupech.



### 2.6.2 Kvadraticky optimální programové řízení

Výchozí předpoklady úlohy programového řízení se liší v popisu referenčního signálu. Uvažujme opět řízený systém popsany jako lineární časově invariantní diskretní systém (zobecnění na časově proměnný systém je přímočaré)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.118)$$

s  $m$ -rozměrným výstupem  $\mathbf{y}(t)$ . Referenční signál  $\mathbf{r}(t)$  předpokládáme známý na horizontu optimalizace  $t = 0, \dots, N-1$ . Budeme opět hledat řízení, které bude minimalizovat kritérium

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}'\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}'\mathbf{u}(t) \right\}, \quad (2.119)$$

kde  $\mathbf{Q}'$  a  $\mathbf{R}'$  jsou pozitivně semidefinitní matice a

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (2.120)$$

je **regulační odchylka**. Pro zjednodušení opět předpokládejme, že matice  $\mathbf{C}$  má hodnotu  $m$ , to znamená, že výstupy řízeného systému mohou nabývat vzájemně nezávislých hodnot. Ukážeme, že k optimalizaci tohoto kritéria lze použít dynamického programování. Postup optimalizace je shodný s postupem podrobně popsáním v odstavci 2.3, pouze k zahrnutí vlivu nenulového referenčního signálu do optimální hodnoty kritéria je třeba předpokládat, že optimální hodnota ztrátové funkce (2.52) má obecnější tvar

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) + q(t) \right). \quad (2.121)$$

Tento předpoklad nyní dokážeme indukcí. Podle (2.51) v čase  $t = N$  platí

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N), \quad \mathbf{p}(N) = 0, \quad q(N) = 0. \quad (2.122)$$

Předpokládejme dále, že v čase  $t+1$  platí

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(t+1), t+1) &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}^T(t+1)\mathbf{P}(t+1)\mathbf{x}(t+1) + \mathbf{x}^T(t+1)\mathbf{p}(t+1) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{p}^T(t+1)\mathbf{x}(t+1) + q(t+1) \right). \end{aligned}$$

Potom rovnici (2.50), popisující jeden krok algoritmu dynamického programování, můžeme psát jako

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(t), t) &= \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}'\mathbf{e}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}'\mathbf{u}(t) + V^*(\mathbf{x}(t+1), t+1) \right\} = \\ &= \min_{\mathbf{u}(t)} \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t))^T \mathbf{Q}' (\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)) + \right. \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}'\mathbf{u}(t) + \\ &\quad + (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t))^T \mathbf{P}(t+1) (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)) + \\ &\quad + (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t))^T \mathbf{p}(t+1) + \\ &\quad \left. + \mathbf{p}^T(t+1) (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)) + q(t+1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Označíme-li

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q}' \mathbf{C} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{D} + \mathbf{R}' \\ \mathbf{S} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}, \end{aligned}$$

lze kvadratickou formu na pravé straně (2.123) psát jako

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{u}(t)) &= \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})\mathbf{u}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{S} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^T(t)(\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) + (\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C} \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{u}^T(t)(\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) + (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T \mathbf{u}(t) + \\ &+ \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) + q(t+1). \end{aligned}$$

Doplněním na úplný čtverec dostaneme pro  $(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}) > 0$

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{u}(t)) &= \left( \mathbf{u}(t) + (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) \right)^T \\ &\quad (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B}) \\ &\quad \left( \mathbf{u}(t) + (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) \right) \\ &+ \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) - \\ &- \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) + (\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C} \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T \mathbf{x}(t) - \\ &- \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) - \\ &- (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) + q(t+1) - \\ &- (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)). \end{aligned}$$

Optimální řízení je tedy dáno jako

$$\mathbf{u}^*(t) = -(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} [(\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)], \quad (2.124)$$

neboli

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{l}(t), \quad (2.125)$$

kde

$$\mathbf{K}(t) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{B})^{-1} (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1)\mathbf{A}) \quad (2.126)$$

$$l(t) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) - \mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1)).$$

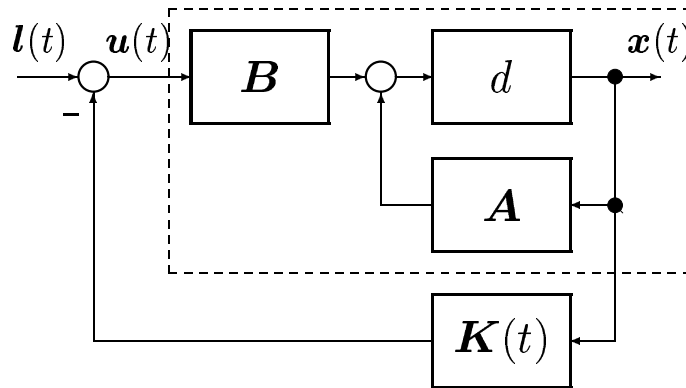
Optimální hodnota ztrátové funkce pak bude

$$\begin{aligned} 2q(\mathbf{u}^*(t)) &= \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) - \\ &- \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) + \\ &- \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A})^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)) \\ &+ (\mathbf{A}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{C} \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T \mathbf{x}(t) + \\ &- (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) + q(t+1) - \\ &- (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)). \end{aligned}$$

Je vidět, že tato optimální hodnota má opět tvar (2.121) a platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - (\mathbf{S}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B}(t)) \\ &\quad (\mathbf{R}(t) + \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{S}^T(t) + \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A}(t)) \\ \mathbf{p}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}(t)) \mathbf{p}(t+1) - (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{K}(t)) \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) \\ q(t) &= \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t) + q(t+1) - (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t))^T (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad (\mathbf{B}^T \mathbf{p}(t+1) - \mathbf{D}^T \mathbf{Q}' \mathbf{r}(t)). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Všimněte si, že optimální řízení na hodnotě  $q(t)$  nezáleží.



Obrázek 2.4: Kvadraticky optimální programové řízení

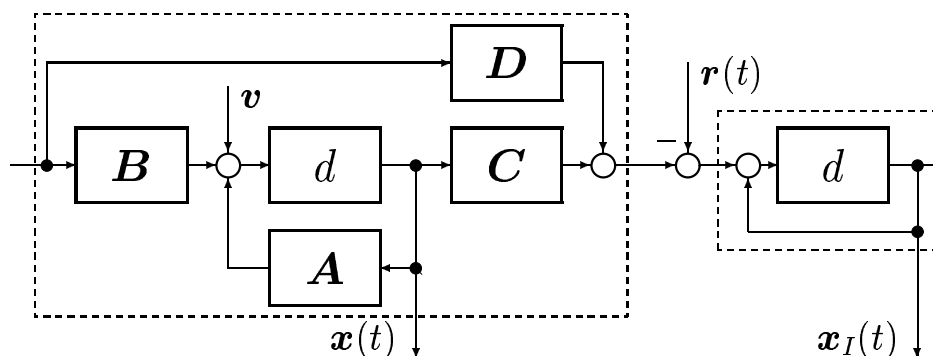
Řešení úlohy **programového řízení** tedy vede regulátor podle obr. 2.4, tvořený zpětnou vazbou od stavu, která je totožná s řešením úlohy optimální regulace, a přímou větví, kterou přivádíme na vstup řízené soustavy signál, získaný filtrací referenčního signálu na celém horizontu optimalizace. Všimněte si, že toto schéma řízení - na rozdíl od schématu získaného

řešením úlohy o servomechanismu - nemůže reagovat na změny požadované referenční trajektorie **v průběhu** regulačního procesu. Zpětnovazební část zde pouze stabilizuje řízený systém a sledování referenční trajektorie je dosaženo ovládním.

### 2.6.3 Robustní sledování konstantního referenčního signálu

Použijeme-li regulátor na obr. 2.3 ke sledování konstantního referenčního signálu, dosáhneme pro  $t \rightarrow \infty$  na výstupu řízené soustavy žádané hodnoty  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t)$  pouze v případě, že řízená soustava je přesně popsána modelem a na soustavu nepůsobí žádné poruchové signály. Oba tyto předpoklady nejsou při praktickém použití realistické. V praxi je třeba, aby sledování referenční hodnoty bylo **robustní**, to znamená, aby žádaná hodnota výstupu byla dosažena i při omezených, konečně velkých změnách vlastností řízené soustavy a při působení konstantních poruchových signálů  $\mathbf{v}$ .

Je známo, že těchto vlastností lze dosáhnout zavedením integrace regulační odchylky akce do regulátoru. Proto nyní ukážeme, jak lze navrhnout kvadraticky optimální servomechanismus s podobnými vlastnostmi.



Obrázek 2.5: Rozšířený systém s integrátory

První přístup je prosté rozšíření řízené soustavy o  $m$  integrátorů (sumátorů) na výstupu, které budou integrovat regulační odchylku. Dostaneme tak stavový model podle obr. 2.5

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}_I(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_I(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (2.128)$$

Je-li tento systém i při působení uvažovaných konečných změn stabilizovatelný, pak kvadraticky optimální regulátor pro takto rozšířený systém bude robustně sledovat konstantní referenční signál, a to i při působení uvažované konstantní poruchy  $\mathbf{v}$ . Kritérium optimality však bude ovlivněno vážením stavů  $\mathbf{x}_I(t)$ . Abychom se tomuto vlivu vyhnuli, je možné postupovat jiným způsobem.

Uvažujme limitní regulátor v čase  $t+1$  daný vztahem

$$\mathbf{u}(t+1) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t+1).$$

Není-li stav  $\mathbf{x}(t+1)$  v okamžiku generování řízení ještě dostupný, je možné ho nahradit

podle stavové rovnice jako

$$\mathbf{u}(t+1) = -\mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)).$$

Dostaneme tak popis uzavřené smyčky ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{u}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.129)$$

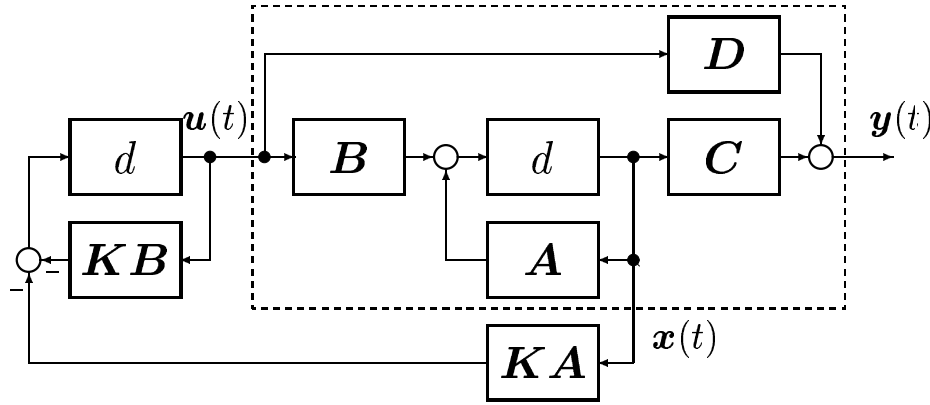
Pomocí transformační matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

lze matici uzavřené smyčky převést na tvar

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Je z něho vidět, že vlastní čísla uzavřené smyčky jsou tvořeny vlastními čísly matice  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ , odpovídajícími původním vlastním číslům uzavřené smyčky, a nulovými vlastními čísly, odpovídajícími počáteční podmínce  $\mathbf{u}(0)$ , která odezní v jediném kroku (viz obr. 2.6).



Obrázek 2.6: Dynamický popis stavového regulátoru

Uvažujme nyní kvadraticky optimální servomechanismus podle obr. 2.7, do kterého jsme zavedli sumátor řízený regulační odchylkou. Předpokládejme dále, že na systém působí konstantní porucha  $\mathbf{v}$ . Označíme-li stav sumátoru  $\mathbf{x}_I(t)$ , pak lze tento systém popsat rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v} \\ \mathbf{x}_I(t+1) &= \mathbf{x}_I(t) + \mathbf{K}'_2\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}'_2\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}'_2\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}'_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}'_2\mathbf{r}(t) + \mathbf{x}_I(t). \end{aligned}$$

Zvolíme-li jako stavové veličiny hodnoty  $\mathbf{x}(t)$  a  $\mathbf{u}(t)$ , dostaneme odtud

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{u}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{K}'_1 - \mathbf{K}'_1\mathbf{A} - \mathbf{K}'_2\mathbf{C} & \mathbf{I} - \mathbf{K}'_1\mathbf{B} - \mathbf{K}'_2\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}'_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t+1) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

a přechodovou matici stavu lze upravit na tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{u}(t+1) \end{bmatrix} = \left( \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K}'_1 & -\mathbf{K}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \quad (2.132)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}'_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t+1) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}'_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Porovnáme-li nyní tuto matici s maticí v (2.129), kterou lze psát též jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

lze dosáhnout stejné dynamiky, jestliže platí

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}'_1 & -\mathbf{K}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}\mathbf{A} & -\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Odtud dostaneme pro volbu zesílení  $\mathbf{K}'_1$  a  $\mathbf{K}'_2$  vztah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_1 & \mathbf{K}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{A} & \mathbf{I}+\mathbf{K}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.133)$$

Inverze matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

existuje právě tehdy, když tato matice nemá nulová vlastní čísla. Platí však

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ 0 & -\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

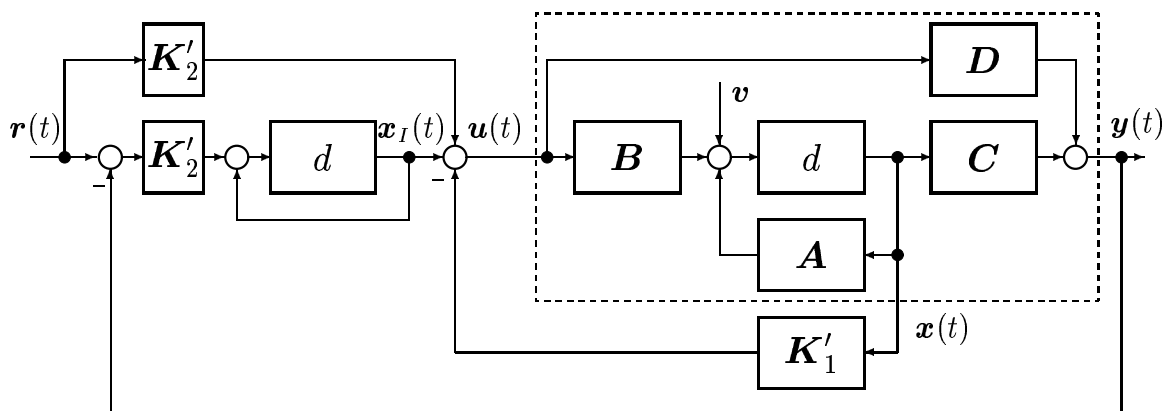
Determinant této matice je roven čitateli výrazu  $\det(-\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1} + \mathbf{D})$ , který je nulový právě tehdy, je-li nulová přenosová matice systému v bodě  $z = 1$ . Odtud plyne, že úloha robustního sledování konstantní reference je řešitelná právě tehdy, když systém **nemá žádné nuly v bodě**  $z = 1$ .

Jak jsme ukázali transformací (2.131), vlastní čísla uzavřené smyčky takto navrženého regulátoru jsou tvořeny vlastními čísly matice  $\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}$ , odpovídajícími původním vlastním číslům uzavřené smyčky kvadraticky optimálního regulátoru, a nulovými vlastními čísly, odpovídajícími počáteční podmínce  $\mathbf{u}(0)$ , která odezní v jediném kroku.

Vypočítáme-li nyní ustálený stav výstupu, dostaneme pro stabilní matici  $(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})$

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}(\infty)$$

pro libovolnou hodnotu poruchy  $\mathbf{v}$ . Robustnost takto navrženého servomechanismu plyne z toho, že platí-li, že pro daný model systému je matice  $(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})$  stabilní, jeho vlastní čísla mají konečnou vzdálenost od meze stability a rovněž přenos  $|\mathbf{G}(1)| \geq \epsilon > 0$ , jsou obě tyto vlastnosti zachovány též pro jisté omezené změny parametrů řízeného systému. Systém pak



Obrázek 2.7: Robustní kvadraticky optimální servomechanismus

sleduje referenční signál přesně pro celou třídu systémů, vyhovující uvedeným omezením.

## Kapitola 3

# Algebraické metody řízení I

Algebraické metody řízení je společný název pro metody analýzy a syntézy dynamických systémů, které vycházejí z vnějšího popisu systému a chápou jej jako algebraický objekt. Výsledky syntézy spočívají v řešení algebraických rovnic různých typů. Algebraickým metodám řízení je věnována původní kniha (Kučera, 1979).

Nespornou výhodou algebraických metod je formální stránka řešení problému spočívající v nalezení řešení a určení podmínek řešitelnosti určitých rovnic. Problém syntézy řízení systému je tak přesunut do oblasti numerických metod řešení algebraických rovnic.

Nevýhodou algebraického přístupu je vysoký stupeň abstrakce, který může vést ke ztrátě názornosti a fyzikálního pohledu na řešený problém.

Algebraické metody byly nejprve použity na řešení úloh diskrétního řízení systémů s jednou vstupní a výstupní veličinou a také na systémy mnohazměrové. Při určitém zobecnění jsou použitelné i pro systémy spojité a v literatuře se objevují publikace s algebraickým přístupem k systémům s časově proměnnými parametry, systémům nelineárním, systémům s rozloženými parametry a systémům vícedimenzionálním.

Náš výklad začneme zavedením matematického aparátu potřebného k řešení diskrétních úloh řízení algebraickými metodami. Zavedeme si nejprve některé pojmy a operace s polynomy. Pro diskrétní systémy s jednou vstupní i výstupní veličinou vyřešíme potom problém časově optimálního a kvadraticky optimálního řízení. Tyto dva problémy vedou na lineární zákon řízení a řešení pomocí algebraického přístupu je jednoduché a spočívá v řešení lineárních rovnic s polynomy. Polynomiální přístup lze použít i k řešení problémů řízení spojitých systémů, viz problém modálního řízení a přizpůsobení systému zvolenému modelu.

V další části pojednáme o sjednocení algebraického přístupu pro spojité i diskrétní systémy. Zavedeme potřebný matematický aparát a vyřešíme některé jednoduché úlohy.

### 3.1 Jednorozměrové systémy

Jednorozměrové systémy jsou systémy s jednou vstupní i výstupní veličinou. Takové systémy se často označují zkratkou jako SISO systémy (Single Input - Single Output). V této kapitole se budeme zabývat problematikou řízení lineárních SISO systémů.



Přenos diskretního SISO systému je roven

$$S(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (3.1)$$

kde  $a(z)$  a  $b(z)$  jsou polynomy v kladných mocninách  $z$ . Kauzalita diskretního systému je zaručena tím, že stupeň polynomu  $b(z)$  v čitateli přenosu není větší než stupeň polynomu  $a(z)$  ve jmenovateli přenosu.

Přenos diskretního systému můžeme vyjadřovat i v záporných mocninách  $z$ ,

$$S(z^{-1}) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}.$$

Kauzalita řízeného systému popsaného přenosem  $S(z^{-1})$  v záporných mocninách  $z$  je zaručena nenulovostí absolutního členu ve jmenovateli přenosu. Tato podmínka je v našem případě splněna, neboť původní přenos  $S(z)$  byl dle předpokladu kauzální.

Často místo  $z^{-1}$  píšeme  $d$  (delay - zpoždění) a přenos systému označujeme  $S(d)$ , potom

$$S(d) = \frac{b(d)}{a(d)} = \frac{b_m d^{n-m} + \dots + b_0 d^n}{1 + a_{n-1} d + \dots + a_1 d^{n-1} + a_0 d^n}.$$

Přenos diskretního systému je tedy roven podílu dvou polynomů v  $z$  či  $d$ . Obecně je řád diskretního systému popsaného přenosem  $S(d)$  roven většímu ze stupňů polynomů v čitateli a jmenovateli jeho přenosu.

**Charakteristický polynom**  $\Delta$  diskretního systému je roven polynomu jmenovatele jeho přenosu v kladných mocninách  $z$ . Platí tedy  $\Delta = a(z)$ . Kořeny charakteristického polynomu jsou rovny přenosovým pólům systému a jejich absolutní hodnota rozhoduje o stabilitě diskretního systému. Pokud je přenos diskretního systému vyjádřen v záporných mocninách  $z$  nebo v  $d$ , pak polynom ve jmenovateli jeho přenosu nazýváme **pseudocharakteristický polynom**. V textu ho budeme značit stejným písmenem  $\Delta$ . Jeho kořeny jsou rovny převráceným hodnotám kořenů charakteristického polynomu s tou výjimkou, že nulové kořeny charakteristického polynomu se v pseudocharakteristickém polynomu neobjeví (přesunou se do nekonečna). Proto může být řád pseudocharakteristického polynomu nižší než řád jeho charakteristického polynomu. Protože nulové přenosové póly odpovídají v odezvě módům, které dozní v konečném počtu kroků, můžeme je zanedbat.

Provedeme-li dělení polynomů  $b(d)$  a  $a(d)$ , jak je naznačeno v přenosu  $S(d)$ , dostaneme

$$S(d) = \frac{b(d)}{a(d)} = g(0) + g(1)d + g(2)d^2 + \dots + g(i)d^i + \dots, \quad (3.2)$$

kde  $g(0), g(1), \dots$  jsou hodnoty impulsní posloupnosti  $g(k)$  systému.

Posloupnost  $g(k)$  můžeme také formálně zapisovat ve tvaru formální mocninné řady. Operátor  $d$  můžeme tedy považovat pouze za ukazatel pozice členu posloupnosti  $g(k)$ . Posloupnost  $g(k)$  vyjadřujeme podle předchozího vztahu jako podíl polynomů  $b(d)$  a  $a(d)$ .

Také lineární spojité systémy s jednou vstupní i výstupní veličinou popisujeme přenosem  $S(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , kde  $a(s)$  i  $b(s)$  jsou polynomy v proměnné  $s$ . Algebraické metody lze použít i při syntéze řízení spojitého systému. Je třeba ale vždy zajistit ryzost systému, to znamená, že stupeň polynomu v čitateli přenosu spojitého systému nesmí být větší než stupeň polynomu

ve jmenovateli jeho přenosu.

Protože budeme pracovat s polynomy v proměnné  $d$  nebo  $z$ , případně  $s$ , je třeba zavést některé pojmy a operace s polynomy. Tomu bude věnován následující odstavec.

### 3.1.1 Polynomy

Polynomy budeme značit malými písmeny. Polynom

$$a = a_0 + a_1d + \cdots + a_nd^n \quad (3.3)$$

je stupně  $n$ , je-li  $a_n \neq 0$ . **Stupeň polynomu** budeme značit  $n = \deg a$ .

Pro úplnost definujeme ještě stupeň nulového polynomu  $\deg a = -\infty$ , pro  $a = 0$ .

Říkáme, že polynom  $b$  je **dělitel polynomu**  $a$  nebo polynom  $a$  je násobek  $b$ , existuje-li polynom  $c$  takový, že

$$a = bc.$$

Tuto skutečnost budeme značit  $b|a$  ( $b$  dělí  $a$ ).

K daným polynomům  $a$  a  $b$  lze vždy nalézt polynomy  $u$  a  $v$  takové, že

$$a = bu + v, \quad \text{kde} \quad \deg v < \deg b.$$

Polynom  $u$  je podíl a polynom  $v$  je zbytek při dělení polynomu  $a$  polynomem  $b$ . To je zřejmé, neboť z předchozího vztahu plyne  $\frac{a}{b} = u + \frac{v}{b}$ . Pokud je stupeň polynomu  $b$  větší než je stupeň polynomu  $a$ , pak zřejmě  $u = 0$  a  $v = a$ .

Pro každé dva polynomy  $a$ ,  $b$  existuje **největší společný dělitel**  $g$  a **nejmenší společný násobek**  $l$ . Největší společný dělitel polynomů  $a$  a  $b$  budeme značit  $g = (a, b)$ .

Pro libovolné polynomy  $a$ ,  $b$  lze vždy nalézt kromě jejich největšího společného dělitele  $g$  a nejmenšího společného násobku  $l$  také dva páry nesoudělných polynomů  $p$ ,  $q$  a  $r$ ,  $s$ , že platí

$$\begin{aligned} ap + bq &= g \\ ar + bs &= 0 \\ l &= ar = -bs. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Maticový zápis předchozí rovnice je

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 \end{bmatrix},$$

kde polynomiální matice  $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$  má konstantní nenulový determinant. Taková matice se nazývá unimodální matice. Unimodální matice má inverzi, jejíž prvky jsou opět polynomy. V našem případě je označíme po řadě jako  $x$ ,  $y$ ,  $u$  a  $v$ . Tedy

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Odtud plyne  $a = gx$ ,  $b = gy$ , a proto polynom  $g$  je dělitel polynomů  $a$  i  $b$ . Je-li polynom  $g_1$  jiný dělitel polynomů  $a$  i  $b$ , pak platí  $a = g_1 a_1$ ,  $b = g_1 b_1$  pro nějaké polynomy  $a_1$ ,  $b_1$ . Po dosazení předchozích vztahů do rovnice  $ap + bq = g$  dostaneme

$$g_1(a_1 p + b_1 q) = g.$$

To znamená, že polynom  $g_1$  je dělitel polynomu  $g$ , a proto polynom  $g$  je největší společný dělitel polynomů  $a$  i  $b$ .

Pokud jsou polynomy  $a$ ,  $b$  nesoudělné (jejich největší společný dělitel je pouze konstanta, čili  $g = 1$ ), pak podle předchozích úvah platí

$$ap + bq = 1. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.5) se nazývá **Bezoutova identita** a používá se jako test nesoudělnosti polynomů  $a$  a  $b$ .

Z předchozích úvah plyne algoritmus výpočtu polynomů  $g$  a  $l$  a párů nesoudělných polynomů  $p$ ,  $q$  a  $r$ ,  $s$ : Nejprve sestavíme polynomiální matici

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a tuto matici sloupcovými operacemi (resp. řádkovými operacemi) upravíme do tvaru

$$\begin{bmatrix} g & 0 \\ p & r \\ q & s \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} g & p & q \\ 0 & r & s \end{bmatrix}.$$

Odtud přímo plynou polynomy  $g$  a  $l$ . Dovolené sloupcové operace jsou:

- záměna libovolných sloupců
- násobení libovolného sloupce nenulovou konstantou
- násobení sloupce libovolným polynomem a přičtení výsledku k jinému sloupci

Podobně pro řádkové operace. Řádkové operace provedeme násobením unimodální maticí zleva a sloupcové operace provedeme násobením unimodální maticí zprava. Uvědomme si, že předchozí algoritmus je v podstatě postupná redukce stupňů polynomů  $a$  a  $b$ .

**Příklad:** Mějme polynomy

$$\begin{aligned} a &= (2-d)(1-d^2) = 2-d-2d^2+d^3 \\ b &= (2-d)(-d) = -2d+d^2. \end{aligned}$$

Z kořenových činitelů je zřejmé, že největší společný dělitel  $g$  a nejmenší společný násobek  $l$  jsou rovny

$$g = (a, b) = 2 - d$$

$$l = (2-d)(d)(1-d^2) = 2d - d^2 - 2d^3 + d^4.$$

Určeme nyní polynomy  $g$  a  $l$  podle předchozího algoritmu. Sestavíme tedy nejprve polynomiální matici

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-d-2d^2+d^3 & -2d+d^2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní postupně sloupcovými operacemi upravujeme matici do potřebného tvaru. Vybereme sloupec, jehož polynom v prvním řádku má nejmenší stupeň. Jsou-li stupně polynomů v prvním řádku stejné, můžeme vybrat libovolný sloupec. V našem případě je to druhý sloupec. Nyní vynásobíme tento druhý sloupec takovým polynomem, aby po odečtení od prvního sloupce nastalo snížení řádu polynomu v prvním řádku. Vynásobením druhého sloupce polynomem  $d$  dostaneme po odečtení

$$\begin{bmatrix} 2-d-2d^2+d^3 & -2d+d^2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2-d & -2d+d^2 \\ 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní opět násobíme první sloupec takovým polynomem, aby se po odečtení redukoval první polynom druhého sloupce. První sloupec násobíme zřejmě polynomem  $(-d)$  a dostaneme

$$\begin{bmatrix} 2-d & -2d+d^2 \\ 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2-d & 0 \\ 1 & d \\ -d & 1-d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ p & r \\ q & s \end{bmatrix}.$$

Platí tedy stejný výsledek, jaký jsme získali z kořenových činitelů. Navíc jsme obdrželi polynomy  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , a  $s$ , které využijeme později. Největší společný dělitel je jednoznačný až na konstantní násobek.  $\square$

Dále se budeme zabývat problémem nalezení stabilní a nestabilní části daného polynomu  $a$ . **Polynom  $a$  je stabilní** (přesněji asymptoticky stabilní), jestliže řada

$$g(0) + g(1)d + g(2)d^2 + \dots = \frac{1}{a(d)} \tag{3.6}$$

konverguje k nule, to znamená, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = 0.$$

Výraz (3.6) můžeme rozložit na součet parciálních zlomků

$$\frac{1}{a(d)} = \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i d} = \sum_{i=0}^n \beta_i \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_i d)^j.$$

Geometrická řada  $(\alpha_i d)^j$  konverguje k nule (to znamená, že polynom  $a$  je stabilní), leží-li kořeny  $\alpha_i$  uvnitř jednotkové kružnice, to znamená, že  $|\alpha_i| < 1$ . Uvědomme si, že  $\alpha_i$  jsou kořeny polynomu  $a(z)$  v kladných mocninách  $z$ . Polynom  $a(d) = a(z^{-1})$  má kořeny  $\lambda_i = 1/\alpha_i$ . Proto polynom  $a(d)$  je stabilní, leží-li jeho kořeny  $\lambda_i = 1/\alpha_i$  vně jednotkové kružnice, čili  $|\lambda_i| > 1$ .

Polynom  $a$  je **kauzální**, platí-li (3.6), to znamená, že absolutní člen polynomu  $a$  musí být různý od nuly ( $a_0 \neq 0$ ).

Mějme polynom  $a$  dle (3.3). Definujme **reciprokový polynom**  $\bar{a}$ , který je roven

$$\bar{a} = a_n + a_{n-1}d + \cdots + a_0d^n.$$

Zřejmě kořeny polynomu  $\bar{a}$  jsou  $\bar{\lambda}_i = 1/\lambda_i$ , kde  $\lambda_i$  jsou kořeny původního polynomu  $a$ .

**Faktorizace polynomu**  $a$  spočívá v nalezení dvojice nesoudělných polynomů  $a^+$ ,  $a^-$  takových, že platí

$$a = a^+a^-, \quad (3.7)$$

kde  $a^+$  je stabilní polynom největšího stupně obsažený v polynomu  $a$ . Faktorizace polynomu je jednoznačná až na konstantu, neboť pro libovolné číslo  $\alpha \neq 0$  platí

$$a = a^+a^- = (\alpha a^+)\left(\frac{1}{\alpha}a^-\right).$$

**Příklad:** Mějme polynom  $a = \alpha + \beta d$ . Jeho kořen je  $d_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ . Faktorizace tohoto polynomu je

$$\begin{array}{lll} a^+ = \alpha + \beta d, & a^- = 1, & \text{je-li } |\alpha| > |\beta| \\ a^+ = 1; & a^- = \alpha + \beta d, & \text{je-li } |\alpha| \leq |\beta|. \end{array}$$

**Příklad:** Mějme polynom  $a = d^2(d-1)(d^2+2d+2)(d^2+0.8d+0.41)$ . Jeho kořeny jsou zřejmě

$$d_{1,2} = 0, \quad d_3 = 1, \quad d_{4,5} = 1 \pm j, \quad d_{6,7} = -0.4 \pm 0.5j.$$

Faktorizace tohoto polynomu je

$$a^+ = d^2 + 2d + 2, \quad a^- = d^2(d-1)(d^2 + 0.8d + 0.41).$$

### 3.1.2 Polynomiální rovnice

Při syntéze řízení se vyskytují lineární rovnice s polynomy. V literatuře se takové rovnice označují také jako **rovnice diofantické**. Mějme tedy polynomiální rovnici ve tvaru

$$ax + by = c, \quad (3.8)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou dané polynomy a  $x$ ,  $y$  jsou hledané polynomy, které jsou řešením této rovnice. Nejprve uvedeme podmínku řešitelnosti předchozí rovnice. Polynomiální rovnice (3.8) má řešení právě tehdy, když největší společný dělitel polynomů  $a$ ,  $b$  dělí polynom  $c$ . Se zavedenou symbolikou můžeme předchozí podmínku zapsat ve tvaru

$$(a, b) | c. \quad (3.9)$$

Ověření je jednoduché. Je-li  $g$  největší společný dělitel polynomů  $a$  a  $b$ , pak platí  $a = ga^0$ ,  $b = gb^0$ , kde  $a^0$  a  $b^0$  jsou nesoudělné polynomy. Potom se diofantická rovnice změní na

$$g(a^0x + b^0y) = c,$$

neboli

$$a^0x + b^0y = \frac{c}{g} = c^0.$$

Aby  $x$  a  $y$  byly polynomy, musí být  $c^0$  polynom, to znamená, že polynom  $g$  musí dělit polynom  $c$ . Pokud naopak polynom  $g$  je největší společný dělitel polynomů  $a$  a  $b$ , potom podle (3.4) existují polynomy  $p$  a  $q$  takové, že

$$ap + bq = g.$$

Protože  $c = gc^0$ , vynásobením předchozí rovnice polynomem  $c^0$  dostaneme

$$apc^0 + bqc^0 = gc^0 = c.$$

Polynomy  $x = pc^0$ ,  $y = qc^0$  vyhovují diofantické rovnici (3.8).

Řešení diofantické rovnice, pokud existuje, není jediné. Je-li  $x^0$ ,  $y^0$  libovolné řešení diofantické rovnice, pak obecné řešení je

$$\begin{aligned} x &= x^0 - b^0h \\ y &= y^0 + a^0h. \end{aligned} \tag{3.10}$$

pro libovolný polynom  $h$ . Předchozí tvrzení snadno dokážeme. Protože obě dvojice polynomů  $x$ ,  $y$  i  $x^0$ ,  $y^0$  jsou řešením diofantické rovnice (3.8), platí tedy

$$ax^0 + by^0 = c, \quad ax + by = c.$$

Rozdíl předchozích rovnic je

$$a(x - x^0) + b(y - y^0) = 0,$$

neboli

$$g(a^0(x - x^0) + b^0(y - y^0)) = 0. \tag{3.11}$$

Protože polynomy  $a^0$ ,  $b^0$  jsou nesoudělné, musí polynom  $b^0$  dělit  $(x - x^0)$  a také polynom  $a^0$  dělit  $(y - y^0)$ . Platí tedy

$$\begin{aligned} b^0|(x - x^0) & \quad \text{čili} & \quad x - x^0 = b^0r \\ a^0|(y - y^0) & & \quad y - y^0 = a^0h. \end{aligned}$$

Dosadíme-li předchozí vztah do (3.11), pak

$$g(a^0b^0r + b^0a^0h) = 0.$$

Z předchozí rovnice plyne  $r = -h$ . Odtud přímo plyne tvar (3.10) obecného řešení diofantické rovnice (3.8).

Řešení diofantické rovnice (3.8) můžeme provádět pomocí algoritmu pro výpočet největšího společného dělitele, popsáno v předchozím odstavci. Pro dané polynomy  $a$ ,  $b$  spočteme polynomy  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $g$ , splňující vztahy

$$\begin{aligned} ap + bq &= g, \\ ar + bs &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Protože  $g = (a, b)$ , určíme  $c^0 = c/g$ . Pokud  $g|c$ , to znamená, že platí  $c = c^0g$ , je splněna podmínka řešitelnosti (3.9) a diofantická rovnice (3.8) má řešení. Vynásobením první rovnice v (3.12) polynomem  $c^0$  dostaneme přímo jedno řešení

$$\begin{aligned}x^0 &= pc^0 = p\frac{c}{g}, \\y^0 &= qc^0 = q\frac{c}{g}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Vytkneme-li z druhé rovnice v (3.12) polynom  $g$ , dostaneme

$$s = a^0, \quad r = -b^0.$$

Obecné řešení diofantické rovnice (3.8) je tedy

$$\begin{aligned}x &= p\frac{c}{g} + rh, \\y &= q\frac{c}{g} + sh,\end{aligned}\tag{3.14}$$

kde  $h$  je libovolný polynom.

**Příklad:** Řešme diofantickou rovnici (3.8) s polynomy

$$\begin{aligned}a &= 2 - d - 2d^2 + d^3, \\b &= -2d + d^2, \\c &= -2 + d + 4d^3 - 4d^4 + d^5.\end{aligned}$$

Pomocí algoritmu popsaného v předchozím odstavci vypočteme polynomy  $p, q, r, s, g$ , které jsou rovny

$$\begin{aligned}g &= 2 - d, \\p &= 1, \quad r = d, \\q &= -d, \quad s = 1 - d^2.\end{aligned}$$

Nyní určíme podmínku řešitelnosti diofantické rovnice, to znamená, že ověříme, zda  $c^0 = c/g$  je polynom. Platí

$$c^0 = \frac{c}{g} = -1 + 2d^3 - d^4.$$

Diofantická rovnice je řešitelná a obecné řešení je rovno

$$\begin{aligned}x &= p\frac{c}{g} + rh = -1 + 2d^3 - d^4 + (d)h, \\y &= q\frac{c}{g} + sh = (-d)(-1 + 2d^3 - d^4) + (1 - d^2)h,\end{aligned}$$

kde  $h$  je libovolný polynom.

□

Často mezi všemi řešeními diofantické rovnice (3.8) hledáme taková řešení, která splňují nějaké další omezující podmínky. Hledejme například takové řešení diofantické rovnice (3.8), pro které je stupeň polynomu  $x$  minimální.

V obecném řešení (3.10) redukuje partikulární řešení  $x^0$  modulo  $b^0$ . Pak

$$x^0 = b^0 u + v, \quad \text{neboť} \quad \frac{x^0}{b^0} = u + \frac{v}{b^0}.$$

Polynom  $u$  je podíl a polynom  $v$  je zbytek dělení. Aby redukce šla provést, musí být stupeň polynomu  $x^0$  větší než stupeň polynomu  $b^0$ . Pokud tomu tak není, čili platí  $\deg x^0 < \deg b^0$ , pak  $x^0 = v$  a  $u = 0$ . Po dosazení partikulárního řešení do obecného řešení (3.10) dostaneme

$$x = v + b^0(u - h),$$

kde stupeň polynomu  $v$  je menší než stupeň polynomu  $b^0$ . Volíme-li polynom  $h = u$ , pak řešení s minimálním stupněm polynomu  $x$  je

$$\begin{aligned} x &= v, \\ y &= y^0 + a^0 u. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Chceme-li splnit jiné požadavky, například aby absolutní člen polynomu  $x$  nebo  $y$  byl nulový, dostaneme jiné požadavky na polynom  $h$ .

**Příklad:** Hledejme řešení diofantické rovnice s minimálním stupněm polynomu  $x$ . Polynomy  $a, b, c$  jsou podle předchozího příkladu.

Partikulární řešení je podle předchozího příkladu rovno

$$\begin{aligned} x^0 &= p \frac{c}{g} = -1 + 2d^3 - d^4, \\ y^0 &= q \frac{c}{g} = d - 2d^4 + d^5. \end{aligned}$$

Polynom  $b^0$  je roven  $b^0 = b/g = -d$ . Redukcí polynomu  $x^0$  vypočteme polynomy  $u, v$

$$\frac{x^0}{b^0} = d^3 - 2d^2 + \frac{-1}{-d}.$$

Odtud

$$u = d^3 - 2d^2, \quad v = -1.$$

Podle (3.15) je řešení s minimálním stupněm polynomu  $x$  rovno

$$\begin{aligned} x &= v = -1, \\ y &= y^0 + a^0 u = d - 2d^2 + d^3. \end{aligned}$$

□

Jsou-li polynomy  $a, b$  nesoudělné, pak řešení polynomiální rovnice (3.8) s minimálním stupněm polynomu  $x$  dostaneme přímo **metodou neurčitých koeficientů**. Zvolíme stupně polynomů  $x$  a  $y$  podle vztahu

$$\begin{aligned} \deg x &= \deg b - 1, \\ \deg y &= \deg a - 1 \quad \text{pro} \quad \deg a + \deg b > \deg c, \\ \deg y &= \deg c - \deg b \quad \text{pro} \quad \deg a + \deg b \leq \deg c. \end{aligned} \tag{3.16}$$



Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme soustavu rovnic, ze které určíme koeficienty  $x_i, y_j$  polynomů  $x$  a  $y$ .

**Příklad:** Řešte polynomiální rovnici  $ax + by = c$ , kde polynomy  $a, b, c$  jsou

$$a(d) = (2 + d)(2d + 1)(d + 1),$$

$$b(d) = (d + \alpha)d^2,$$

$$c(d) = 1,$$

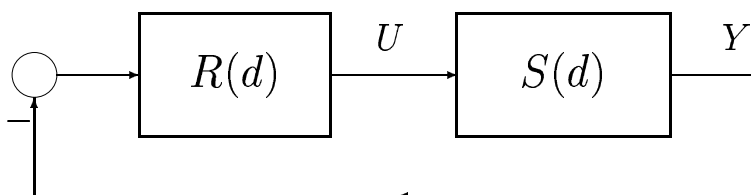
pro parametr  $\alpha = 3, \alpha = 0.5$  a  $\alpha = 1$ . Nalezněte obecné řešení, řešení s nejmenším stupněm polynomu  $x$  i řešení s nulovým absolutním členem v polynomu  $y$ .

□

V dalších odstavcích uvedeme řešení některých obecných problémů zpětnovazebního řízení.

### 3.1.3 Stabilizující regulátory

V tomto odstavci uvedeme řešení obecného problému nalezení všech regulátorů  $R$ , které ve zpětnovazebním spojení s daným řízeným systémem  $S$  zajistí stabilitu celého zpětnovazebního obvodu podle obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Stabilizace systému  $S$  regulátorem  $R$

Pro diskrétní systémy je možno tento problém řešit v okruhu polynomů. Je zřejmé, že stabilita zpětnovazebního systému je nutnou podmínkou jeho správné činnosti. Pouze z této třídy stabilizujících regulátorů můžeme vybírat ty, které nám z různých důvodů nejlépe vyhovují.

Má-li řízený systém přenos  $S(d) = \frac{b(d)}{a(d)}$ , pak problém nalezení všech stabilizujících regulátorů  $R(d) = \frac{q(d)}{p(d)}$  řeší následující tvrzení.

Problém nalezení stabilizujících regulátorů má řešení pouze tehdy, když systém  $S$  nemá skrytou nestabilitu, to znamená, že jeho nedosažitelná nebo nepozorovatelná část není nestabilní. Stabilizující regulátor - pokud existuje - je realizace, která nemá skrytou nestabilitu přenosu

$$R = \frac{y - aF}{x + bF}, \quad (3.17)$$

kde  $F$  je libovolný stabilní přenos a polynomy  $x$  a  $y$  jsou řešením polynomiální rovnice

$$ax + by = 1. \quad (3.18)$$

Přítom jmenovatel regulátoru nesmí být nulový, proto musí ještě platit  $x + bF \neq 0$ .

Vlivem konečné doby výpočtu akční veličiny musí realizovatelný přenos regulátoru mít zpoždění alespoň jeden krok. Tím je kladena další podmínka na regulátor, a sice, že absolutní člen v čitateli přenosu regulátoru musí být nulový, čili  $g_0 = 0$ . Protože jsme v předchozím tvrzení nekladli žádnou podmínku na zpoždění regulátoru, je třeba toto zpoždění nejprve přesunout formálně do systému, regulátor navrhnout pro takto upravený systém a potom zpoždění vrátit zpět do regulátoru. Uvědomme si, že toto zpoždění nezvyšuje řád regulátoru, pouze respektuje zpoždění při výpočtu akčního zásahu.

Podle předchozího tvrzení tvoří všechny stabilizující regulátory jednoparametrickou množinu - parametrem je libovolný stabilní přenos  $F$ . Jestliže zvolíme přenos  $F = g/h$ , kde  $g$  je libovolný polynom a  $h$  je libovolný stabilní polynom, pak přenos stabilizujících regulátorů je roven

$$R = \frac{yh - ag}{xh + bg} = \frac{q}{p}. \quad (3.19)$$

Pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního obvodu je

$$\Delta = ap + bq = a(xh + bg) + b(yh - ag) = h, \quad (3.20)$$

kde  $h$  je podle předpokladu stabilní polynom.

Předchozími vztahy (3.19) pro stabilizující regulátor a (3.20) pro pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního obvodu jsme vlastně dokázali předchozí tvrzení. Platí totiž, že pokud je regulátor dle (3.17) a libovolný přenos  $F$  je stabilní, pak je zpětnovazební obvod stabilní, neboť pseudocharakteristický polynom je roven stabilnímu jmenovateli přenosu  $F$ .

Obráceně, pokud existuje nějaký regulátor  $R = \frac{q}{p}$ , který zajistí stabilitu zpětnovazebního obvodu, pak je pseudocharakteristický polynom  $\Delta = ap + bq = h$  roven nějakému stabilnímu polynomu  $h$ . Všechny polynomy  $p, q$  pro které platí  $ap + bq = h$  mohou být vyjádřeny ve tvaru  $p = xh + bg, q = yh - ag$ , pro libovolný polynom  $g$  a polynomy  $x$  a  $y$ , které jsou řešením polynomiální rovnice (3.18). To znamená, že libovolný stabilizující regulátor je určen podle (3.17) a (3.18).

**Příklad:** Uvažujme stejnosměrný motor s cizím buzením řízený proudem do kotvy. Jeho přenos mezi proudem kotvy jako vstupní veličinou a polohou hřídele jako výstupní veličinou je roven

$$G(s) = \frac{k}{J} \frac{1}{s^2},$$

kde  $k$  je momentová konstanta motoru a  $J$  je moment setrvačnosti motoru a zátěže. Pro jednoduchost uvažujme  $k/J = 1$ . Přenos ekvivalentního diskrétního systému je roven

$$G(d) = \frac{T_s^2}{2} \frac{z + 1}{(z - 1)^2} = \frac{T_s^2}{2} \frac{d + d^2}{(1 - d)^2},$$

kde  $T_s$  je perioda vzorkování. Zde jsme uvažovali synchronní vzorkování vstupu a výstupu spojitého systému. Pro zanedbatelnou dobu výpočtu  $T_c = 0$  akční veličiny v diskrétním regulátoru  $R$  je potom přenos diskrétního systému  $S$  roven (modifikační faktor  $\varepsilon = 1$ )

$$S(d, 1) = d^{-1}G(d) = \frac{T_s^2}{2} \frac{1 + d}{(1 - d)^2}.$$

Abychom nemuseli klást omezující podmínku na regulátor  $R$ , přesuneme zpoždění do diskrétního systému. Uvažujeme tedy přenos diskrétního systému ve tvaru  $dS(d)$ , čili uvažujeme vlastně původní přenos  $G(d)$ . Určíme množinu všech stabilizujících regulátorů a ve výsledku přesuneme zpoždění zpět do regulátoru.

Vyřešíme tedy nejprve polynomiální rovnici (3.18) ve tvaru

$$(1 - 2d + d^2)x + \frac{T_s^2}{2}(d + d^2)y = 1.$$

Její řešení je rovno

$$x = 1 + 0.75d, \quad y = \frac{1}{T_s^2}(2.5 - 1.5d).$$

Všechny stabilizující regulátory jsou podle (3.17) určeny přenosem

$$R = \frac{\frac{1}{T_s^2}(2.5 - 1.5d) + (1 - 2d + d^2)F}{1 + 0.75d - \frac{T_s^2}{2}(d + d^2)F},$$

kde  $F$  je libovolný stabilní přenos. Realizovatelný regulátor  $R_r(d)$  při zanedbatelné době výpočtu akční veličiny je tedy určen přenosem

$$R_r(d) = dR(d) = \frac{\frac{1}{T_s^2}(2.5d - 1.5d^2) + (d - 2d^2 + d^3)F}{1 + 0.75d - \frac{T_s^2}{2}(d + d^2)F}.$$

Povšimněte si, že při zanedbatelné době výpočtu akční veličiny jsme vlastně navrhovali regulátor pro systém při synchronním vzorkování vstupu a výstupu a zpoždění regulátoru jsme realizovali až ve výsledném přenosu regulátoru podle (3.17). Tento postup je možný pouze při zanedbatelné době výpočtu akční veličiny v diskrétním řídicím členu a také pouze tehdy, když původní spojité systém nemá přímou vazbu mezi vstupem a výstupem.

### 3.1.4 Modální řízení

Při modálním řízení chceme navrhnout takový regulátor  $R$ , aby zpětnovazební obvod tvořený systémem  $S$  a regulátorem  $R$  měl zvolený charakteristický polynom. Tím vnutíme zpětnovazebnímu obvodu požadované módy.

Protože budeme určovat charakteristický polynom zpětnovazebnímu obvodu (a ne pseudocharakteristický polynom), musíme řešit tento problém v okruhu polynomů v kladných mocninách  $z$ . Nechť tedy daný systém  $S$  má přenos  $S(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$  a hledaný regulátor  $R$  má přenos  $R(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ . Charakteristický polynom  $\Delta$  zpětnovazebnímu obvodu je určen vztahem

$$\Delta = ap + bq. \quad (3.21)$$

Problém modálního řízení spočívá v řešení předchozí polynomiální rovnice pro dané polynomy  $a$ ,  $b$  a  $\Delta$ . Má-li mít regulátor  $R$  zpoždění jeden krok, musí být stupeň polynomu  $q$  alespoň o jednotku nižší než je stupeň polynomu  $p$ . Stupeň charakteristického polynomu

je roven součtu stupňů systému a regulátoru, proto

$$\deg \Delta = \deg a + \deg p.$$

Aby polynomiální rovnice (3.21) vedla na kauzální regulátor, musí být stupeň zvoleného charakteristického polynomu  $\Delta$  dost velký. Postačující podmínka řešitelnosti úlohy je

$$\deg \Delta \geq 2 \deg a - 1. \quad (3.22)$$

Předchozí podmínka řešitelnosti plyne ze stupňů polynomů v rovnici (3.21). Platí  $\deg q \leq \deg a - 1$  a  $\deg p = \deg \Delta - \deg a$ . Aby platila podmínka kauzality  $\deg p \geq \deg q$  regulátoru  $R$ , pak

$$\deg p = \deg \Delta - \deg a \geq \deg q \leq \deg a - 1.$$

Odtud přímo plyne podmínka (3.22). Stupně polynomů  $q$ ,  $p$  v přenosu regulátoru  $R$  jsou tedy

$$\deg q \leq \deg a - 1 \quad \deg p = \deg \Delta - \deg a.$$

**Příklad:** Mějme opět diskretní systém vzniklý diskretizací přenosu stejnosměrného motoru. Jeho přenos je uveden v předchozím příkladu.

Určeme takový přenos diskretního regulátoru  $R$ , aby zpětnovazební obvod měl všechny póly nulové. Potom jeho charakteristický polynom je  $\Delta = z^i$ . Z podmínky řešitelnosti (3.22) je stupeň charakteristického polynomu omezen

$$\deg \Delta = i > 2 \deg a - 1 = 3.$$

Zvolíme  $i = 4$  a potom podle (3.21) platí

$$(z^2 - 2z + 1)p + \frac{T_s^2}{2}(z + 1)q = z^4.$$

Pro periodu vzorkování  $T_s = 1$  je přenos regulátoru určen řešením předchozí polynomiální rovnice. Regulátor  $R$ , který zajistí, že zpětnovazební obvod má charakteristický polynom  $\Delta = z^4$ , je roven

$$R = \frac{q}{p} = \frac{-2.5 + 3.5z}{1.25 + 2z + z^2}.$$

**Poznámka 1:** Problém modálního řízení, tak jak byl zde řešen, je možno řešit stejným způsobem také pro lineární spojité systémy s přenosem  $S(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ .

□

**Poznámka 2:** Pokud bychom řešili problém modálního řízení pro diskretní systémy v záporných mocninách  $z$ , to znamená, že bychom uvažovali všechny polynomy v proměnné  $d$ , pak bychom pro polynomiální rovnici (3.21) neměli žádnou podmínku řešitelnosti. Uvědomme si ale, že potom polynom  $\Delta(d)$  je pouze pseudocharakteristický polynom a ne charakteristický polynom. Tím jsou automaticky do charakteristického polynomu přidány nulové póly. Tyto nulové póly přidávají do odezvy zpětnovazebního systému složky, které odezní v konečném počtu kroků, a proto je nemusíme vůbec uvažovat. Tento postup ovšem nelze zvolit u systémů spojitých.

□

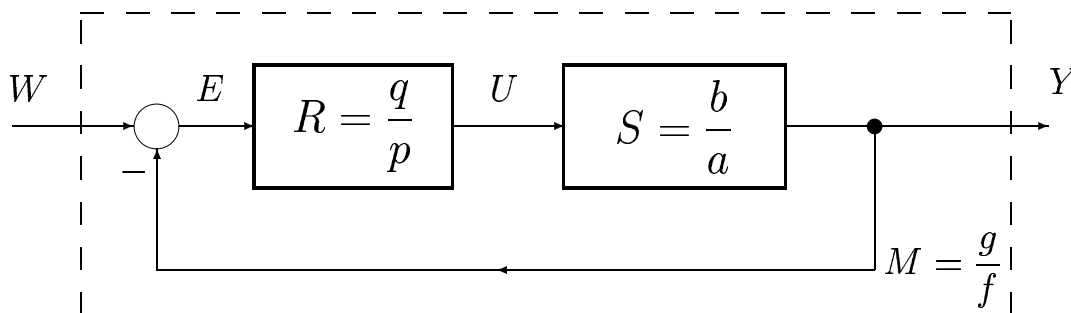
**Poznámka 3:** Ze základního kurzu teorie dynamických systémů víme, že stavová zpětná vazba mění póly dosažitelného systému libovolným způsobem. Stavů pozorovatelného systému odhadujeme pozorovatelem s libovolnou dynamikou, takže celkový dynamický systém má řád rovný součtu řádu systému a pozorovatele. Minimální řád pozorovatele s libovolnou dynamikou je  $n - 1$ , kde  $n$  je řád systému. Tudíž celkový minimální řád systému s pozorovatelem je roven  $2n - 1$ , což souhlasí s podmínkou kauzality (3.22) dynamického regulátoru. Dynamický regulátor  $R$  v sobě vlastně zahrnuje pozorovatele stavu a stavovou zpětnou vazbu odvozenou z pozorovaného stavu.

### 3.1.5 Přizpůsobení systému zvolenému modelu

Účelem řízení dynamického systému ve zpětnovazebním obvodu je v podstatě změna dynamických vlastností řízeného systému. V tomto odstavci vyřešíme problém změny dynamických vlastností řízeného systému takovým způsobem, aby se dynamické vlastnosti celého zpětnovazebního obvodu přesně shodovaly s dynamickými vlastnostmi zvoleného modelu (Exact Model Matching Problem).

Všechny přenosy budeme uvažovat v kladných mocninách  $z$ . Uvědomme si, že podmínka kauzality zde znamená, že stupeň čitatele přenosu není větší než je stupeň jmenovatele přenosu.

#### Regulátor s jedním stupněm volnosti



Obrázek 3.2: Přizpůsobení systému  $S$  danému modelu  $M$

Uvažujme strukturu zpětnovazebního řízení podle obr. 3.2. Celkový přenos mezi vstupem a výstupem je roven

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{SR}{1 + SR} = \frac{bq}{as + bq}.$$

Požadujeme, aby tento přenos byl totožný se zvoleným přenosem modelu  $M$ , pak

$$M = \frac{g}{f} = \frac{Y(z)}{W(z)}.$$

Porovnáním předchozích dvou výrazů dostaneme

$$g(ap + bq) = fbq. \quad (3.23)$$

Polynomy  $g$  a  $b$  mohou mít společné kořenové činitele. Provedeme krácení společných činitelů, pak

$$\frac{g}{b} = \frac{g^0}{b^0},$$

kde  $b^0$ ,  $g^0$  jsou již nesoudělné polynomy. Po vykrácení společných kořenů je rovnice (3.23) tvaru

$$pag^0 - q(f - g)b^0 = 0. \quad (3.24)$$

Její obecné řešení je zřejmě

$$\begin{aligned} p &= b^0(f - g)x \\ q &= ag^0x, \end{aligned}$$

kde  $x$  je libovolný polynom. Přenos regulátoru  $R$  je potom

$$R = \frac{q}{p} = \frac{ag^0}{b^0(f - g)}. \quad (3.25)$$

Charakteristický polynom  $\Delta$  zpětnovazebního řídicího systému podle obr. 2 je roven

$$\Delta = ap + bq = ab^0f.$$

Aby byl zpětnovazební regulační systém stabilní, musí být stabilní všechny polynomy, jejichž součin je roven charakteristickému polynomu. Proto musí být stabilní model  $M$  (stabilní polynom  $f$ ), stabilní systém  $S$  (stabilní polynom  $a$ ) a také musí být stabilní polynom  $b^0$ . Stabilita polynomu  $b^0$  znamená, že musí být stabilní ty nuly v přenosu systému  $S$ , které chceme odstranit (nejsou v modelu - v jeho čitateli  $g$ ).

Podmínka kauzality regulátoru  $R$  znamená, že stupeň polynomu  $p$  nesmí být menší než je stupeň polynomu  $q$ . Platí tedy  $\deg p \geq \deg q$ . Po dosazení za  $p$  a  $q$  a úpravě dostaneme podmínku kauzality ve tvaru

$$\deg f - \deg g \geq \deg a - \deg b. \quad (3.26)$$

Rozdíl stupňů jmenovatele a čitatele přenosu systému určuje **relativní řád systému**. Relativní řád u diskretních systémů určuje počet kroků zpoždění odezvy. Předchozí podmínka, která zajišťuje kauzalitu regulátoru, vyžaduje, aby relativní řád modelu  $M$  nebyl menší než je relativní řád systému  $S$ . Zřejmě relativní řád systému nelze zmenšit kauzálním regulátorem v žádné struktuře řízení.

Při řešení této úlohy je překvapivý požadavek stability řízeného systému  $S$ , neboť zpětná vazba může přece stabilizovat i nestabilní systém. Tento požadavek lze odstranit pouze při speciálních vlastnostech modelu  $M$ . Musíme požadovat, aby rozdíl polynomů jmenovatele a čitatele modelu byl dělitelný nestabilní částí polynomu ve jmenovateli systému  $S$ , čili

$$f - g = a^-h, \quad (3.27)$$

kde  $h$  je libovolný polynom a polynom  $a^-$  je nestabilní část polynomu  $a$  (viz faktorizace

polynomu). Ze vztahu (3.24) potom plyne

$$pag^0 - qa^-hb^0 = 0.$$

Dělením předchozí rovnice polynomem  $a^-$  dostaneme potom její řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} p &= b^0hx \\ q &= a^+g^0x, \end{aligned}$$

kde  $x$  je opět libovolný polynom. Charakteristický polynom zpětnovazebního obvodu je pak

$$\Delta = ap + bq = b^0a^+f.$$

Splňuje-li model podmínku (3.27), pak pro stabilitu zpětnovazebního obvodu již nevyžadujeme stabilitu systému  $S$ . Uvědomme si, že podmínka stability polynomu  $b^0$  může být vyjádřena podmínkou

$$M = bQ, \tag{3.28}$$

kde  $Q$  je libovolný stabilní přenos. Analogicky podmínka (3.27) může být vyjádřena jako

$$1 - M = aP, \tag{3.29}$$

kde  $P$  je libovolný stabilní přenos. Vztahy (3.28) a (3.29) omezují volbu modelu. Jejich nesplnění znamená ztrátu stability zpětnovazebního obvodu.

Protože přenos modelu  $M$  je podle obr. 3.2 roven přenosu řízení  $F_w = \frac{Y(z)}{W(z)}$  a výraz  $(1 - M)$  je roven přenosu odchylky  $F_e = \frac{E(z)}{W(z)}$ , jsou vztahy (3.28) a (3.29) omezující podmínky pro přenos řízení a přenos odchylky v regulačním obvodu podle obr. 3.2.

**Poznámka:** Problém přizpůsobení systému zvolenému modelu je možno řešit stejným způsobem také pro lineární spojité systémy s přenosem  $S(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ .  $\square$

### Regulátor se dvěma stupni volnosti

Uvažujeme nyní problém přizpůsobení systému danému modelu ve struktuře s regulátorem se dvěma stupni volnosti podle obr. 3.3.

Celkový přenos mezi vstupem a výstupem je v této struktuře řízení roven

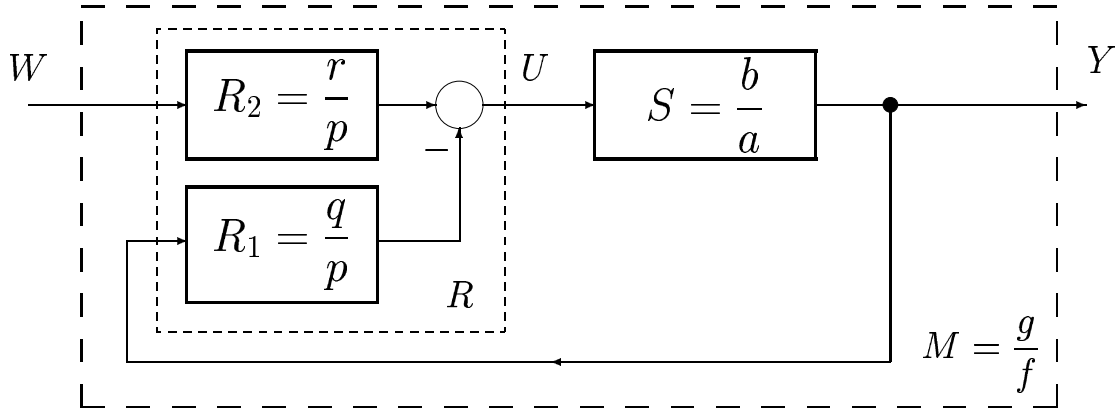
$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{SR_2}{1 + SR_1} = \frac{br}{as + bq}.$$

Opět požadujeme, aby tento přenos byl totožný se zvoleným přenosem modelu  $M$ , pak

$$M = \frac{g}{f} = \frac{Y(z)}{W(z)}.$$

Porovnáním předchozích dvou výrazů dostaneme po úpravě

$$g^0(ap + bq) = fb^0r, \tag{3.30}$$



Obrázek 3.3: Přizpůsobení systému s regulátorem se dvěma stupni volnosti

kde  $b^0$  a  $g^0$  jsou nesoudělné polynomy. Předchozí rovnici splníme, když

$$\begin{aligned} ap + bq &= fb^0x, \\ r &= g^0x, \end{aligned} \quad (3.31)$$

kde polynom  $x$  je libovolný stabilní polynom, který umožňuje řešitelnost problému (kauzalitu regulátoru  $R$ ). Volíme-li stupně polynomů regulátoru

$$\begin{aligned} \deg q &= \deg a - 1, \\ \deg p &= \deg f + \deg b^0 + \deg x - \deg a, \end{aligned}$$

pak pro zajištění kauzality regulátoru  $R$  musí platit  $\deg p \geq \deg q$  a také  $\deg p \geq \deg r$ . První podmínka vede po dosazení na nerovnost

$$\deg x \geq 2 \deg a - \deg f - \deg b^0 - 1 \quad (3.32)$$

a omezuje minimální stupeň volitelného stabilního polynomu  $x$ . Druhá podmínka vede na nerovnost (3.26) omezující relativní řády systému a modelu. Stabilita celého řídicího systému je určena stabilitou jeho charakteristického polynomu který je podle (3.31) roven

$$\Delta = ap + bq = fb^0x.$$

Zpětnovazební systém bude stabilní, budou-li kromě stability modelu stabilní ty nuly systému, které chceme odstranit. V této struktuře řízení se dvěma stupni volnosti není třeba vyžadovat stabilitu systému  $S$ .

Volba stabilního polynomu  $x$ , jehož stupeň je omezen podle (3.32), vnáší do problému mnohoznačnost. Při vhodné volbě koeficientů polynomu  $x$  může být někdy jeho stupeň nižší než podle (3.32). Proto je možno nejprve volit  $\deg x = 0$ , vyřešit polynomiální rovnici (3.31) a zjistit, zda je splněna podmínka kauzality. Pokud podmínka kauzality není splněna, je třeba zvětšit stupeň polynomu  $x$  a opakovat řešení.

Tento přístup lze použít i pro spojité systémy, jak je patrné z následujícího příkladu.



**Příklad:** Necht' přenosy systému  $S$  a modelu  $M$  jsou

$$S(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)^3}, \quad M(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Řešíme tedy problém přizpůsobení spojitého systému  $S$  danému spojitému modelu  $M$ . Ve zpětnovazební struktuře s jedním stupněm volnosti je regulátor  $R$  podle (3.25) roven

$$R(s) = \frac{(s+2)^2}{10s(s+1)}.$$

Celkový řád celého řídicího systému je samozřejmě roven součtu řádů systému a regulátoru, tedy  $n = \deg \Delta = 5$ .

Ve zpětnovazební struktuře se dvěma stupni volnosti je stupeň volitelného polynomu  $x$  omezen podle (3.32) nerovností  $\deg x \geq 2$ . Podle návodu zkusíme volit nejprve nižší stupeň polynomu  $x$ . Pokud polynom  $x$  volíme nultého stupně, nesplníme podmínku ryzosti spojitého regulátoru  $R_1$ . V dalším kroku řešení zvolíme polynom  $x$  prvního stupně, čili  $x = x_0 + x_1s$ . První rovnice v soustavě (3.31) je potom

$$(s+2)^3p + 10(s+1)q = 10(s+1)^3(x_0 + x_1s).$$

Její řešení je pro  $x_1 = 1$  rovno

$$\begin{aligned} p &= 10(s+1), \\ q &= (x_0 - 4)s^2 + (2x_0 - 11)s + (x_0 - 8). \end{aligned}$$

Pro  $x_0 = 4$  je polynom  $q$  pouze prvního stupně a regulátor  $R$  je ryzí. Jeho přenosy jsou

$$R_1 = \frac{q}{p} = \frac{-4 - 3s}{10(s+1)}, \quad R_2 = \frac{r}{p} = \frac{4 + s}{10(s+1)}.$$

Zpětnovazební systém je stabilní, neboť polynom  $x$  je stabilní a systém  $S$  je dokonce minimálně fázový. Řád celého zpětnovazebního systému je v tomto případě pouze  $n = \deg f + \deg b^0 + \deg x = 4$ .

## 3.2 Časově optimální diskretní řízení

V této kapitole se budeme zabývat syntézou řídicího systému, který zajistí **časově optimální diskretní řízení**. Kritériem kvality řízení je v tomto případě **počet kroků diskretního řízení**, po které je regulační odchylka  $e(k)$  nenulová. Platí tedy

$$e(k) = 0 \quad \text{pro} \quad k \geq k_e, \quad (3.33)$$

kde  $k_e$  je minimální počet kroků odchylky. Aby regulační odchylka dozněla v konečném počtu kroků, musí být její obraz  $E(d)$  pouze polynom (a ne racionální funkce). Počet kroků  $k_e$  je potom roven

$$\begin{aligned} k_e &= 0 & \text{pro} & \quad e = 0 \\ k_e &= 1 + \deg E & \text{pro} & \quad e \neq 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

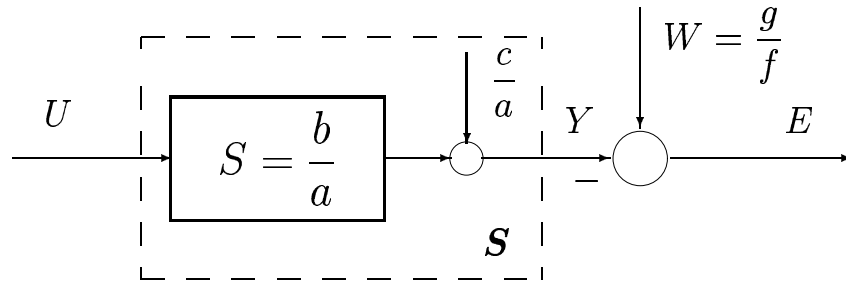
kde  $\deg E$  je stupeň polynomu  $E(d)$ .

Časově optimální diskretní řízení se nazývá také **řízení s minimálním počtem kroků odchyly**.

Vedle minimalizace počtu kroků odchyly nás často zajímá také průběh řídicí veličiny  $u(k)$ . Je-li řízení  $u(k)$  po konečném počtu kroků nulové, nazýváme takové řízení **konečné časově optimální diskretní řízení**. Je-li řízení  $u(k)$  pouze stabilní (to znamená, že konverguje k nule), nazýváme takové řízení **stabilní časově optimální diskretní řízení**. V následujících odstavcích vyřešíme problém časově optimálního diskretního řízení pro různé struktury řízení.

### 3.2.1 Časově optimální diskretní ovládání

Zde se budeme zabývat časově optimálním diskretním ovládáním, to je řízením bez zpětné vazby podle 3.4.



Obrázek 3.4: Časově optimální diskretní ovládání

Vliv nenulové počáteční podmínky (nenulového počátečního stavu řízeného systému) respektujeme signálem  $c/a$ , který se přičítá k výstupu systému a polynom  $c$  je neznámý polynom. Při ovládání nejsme schopni kompenzovat neznámé počáteční podmínky v systému, a proto při ovládání budeme uvažovat počáteční podmínky nulové.

Odchyly  $E$  podle obr. 3.4 je rovna ( $c = 0$ )

$$E = \frac{g}{f} - \frac{b}{a}U.$$

Po úpravě

$$Ef + \frac{bf}{a}U = g. \quad (3.35)$$

#### Konečné časově optimální diskretní ovládání

Protože chceme, aby regulační odchyly byla konečná, bude její obraz  $E(d)$  polynom. V rovnici (3.35) je tedy  $Ef$  i  $g$  polynom, a proto i  $\frac{bf}{a}U$  musí být také polynom. Označíme polynomy  $x = E$ ,  $y = \frac{bf}{a}U$  a podle (3.35) pak platí

$$fx + by = g. \quad (3.36)$$

Řešením této diofantické rovnice určíme polynomy  $x, y$ . Nalezením řešení s minimálním stupněm polynomu  $x$  vyřešíme problém časově optimálního diskrétního ovládání. Řízení  $U$  je rovno

$$U = y \frac{a}{f} = y \frac{a^0}{f^0},$$

kde nesoudělné polynomy  $a^0, f^0$  jsou určeny vztahem

$$\frac{a}{f} = \frac{a^0}{f^0}. \quad (3.37)$$

Řízení  $U$  je konečné (je to polynom) pouze tehdy, je-li polynom  $f^0 = 1$ . Počet kroků odchylky je podle (3.35) roven

$$k_e = 1 + \deg e = 1 + \deg x \leq \deg b.$$

Minimální počet kroků řízení při konečném časově optimálním ovládání nepřevyšší (a je obvykle roven) stupeň polynomu  $b$ . Úloha nemá řešení, nemá-li řešení polynomiální rovnice (3.36). To nastane tehdy, mají-li polynomy  $f$  a  $b$  společný kořenový činitel, neboť ten nemůže být obsažen v polynomu  $g$ . Fyzikálně to znamená, že pól řídicí veličiny bude totožný s nulou systému. Soustava není schopna sledovat řídicí signál, neboť mód řídicí veličiny bude vyfiltrován nulou systému.

### Stabilní časově optimální diskrétní ovládání

Hledáme-li stabilní časově optimální ovládání, upravíme rovnici (3.35) do tvaru

$$Ef + \frac{b^+ b^- f}{a} U = g.$$

Protože požadujeme, aby regulační odchylka byla konečná, je výraz  $Ef$  polynom, a proto i výraz  $\frac{b^+ b^- f}{a} U$  musí být polynom. Zvolíme-li  $E = x$  a  $y = \frac{b^+ f}{a} U$ , pak z předchozí rovnice plyne

$$fx + b^- y = g.$$

Vyřešením předchozí diofantické rovnice s minimálním polynomem  $x$  vyřešíme problém stabilního časově optimálního ovládání. Řízení  $U$  je rovno

$$U = y \frac{a}{b^+ f} = y \frac{a^0}{b^+ f^0}.$$

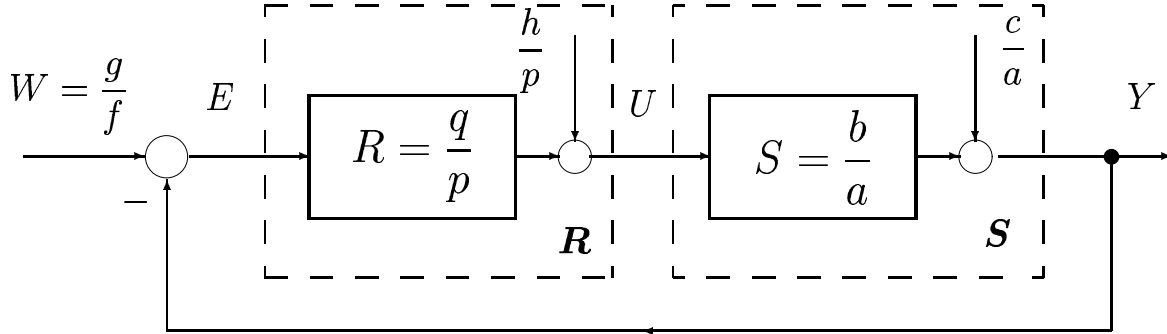
Ve jmenovateli předchozího výrazu je stabilní část polynomu  $b$ . Odtud plyne volba polynomu  $y$ . Řízení je stabilní pouze tehdy, je-li polynom  $f_0$  stabilní. Není-li polynom  $f_0$  stabilní, předchozí vztahy platí, pouze řízení  $U$  nekonverguje k nule. Počet kroků odchylky je podle (3.34) roven

$$k_e = 1 + \deg e = 1 + \deg x \leq \deg b^-.$$

Počet kroků odchylky při stabilním časově optimálním ovládání je menší nebo roven pouze stupni nestabilní části polynomu  $b$  v čitateli přenosu systému.

### 3.2.2 Časově optimální diskretní regulace s odchylkovým regulátorem

Uvažujme nyní strukturu řízení podle obr. 3.5. Regulátor  $R$  je řízen regulační odchylkou. Nenulové počáteční podmínky opět respektujeme přičtením výrazů  $\frac{c}{a}$  resp.  $\frac{h}{p}$  k výstupům systémů.



Obrázek 3.5: Časově optimální diskretní regulace

Nyní budeme analyzovat problém časově optimálního diskretního řízení se strukturou řízení podle obr. 3.5. Řídicí člen (regulátor)  $R$  je řízen regulační odchylkou  $E$ . Předpokládáme neznámé počáteční podmínky řízeného a řídicího systému a neúplnou znalost řídicí veličiny  $W$ . Neúplná znalost řídicí veličiny spočívá v tom, že známe pouze jmenovatel  $f$  obrazu řídicí veličiny, to znamená, že známe pouze módy řídicí veličiny.

Podle obr. 3.5 jsou obrazy regulační odchylky  $E$  a akční veličiny  $U$  rovny

$$E = \frac{1}{1+SR}W - \frac{1}{1+SR} \frac{c}{a} - \frac{S}{1+SR} \frac{h}{p} = \frac{ap}{\Delta} \frac{g}{f} - \frac{cp}{\Delta} - \frac{hb}{\Delta},$$

$$U = \frac{R}{1+SR}W + \frac{1}{1+SR} \frac{h}{p} - \frac{R}{1+SR} \frac{c}{a} = \frac{aq}{\Delta} \frac{g}{f} + \frac{ha}{\Delta} - \frac{cq}{\Delta},$$

kde  $\Delta = ap + bq$  je pseudocharakteristický polynom regulačního obvodu. Po vykrácení společných kořenových činitelů polynomů  $a$  a  $f$  dostaneme

$$E = \frac{a^0 pg}{\Delta f^0} - \frac{cp}{\Delta} - \frac{hb}{\Delta}, \quad (3.38)$$

$$U = \frac{a^0 qg}{\Delta f^0} + \frac{ha}{\Delta} - \frac{cq}{\Delta}.$$

#### Konečná časově optimální diskretní regulace

Regulační odchylka i akční veličina jsou konečné (jejich obrazy jsou polynomy) pouze tehdy, je-li  $\Delta = 1$  a  $f^0 = 1$ . Potom obrazy regulační odchylky a akční veličiny jsou

$$E = a^0 pg - cp - hb,$$

$$U = a^0 qg + ha - cq.$$

Z podmínky  $\Delta = 1$  plyne polynomiální rovnice pro výpočet polynomů  $q$  a  $p$  v přenosu regulátoru  $R$

$$ap + bq = 1. \quad (3.39)$$

Předchozí rovnice řeší problém konečného časově optimálního diskrétního řízení. Podmínka  $f^0 = 1$  je podmínkou řešitelnosti úlohy a opět znamená, že všechny módy řídicí veličiny musí být obsaženy v systému  $S$ . Aby obraz regulační odchyly byl polynom nejnižšího stupně, to znamená, aby nenulový počet kroků odchyly byl minimální, řešíme polynomiální rovnici (3.39) s minimálním stupněm polynomů  $p$  i  $q$ .

Z obrazu odchyly plyne minimální počet kroků odchyly (počáteční podmínky zde neuvažujeme)

$$k_e = 1 + \deg e = 1 + \deg a^0 + \deg g + \deg p \leq \deg a^0 + \deg g + \deg b.$$

Obdobně je počet kroků akční veličiny  $U$  roven

$$k_u = 1 + \deg u = 1 + \deg a^0 + \deg g + \deg q \leq \deg a^0 + \deg g + \deg a.$$

Porovnáme-li počty kroků odchyly při regulaci s počty kroků odchyly při ovládní, je zřejmé, že při odchylové regulaci je počet kroků odchyly o  $(\deg a^0 + \deg g)$  kroků větší než při ovládní. Při regulaci kompenzujeme ale i vliv nenulových počátečních podmínek v systému i v regulátoru a navíc pro návrh regulátoru vystačíme pouze se znalostí módů řídicí veličiny.

### Stabilní časově optimální diskrétní regulace

Při stabilní časově optimální regulaci není třeba, aby obraz akční veličiny byl polynom. Obraz odchyly bude polynom, platí-li

$$\Delta = b^+, \quad \frac{p}{\Delta f^0} = x,$$

kde  $x$  je zatím neznámý polynom. Vhodnost předchozí volby vyplne z dalších úvah. Potom totiž je obraz odchyly a akční veličiny

$$\begin{aligned} E &= a^0 g x - c x f^0 - h b^-, \\ U &= \frac{a^0 q g}{b^+ f^0} + \frac{a h}{b^+} - \frac{c q}{b^+}. \end{aligned}$$

Z podmínky pro pseudocharakteristický polynom  $\Delta = b^+$  plyne rovnice

$$a f^0 x + b^- q = 1. \quad (3.40)$$

Aby obraz odchyly byl polynom nejnižšího stupně, řešíme předchozí polynomiální rovnici tak, aby polynomy  $x$  i  $q$  byly polynomy nejnižšího stupně. Aby akční veličina  $U$  byla stabilní, musí být polynom  $f^0$  stabilní. Není-li polynom  $f^0$  stabilní, není akční veličina stabilní, nestabilita je však způsobena řídicí veličinou  $W$  a ne zpětnou vazbou.

Regulátor  $R$  má přenos

$$R = \frac{q}{p} = \frac{q}{x b^+ f^0},$$

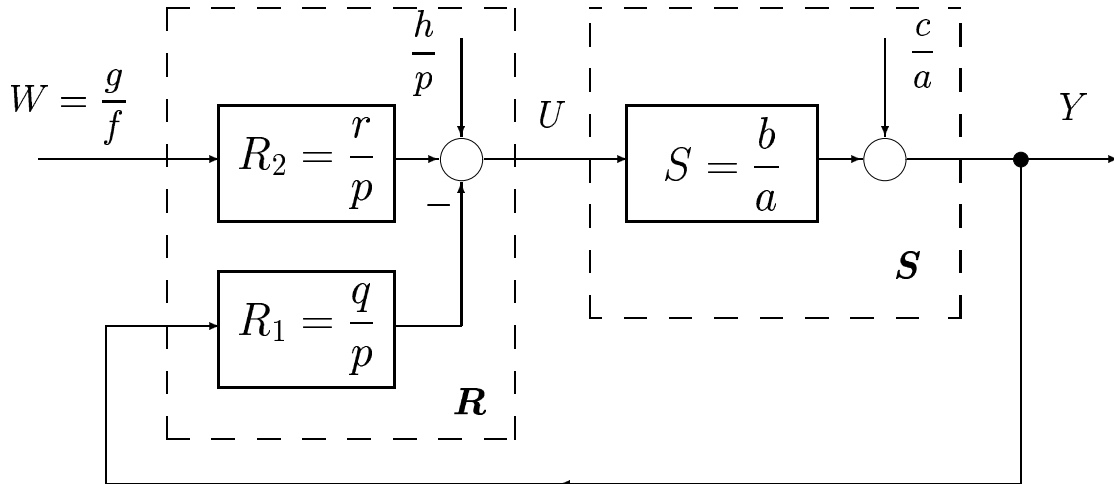
kde polynomy  $x$  a  $q$  získáme řešením polynomiální rovnice (3.40). Počet kroků odchylky je roven (opět neuvažujeme vliv počátečních podmínek)

$$k_e = 1 + \deg e \leq \deg a^0 + \deg b^- + \deg g.$$

Při stabilní časově optimální regulaci je počet kroků odchylky o  $\deg b^+$  kroků menší než při konečné časově optimální regulaci.

Jsou-li nulové počáteční podmínky v řízeném i řídicím systému a známe celý obraz řídicí veličiny  $W$ , je možno postupovat při syntéze časově optimálního diskretního řízení jiným způsobem. Pseudocharakteristický polynom regulačního obvodu volíme co největšího stupně tak, abychom zajistili konečnou regulační odchylku a konečnou či stabilní akční veličinu. Výsledky syntézy jsou uvedeny později přehledně v tabulkách.

### 3.2.3 Časově optimální diskretní regulace se dvěma stupni volnosti



Obrázek 3.6: Časově optimální řízení s regulátorem se dvěma stupni volnosti

Uvažujme nyní nejobecnější strukturu řízení s regulátorem se dvěma stupni volnosti podle obr. 3.6. Obraz regulační odchylky je roven

$$E = W - Y = \frac{g}{f} - \left( \frac{R_2 S}{1 + S R_1} \frac{g}{f} + \frac{1}{1 + S R_1} \frac{c}{a} + \frac{S}{1 + S R_1} \frac{h}{p} \right).$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$E = \left( 1 - \frac{rb}{\Delta} \right) \frac{g}{f} - \frac{cp}{\Delta} - \frac{hb}{\Delta}, \quad (3.41)$$

kde  $\Delta = ap + bq$  je opět pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního regulačního obvodu. Akční veličina  $U$  je rovna

$$U = \frac{R_2}{1 + S R_1} \frac{g}{f} - \frac{R_1}{1 + S R_1} \frac{c}{a} + \frac{1}{1 + S R_1} \frac{h}{p}.$$

Po úpravě dostaneme

$$U = \frac{ar}{\Delta} \frac{g}{f} - \frac{cq}{\Delta} + \frac{hp}{\Delta}. \quad (3.42)$$

### Konečná časově optimální diskretní regulace

Neznáme-li počáteční podmínku systému, je pro konečné časově optimální řízení nutno volit pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního regulačního obvodu rovný jedné. Pak opět platí polynomiální rovnice  $ap + bq = 1$ . Regulační odchylka a akční veličina jsou potom rovny

$$\begin{aligned} E &= (1 - rb) \frac{g}{f} - cp - hb, \\ U &= ar \frac{g}{f} - cq + ha. \end{aligned}$$

Aby odchylka  $E$  byla polynom, musí platit

$$1 - rb = fs,$$

kde  $s$  je nějaký polynom. Potom je odchylka a akční veličina

$$\begin{aligned} E &= gs - cp - hb, \\ U &= \frac{ga^0 r}{f^0} - cq + ha, \end{aligned} \quad (3.43)$$

kde  $a^0, f^0$  jsou nesoudělné polynomy podle (3.37).

Aby akční veličina  $U$  byla polynom, musí opět platit  $f^0 = 1$ . Pro konečné časově optimální diskretní řízení platí podmínka řešitelnosti  $f^0 = 1$  ve všech strukturách řízení.

Aby odchylka  $E$  byla polynom nejnižšího stupně, řešíme polynomiální rovnice

$$\begin{aligned} ap + bq &= 1 \\ fs + br &= 1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

tak, aby polynomy  $p, q, r, s$  byly polynomy nejnižšího stupně. Počet kroků odchylky je roven (opět zanedbáme vliv počátečních podmínek)

$$k_e = 1 + \deg e \leq \deg g + \deg b.$$

Dvě nezávislé rovnice (3.44) řeší úlohu konečného časově optimálního diskretního řízení s regulátorem se dvěma stupni volnosti. V rovnicích (3.44) se nevyskytuje polynom  $g$  (čitatel řídicí veličiny  $W$ ). Přenos  $R_1$  i  $R_2$  nezávisí ani na polynomu  $g$ , ani na počátečních podmínkách systému i regulátoru.

### Stabilní časově optimální diskretní regulace

Pro stabilní časově optimální regulaci ve stuktře řízení s regulátorem se dvěma stupni volnosti podle obr. 3.6 můžeme opět zmenšit počet kroků odchylky o stupeň stabilní části polynomu  $b$ . Podobně jako v předchozím odstavci zvolíme pseudocharakteristický polynom

ve tvaru

$$\Delta = ap + bq = b^+.$$

Regulační odchylka a akční veličina jsou potom podle (3.41) a (3.42) rovny

$$\begin{aligned} E &= (1 - rb^-) \frac{g}{f} - \frac{cp}{b^+} - hb^-, \\ U &= \frac{a^0 rg}{b^+ f^0} - \frac{cq}{b^+} + \frac{ha}{b^+}. \end{aligned}$$

Z předchozí podmínky pro charakteristický polynom plyne

$$a \frac{p}{b^+} + b^- q = 1.$$

Označíme-li  $\frac{p}{b^+} = x$ , pak dostaneme konečný tvar první polynomiální rovnice

$$ax + b^- q = 1. \quad (3.45)$$

Aby odchylka  $E$  byla polynom, musí platit

$$1 - rb^- = fs,$$

neboli

$$fs + b^- r = 1. \quad (3.46)$$

Regulační odchylka je potom rovna

$$E = gs - cx - hb^- \quad (3.47)$$

a minimální počet kroků odchylky je roven

$$k_e = 1 + \deg e \leq \deg g + \deg b^-,$$

kde jsme opět zanedbali vliv počátečních podmínek.

Polynomiální rovnice (3.45) a (3.46) řeší náš problém. Aby počet kroků odchylky byl minimální, řešíme polynomiální rovnice (3.45) a (3.46) s minimálním stupněm polynomů  $x$  a  $s$ . Přenosy  $R_1$  a  $R_2$  závisejí opět pouze na módech řídicí veličiny a nezávisejí na počátečních podmínkách soustavy i regulátoru. Aby akční veličina  $U$  byla stabilní, musí být polynom  $f^0$  stabilní.

Má-li systém i regulátor nulové počáteční podmínky a máme plnou informaci o řídicí veličině, můžeme problém časově optimálního diskretního řízení řešit jiným způsobem. Přehled výsledků takového řízení je uveden v následujícím odstavci.

**Poznámka:** Při řešení problému časově optimálního diskretního řízení ve zpětnovazebních strukturách jsme nerespektovali podmínky realizovatelného zákona řízení. Tyto podmínky vyžadují, aby realizovatelný regulátor měl jeden krok zpoždění, to znamená, že absolutní člen v čitateli regulátoru musí být nulový. Můžeme ale postupovat tím způsobem, že zpoždění přidáme k systému, to znamená, že syntézu provádíme s přenosem systému ve tvaru  $dS(d)$  a po provedené syntéze přidáme toto zpoždění zpět do regulátoru. Tím se ovšem zvyšuje stupeň polynomu  $b$  v čitateli systému, a to jeho nestabilní část, a proto je vlivem realizovatelného zákona řízení ovlivněn počet kroků časově optimálního zpětnovazebního



řízení. □

### 3.2.4 Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení

V následujících čtyřech tabulkách jsou přehledně shrnuty výsledky časově optimálního diskrétního řízení. Z tabulek je názorně patrný vliv struktury řízení i apriorní znalosti na řešení úlohy.

Při plné znalosti řídicí veličiny  $W$  a nulových počátečních podmínkách v systému i v regulátoru je řízení ovládním nejvýhodnější strukturou řízení. Při zpětnovazebním řízení nutnost zachovat stabilitu zpětnovazebního systému prodlužuje počet kroků řízení.

Naopak při nenulových a neznámých počátečních podmínkách v řízeném systému časově optimální ovládním neexistuje. Zde je nejvýhodnější strukturou zpětnovazební řízení se dvěma stupni volnosti s odlišnou přímovazební a zpětnovazební částí.

Pro konečné řízení, při kterém je i akční veličina konečná, požadujeme ve všech strukturách řízení, aby platila podmínka  $f^0 = 1$ . To znamená, že všechny módy řídicí veličiny  $W$  jsou obsaženy v řízeném systému  $S$  a systém  $S$  je tedy schopen na svém výstupu generovat řídicí veličinu  $W$  pouze vhodně zvolenými počátečními podmínkami i při nulovém vstupním signálu.

Podobně při stabilním řízení požadujeme ve všech strukturách řízení, aby polynom  $f^0$  byl stabilní. To znamená, že musí být stabilní všechny módy řídicí veličiny, které nejsou obsaženy v systému. Nesplňuje-li polynom  $f^0$  tyto požadavky, nebudou pouze splněny požadavky na průběh akční veličiny  $U$ . Akční veličina  $U$  nebude tedy konečná či stabilní, ale vše ostatní platí beze změny (diskrétní řízení tedy zůstane časově optimální).

**Příklad:** Navrhněte časově optimální diskrétní regulátor stejnosměrného dynamu s přenosem

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}.$$

Volte obecnou periodu vzorkování  $T_s$  a obecnou dobu výpočtu  $T_c = (1 - \varepsilon)T$  akčního zásahu. Ukažte, jak časově optimální regulátor závisí na periodě vzorkování a době výpočtu akčního zásahu. Uvažujte skok řízení a sledujte amplitudu akční veličiny. Prodlužte počet kroků řízení tak, aby maximální velikost akční veličiny byla dvakrát menší než původně.

## 3.3 Kvadraticky optimální diskrétní řízení

V této kapitole je uvedena syntéza kvadraticky optimálního řízení diskrétního lineárního systému algebraickými metodami. Při tom vycházíme opět z vnějšího popisu systému. Stationární regulátor získáme při uvažování nekonečné doby řízení.

Opět budeme analyzovat kvadraticky optimální řízení v různých strukturách řízení. Kvadraticky optimální řízení lineárního systému se často v literatuře označuje jako LQ řízení (Linear Quadratic Control).

**Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení**

Neznámé počáteční podmínky v systému a regulátoru.

Známe pouze módy řídicí veličiny  $W$ .**KONEČNÉ ŘÍZENÍ**

	Ovládání	Odchylová regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	Ovládání neexistuje	$ap + bq = 1$ $f^0 = 1$	$ap + bq = 1$ $fs + br = 1$ $f^0 = 1$
Regulátor		$R = \frac{q}{p}$	$R_1 = \frac{q}{p}; \quad R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka		$E = a^0 pg - cp - hb$	$E = gs - cp - hb$
Řízení		$U = a^0 qg - cq + ha$	$U = a^0 gr - cq + ha$
Charakteristický polynom		$\Delta = 1$	$\Delta = 1$
Počet kroků odchylky		$k_e \leq \deg a^0 + \deg g + \deg b$	$k_e \leq \deg g + \deg b$
Počet kroků řízení		$k_u \leq \deg a^0 + \deg g + \deg a$	$k_u \leq \deg a + \deg g$

**STABILNÍ ŘÍZENÍ**

	Ovládání	Odchylová regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	Ovládání neexistuje	$af^0x + b^-q = 1$ $f^0$ stabilní	$ax + b^-q = 1$ $fs + b^-r = 1$ $f^0$ stabilní
Regulátor		$R = \frac{q}{xb^+f^0}$	$R_1 = \frac{q}{p}; \quad R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka		$E = a^0xg - cxf^0 - hb^-$	$E = gs - cx - hb^-$
Řízení		$U = \frac{a^0qg}{b^+f^0} - \frac{cq}{b^+} + \frac{ha}{b^+}$	$U = \frac{a^0gr}{b^+f^0} - \frac{cq}{b^+} - \frac{ha}{b^+}$
Charakteristický polynom		$\Delta = b^+$	$\Delta = b^+$
Počet kroků odchylky		$k_e \leq \deg a^0 + \deg g + \deg b^-$	$k_e \leq \deg g + \deg b^-$
Počet kroků řízení		$k_u \rightarrow \infty$	$k_u \rightarrow \infty$

## Přehled výsledků časově optimálního diskrétního řízení

Nulové počáteční podmínky v systému i regulátoru.

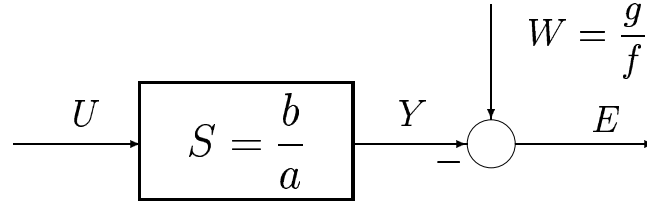
Úplná znalost řídicí veličiny  $W$ .

### KONEČNÉ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylová regulace	Reg. s dvěma stupni volnosti
Podmínkové rovnice	$fx + by = g$ $f^0 = 1$	$f(a^0)^-x + by = g^+$ $f^0 = 1$	$ap + bq = g^+$ $fs + br = g^+$ $f^0 = 1$
Regulátor		$R = \frac{ya^0}{x}$	$R_1 = \frac{q}{p}; \quad R_2 = \frac{r}{p}$
Odchylka	$E = x$	$E = (a^0)^-g^-x$	$E = g^-s$
Řízení	$U = a^0y$	$U = (a^0)^-g^-q$	$U = a^0g^-r$
Charakter. polynom		$\Delta = (a^0)^+g^+$	$\Delta = g^+$
Počet kroků odchylky	$k_e \leq \deg b$	$k_e \leq \deg(a^0)^- + \deg g^- + \deg b$	$k_e \leq \deg g^- + \deg b$
Počet kroků řízení	$k_u \leq \deg a^0 + \deg f$	$k_u \leq \deg(a^0)^- + \deg g^- + \deg b$	$k_u \leq \deg a + \deg g^-$

### STABILNÍ ŘÍZENÍ

	Ovládání	Odchylová regulace	Reg. s dvěma st. volnosti
Podmínkové rovnice	$fx + b^-y = g$ $f^0$ stabilní	$f(a^0)^-x + b^-y = g^+$ $f^0$ stabilní	$ax + b^-y = g^+$ $fs + b^-r = g^+$ $f^0$ stabilní
Regulátor		$R = \frac{y(a^0)^+}{xb^+f^0}$	$R_1 = \frac{y}{xb^+}; \quad R_2 = \frac{r}{xb^+}$
Odchylka	$E = x$	$E = (a^0)^-g^-x$	$E = g^-s$
Řízení	$U = \frac{ya^0}{b^+f^0}$	$U = \frac{a^0yg^-}{fb^+}$	$U = \frac{a^0g^-r}{b^+f^0}$
Charakter. polynom		$\Delta = (a^0)^+g^+b^+$	$\Delta = g^+b^+$
Počet kroků odchylky	$k_e \leq \deg b^-$	$k_e \leq \deg(a^0)^+ + \deg g^- + \deg b^-$	$k_e \leq \deg g^- + \deg b^-$
Počet kroků řízení	$k_u \rightarrow \infty$	$k_u \rightarrow \infty$	$k_u \rightarrow \infty$



Obrázek 3.7: LQ ovládání

### 3.3.1 Kvadraticky optimální diskretní ovládání

Při kvadraticky optimálním ovládání hledáme optimální akční veličinu  $U$  (optimální řídicí veličinu systému). Přitom známe přenos systému a také řídicí veličinu  $W$ . Struktura řízení spolu s označením veličin je uvedena na obr. 3.7. Při této struktuře řízení musejí být známé počáteční podmínky systému. Budeme předpokládat, že počáteční podmínky systému jsou nulové.

Hledáme tedy optimální řízení systému s přenosem  $S = b/a$ , které minimalizuje kvadratické kritérium ve tvaru

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^2 + ru_k^2 = \langle EE^* \rangle + r \langle UU^* \rangle. \quad (3.48)$$

V předchozím vztahu jsme použili následující označení

$$\begin{aligned} E &= e_0 + e_1 d^1 + e_2 d^2 + \dots + e_i d^i + \dots \\ E^* &= e_0 + e_1 d^{-1} + e_2 d^{-2} + \dots + e_i d^{-i} + \dots \end{aligned}$$

a  $\langle X \rangle$  je absolutní člen posloupnosti  $X$ . Je-li posloupnost uvedena ve tvaru formální mocninné řady,  $X = \dots + x_{-1} d^{-1} + x_0 + x_1 d + \dots$ , pak tedy  $\langle X \rangle = x_0$ .

Regulační odchylka je podle obr. 3.7

$$E = W - Y = \frac{g}{f} - \frac{b}{a} U.$$

Pak kritérium (3.48) je rovno

$$J = \left\langle \left( \frac{g}{f} - \frac{b}{a} U \right) \left( \frac{g}{f} - \frac{b}{a} U \right)^* \right\rangle + r \langle UU^* \rangle. \quad (3.49)$$

Nejprve sečteme členy obsahující  $UU^*$ , čili

$$\frac{bb^*}{aa^*} + r = \frac{bb^* + raa^*}{aa^*} = \frac{ll^*}{aa^*}.$$

Předpokládáme, že polynom  $l$  je stabilní polynom - všechny jeho kořeny leží vně jednotkové kružnice komplexní roviny  $d$ . Stabilní polynom  $l$  získáme spektrální factorizací podle rovnice

$$bb^* + raa^* = ll^*. \quad (3.50)$$

Odtud plyne, že polynom  $l$  nebude stabilní a může mít nestabilní kořeny pouze na mezi stability, a to pouze tehdy, když váha  $r$  v kritériu je nulová  $r = 0$  a polynom  $b$  má kořeny na mezi stability. Tento singulární případ vyloučíme. S použitím spektrální factorizace je kritérium rovno

$$J = \left\langle \frac{g g^*}{f f^*} \right\rangle - \left\langle \frac{b}{a} U \frac{g^*}{f^*} \right\rangle - \left\langle \frac{b^*}{a^*} U^* \frac{g}{f} \right\rangle + \left\langle \frac{ll^*}{aa^*} UU^* \right\rangle. \quad (3.51)$$

Minimalizaci kritéria vzhledem k řízení  $U$  provedeme doplněním na úplný čtverec

$$J = \left\langle \left( \frac{l}{a} U - \alpha \right) \left( \frac{l}{a} U - \alpha \right)^* \right\rangle + \left\langle \frac{gg^*}{f f^*} \right\rangle - \langle \alpha \alpha^* \rangle,$$

kde  $\alpha$  volíme tak, aby předchozí výraz pro kritérium byl shodný s (3.51). Porovnáním obou výrazů je zřejmé, že  $\alpha = \frac{g b^*}{f l^*}$ . Kritérium je tedy rovno

$$J = \left\langle \left( \frac{l}{a} U - \frac{g b^*}{f l^*} \right) \left( \frac{l}{a} U - \frac{g b^*}{f l^*} \right)^* \right\rangle + \left\langle \frac{gg^*}{f f^*} - \frac{gg^* b b^*}{f f^* l l^*} \right\rangle. \quad (3.52)$$

Absolutní minimum kritéria dostaneme podle (3.52), když řízení  $U$  je řešením rovnice

$$\frac{l}{a} U - \frac{g b^*}{f l^*} = 0. \quad (3.53)$$

V tomto případě řízení  $U$  začíná v minus nekonečnu, není tedy kauzální. Absolutní minimum kritéria, které označíme  $J_n$  (při nekauzálním řízení), je rovno

$$J_n = \left\langle \frac{gg^*}{f f^*} - \frac{gg^* b b^*}{f f^* l l^*} \right\rangle = r \left\langle \left( \frac{ga^0}{l f^0} \right) \left( \frac{ga^0}{l f^0} \right)^* \right\rangle, \quad (3.54)$$

kde

$$\frac{a}{f} = \frac{a^0}{f^0} \quad (3.55)$$

a  $a^0$  a  $f^0$  jsou nesoudělné polynomy.

Kauzální řízení  $U$  musí být vyjádřeno jako podíl dvou polynomů v kladných mocninách  $d$ . Proto musíme provést dekompozici řízení  $U$  ve vzorci (3.53), což vede na následující rovnici

$$\frac{g b^*}{f l^*} = \frac{y}{f} + \frac{x^*}{l^*}. \quad (3.56)$$

Z předchozí dekompozice plyne rovnice pro neznámé polynomy  $x$  a  $y$ , která ve skutečnosti řeší náš LQ problém ve zvolené struktuře řízení

$$x^* f + y l^* = g b^*. \quad (3.57)$$

Tato rovnice nemá ale jediné řešení, je třeba dále specifikovat vlastnosti polynomů  $x$  a  $y$ . Po dekompozici je kritérium (3.52) rovno

$$J = \left\langle \left( \frac{l}{a} U - \frac{x^*}{l^*} - \frac{y}{f} \right) \left( \frac{l}{a} U - \frac{x^*}{l^*} - \frac{y}{f} \right)^* \right\rangle + J_n.$$

Zavedme pomocnou proměnnou  $V$  podle vztahu

$$V = \frac{l}{a}U - \frac{y}{f}. \quad (3.58)$$

Pak kritérium  $J$  je rovno

$$\begin{aligned} J &= \left\langle \left( V - \frac{x^*}{l^*} \right) \left( V^* - \frac{x}{l} \right) \right\rangle + J_n \\ &= \langle VV^* \rangle + \left\langle \frac{x^* x}{l^* l} \right\rangle - \left\langle \frac{x^*}{l^*} V^* \right\rangle - \left\langle \frac{x}{l} V \right\rangle + J_n. \end{aligned}$$

Řízení  $U$  se vyskytuje pouze v pomocné veličině  $V$ . Kritérium bude minimální, když bude nekauzální část rozkladu (3.56) v čase nula nulová, a proto musí být absolutní člen polynomu  $x$  roven nule ( $x_0 = 0$ ). To je omezení kladené na rovnici (3.57).

Potom výraz  $\langle Vx/l \rangle$  je roven nule, a tudíž kritérium je rovno

$$J = \left\langle \frac{x x^*}{l l^*} \right\rangle + \langle VV^* \rangle + J_n. \quad (3.59)$$

Minimální hodnota kritéria je dosažena, když  $V = 0$ . Odtud plyne, že optimální řízení je rovno

$$U_{opt} = \frac{y a}{f l} = \frac{y a^0}{l f^0}. \quad (3.60)$$

Polynom  $f^0$  musí být stabilní, aby také řízení  $U$  bylo stabilní. Ze stability polynomu  $f^0$  plyne, že všechny nestabilní módy v řídicím signálu  $W$  musí být také módy systému.

Minimální hodnota kritéria při kauzálním řízení je rovna

$$J^* = \left\langle \frac{x x^*}{l l^*} \right\rangle + J_n.$$

Je zřejmé, že kladný člen  $\left\langle \frac{x x^*}{l l^*} \right\rangle$  reprezentuje zhoršení kritéria v důsledku požadavku kauzality řízení.

**Poznámka 1:** Rovnice (3.57) může být upravena na polynomiální rovnici vynásobením  $d^\alpha$ , kde  $\alpha$  je řád systému

$$\alpha = \deg l = \max(\deg a, \deg b)$$

a  $\deg(\cdot)$  je stupeň polynomu. Po vynásobení  $d^\alpha$  má rovnice (3.57) tvar

$$x^* f d^\alpha + y l^* d^\alpha = g b^* d^\alpha.$$

Zavedme nové polynomy  $\bar{x}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{b}$  (takzvané reciproké polynomy)

$$\begin{aligned} x^* d^\alpha &= (x_1 d^{-1} + \dots + x_\alpha d^{-\alpha}) d^\alpha = x_1 d^{\alpha-1} + \dots + x_\alpha = \bar{x} \\ l^* d^\alpha &= (l_0 + l_1 d^{-1} + \dots + l_\alpha d^{-\alpha}) d^\alpha = l_0 d^\alpha + l_1 d^{\alpha-1} + \dots + l_\alpha = \bar{l} \\ b^* d^\alpha &= (b_0 + b_1 d^{-1} + \dots + b_\alpha d^{-\alpha}) d^\alpha = b_0 d^\alpha + b_1 d^{\alpha-1} + \dots + b_\alpha = \bar{b}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Rovnice (3.57) má potom tvar

$$\bar{x} f + y \bar{l} = g \bar{b}. \quad (3.62)$$

Tuto polynomiální rovnici řešíme vzhledem k  $\bar{x}$  and  $y$ . Protože absolutní člen polynomu  $x$  musí být nulový, aby kritérium pro kauzální řízení bylo minimální, je reciprokový polynom  $\bar{x}$  naopak stupně pouze  $\alpha - 1$  - viz (3.61). Proto předchozí polynomiální rovnici musíme řešit pro minimální stupeň polynomu  $\bar{x}$ .

**Poznámka 2:** Odchylka řízení  $E$  je rovna

$$E = W - Y = \frac{g}{f} - \frac{b}{a}U = \frac{g}{f} - \frac{b}{a} \frac{ya^0}{f^0l} = \frac{(gl - by)a^0}{af^0l}.$$

Aby odchylka řízení  $E$  byla stabilní, musí být samozřejmě stabilní řídicí veličina  $W$  (polynom  $f$  musí být stabilní (stačí, aby polynom  $f^0$  byl stabilní)), dále při řízení ovládním musí být stabilní i řízený systém (polynom  $a$  musí být stabilní). Ve výrazu pro regulační odchylku nelze formálně krátit společné polynomy čitatele a jmenovatele. Požadavek stability systému je podstatným omezením přímovazební struktury řízení. Toto omezení můžeme odstranit pouze zpětnovazební strukturou řízení.

**Poznámka 3:** Často jsou v kritériu kvality řízení uvažovány pouze difference řídicí veličiny a ne absolutní hodnoty řídicí veličiny  $U$ . V tom případě má kritérium tvar

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^2 + r\Delta u_k^2, \quad (3.63)$$

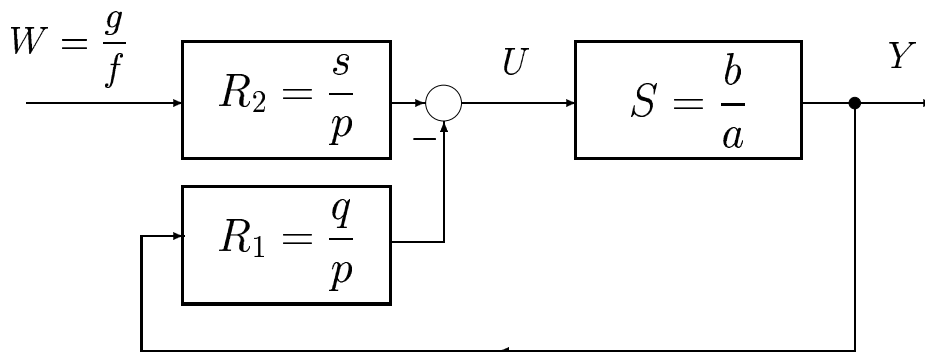
kde  $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ . Postup řešení problému minimalizace kritéria (3.63) je úplně stejný jako v předchozím případě. Je třeba pouze rozšířit systém  $S$  o přenos

$$\frac{u_k}{\Delta u_k} = \frac{1}{1-d}.$$

Potom místo jmenovatele  $a$  uvažujeme rozšířený jmenovatel  $a(1-d)$ . Rovnice pro spektrální faktorizaci má pak tvar  $ll^* = bb^* + ra(1-d)a^*(1-d^{-1})$  a jinak celý další postup je stejný.

### 3.3.2 Kvadraticky optimální diskrétní řízení se dvěma stupni volnosti

V tomto odstavci budeme analyzovat kvadraticky optimální řízení v nejobecnější struktuře řízení se dvěma stupni volnosti podle obr. 3.8.



Obrázek 3.8: LQ řízení se dvěma stupni volnosti

Řízení  $U$ , výstup systému  $Y$  a regulační odchylka  $E$  jsou po řadě rovny

$$U = \frac{sag}{f\Delta}, \quad Y = \frac{sbg}{f\Delta}, \quad E = \frac{g}{f} - \frac{sbg}{f\Delta},$$

kde  $\Delta = ap + bq$  je charakteristický polynom celého zpětnovazebního systému. Předpokládáme, že počáteční podmínky v systému i regulátoru jsou nulové. Kvadratické kritérium kvality řízení je stejné jako v předchozím případě. Po dosazení do kritéria dostaneme

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^2 + ru_k^2 = \left\langle \left( \frac{g}{f} - \frac{sbg}{f\Delta} \right) \left( \frac{g}{f} - \frac{sbg}{f\Delta} \right)^* \right\rangle + r \left\langle \left( \frac{sag}{f\Delta} \right) \left( \frac{sag}{f\Delta} \right)^* \right\rangle.$$

Vynásobíme a pak sečteme členy se stejným jmenovatelem, což vede opět na spektrální faktorizaci (3.50). Kritérium má potom tvar

$$J = \left\langle \frac{g g^*}{f f^*} \right\rangle - \left\langle \frac{sbg g^*}{f\Delta f^*} \right\rangle - \left\langle \frac{s^* b^* g^* g}{f^* \Delta^* f} \right\rangle + \left\langle \frac{sgl s^* g^* l^*}{f\Delta f^* \Delta^*} \right\rangle. \quad (3.64)$$

Minimalizaci kritéria vzhledem k volitelným polynomům  $p$ ,  $q$ ,  $s$  regulátoru  $R_1$  a  $R_2$  provedeme opět doplněním na úplný čtverec.

Polynom  $g$  vyjádříme jako součin tří polynomů

$$g = g^+ g^- g^0,$$

kde  $g^+$  je stabilní část polynomu  $g$ , která má kořeny  $|d_i| > 1$ ,  $g^-$  je nestabilní část polynomu  $g$  s kořeny  $|d_i| < 1$  a  $g^0$  je faktor polynomu  $g$  s kořeny na jednotkové kružnici  $|d_i| = 1$ . Zaveďme reciproký polynom k nestabilní části polynomu  $g$

$$\bar{g} = (g^-)^* d^\beta,$$

kde  $\beta$  je stupeň polynomu  $g^-$ . Uvědomme si, že  $\bar{g}$  není reciproký polynom k polynomu  $g$ , ale pouze k jeho nestabilní části, a proto  $\bar{g}$  je stabilní polynom. Důvod faktorizace polynomu  $g$  vyplne až z výsledných vztahů pro charakteristický polynom zpětnovazebního regulačního obvodu.

Kritérium můžeme potom vyjádřit ve tvaru

$$J = \left\langle g^0 \left( \frac{sg^+ \bar{g}l}{\Delta f} - \alpha \right) \left( \frac{sg^+ \bar{g}l}{\Delta f} - \alpha \right)^* (g^0)^* \right\rangle + \left\langle \frac{g g^*}{f f^*} \right\rangle - \left\langle (g^0 \alpha) (g^0 \alpha)^* \right\rangle,$$

kde  $\alpha$  volíme tak, aby předchozí výraz pro kritérium a (3.64) byly totožné. Z toho plyne, že  $\alpha = \frac{b^* g^+ \bar{g}}{l^* f}$ .

Přitom jsme využili vztahu

$$gg^* = g^+ g^- g^0 (g^+ g^- g^0)^* = g^+ (g^-)^* d^\beta g^0 (g^+ (g^-)^* d^\beta g^0)^* = g^+ \bar{g} g^0 (g^+ \bar{g} g^0)^*.$$

Kritérium je po úpravě rovno

$$J = \left\langle g^0 \left( \frac{sg^+ \bar{g}l}{\Delta f} - \frac{b^* g^+ \bar{g}}{l^* f} \right) \left( \frac{sg^+ \bar{g}l}{\Delta f} - \frac{b^* g^+ \bar{g}}{l^* f} \right)^* (g^0)^* \right\rangle + r \left\langle \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right) \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right)^* \right\rangle.$$



Absolutní minimum kritéria vzhledem k volitelným polynomům v regulátoru dostaneme, když  $\frac{sg^+\bar{g}l}{\Delta f} - \frac{b^*g^+\bar{g}}{l^*f} = 0$ . To opět vede na nekauzální regulátor. Abychom dostali kauzální zpětnovazební strukturu, je nutno provést dekompozici podle následujícího vztahu

$$\frac{b^*g^+\bar{g}}{l^*f} = \frac{y}{f} + \frac{x^*}{l^*},$$

což vede na rovnici

$$x^*f + yl^* = b^*g^+\bar{g}.$$

Nyní dosadíme provedenou dekompozici do kritéria a minima tohoto kritéria je dosaženo, když

$$\frac{sg^+\bar{g}l}{\Delta f} - \frac{y}{f} = 0,$$

což vede na polynomiální rovnici

$$sg^+\bar{g}l - y\Delta = 0.$$

Provedenou dekompozicí jsme zajistili, že v předchozí rovnici jsou pouze polynomy v kladných mocninách  $d$ , a proto je zajištěna kauzalita regulátoru. Nekauzální člen v předchozí dekompozici zvyšuje hodnotu kritéria, a proto minima kritéria dosáhneme, když absolutní člen polynomu  $x^*$  je nulový, čili  $x_0 = 0$ . Minimální hodnota kritéria je pak rovna

$$J_{opt} = \left\langle g^0 \frac{x x^*}{l l^*} (g^0)^* \right\rangle + r \left\langle \left( \frac{ga^0}{f^0 l} \right) \left( \frac{ga^0}{f^0 l} \right)^* \right\rangle, \quad (3.65)$$

kde druhý člen je roven optimální hodnotě kritéria při nekauzálním regulátoru a první člen vyjadřuje zvýšení kritéria v důsledku respektování kauzality regulátoru.

Máme tedy systém tří rovnic

$$ap + bq = \Delta, \quad q_0 = 0, \quad (3.66)$$

$$sg^+\bar{g}l - y\Delta = 0, \quad (3.67)$$

$$x^*f + yl^* = b^*g^+\bar{g}, \quad x_0 = 0. \quad (3.68)$$

První rovnice je rovnicí pro pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního obvodu, podmínka  $q_0 = 0$  plyne z podmínky na realizovatelný zákon řízení. Druhá rovnice plyne z minimalizace kritéria při kauzálním regulátoru a třetí rovnice plyne z dekompozice, která zajistí kauzalitu regulátoru.

Pro  $s = y$  je charakteristický polynom stabilní a je roven  $\Delta = g^+\bar{g}l$ . Odtud plyne smysl předchozí faktorizace čitatele  $g$  řídicí veličiny  $W$ .

Polynomy  $p$ ,  $q$  a  $s$  kvadraticky optimálního regulátoru jsou řešením rovnic

$$ap + bq = g^+\bar{g}l, \quad q_0 = 0, \quad (3.69)$$

$$x^*f + sl^* = b^*g^+\bar{g}, \quad x_0 = 0, \quad (3.70)$$

jejichž řešením dostaneme vedle hledaných polynomů  $p$ ,  $q$  a  $s$  optimálního regulátoru také polynom  $x$ . Předchozí rovnice mohou být řešeny nezávisle. Druhou rovnici můžeme upravit

na polynomiální rovnici násobením  $d^\alpha$ , kde  $\alpha$  je řád systému  $S$ . Potom tato rovnice má tvar

$$\bar{x}f + s\bar{l} = \bar{b}g^+\bar{g}, \quad (3.71)$$

kterou řešíme pro minimální stupeň polynomu  $\bar{x}$ , kde  $x^*d^\alpha = \bar{x}$ .

Tím jsme dostali dvě nezávislé polynomiální rovnice pro polynomy  $p$ ,  $q$ ,  $s$  a  $x$ . Optimální řízení  $U$  a regulační odchylka  $E$  jsou stabilní, pokud je polynom  $f^0$  stabilní, což je podmínkou řešitelnosti tohoto problému. Znamená to, že všechny nestabilní módy řídicí veličiny musí být současně módy systému. Řízení  $U$ , výstup systému  $Y$  a odchylka  $E$  jsou rovny

$$U = \frac{sa^0g^0g^-}{lf^0\bar{g}}, \quad Y = \frac{sbg^0g^-}{lf\bar{g}}, \quad E = \frac{gl\bar{g} - sbg^0g^-}{lf\bar{g}}.$$

**Poznámka 1:** V předchozím odvození jsme byli nuceni použít složitou faktorizaci polynomu  $g$  v čitateli obrazu řídicí veličiny  $W$ . Tomu se můžeme vyhnout následujícím postupem, který při minimalizaci kritéria kvality řízení nebere v úvahu čitatele  $g$  řídicí veličiny  $W$ . Regulátor není potom v přísném slova smyslu optimální, ale je navržen tak, že bere v úvahu pouze módy řídicí veličiny a ne jejich amplitudy.

Kritérium (3.64) vyjádříme ve tvaru

$$J = \left\langle g \left( \frac{sl}{\Delta f} - \alpha \right) \left( \frac{sl}{\Delta f} - \alpha \right)^* g^* \right\rangle + \left\langle \frac{g}{f} \frac{g^*}{f^*} \right\rangle - \langle g\alpha g^* \alpha^* \rangle,$$

kde  $\alpha$  volíme tak, aby předchozí výraz pro kritérium byl totožný s (3.64). Z toho plyne, že  $\alpha = \frac{b^*}{l^*f}$  a kritérium je po úpravě rovno

$$J = \left\langle g \left( \frac{sl}{\Delta f} - \frac{b^*}{l^*f} \right) \left( \frac{sl}{\Delta f} - \frac{b^*}{l^*f} \right)^* g^* \right\rangle + r \left\langle \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right) \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right)^* \right\rangle.$$

Absolutní minimum kritéria vzhledem k volitelným polynomům v regulátoru dostaneme, když  $\frac{sl}{\Delta f} - \frac{b^*}{l^*f} = 0$ . To opět vede na nekauzální regulátor. Abychom dostali kauzální zpětnovazební strukturu, je nutno provést dekompozici

$$\frac{b^*}{l^*f} = \frac{y}{f} + \frac{x^*}{l^*},$$

z níž plyne rovnice

$$x^*f + yl^* = b^*.$$

Nyní dosadíme provedenou dekompozici do kritéria a minimum tohoto kritéria je dosaženo, když

$$\frac{sl}{\Delta f} - \frac{y}{f} = 0$$

Provedenou dekompozicí jsme zajistili, že v předchozí rovnici jsou pouze polynomy v kladných mocninách  $d$ , a proto je zajištěna kauzalita regulátoru. Nekauzální člen v předchozí dekompozici zvyšuje hodnotu kritéria a proto minimum kritéria dosáhneme, když absolutní

člen polynomu  $x^*$  je nulový, čili  $x_0 = 0$ . Minimální hodnota kritéria je pak rovna

$$J_{opt} = \left\langle g \frac{x}{l} \frac{x^*}{l^*} g^* \right\rangle + r \left\langle \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right) \left( \frac{ga^0}{lf^0} \right)^* \right\rangle,$$

kde druhý člen je roven optimální hodnotě kritéria při nekauzálním regulátoru a první člen vyjadřuje zvýšení kritéria v důsledku respektování kauzality regulátoru. Máme tedy systém tří rovnic

$$\begin{aligned} ap + bq &= \Delta, & q_0 &= 0 \\ sl - y\Delta &= 0 \\ x^*f + yl^* &= b^*, & x_0 &= 0. \end{aligned}$$

První rovnice je rovnicí pro pseudocharakteristický polynom zpětnovazebního obvodu, podmínka  $q_0 = 0$  plyne opět z podmínky na realizovatelný zákon řízení. Druhá rovnice plyne z minimalizace kritéria při kauzálním regulátoru a třetí rovnice plyne z dekompozice, která zajistí kauzalitu regulátoru.

Charakteristický polynom  $\Delta$  je roven stabilnímu spektrálnímu faktoru  $l$ , pak  $s = y$  a předchozí soustava rovnic má pak tvar

$$ap + bq = l, \quad q_0 = 0 \tag{3.72}$$

$$x^*f + sl^* = b^*, \quad x_0 = 0 \tag{3.73}$$

pro neznámé polynomy  $p$ ,  $q$ ,  $s$  a  $x$ . Předchozí rovnice mohou být řešeny nezávisle. Druhou rovnici můžeme upravit na polynomiální rovnici násobením  $d^\alpha$ , kde  $\alpha$  je řád systému  $S$ . Potom tato rovnice má tvar

$$\bar{x}f + s\bar{l} = \bar{b}$$

a řešíme ji pro minimální stupeň polynomu  $\bar{x}$ , kde  $\bar{x} = d^\alpha x^*$ .

Tím jsme dostali dvě nezávislé polynomiální rovnice pro polynomy  $p$ ,  $q$ ,  $s$  a  $x$ . Optimální řízení  $U$ , výstup systému  $Y$  a regulační odchylka  $E$  jsou stabilní a jsou rovny

$$U = \frac{sa^0g}{lf^0}, \quad Y = \frac{sbg}{lf}, \quad E = \frac{gl - sbg}{lf}.$$

Regulátor, jehož polynomy  $p$ ,  $q$  a  $s$  jsou řešením (3.72), nezávisí tedy na nulách řízení. Problém suboptimálního LQ regulátoru jsme nyní řešili pouze s využitím informace o módech řízení. □

**Poznámka 2:** Pokud uvažujeme strukturu řízení s odchylkovým regulátorem, pak  $R_1 = R_2$ , neboli  $s = q$ . Potom podle původního odvození (viz (3.66)) dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ap + bq &= \Delta \\ qq^+\bar{g}l - y\Delta &= 0 \\ \bar{x}f + y\bar{l} &= \bar{b}g^+\bar{g}. \end{aligned}$$

Po dosazení z první rovnice do druhé dostaneme

$$qq^+\bar{g}l - y(ap + bq) = 0.$$

Řešení této polynomiální rovnice je  $q = ay$ ,  $p = g^+ \bar{g}l - yb$ . Dosadíme předchozí výrazy za polynomy  $p$  a  $q$  do rovnice pro pseudocharakteristický polynom a dostaneme

$$\Delta = ap + bq = a(g^+ \bar{g}l - yb) + bay = ag^+ \bar{g}l.$$

Zpětnovazební systém je stabilní pouze tehdy, je-li stabilní polynom  $a$ , tedy je stabilní řízený systém  $S$ . Polynomy  $g^+$ ,  $\bar{g}$  a  $l$  jsou stabilní. Odtud plyne, že uvedený postup lze použít při řízení odchylkovým regulátorem pouze pro stabilní řízené systémy. Při odchylkovém řízení máme méně stupňů volnosti, a proto při nestabilním řízeném systému musíme postupovat jiným způsobem.  $\square$

**Poznámka 3:** Pokud v kritériu kvality řízení vážíme pouze regulační odchylku, pak váha  $r = 0$ . Pro stabilní spektrální faktor  $l$  dostaneme potom rovnici  $ll^* = bb^*$ , a pokud je polynom  $b$  stabilní, pak zřejmě  $l = b$ .

Jinou variantu kvadraticky optimálního řízení při váze  $r = 0$  dostaneme následujícím postupem. Přenos systému nechť je roven

$$S(d) = \frac{b(d)}{a(d)} = \frac{b_n + b_{n-1}d + \dots + b_0d^n}{1 + a_{n-1}d + \dots + a_0d^n}.$$

Systém je tedy popsán diferenční rovnicí

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_{n-i}y(t-i) = b_n u(t) + \sum_{j=1}^n b_{n-j}u(t-j).$$

Řízení bude vzhledem ke zvolenému kritériu optimální, pokud bude regulační odchylka trvale nulová, pak  $e(t) = w(t) - y(t) = 0$ , čili  $w(t) = y(t)$ . Dosadíme-li za  $y(t)$  do předchozí rovnice  $w(t)$ , dostaneme pro optimální řízení

$$u(t) = \frac{1}{b_n} \left( w(t) - \sum_{j=1}^n b_{n-j}u(t-j) + \sum_{i=1}^n a_{n-i}y(t-i) \right).$$

Přenosy regulátoru jsou potom

$$R_2 = \frac{U}{W} = \frac{s}{p} = \frac{1}{b(d)}$$

$$R_1 = \frac{u}{-Y} = \frac{q}{p} = \frac{-a_{n-1}d + \dots + a_0d^n}{b(d)}.$$

Charakteristický polynom je roven

$$\Delta = ap + bq = ab + b(1 - a) = b.$$

Toto takzvané jednokrokové řízení můžeme použít pouze tehdy, když čítec systému je stabilní (systém je s minimální fází). Nebereme zřetel na velikost akčních zásahů, které při tomto způsobu řízení mohou přesáhnout hodnoty, pro které platí lineární popis systému.

### 3.4 Sjednocení algebraického přístupu pro spojité i diskrétní systémy

V předchozích kapitolách jsme řešili některé problémy diskrétního řízení algebraickými metodami. Používali jsme při tom operaci s polynomy, neboť přenos diskrétního systému můžeme vyjádřit jako podíl polynomů. V zásadě stejný přístup můžeme použít i pro lineární spojité systémy. Jak uvidíme později, jsou mezi diskrétními a spojitými systémy některé odlišnosti, které znemožňují přímou analogii algebraických přístupů založených na algebře polynomů pro diskrétní a spojité systémy.

V literatuře (Vidyasagar, 1985), (Kučera, 1993) byly publikovány metody, které umožňují jednotný přístup k lineárním spojitým i diskrétním systémům, založeným na speciálních okruzích racionálních funkcí. Proto nejprve zavedeme potřebné pojmy a poté vyřešíme několik základních problémů.

#### 3.4.1 Okruhy a tělesa

Nejprve si zopakujeme některé pojmy z algebry, které dále budeme používat. Neklademe si za cíl matematickou přesnost definic potřebných pojmů. Podrobněji se s uvedenými metodami může zájemce seznámit v (Vidyasagar, 1985). Předně si zavedeme dva algebraické systémy - okruhy (Rings) a tělesa (Fields).

**Okruh** je neprázdná množina  $\mathbf{R}$  spolu se dvěma binárními operacemi - sčítáním a násobením. Přitom sčítání je komutativní a násobení je asociativní. Dále existuje nulový prvek (0). Pro prvky okruhu  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$  a  $c \in \mathbf{R}$  tedy platí

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c, & (3.74) \\ a + b &= b + a, \\ a + 0 &= 0 + a = a, \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, \\ a \cdot (b + c) &= ab + ac, \\ (a + b) \cdot c &= ac + bc. \end{aligned}$$

Přitom pro sčítání i násobení používáme obvyklé symboly a často místo  $a \cdot b$  budeme psát pouze  $ab$ .

Okruh  $\mathbf{R}$  je **komutativní**, jestliže  $ab = ba$ .

**Okruh s jednotkovým prvkem** (okruh s jednotkou (identity)) je okruh, ve kterém existuje prvek  $1 \in \mathbf{R}$ , že  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  pro  $\forall a \in \mathbf{R}$ .

Okruh je **obor integrity**, jestliže z  $ab = 0$  plyne, že  $a = 0$  nebo  $b = 0$ . Okruh je obor integrity, jestliže součin nenulových prvků je nenulový.

**Příklady:** Množina celých čísel  $\mathbf{Z}$  je okruh, který je samozřejmě komutativní okruh i okruh s jednotkou i obor integrity. Množina čtvercových matic tvoří okruh, je to i okruh s jednotkou, ale netvoří obor integrity, protože součin dvou nenulových (ale singulárních) matic může být nulová matice. Množina sudých čísel tvoří komutativní okruh, ale není to okruh s jednotkou. Také množina polynomů s reálnými koeficienty tvoří komutativní okruh.

V okruhu s jednotkou se prvek  $x \in \mathbf{R}$  nazývá **dělitel jednotky** (unit), jestliže existuje

prvek  $y \in \mathbf{R}$ , že platí  $xy = yx = 1$ . V textu často budeme dělitele jednotky zkráceně nazývat pouze jednotkou (přímý překlad anglického pojmu unit). Prvek  $y$  se nazývá **inverze** prvku  $x$  a obvykle se značí  $x^{-1}$ . Jednotky v okruhu jsou speciální prvky, které mají inverzi, neboť obecně prvky v okruhu inverzi nemají.

**Příklady:** Okruh celých čísel má dvě jednotky, a sice prvky  $-1$  a  $1$ , neboť inverze pouze těchto prvků je opět celé číslo. Jednotky v okruhu čtvercových matic s reálnými prvky jsou všechny nesingulární matice. Jednotky v okruhu polynomů jsou pouze nenulové konstanty.

Mohou existovat takové okruhy, jejichž všechny nenulové prvky lze invertovat. Takové okruhy se nazývají **tělesa** (fields). Tělesa jsou komutativní okruhy s jednotkou, jejichž všechny nenulové prvky jsou dělitelé jednotky.

**Příklady:** Množina reálných čísel tvoří těleso, podobně množina racionálních čísel i množina komplexních čísel jsou tělesa. Také množina racionálních funkcí tvoří těleso. Toto těleso budeme značit  $F(\xi)$ , kde  $\xi$  je komplexní proměnná.

Pro náš další výklad je důležité, že množina racionálních funkcí, které jsou analytické v určité oblasti komplexní roviny (to znamená, že v ní nemají žádnou singularitu, žádný pól), tvoří komutativní okruh. Uvědomme si, že přenosy lineárních spojitých i diskrétních systémů jsou racionální funkce komplexní proměnné  $s$  nebo  $z$ , případně  $d$ , které jsou analytické v celé komplexní rovině s výjimkou izolovaného počtu bodů, které se nazývají přenosové póly systému. Sčítáním i násobením přenosů (dovolenými operacemi v okruhu) se poloha pólů nemění.

Zavedeme proto speciální okruhy racionálních funkcí, které jsou analytické v určité oblasti komplexní roviny.

- $F_\infty(\xi)$  je okruh racionálních funkcí analytických v  $\xi = \infty$ . Jsou to tedy takové racionální funkce, které nemají singularitu v nekonečnu. Jsou to tedy racionální funkce, které mají pouze konečné póly. Je-li  $\xi = s$ , je  $F_\infty(s)$  množina přenosů spojitých systémů, které jsou *ryzí* (stupeň čitatele přenosu není větší než je stupeň jmenovatele). Je-li  $\xi = z$ , je  $F_\infty(z)$  okruh přenosů lineárního *kauzálního* diskrétního systému.
- $F_{ps}(\xi)$  je okruh racionálních funkcí analytických v  $Re \xi \geq 0$  včetně  $\xi = \infty$ . Pro  $\xi = s$  je to tedy okruh *ryzích a stabilních* (proper and stable) přenosů spojitých systémů.
- $F_{cs}(\xi)$  je okruh racionálních funkcí analytických v  $|\xi| \geq 1$ . Pro  $\xi = z$  je to tedy okruh *kauzálních a stabilních* přenosů diskrétních systémů.
- $F_f(\xi)$  je okruh racionálních funkcí analytických pro všechny  $\xi \neq 0$ . Je to tedy okruh racionálních funkcí, která mají pouze nulové póly. Pro  $\xi = z$  je to okruh přenosů diskrétních systémů, které mají konečnou dobu trvání impulsní posloupnosti.
- $F[\xi]$  je okruh racionálních funkcí analytických pro všechny  $\xi \neq \infty$ . Je to tedy okruh racionálních funkcí, které mají pouze póly v nekonečnu (nemají konečné póly). Je to tedy *okruh polynomů*. Uvědomme si, že pro  $\xi = d$  je to okruh přenosů diskrétních systémů, které také mají konečnou dobu trvání odezvy.

Podle potřeby si můžeme zvolit i jiné okruhy racionálních funkcí analytických v části komplexní roviny - například okruh přenosů se zvoleným stupněm stability či relativním tlumením.

Jaké jsou jednotky v právě definovaných okruzích?

V okruhu všech ryzích či kauzálních racionálních funkcí  $F_\infty(\xi)$  jsou jednotky racionální funkce *relativního stupně nula* (mající stejný stupeň čitatele i jmenovatele).

V okruhu všech ryzích a stabilních či kauzálních a stabilních přenosů (racionálních funkcí)  $F_{ps}(\xi)$  či  $F_{cs}(\xi)$  jsou jednotky přenosy *systémů s minimální fází*.

V okruhu  $F_f(\xi)$  i  $F[\xi]$  jsou jednotky pouze nenulové konstanty.

Přenos lineárních systémů spojitých i diskretních může být vždy vyjádřen jako prvek *podílového tělesa* různých okruhů. Přenos  $F(\xi)$ , kde  $\xi = s$ , nebo  $\xi = z$  či  $\xi = d$  podle toho, zda se jedná o spojitý či diskretní systém, můžeme vždy vyjádřit ve tvaru zlomku

$$F(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad (3.75)$$

kde  $a(\xi)$  i  $b(\xi)$  je prvkem zvoleného okruhu.

Tak na příklad přenos integrátoru  $F(s) = \frac{1}{s}$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F(s) = \frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s}{s+1}} = \frac{b(s)}{a(s)},$$

kde zřejmě  $b(s) = \frac{1}{s+1}$  i  $a(s) = \frac{s}{s+1}$  je prvkem okruhu ryzích a stabilních přenosů.

Různé okruhy volíme podle toho, jaké vlastnosti systému zkoumáme. Uvědomme si, že pokud přenos  $F(\xi)$  je sám prvkem zvoleného okruhu, tak jej vždy můžeme vyjádřit jako zlomek, kde jmenovatel je jednotka v příslušném okruhu.

Při zajišťování ryzosti či kauzality volíme okruh  $F_\infty(\xi)$ . Při zajišťování stability spolu s ryzostí nebo kauzalitou volíme okruhy  $F_{ps}(\xi)$  nebo  $F_{cs}(\xi)$ . Při zajišťování konečné odezvy a modálních vlastností volíme okruhy  $F_f(\xi)$  nebo  $F[\xi]$ . Je důležité si uvědomit, že pro diskretní systémy platí inkluze

$$F_f(z) \subset F_{cs}(z) \subset F_\infty(z), \quad (3.76)$$

$$F_f(z) \equiv F[d],$$

kde  $d = z^{-1}$ . Pro spojitě systémy pouze platí

$$F_{ps}(s) \subset F_\infty(s).$$

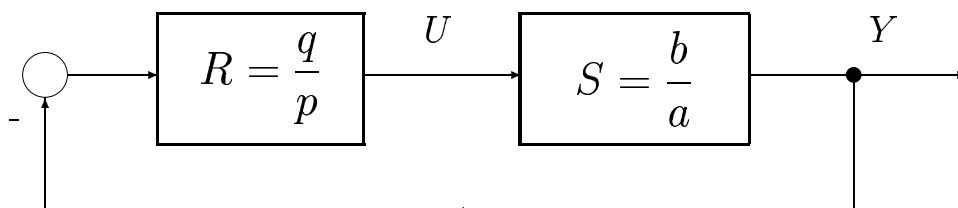
Proto pro spojitě systémy nelze jednoduše počítat s přenosy vyjádřenými jako podíly polynomů, neboť při tom není automaticky zajištěna ani stabilita, ani ryzost. Se zavedenými okruhy můžeme velmi elegantně řešit některé problémy řízení.

V následujících několika odstavcích vyřešíme některé problémy návrhu regulátoru, který splňuje určité požadavky. Jedná se o návrh regulátorů, které zajistí stabilitu zpětnovazebního obvodu, dále o eliminaci poruchové veličiny, asymptotické sledování řídicího signálu a přizpůsobení systému danému modelu.

Místo proměnné  $\xi$  budeme v dalším používat proměnnou  $s$ , tím zdánlivě budeme řešit problémy pro spojitě systémy. Pokud zvolíme správný okruh, můžeme místo  $s$  psát  $z$  nebo  $d$  a vše zůstává v platnosti i pro diskretní systémy.

### 3.4.2 Stabilizující regulátory

Uvažujme zpětnovazební obvod dle obr. 3.9. tvořený daným systémem  $S$  a hledaným regulátorem  $R$ .



Obrázek 3.9: Stabilizující regulátory

Budeme hledat ryzí či kauzální regulátory  $R$ , které zajistí stabilitu celého zpětnovazebního systému. Budeme tedy tento problém řešit v okruhu stabilních a ryzích či kauzálních racionálních funkcí. Musíme tedy přenos systému i regulátoru vyjádřit jako podíl prvků v uvedených okruzích. Pak  $a, b, q, p \in F_{ps}$  nebo  $F_{cs}$ .

Zpětnovazební systém je ryzí a stabilní (kauzální a stabilní) pouze tehdy, když

$$c = ap + bq \quad (3.77)$$

je jednotka v okruhu  $F_{ps}$  nebo  $F_{cs}$ . Odtud již plyne množina stabilizujících regulátorů.

Všechny stabilizující regulátory jsou rovny

$$R(q) = \frac{y - ah}{x + bh}, \quad (3.78)$$

kde  $x(q)$  a  $y(q)$  jsou řešením rovnice

$$ax + by = 1, \quad x, y \in F_{ps} \text{ nebo } F_{cs} \quad (3.79)$$

a  $h$  je libovolný prvek zvoleného okruhu,  $h \in F_{ps}$  nebo  $F_{cs}$  a samozřejmě jmenovatel není identicky nulový  $x + bh \neq 0$ . Množina všech stabilizujících regulátorů je tedy vyjádřena jako jednoparametrická množina (parametrem je libovolný prvek  $h$  příslušného okruhu).

**Poznámka** Uvědomme si, že rovnice (3.79) není polynomiální rovnice, ale rovnice v okruhu. Protože ji v příslušném okruhu přímo řešit neumíme, obvykle ji převádíme na rovnici polynomiální.

**Příklad:** Pro spojitý systém s přenosem  $S(s) = \frac{k}{s^2}$  určíme množinu ryzích regulátorů, které zajistí stabilitu a ryzost zpětnovazebního systému dle obr. 3.9.

Řešení: Nejprve je třeba vyjádřit přenos systému  $S$  jako podílové těleso s prvky v okruhu stabilních a ryzích přenosů, pak

$$S(s) = \frac{k}{s^2} = \frac{\frac{k}{(s+1)^2}}{\frac{s^2}{(s+1)^2}} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici  $ax + by = 1$  v příslušném okruhu. Uděláme to tak, že se budeme



snažit převést tuto rovnici v okruhu na polynomiální rovnici. Po dosazení dostaneme

$$\frac{s^2}{(s+1)^2}x + \frac{k}{(s+1)^2}y = 1.$$

Vynásobíme-li předchozí rovnici  $(s+1)^2$ , dostaneme polynomiální rovnici

$$s^2x + ky = (s+1)^2,$$

jejíž řešení je zřejmě  $x = 1$  a  $y = \frac{1}{k}(2s+1)$ . Toto řešení nelze použít, neboť  $y(s)$  není ryzí přenos. Zvolíme proto

$$x(s) = \frac{n}{s+\alpha}, \quad y(s) = \frac{m}{s+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

kde  $n$  a  $m$  jsou neznámé polynomy. Bez újmy na obecnosti zvolíme  $\alpha = 1$ . Po dosazení dostaneme rovnici

$$\frac{s^2}{(s+1)^2} \frac{n}{s+1} + \frac{k}{(s+1)^2} \frac{m}{s+1} = 1$$

a po vynásobení dostaneme konečně polynomiální rovnici

$$s^2n(s) + km(s) = (s+1)^2(s+1),$$

jejíž řešení je zřejmě  $n = s+3$ ,  $m = \frac{1}{k}(3s+1)$ . Potom  $x$  i  $y$  jsou ryzí i stabilní přenosy. Množina stabilizujících regulátorů je

$$R(s) = \frac{y - ah}{x + bh} = \frac{\frac{3s+1}{k(s+1)} - \frac{s^2}{(s+1)^2}h}{\frac{3+s}{s+1} + \frac{k}{(s+1)^2}h},$$

kde  $h(s) \in F_{ps}(s)$ .

### 3.4.3 Silná stabilizace systému

V předchozím odstavci jsme vyřešili problém syntézy regulátoru zajišťujícího stabilitu zpětnovazebního obvodu dle obr. 3.9. Vlastnosti samotného regulátoru, který byl výsledkem syntézy, byly při tomto přístupu libovolné.

Zde se budeme zabývat problémem **stabilizace systému  $S$  stabilním regulátorem**. Požadujeme tedy nejen stabilitu zpětnovazebního obvodu, ale také stabilitu samotného regulátoru  $R$ . To je problém **silné stabilizace**.

Protože při silné stabilizaci musí být regulátor stabilní, je možno jeho přenos upravit tak, aby jeho jmenovatel byla jednotka v okruhu stabilních ryzích či kauzálních racionálních funkcí. Pak je regulátor

$$R = \frac{q}{p} = \frac{q}{1} = q \tag{3.80}$$

a zpětnovazební obvod bude podle (56) stabilní, když

$$c = ap + bq = a + bq$$

je jednotka v okruhu  $F_{ps}(\xi)$  nebo  $F_{cs}(\xi)$ . Odtud čítec  $q$  regulátoru  $R$  je roven

$$q = \frac{c - a}{b}. \quad (3.81)$$

Aby  $q$  bylo stabilní, je nutné vykrátit čitatelem všechny nestabilní nuly  $b$ . Racionální funkce  $b$  (čítatel soustavy) je dle předpokladu stabilní, ale její nestabilní nuly jsou totožné s nestabilními nulami systému  $S$ . Pokud je systém  $S$  systémem s minimální fází, pak je problém vyřešen. Pokud systém  $S$  má nestabilní nuly, jsou tyto nestabilní nuly nulami  $b$  a je třeba je podle předchozí rovnice vykrátit s  $c - a$ .

Komplexní číslo  $\nu_i$  je nulou  $b$ , když  $b(\nu_i) = 0$ . Aby v  $q$  nastalo krácení čitatele jmenovatelem v nestabilních nulách  $\nu_i$  racionální funkce  $b$ , je třeba, aby pro nestabilní nulu  $\nu_i$  platilo také  $c(\nu_i) - a(\nu_i) = 0$ , neboli

$$c(\nu_i) = a(\nu_i), \quad (3.82)$$

kde  $\nu_i$  jsou nestabilní nuly systému  $S$  a také jeho čitatele  $b$ .

Problém spočívá tedy v nalezení jednotky  $c$  v příslušném okruhu takové, aby její hodnota v nestabilních nulách  $b$  byla totožná s hodnotou jmenovatele systému  $a$  v těchto nulách. Tento problém nemá vždy řešení. Nutná a postačující podmínka řešitelnosti problému silné stabilizace je obsažena v následujícím tvrzení:

**Systém  $S$  je silně stabilizovatelný** pouze tehdy, když mezi každou dvojicí jeho reálných nestabilních nul se nachází sudý počet jeho pólů.

Pokud je systém přísně ryzí, pak mezi nestabilní nuly musíme zahrnout i nuly v nekonečnu. Tato vlastnost se nazývá *vlastnost prokládání pólů nulami (parity interlacing property)*. Je tedy zřejmé, že systémy stabilní i systémy minimálně fázové jsou systémy, které jsou vždy silně stabilizovatelné. Silně stabilizovatelné jsou také systémy, které mají pouze jedinou reálnou nestabilní nulu (včetně nuly v nekonečnu). Jiná podmínka silné stabilizovatelnosti je obsažena v následujícím tvrzení.

Aby byl systém silně stabilizovatelný, pak musí mít stejné znaménko hodnoty jeho jmenovatele ve všech reálných nestabilních nulách systému.

Pokud je systém silně stabilizovatelný, zbývá nalézt jednotku  $c$  ve zvoleném okruhu, pro kterou platí  $c(\nu_i) = a(\nu_i)$  ve všech reálných nestabilních nulách  $\nu_i$  čitatele  $b$  systému  $S$ . V (Vidyasagar, 1985) je navržen rekurzivní postup určení jednotky  $c$  s uvedenou vlastností. Označme  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  reálné nestabilní nuly  $b$ . Zvolíme  $c_1 = \text{const.} = a(\nu_1)$ .

Pro  $i = 2$  až  $i = k$  určíme jednotky  $c_i$  následujícím způsobem: Volíme  $c_i$

$$c_i = (1 + \alpha f_{i-1})^\beta c_{i-1},$$

kde

$$f_{i-1} = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{s - \nu_j}{s + 1}$$

a kde reálnou konstantu  $\alpha$  splňující nerovnost

$$|\alpha| < \|f_i\|^{-1}$$

a přirozené číslo  $\beta$  volíme tak, aby

$$c_i(\nu_i) = a(\nu_i).$$

Potom  $c_i$  jsou jednotky a  $c_k = c$ .

**Příklad:** Nalezněte silně stabilizující regulátor pro systém  $S$  s přenosem

$$S = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}.$$

Řešení: Nestabilní nuly systému  $S$  jsou  $\nu_1 = \infty$ ,  $\nu_2 = 1$ . Systém má jediný nestabilní pól  $\lambda = 2$ . Protože v intervalu  $(1, \infty)$  mezi dvěma nestabilními nulami leží pouze jeden nestabilní pól, není splněna podmínka existence silně stabilizujícího regulátoru. Proto uvedený systém nelze stabilizovat stabilním regulátorem.

**Příklad:** Nalezněte silně stabilizující regulátor pro systém  $S$  s přenosem

$$S = \frac{s-2}{s(s+1)}.$$

Řešení: Nestabilní nuly systému  $S$  jsou  $\nu_1 = \infty$ ,  $\nu_2 = 2$ . Systém má jediný nestabilní pól  $\lambda = 0$ . V intervalu  $(2, \infty)$  mezi dvěma nestabilními nulami neleží žádný nestabilní pól, a proto problém silné stabilizace je v tomto případě řešitelný.

Upravíme přenos systému do tvaru

$$S(s) = \frac{s-2}{s(s+1)} = \frac{\frac{s-2}{(s+1)^2}}{\frac{s}{s+1}} = \frac{b}{a},$$

kde  $a$  i  $b$  jsou prvky okruhu stabilních a ryzích racionálních funkcí. Hodnota  $a$  v nestabilních nulách je

$$a(\infty) = 1, \quad a(2) = \frac{2}{3}.$$

Nyní určíme jednotky  $c_i$ . Nejprve konstantní  $c_1$

$$c_1 = a(\infty) = 1.$$

Volíme  $c_2$  ve tvaru

$$c_2 = (1 + \alpha f_1)^\beta c_1, \quad \text{kde} \quad f_1 = \frac{1}{s+1}.$$

Určíme  $\alpha$  a  $\beta$  tak, aby pro  $s = 2$  platilo

$$\left(1 + \alpha \frac{1}{s+1}\right)^\beta = a(\nu_2) = \frac{2}{3}.$$

Pro  $\beta = 1$  je  $\alpha = -1$ . Protože  $\|f_1\| = 1$ , není splněna podmínka  $|\alpha| < \|f_1\|^{-1}$ . Proto volíme  $\beta = 2$ . Potom  $\alpha = -0.55$  a  $c_2 = c$  je rovno

$$c = \left(1 - \frac{0.55}{s+1}\right)^2 = \frac{(s+0.45)^2}{(s+1)^2}.$$

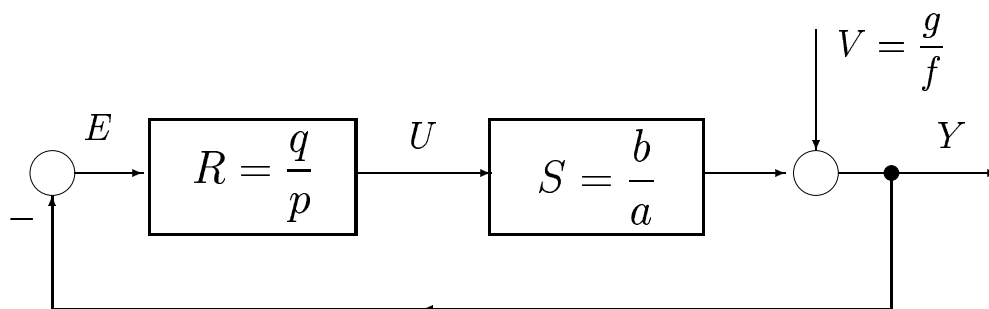
Silně stabilizující regulátor je pak roven

$$R = \frac{q}{1} = \frac{c - a}{b} = \frac{\frac{(s+0.45)^2}{(s+1)^2} - \frac{s}{s+1}}{\frac{s-2}{(s+1)^2}} = \frac{(s+0.45)^2 - s(s+1)}{s-2} = -0.1$$

Tento proporcionální stabilizující regulátor plyne ostatně i z geometrického místa kořenů.

### 3.4.4 Kompenzace poruchy

Mějme zpětnovazební regulační obvod podle obr. 3.10. Na výstupu systému působí neměřitelná poruchová veličina  $V$ . Naším záměrem je navrhnout takový zpětnovazební regulátor  $R$ , aby na výstupu systému byla porucha asymptoticky eliminována.



Obrázek 3.10: Kompenzace poruchové veličiny

Pokud poruchovou veličinu nemůžeme měřit či se o jejím působení dozvědět dříve než se projeví na výstupu systému, není možná úplná eliminace žádným regulátorem. Budeme se proto snažit navrhnout takový regulátor  $R$ , aby výstupní veličina  $Y$  byla asymptoticky stabilní. Potom vliv poruchy asymptoticky dozní a přitom rychlost konvergence poruchy k nule máme pod kontrolou.

Protože se bude jednat o stabilní odezvu a samozřejmě o stabilní zpětnovazební obvod, budeme přenos systému i regulátoru i obraz poruchy vyjadřovat jako podíl prvků z okruhu stabilních a ryzích či kauzálních racionálních funkcí. To tedy znamená, že dle obr. 3.10 prvky  $a$ ,  $b$ ,  $g$ ,  $f$  jsou dané stabilní ryzí či kauzální racionální funkce. Obraz výstupní veličiny  $Y$  je podle obr. 3.10 roven

$$Y = \frac{1}{1 + \frac{bq}{ap}} \frac{g}{f} = \frac{apg}{fc},$$

kde  $c = ap + bq$ . Provedeme krácení v příslušném okruhu a dostaneme

$$Y = \frac{a'pg}{f'c},$$

kde  $a'$ ,  $f'$  jsou nesoudělné v příslušném okruhu. To znamená, že jejich společné dělitele jsou pouze jednotky v příslušném okruhu.

Abych výstup  $Y$  byl stabilní, musí být jeho jmenovatel jednotka v okruhu stabilních ryzích či kauzálních racionálních funkcí. Proto racionální funkci  $c$  zvolíme jednotkou v příslušném

okruhu, ale pro stabilitu výstupu musíme ještě  $f'$  vykrátit s čitatelem. V čitateli je volitelný pouze jmenovatel regulátoru  $p$ . Proto  $p = f'x$  a hledané funkce  $x$  a  $q$  dostaneme jako řešení rovnice

$$af'x + bq = c, \quad (3.83)$$

kde  $c$  je jednotka v okruhu stabilních ryzích či kauzálních racionálních funkcí (například můžeme volit  $c = 1$ ). Obecné řešení v okruhu stabilních a ryzích či kauzálních přenosů je

$$x = x_0 + bh, \quad q = q_0 - af'h,$$

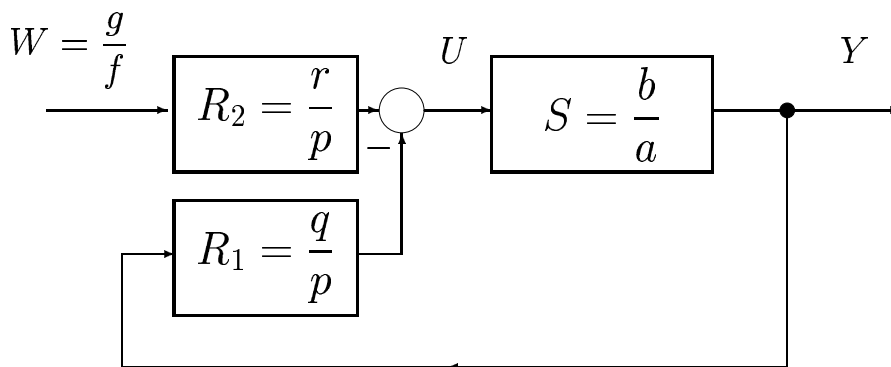
kde  $x_0$  a  $q_0$  je nějaké partikulární řešení a  $h$  je libovolný prvek příslušného okruhu. Regulátor  $R$  asymptoticky eliminující poruchu je roven

$$R = \frac{q}{p} = \frac{q_0 - af'h}{f'(x_0 + bh)}.$$

Jmenovatel regulátoru  $R$  obsahuje funkci  $f'$ . Uplatňuje se zde tzv. *princip vnitřního modelu*. Abychom mohli asymptoticky eliminovat poruchu, všechny nestabilní módy poruchy  $V$ , které nejsou obsaženy v systému  $S$ , musí být v regulátoru  $R$ . Problém nemá řešení, když nemá řešení rovnice (3.83). To nastane, když racionální funkce  $b$  a  $af'$  mají společný dělitel, který není jednotkou v příslušném okruhu.

### 3.4.5 Asymptotické sledování žádané hodnoty

Nyní vyřešíme podobný problém asymptotického sledování žádané hodnoty ve struktuře řízení podle obr. 3.11.



Obrázek 3.11: Sledování žádané hodnoty

Pro daný systém  $S$  a známou řídicí veličinu  $W$  budeme navrhovat takový regulátor  $R$  se dvěma stupni volnosti, aby regulační odchylka  $E$  byla stabilní.

Problém budeme opět řešit v okruhu stabilních racionálních funkcí. Odchylka  $E$  je rovna

$$E = W - Y = \frac{g}{f} - \frac{\frac{r}{q} \frac{b}{a}}{1 + \frac{q}{p} \frac{b}{a}} \frac{g}{f} = \frac{g}{f} \left( 1 - \frac{rb}{ap + bq} \right),$$

kde  $a, b, p, q, r, f$  a  $g \in F_{ps}$ , nebo  $F_{cs}$ . Aby odchylka byla stabilní, musí být její jmenovatel jednotka v příslušném okruhu, proto

$$ap + bq = 1.$$

Regulační odchylka je potom rovna

$$E = \frac{g}{f}(1 - rb).$$

Pokud platí  $1 - rb = fx$ , pak je regulační odchylka  $E = gx$ . Je tedy stabilní (jmenovatel je roven 1). Dvě nezávislé polynomiální rovnice

$$\begin{aligned} ap + bq &= 1 \\ fx + br &= 1 \end{aligned} \tag{3.84}$$

pro  $p, q, r$  a  $x$  v příslušném okruhu řeší náš problém. Problém je řešitelný, když  $f$  a  $b$  jsou nesoudělné v příslušném okruhu.

Uvědomme si, že tímto přístupem můžeme blíže specifikovat rychlost konvergence odchylky k nule. Například můžeme vždy upravit  $a, b, f$  a  $g$  tak, aby měly póly v pevném bodě  $\lambda$  komplexní roviny ( $Re \lambda < 0$ ). Pak vyřešením předchozí dvojice rovnic pro  $p, q, r$  a  $x$  s póly také v bodě  $\lambda$  zajistíme, že všechny póly regulační odchylky  $E$  jsou také ve zvoleném bodě  $\lambda$ .

Pokud budeme pro diskrétní systémy řešit tento problém v okruhu  $F[d]$ , pak kromě stabilního sledování zajistíme i konečnou dobu trvání regulační odchylky.

**Poznámka:** Chceme-li sledovat žádanou hodnotu  $W = \frac{h}{l}$  a současně kompenzovat poruchu  $V = \frac{g}{f}$ , pak je třeba zkombinovat oba předchozí postupy. Pro současné sledování žádané hodnoty a kompenzaci poruchy řešíme dvě polynomiální rovnice

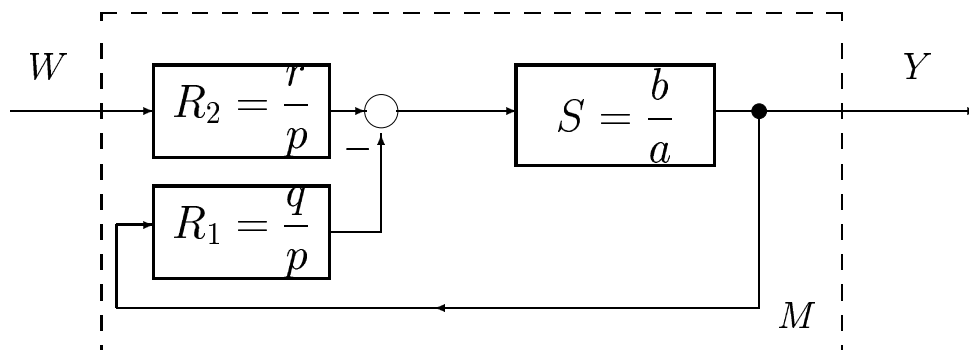
$$\begin{aligned} af'x + bq &= 1, \\ ly + br &= 1. \end{aligned}$$

Tyto rovnice řešíme pro neznámé  $x, q, y$  a  $r$  v příslušných okruzích a  $p = f'x$ . Přitom  $f'$  je stejné jako v (3.83). Tím přímo dostaneme čitatele a jmenovatele regulátoru  $R_1$  a  $R_2$ , který zajistí současné asymptotické sledování žádané hodnoty a asymptotickou kompenzaci neměřitelné poruchy.

### 3.4.6 Přizpůsobení systému danému modelu

V tomto odstavci vyřešíme problém, který jsme v okruhu polynomů již řešili dříve. Zde ukážeme pouze, jak elegantní řešení dostaneme, budeme-li řešit problém v okruhu ryzích a stabilních (případně kauzálních a stabilních) racionálních funkcí.

Struktura řízení je dle obr. 3.12. Problém je opět nalézt regulátor se dvěma stupni volnosti takový, aby přenos mezi řízením  $W$  a výstupem systému  $Y$  byl roven danému přenosu modelu  $M$ .

Obrázek 3.12: Přizpůsobení systému  $S$  modelu  $M$ 

Přenos mezi řízením  $W$  a výstupem systému  $Y$  je zřejmě

$$\frac{Y}{W} = \frac{\frac{r}{p} \frac{b}{a}}{1 + \frac{q}{p} \frac{b}{a}} = \frac{rb}{ap + bq}.$$

Aby byl tento přenos rovný přenosu modelu  $M$ , musí platit

$$ap + bq = 1, \quad (3.85)$$

$$rb = M. \quad (3.86)$$

Z první rovnice, která zajišťuje stabilitu zpětnovazebního obvodu, určíme  $p$  a  $q$  a z druhé rovnice plyne  $r$ . Všechny přenosy musí být prvky stabilního a ryzího (případně kauzálního) okruhu. Druhá rovnice vlastně určuje podmínku řešitelnosti problému. Z ní plyne, že problém je řešitelný, když  $b$  dělí  $M$  ( $M$  je násobek  $b$ ) v příslušném okruhu. Z této jednoduché podmínky dělitelnosti v okruhu plynou podmínky na relativní řád modelu a systému a také podmínky ohledně nestabilních nul systému a modelu, které již byly odvozeny dříve. Ukážeme to na dvou následujících příkladech.

**Příklad:** Nechť přenos systému je  $S = \frac{1}{s^2}$  a modelu  $M = \frac{1}{s+1}$ . Upravíme přenos systému tak, aby čísel i jmenovatel byly prvky okruhu ryzích a stabilních racionálních funkcí. Pak

$$S = \frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{\frac{s^2}{(s+1)^2}} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Z  $rb = M$  plyne

$$r = \frac{M}{b} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s^2}{(s+1)^2}} = s + 1.$$

Zřejmě  $r$  není prvek okruhu  $F_{ps}(s)$ , neboť relativní řád modelu je menší než relativní řád systému. Tento problém nemá tedy řešení.  $\square$

**Příklad:** Mějme systém  $S = \frac{s-1}{s^2}$  a přenos modelu  $M = \frac{1}{s+1}$ . Upravíme přenos sys-

tému tak, aby čítec i jmenovatel byly prvky okruhu ryzích a stabilních racionálních funkcí. Pak

$$S = \frac{\frac{s-1}{(s+1)^2}}{\frac{s^2}{(s+1)^2}} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Z  $rb = M$  plyne

$$r = \frac{M}{b} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s-1}{(s+1)^2}} = \frac{s+1}{s-1}.$$

Zřejmě  $r$  není prvek okruhu  $F_{ps}(s)$ , neboť nestabilní nula systému není nulou modelu. Také v tomto případě nemá problém řešení.





## Kapitola 4

# Algebraické metody řízení II

Poslední kapitolu algebraických metod věnujeme mnoharozměrovým systémům. Přenosové matice mnoharozměrových systémů budeme vyjadřovat pomocí maticových zlomků. Zde se omezíme pouze na zavedení matematického aparátu, analýzu mnoharozměrového zpětno-vazebního obvodu a vyřešení několika základních problémů.

### 4.1 Popis mnoharozměrových systémů

V této kapitole pojednáme o systémech s více vstupy a (nebo) více výstupy, které jsou označovány jako **mnoharozměrové systémy**. Mnoharozměrové systémy se často v literatuře označují zkratkou **MIMO systémy** (Multiple Input - Multiple Output).

Vnitřní (stavový) popis MIMO systémů se formálně neliší od popisu systémů s jednou vstupní i výstupní veličinou (SISO systémů). Zde se budeme zabývat vnějšími popisy. Pro přehlednost uvedeme vnitřní i vnější popis lineárních spojitých i diskrétních systémů.

Vnitřní popis lineárního spojitého systému je určen jeho stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  je po řadě n-rozměrný stav, r-rozměrný vstup a m-rozměrný výstup systému. Použitím Laplaceovy transformace vyloučíme z předchozích rovnic stav a dostaneme vnější popis (vztah mezi vstupem a výstupem systému)

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{x}(0),$$

kde  $\mathbf{x}(0)$  je počáteční stav a přenosová matice  $\mathbf{F}(s)$  lineárního spojitého systému je rovna

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c. \quad (4.1)$$

Podobně vnitřní popis lineárního diskrétního systému je určen stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k).\end{aligned}$$

Použitím Z-transformace dostaneme vnější popis

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{F}(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}z\mathbf{x}(0),$$

kde  $\mathbf{x}(0)$  je počáteční stav a přenosová matice  $\mathbf{F}(z)$  je rovna

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d, \quad (4.2)$$

případně pro  $d = z^{-1}$

$$\mathbf{F}(d) = d\mathbf{C}_d(\mathbf{I} - d\mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d. \quad (4.3)$$

Přenosová matice systému je maticí racionálních funkcí proměnné  $s$ ,  $z$  nebo  $d$  podle toho, zda se jedná o diskrétní či spojitý systém. Prvky  $F_{ij}$  přenosové matice  $\mathbf{F}$  jsou rovny přenosu mezi  $i$ -tou výstupní a  $j$ -tou vstupní veličinou.

Proto další odstavce věnujeme polynomiálním a racionálním maticím. Argument polynomiálních matic budeme obecně značit  $\xi$  a v příkladech budeme používat proměnnou  $s$ ,  $z$  nebo  $d$  pro spojitě či diskrétní systémy.

#### 4.1.1 Polynomiální matice

Polynomiální matice je matice, jejíž prvky jsou polynomy. Množinu polynomiálních matic rozměru  $(m, r)$  budeme značit  $\mathcal{F}_{mr}[\xi]$ , (její prvky jsou polynomy - prvky okruhu  $\mathcal{F}[\xi]$ ).

##### Základní pojmy

Je-li  $r = m > 1$ , pak množina čtvercových polynomiálních matic tvoří nekomutativní okruh. Jednotky v tomto okruhu jsou takové polynomiální matice, jejichž inverze je opět polynomiální matice. Takové matice nazýváme **unimodální matice**. Je zřejmé, že polynomiální matice je unimodální právě tehdy, když její determinant je nenulová konstanta (jednotka v okruhu polynomů). Polynomiální matice budeme značit  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\dots$ . Unimodální matice budeme značit  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$ ,  $\dots$ .

Každou polynomiální matici  $\mathbf{A} \in \mathcal{F}_{mr}[\xi]$  můžeme psát jako **maticový polynom**

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\xi + \dots + \mathbf{A}_n\xi^n, \quad (4.4)$$

kde  $\mathbf{A}_i$  jsou matice s reálnými prvky.

Je-li  $\mathbf{A}_n \neq 0$ , pak  $n$  je **stupeň polynomiální matice  $\mathbf{A}$** , který značíme  $n = \deg \mathbf{A}$ . Definujeme ještě, že stupeň nulové matice je  $-\infty$ .

Polynomiální matice  $\mathbf{A}$  je **ryzí** (proper), je-li to matice čtvercová ( $m = r$ ) a matice  $\mathbf{A}_n$  je regulární. Matice  $\mathbf{A}_n$  je matice koeficientů u nejvyšší mocniny  $\xi^n$  v polynomiální matici  $\mathbf{A}$ .

Platí-li pro dvě polynomiální matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{F}_{mr}[\xi]$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{U}_2),$$

kde  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  jsou unimodální matice, pak říkáme, že matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  jsou **zleva (zprava) ekvivalentní**. Je-li

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{B}\mathbf{U}_2,$$

pak  $A, B$  jsou **ekvivalentní matice**. Ekvivalentní matice mají podobné vlastnosti - mají stejné invariantní polynomy.

Je-li

$$A = BC,$$

pak matice  $B$  je **levý dělitel** matice  $A$ , matice  $C$  je **pravý dělitel** matice  $A$ , matice  $A$  je **pravý násobek** matice  $B$  a matice  $A$  je **levý násobek** matice  $C$ .

Uvažujme dvě polynomiální matice  $A \in \mathcal{F}_{mr}[\xi]$  a  $B \in \mathcal{F}_{mm}[\xi]$ , kde matice  $A$  je ryzí. Potom **algoritmus levého dělení** poskytuje dvě matice  $U_L, V_L \in \mathcal{F}_{mr}[\xi]$ , kde

$$B = AU_L + V_L, \quad (4.5)$$

které jsou určeny jednoznačně požadavkem  $\deg V_L < \deg A$ . Podobně **algoritmus pravého dělení** poskytuje dvě matice  $U_R, V_R \in \mathcal{F}_{mr}[\xi]$ , kde

$$B = U_RA + V_R, \quad (4.6)$$

které jsou opět určeny jednoznačně požadavkem  $\deg V_R < \deg A$ .

### Největší společný levý dělitel

Je-li čtvercová polynomiální matice  $G$  levý dělitel polynomiálních matic  $A$  i  $B$ , pak je společný levý dělitel. Je-li navíc  $G$  pravý násobek každého levého dělitele  $A$  i  $B$ , pak  $G$  je **největší společný levý dělitel**.

Podobně je-li čtvercová polynomiální matice  $L$  pravý násobek polynomiálních matic  $A$  i  $B$ , pak je společný pravý násobek. Je-li navíc  $L$  levý dělitel každého společného pravého násobku  $A$  i  $B$ , pak  $L$  je **nejmenší společný pravý násobek**.

Největší společný levý dělitel  $G$  i nejmenší společný pravý násobek  $L$  není jediný. Libovolné dva největší společné levé dělitele podobně jako libovolné dva nejmenší společné pravé násobky dvou polynomiálních matic jsou zprava ekvivalentní.

Největší společný levý dělitel polynomiálních matic  $A$  i  $B$  můžeme nalézt podle následujícího algoritmu: Vytvoříme složenou polynomiální matici

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

a sloupcovými úpravami ji transformujeme na polynomiální matici

$$\begin{bmatrix} G & O. \end{bmatrix}$$

Dostaneme tak přímo největší společný levý dělitel. □

Uvědomme si, že dovozené sloupcové úpravy jsou opět

- záměna dvou sloupců matice
- násobení libovolného sloupce matice konstantou
- násobení sloupce libovolným polynomem a přičtení výsledku k jinému sloupci.

Tyto elementární sloupcové úpravy znamenají násobení polynomiální matice zprava uni-

modální maticí. Pro uvedené úpravy jsou unimodální matice po řadě

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r(\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Násobíme-li první maticí zprava libovolnou maticí, je výsledná matice totožná s původní maticí, pouze první a druhý sloupec je zaměněn. Násobíme-li druhou maticí zprava libovolnou maticí, je výsledek stejný až na druhý sloupec, který je násobený konstantou  $k$ . Násobíme-li libovolnou maticí zprava třetí maticí, je první sloupec výsledné matice roven součtu prvního sloupce a druhého sloupce násobeného polynomem  $r(\xi)$ .

Předchozí postup určení největšího společného levého dělitele můžeme zapsat také následujícím způsobem. Vytvoříme složenou polynomiální matici

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

a tuto matici sloupcovými operacemi upravíme do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{bmatrix}.$$

Tím jsme vlastně provedli řešení následující polynomiální rovnice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

čili

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} + \mathbf{BQ} &= \mathbf{G} \\ \mathbf{AR} + \mathbf{BS} &= \mathbf{O}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Polynomiální matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

je unimodální matice, a proto jsou matice  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$  zprava ekvivalentní. Důkaz předchozích tvrzení je jednoduchý, viz (Kailath, 1980).

Má-li matice  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$  plnou řádkovou hodnost, je největší společný levý dělitel  $\mathbf{G}$  matic  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  nesingulární matice.

Dvě polynomiální matice jsou **zleva nesoudělné**, když všechny jejich největší společné levé dělitele jsou unimodální matice. O tom, zda jsou dvě matice nesoudělné, se snadno přesvědčíme výpočtem jejich největšího společného dělitele. Proto platí následující kritérium nesoudělnosti:

Polynomiální matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou zleva nesoudělné, když existují polynomiální matice  $\mathbf{P}$ ,

$Q$  takové, že platí

$$AP + BQ = I. \quad (4.8)$$

### Největší společný pravý dělitel

**Největšího společného pravého dělitele** polynomiálních matic  $A$  a  $B$  určíme řádkovými úpravami složené matice  $\begin{bmatrix} A^T & B^T \end{bmatrix}^T$ . Největší společný pravý dělitel  $G$  získáme řádkovými úpravami složené matice

$$\begin{bmatrix} A & I & O \\ B & O & I \end{bmatrix}$$

do tvaru

$$\begin{bmatrix} G & P & Q \\ O & R & S \end{bmatrix}.$$

Tím vyřešíme soustavu polynomiálních rovnic

$$\begin{aligned} PA + QB &= G \\ RA + SB &= O. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Složená polynomiální matice  $\begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix}$  je unimodální matice.

### Kanonický tvar polynomiální matice

Každou polynomiální matici lze dovořenými sloupcovými úpravami převést na dolní trojúhelníkovou matici (t.zv. **Hermitův tvar**). Tento převod vlastně znamená, že danou polynomiální matici násobíme zprava unimodální maticí. Podobně každou polynomiální matici lze dovořenými řádkovými úpravami převést na horní trojúhelníkovou matici. Pevod vlastně znamená, že danou polynomiální matici násobíme zleva unimodální maticí.

Provedeme-li současně sloupcové i řádkové úpravy polynomiální matice  $A$ , pak ji můžeme redukovat do speciálního diagonálního tvaru nazývaného **kanonický** nebo též **Smithův tvar**. Sloupcové i řádkové úpravy znamenají násobení polynomiální matice zprava i zleva unimodální maticí. Platí tedy

$$S = U_1 A U_2, \quad U_1, U_2 \text{ unimodální} \quad (4.10)$$

kde  $S$  je Smithův kanonický tvar polynomiální matice. Matice  $S$  je diagonální matice. Její diagonální prvky jsou **invariantní polynomy**  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Pro invariantní polynomy  $a_i$  polynomiální matice  $A$  platí

$$a_i \text{ dělí } a_{i+1}$$

$$r \text{ je hodnost polynomiální matice } A$$

$$\det A = \alpha \prod a_i,$$

kde  $\alpha$  je nějaká konstanta.

Unimodální polynomiální matice má jednotkové invariantní polynomy. Ekvivalentní matice mají stejné invariantní polynomy. Uvědomme si, že invariantní polynomy jsou jednoznačné až na konstantu (jednotku v okruhu polynomů).

**Polynomiální matice  $A$  je stabilní**, jsou-li její invariantní polynomy stabilní polynomy.

#### 4.1.2 Maticové polynomiální rovnice

Při syntéze mnohazměrových systémů se vyskytují maticové polynomiální rovnice, které jsou obdobou polynomiálních diofantických rovnic, které jsme používali při syntéze řízení systémů s jedním vstupem i výstupem. Tvar maticových polynomiálních rovnic i jejich řešení je podobné jako u polynomiálních rovnic, je třeba ale rozlišovat pravý a levý tvar maticových polynomiálních rovnic.

Mějme tedy maticovou polynomiální rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{C}, \quad (4.11)$$

kde známé polynomiální matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{C}$  mají stejný počet řádků. Řešením předchozí maticové polynomiální rovnice jsou polynomiální matice  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  kompatibilních rozměrů. Nejprve uvedeme podmínku řešitelnosti rovnice (4.11).

Maticová polynomiální rovnice (4.11) má řešení právě tehdy, když největší společný levý dělitel matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je také levým dělitelem polynomiální matice  $\mathbf{C}$ .

Má-li rovnice (4.11) řešení, pak nechť  $\mathbf{G}$  je největší společný levý dělitel matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Pak platí  $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{B}_0$  a s ohledem na řešitelnost také  $\mathbf{C} = \mathbf{G}\mathbf{C}_0$ .

Podle (4.7) existuje dvojice zprava nesoudělných polynomiálních matic  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ , že platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{Q} &= \mathbf{G} \\ \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{B}\mathbf{S} &= \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vynásobíme-li první rovnici z předchozí soustavy zprava maticí  $\mathbf{C}_0$ , dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}_0 + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{C}_0 = \mathbf{G}\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}.$$

Odtud plyne řešení polynomiální rovnice (4.11) ve tvaru

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{P}\mathbf{C}_0, \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{C}_0 \quad (4.13)$$

Obecné řešení polynomiální rovnice (4.11) je

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 - \mathbf{B}_1\mathbf{H} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

kde  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  jsou zprava nesoudělné polynomiální matice splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}\mathbf{A}_1 \quad (4.15)$$

a matice  $\mathbf{H}$  je libovolná polynomiální matice kompatibilních rozměrů. O tom, že matice  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  jsou vskutku řešením polynomiální rovnice (4.11), se snadno přesvědčíme dosazením.

Porovnáme-li rovnici (4.15) s druhou rovnicí v soustavě (4.12), je zřejmé, že  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{S}$  a

$B_1 = -R$ , a proto obecné řešení můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} X &= PC_0 + RH \\ Y &= QC_0 + SH. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hledáme-li řešení polynomiální maticové rovnice (4.11) s nejmenším stupněm polynomiální matice  $X$ , pak provedeme podle (4.5) levé dělení partikulárního řešení  $X_0$  polynomiální maticí  $B_1$ . Pak  $X_0 = B_1U + V$ , kde  $\deg V < \deg B_1$ . Potom obecné řešení  $X$  je rovno

$$X = V - B_1(H - U).$$

Pro  $H = U$  dostaneme podle předchozí rovnice řešení s minimálním stupněm polynomiální matice  $X$

$$\begin{aligned} X &= V \\ Y &= Y_0 + A_1U. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Předchozí postup konstrukce řešení polynomiální rovnice (4.11) s minimálním stupněm polynomiální matice  $X$  je použitelný pouze tehdy, když polynomiální matice  $B_1$  je ryzí.

Obdobný postup platí při řešení maticové polynomiální rovnice

$$XA + YB = C. \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Maticové zlomky

Přenos systému s jedním vstupem i výstupem je racionální funkce, která je rovna podílu polynomů (je tedy rovna zlomku, v jehož čitateli i jmenovateli je polynom). V tomto odstavci ukážeme, že i přenosovou matici, která je racionální maticí, můžeme vyjádřit jako **maticový zlomek**.

#### Pravé a levé maticové zlomky

Mějme tedy přenosovou matici  $F(\xi)$  rozměru  $(m, r)$  (komplexní proměnná  $\xi$  je buď rovna  $s$  nebo  $z$  podle toho, zda se jedná o spojitý či diskrétní systém). Tuto přenosovou matici můžeme vyjádřit jako **pravý maticový zlomek** ve tvaru

$$F(\xi) = B_R(\xi)A_R^{-1}(\xi), \quad (4.19)$$

kde  $A_R(\xi)$  je čtvercová polynomiální matice rozměru  $r$  (její rozměr je roven počtu vstupů) a  $B_R(\xi)$  je také polynomiální matice stejného rozměru jako přenosová matice  $F(\xi)$ .

Přenosovou matici  $F(\xi)$  můžeme také vyjádřit jako **levý maticový zlomek** ve tvaru

$$F(\xi) = A_L^{-1}(\xi)B_L(\xi), \quad (4.20)$$

kde  $A_L(\xi)$  je čtvercová polynomiální matice rozměru  $m$  (její rozměr je roven počtu výstupů) a  $B_L(\xi)$  je také polynomiální matice stejného rozměru jako přenosová matice  $F(\xi)$ . Vnější popis systému pomocí maticových zlomků si nejprve ukážeme na příkladě.



**Příklad:** Mějme přenosovou matici spojitého systému

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{s+2}{s+1} & \frac{s+1}{s} & 1 \end{bmatrix}.$$

Protože prvky přenosové matice nejsou striktně ryzí, nejprve upravíme přenosovou matici do tvaru

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_1(s) + \mathbf{D},$$

kde matice  $\mathbf{F}_1(s)$  je striktně ryzí a  $\mathbf{D}$  je matice koeficientů přímých vazeb mezi vstupem a výstupem. Pro vyjádření přenosové matice ve tvaru maticového zlomku není předchozí úprava nutná, využijeme ji ale při realizaci systému.

Pro vyjádření přenosové matice jako levý či pravý maticový zlomek nalezneme nejprve nejmenší společný násobek jmenovatelů přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$ . V našem případě je nejmenší společný násobek roven

$$l(s) = s(s+1)^2.$$

Přenosovou matici můžeme pak vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{1}{l(s)} \mathbf{B}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s(s+1)^2 & 0 \\ 0 & s(s+1)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_L(s). \end{aligned}$$

Tímto postupem jsme přenosovou matici  $\mathbf{F}(s)$  vyjádřili ve tvaru levého maticového zlomku. Podobným postupem můžeme vyjádřit striktně ryzí přenosovou matici  $\mathbf{F}_1(s)$  ve tvaru levého maticového zlomku. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(s) &= \frac{1}{l(s)} \mathbf{B}_{L1}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1) & (s+1)^2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s(s+1)^2 & 0 \\ 0 & s(s+1)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1) & (s+1)^2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_L^{-1}(s) \mathbf{B}_{L1}(s). \end{aligned}$$

Obdobně pro pravý maticový zlomek ryzí přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{B}_R(s) \frac{1}{l(s)} = \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} = \\ &= \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s(s+1)^2} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+1)(s+2) & (s+1)^3 & s(s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & s(s+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & s(s+1)^2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\mathbf{B}_R(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s).$$

Ryzí přenosovou matici  $\mathbf{F}(s)$  jsme vyjádřili jako pravý maticový zlomek. Stejný postup ovšem můžeme použít i pro vyjádření přísně ryzí přenosové matice  $\mathbf{F}_1(s)$  ve tvaru pravého maticového zlomku. Přitom zřejmě platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_1(s) + \mathbf{D} = \mathbf{B}_R(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_L(s) \\ &= \mathbf{B}_{R1}(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s) + \mathbf{D} = \mathbf{A}_L^{-1}(s)\mathbf{B}_{L1}(s) + \mathbf{D}. \end{aligned}$$

□

Při tvorbě maticového zlomku můžeme postupovat tak, že pro tvorbu levého maticového zlomku vybíráme největší společný násobek jmenovatelů po jednotlivých řádcích přenosové matice. Nejmenší společný násobek prvků v prvním řádku přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  je  $l_1 = s(s+1)^2$  a nejmenší společný násobek prvků v druhém řádku přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  je  $l_2 = s(s+1)$ . Potom má levý maticový zlomek tvar

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} s(s+1)^2 & 0 \\ 0 & s(s+1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & (s+1)^2 & s \\ s(s+2) & (s+1)^2 & s(s+1) \end{bmatrix}.$$

Podobně při tvorbě pravého maticového zlomku můžeme vybírat největší společné jmenovatele po jednotlivých sloupcích přenosové matice. Potom má pravý maticový zlomek tvar

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (s+1)(s+2) & s+1 & (s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

### Realizace přenosové matice

Jedna z možných realizací systému s přenosem  $\mathbf{F}_1(s)$  z předchozího příkladu je taková, že budeme realizovat každý prvek přenosové matice zvlášť. Potom celkový řád přenosové matice bude roven součtu řádů jednotlivých prvků, v našem případě řád realizace systému bude  $n_c = 7$ . Stavové rovnice systému budou mít matice  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D})$  ve tvaru

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & -2 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & -2 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} +1 & +0 & 1 & +0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Máme-li přenosovou matici vyjádřenou ve tvaru pravého maticového zlomku, pak vždy

můžeme nalézt **dosažitelnou realizaci systému**. Ukážeme to nejprve na pravém maticovém zlomku ve tvaru

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_R(s) \frac{1}{l(s)} + \mathbf{D} = \mathbf{B}_R(s) \text{diag} \left[ \frac{1}{l(s)} \right] + \mathbf{D} = \mathbf{B}_R(s) [\text{diag } l(s)]^{-1} + \mathbf{D}$$

kde matice  $\mathbf{A}_R(s)$  je diagonální matice s  $l(s)$  v diagonále. Matice  $\mathbf{D}$  je matice přímých vazeb, a proto  $\mathbf{B}_R(s) [\text{diag } l(s)]^{-1}$  vyjadřuje přísně ryzí přenosovou matici. Tento tvar je stejný s tvarem, který jsme získali v předchozím příkladě, kde jsme ale matici  $\mathbf{B}_R(s)$  značili  $\mathbf{B}_{R1}(s)$ . Polynom  $l(s)$  a polynomiální matice  $\mathbf{B}_R(s)$  mají obecně tvar

$$l = l_0 + l_1 s + \cdots + l_{q-1} s^{q-1} + l_q s^q, \quad l_q = 1$$

$$\mathbf{B}_R(s) = \mathbf{B} + \mathbf{B}_1 s + \cdots + \mathbf{B}_{q-1} s^{q-1}.$$

Dosažitelná realizace má stavové matice ( $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$ ) ve tvaru (index  $c$  značí, že se jedná o dosažitelnou (controllable) realizaci)

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{I} \\ -l_0 \mathbf{I} & -l_1 \mathbf{I} & \cdot & \cdots & -l_{q-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \cdots \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{q-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{D},$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice rozměru  $r$  ( $r$  je počet vstupů). Řád realizace je  $n_c = r \cdot q$ . Tato realizace je vskutku dosažitelná, protože její matice dosažitelnosti je blokově trojúhelníková matice s jednotkovými maticemi ve vedlejší diagonále a nulovými bloky nad vedlejší diagonálou. Proto má matice dosažitelnosti vždy plnou hodnotu.

V našem příkladu je  $q = 3$  a počet vstupů je  $r = 3$ , a proto řád dosažitelné realizace je roven  $n_c = 9$ . Napište stavové rovnice a nakreslete stavové schéma dosažitelné realizace.

**Stupeň matice jmenovatele** je definován

$$\text{deg } \mathbf{A}_R = \text{deg}(\det \mathbf{A}_R). \quad (4.21)$$

V našem příkladě je  $\text{deg } \mathbf{A}_R = r \cdot q$ , a tedy stupeň matice jmenovatele je roven **řádu dosažitelné realizace**. Stupeň matice jmenovatele je roven řádu dosažitelné realizace pro libovolný popis systému ve tvaru pravého maticového zlomku. Toto důležité tvrzení ověříme v následujícím odstavci konstrukcí dosažitelné realizace z pravého maticového zlomku.

Úplně obdobně máme-li přenosovou matici vyjádřenou ve tvaru levého maticového zlomku, pak vždy můžeme nalézt pozorovatelnou realizaci systému. Ukážeme to opět nejprve na levém maticovém zlomku ve tvaru

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{l(s)} \mathbf{B}_L(s) + \mathbf{D} = \text{diag} \left( \frac{1}{l(s)} \right) \mathbf{B}_L(s) + \mathbf{D} = [\text{diag } l(s)]^{-1} \mathbf{B}_L(s) + \mathbf{D}$$

kde matice  $\mathbf{A}_L(s)$  je diagonální matice s  $l(s)$  v diagonále. Matice  $\mathbf{D}$  je matice přímých vazeb, a proto  $[\text{diag } l(s)]^{-1} \mathbf{B}_L(s)$  vyjadřuje přísně ryzí přenosovou matici.

Polynom  $l(s)$  i polynomiální matice  $\mathbf{B}_L(s)$  mají stejný tvar jako v předchozím případě. Pozorovatelná realizace má stavové matice ( $\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o$ ) ve tvaru (index  $o$  zde značí,

že se jedná o pozorovatelnou (observable) realizaci)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_o &= \begin{bmatrix} -l_{q-1}\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ -l_{q-2}\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -l_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{I} \\ -l_0\mathbf{I} & \mathbf{O} & \cdot & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{q-1} \\ \mathbf{B}_{q-2} \\ \cdots \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_o &= \mathbf{D}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice rozměru  $m$  ( $m$  je počet výstupů). Řád realizace je  $n_c = m \cdot q$ . Tato realizace je vskutku pozorovatelná, protože její matice pozorovatelnosti je horní trojúhelníková matice. Proto má matice pozorovatelnosti vždy plnou hodnotu.

Pro systém z předchozího příkladu je opět  $q = 3$  a počet výstupů je  $m = 2$ , a proto jeho řád pozorovatelné realizace je  $n_c = 6$ . Také zde platí, že stupeň matice jmenovatele  $\deg \mathbf{A}_L = 6$  je roven řádu pozorovatelné realizace. V následující kapitole ukážeme, že při popisu systému pomocí levého maticového zlomku je vždy řád pozorovatelné realizace roven stupni matice jmenovatele.

Úplně stejný postup použijeme při tvorbě dosažitelné nebo pozorovatelné realizace diskrétního systému popsaného přenosovou maticí  $\mathbf{F}(z)$ . Provedeme pouze formální záměnu komplexní proměnné  $s$  za komplexní proměnnou  $z$ . Rozmyslete si, proč nemůžeme také formálně uvedený postup použít při vyjádření přenosové matice diskrétního systému  $\mathbf{F}(d)$  pomocí operátoru zpoždění  $d$ .

### Redukovaný tvar maticového zlomku

Dosud jsme se naučili vyjádřit přenosovou matici ve tvaru pravého i levého maticového zlomku. Z tohoto pravého (levého) maticového zlomku můžeme určit dosažitelnou (pozorovatelnou) realizaci, jejíž řád je roven stupni matice jmenovatele.

Vyjádření přenosové matice ve tvaru maticového zlomku není jediné. Pro libovolnou unimodální matici  $\mathbf{U}$  platí

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{B}_R \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_R^{-1} = (\mathbf{B}_R \mathbf{U}) (\mathbf{A}_R \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{B}_{R1} \mathbf{A}_{R1}^{-1},$$

kde nový výraz pro pravý maticový zlomek má zřejmě matice  $\mathbf{B}_{R1} = \mathbf{B}_R \mathbf{U}$  a  $\mathbf{A}_{R1} = \mathbf{A}_R \mathbf{U}$ . Dokonce místo unimodální matice  $\mathbf{U}$  můžeme vzít libovolnou polynomiální matici.

Nás ovšem bude zajímat nejjednodušší tvar maticového zlomku. Ten dostaneme, když matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  budou nesoudělné. Pro pravý maticový zlomek nalezneme největší společný pravý dělitel  $\mathbf{G}$  matic  $\mathbf{A}_R$  a  $\mathbf{B}_R$ . Přenosovou matici můžeme potom upravit do tvaru

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{B}_{R1} \mathbf{G} (\mathbf{A}_{R1} \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{B}_{R1} \mathbf{A}_{R1}^{-1},$$

kde matice  $\mathbf{A}_{R1}$  a  $\mathbf{B}_{R1}$  jsou zprava nesoudělné. Protože pro stupně jmenovatele platí

$$\deg(\det \mathbf{A}_R) = \deg(\det \mathbf{A}_{R1} \mathbf{G}) = \deg \det \mathbf{A}_{R1} + \deg \det \mathbf{G},$$

je stupeň determinantu matice jmenovatele minimální, když je přenos vyjádřen pomocí pravého maticového zlomku s nesoudělnými maticemi čitatele a jmenovatele.

Pro levý maticový zlomek platí podobné tvrzení. Minimální stupeň determinantu matice

dostaneme v tomto případě, když budou matice jmenovatele a čitatele zleva nesoudělné. To je zřejmé z následujícího postupu

$$F(\xi) = A_L^{-1} B_L = (G A_{L1})^{-1} G B_{L1} = A_{L1}^{-1} B_{L1}.$$

Ani vyjádření přenosové matice ve tvaru nesoudělného maticového zlomku není jediné. Platí totiž

$$\begin{aligned} F(\xi) &= B_R A_R^{-1} = B_R U (A_R U)^{-1} = B_{R1} A_{R1}^{-1} \\ F(\xi) &= A_L^{-1} B_L = (U A_L)^{-1} U B_L = A_{L1}^{-1} B_{L1}, \end{aligned}$$

kde  $U$  je unimodální matice.

Pravý maticový zlomek  $B_R A_R^{-1}$  se nazývá **redukovaný**, jsou-li matice  $A_R$  a  $B_R$  zprava nesoudělné. Podobně levý maticový zlomek  $A_L^{-1} B_L$  je redukovaný, jsou-li matice  $A_L$  a  $B_L$  zleva nesoudělné.

### Ryzí přenosové matice

**Přenosová matice  $F(s)$  spojitého systému je ryzí**, když její prvky  $F_{ij}$ , jsou ryzí racionální funkce. Podobně i pro přísnou ryzost prvků i celé přenosové matice. Připomeňme, že přenos je přísně ryzí (ryzí), když stupeň jeho čitatele je menší (menší nebo roven) stupni jeho jmenovatele. Odtud plyne, že přenosová matice  $F(s)$  je ryzí, když

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) < \infty \quad (4.22)$$

a přenosová matice  $F(s)$  je přísně ryzí, když

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = O. \quad (4.23)$$

U diskrétních systémů s přenosovou maticí  $F(z)$  místo o ryzosti mluvíme o kauzalitě. **Přenosová matice  $F(z)$  diskrétního systému je kauzální**, když  $F(\infty) < \infty$ .

Jak ale poznáme, že přenosová matice je ryzí (kauzální), je-li vyjádřena ve tvaru maticového zlomku? Z  $F(s) = B_R A_R^{-1}$  plyne  $F A_R = B_R$  a pro prvky matice  $B_R$  tedy platí

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^r F_{ik} a_{kj},$$

kde  $a_{kj}$  jsou prvky polynomiální matice  $A_R$  a  $F_{ik}$  jsou prvky přenosové matice  $F$ . Proto platí následující tvrzení:

Je-li přenosová matice  $F(s)$  přísně ryzí (ryzí), pak každý sloupec matice  $B_R$  má stupeň menší (menší nebo roven) než odpovídající sloupec matice  $A_R$ . Přitom stupeň sloupce je roven nejvyššímu stupni polynomu ve sloupci.

Obrácené tvrzení platí pouze tehdy, je-li matice jmenovatele sloupcově redukovaná. Tento pojem nyní objasníme.

Označme jako  $k_i$  maximální stupeň polynomu v  $i$ -tém sloupci matice  $A_R$ . Konstantu  $k_i$  budeme nazývat stupeň  $i$ -tého sloupce matice  $A_R$ . Matici  $A_R$  můžeme vyjádřit potom ve

tvaru

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{hc} \begin{bmatrix} s^{k_1} & & & \\ & s^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{k_r} \end{bmatrix} + \mathbf{L}.$$

Matice  $\mathbf{A}_{hc}$  je matice koeficientů u nejvyšších sloupcových mocnin matice  $\mathbf{A}_R$ . V matici  $\mathbf{L}$  je obsažen zbytek rozkladu.

Pokud je matice  $\mathbf{A}_{hc}$  regulární, původní matice  $\mathbf{A}_R$  je sloupcově redukována. V tom případě její stupeň je roven součtu sloupcových stupňů

$$\deg \mathbf{A}_R = \deg \det(\mathbf{A}_R) = \sum_{i=1}^r k_i. \quad (4.24)$$

Pokud matice  $\mathbf{A}_R$  není sloupcově redukována, pak ji můžeme sloupcovými operacemi (to je násobením zprava unimodální maticí) převést do tvaru, který je sloupcově redukováný. Také matici  $\mathbf{B}_R$ , která spolu s maticí  $\mathbf{A}_R$  tvoří pravý maticový zlomek, musíme potom zprava násobit stejnou unimodální maticí. Postup ukážeme na příkladě.

**Příklad:** Mějme přenosovou matici systému vyjádřenou ve tvaru pravého maticového zlomku  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1}$ , kde

$$\mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} (s-1)^2 & s^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 2(s+1)^3 & -(s+1)^2 \\ s+3 & s \end{bmatrix}.$$

Nalezneme nejprve sloupcové indexy matice  $\mathbf{A}_R$ . Nejvyšší stupeň polynomu v prvním sloupci je 3, a tudíž  $k_1 = 3$  a podobně  $k_2 = 2$ . Matice koeficientů u nejvyšších sloupcových mocnin je potom

$$\mathbf{A}_{hc} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože matice  $\mathbf{A}_{hc}$  je singulární, není matice  $\mathbf{A}_R$  sloupcově redukována. Násobíme proto matici  $\mathbf{A}_R$  zprava takovou unimodální maticí, aby se redukoval nejvyšší stupeň polynomu v prvním sloupci

$$\mathbf{A}_R \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2(s+1)^3 & -(s+1)^2 \\ s+3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2 + 4s + 2 & -(s+1)^2 \\ 2s^2 + s + 3 & s \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{R1}.$$

Matice koeficientů u nejvyšších sloupcových mocnin matice  $\mathbf{A}_{R1}$  je rovna

$$(\mathbf{A}_1)_{hc} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože matice  $(\mathbf{A}_1)_{hc}$  je regulární, je matice  $\mathbf{A}_{R1}$  sloupcově redukována. Také matici  $\mathbf{B}_R$  musíme násobit stejnou unimodální maticí

$$\mathbf{B}_R \mathbf{U} = \begin{bmatrix} (s-1)^2 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^3 + (s-1)^2 & s^2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{R1}.$$

Systém  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{B}_R \mathbf{U} (\mathbf{A}_R \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{B}_{R1} \mathbf{A}_{R1}^{-1}$  vyjádřený ve tvaru pravého maticového

cového zlomku s maticemi  $\mathbf{A}_{R1}$  a  $\mathbf{B}_{R1}$  má matici  $\mathbf{A}_{R1}$  ve sloupcově redukováném tvaru.  $\square$

Ryzost systému popsaného pravým maticovým zlomkem můžeme zjistit podle následujícího tvrzení: je-li matice  $\mathbf{A}_R$  sloupcově redukována, pak systém popsaný pravým maticovým zlomkem je přísně ryzí (ryzí) právě tehdy, když každý sloupec matice  $\mathbf{B}_R$  má stupeň menší (menší nebo roven) než stupeň odpovídajícího sloupce matice  $\mathbf{A}_R$ .

Systém v předchozím příkladě není ryzí (není samozřejmě ani striktně ryzí), protože stupeň prvního sloupce matice  $\mathbf{B}_{R1}$  je vyšší než stupeň prvního sloupce matice  $\mathbf{A}_{R1}$ . Přitom původní matice  $\mathbf{B}_R$  neměla sloupcově stupně vyšší než byly odpovídající sloupcové stupně matice  $\mathbf{A}_R$ . Ovšem původní matice  $\mathbf{A}_R$  nebyla sloupcově redukována.

**Poznámka 1:** Ryzost systému popsaného levým maticovým zlomkem vyšetřujeme podobným způsobem, pouze místo sloupcových redukcí provádíme redukce řádkové. Pro systém popsaný levým maticovým zlomkem  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L$  je třeba provést řádkovou redukci matice jmenovatele  $\mathbf{A}_L$ . Označme jako  $l_i$  řádkový stupeň matice  $\mathbf{A}_L$ . Sestavíme matici koeficientů u nejvyšších řádkových mocnin matice  $\mathbf{A}_L$  a označíme ji jako  $\mathbf{A}_{hr}$ . Pokud je matice  $\mathbf{A}_{hr}$  regulární, pak je matice jmenovatele  $\mathbf{A}_L$  levého maticového zlomku **řádkově redukována**. Není-li matice jmenovatele  $\mathbf{A}_L$  řádkově redukována, můžeme ji řádkovými operacemi (to znamená násobením zleva unimodální maticí) převést do řádkově redukováného tvaru. Při této úpravě musíme stejnou unimodální maticí zleva násobit i matici  $\mathbf{B}_L$ , která spolu s maticí  $\mathbf{A}_L$  tvoří levý maticový zlomek. Ryzost systému popsaného levým maticovým zlomkem zjišťujeme následujícím způsobem.

Je-li matice  $\mathbf{A}_L$  řádkově redukována, pak systém popsaný levým maticovým zlomkem je přísně ryzí (ryzí), když každý řádek matice  $\mathbf{B}_L$  má stupeň menší (menší nebo roven) než odpovídající řádek matice  $\mathbf{A}_L$ .

**Poznámka 2:** Pokud maticový zlomek popisuje pouze ryzí a ne přísně ryzí přenosovou matici, je třeba při realizaci systému určit jeho matici přímé vazby mezi vstupem a výstupem. Potom zbytek popisuje dynamické vlastnosti systému vyjádřené přísně ryzím maticovým zlomkem. Pro ryzí přenosovou matici  $\mathbf{F}(s)$  tedy platí

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{B}_{R1} \mathbf{A}_R^{-1} + \mathbf{D}, \quad (4.25)$$

kde  $\mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1}$  je známý ryzí maticový zlomek,  $\mathbf{B}_{R1} \mathbf{A}_R^{-1}$  je hledaný, přísně ryzí maticový zlomek a  $\mathbf{D}$  je hledaná konstantní matice přímých vazeb mezi vstupem a výstupem. Předpokládáme, že matice jmenovatele  $\mathbf{A}_R$  je sloupcově redukována.

Z předchozího vztahu plyne rovnice pro hledané matice  $\mathbf{B}_{R1}(s)$  a  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{R1} + \mathbf{D} \mathbf{A}_R. \quad (4.26)$$

Aby maticový zlomek  $\mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1}$  byl pouze ryzí, musí některý sloupcový stupeň matice  $\mathbf{B}_R$  být stejný jako odpovídající sloupcový stupeň matice  $\mathbf{A}_R$ . Konstantní matici  $\mathbf{D}$  volíme takovou, aby v matici  $\mathbf{B}_{R1}$  byl sloupcový stupeň vždy menší než odpovídající sloupcový stupeň matice  $\mathbf{A}_R$ . Po určení matice  $\mathbf{D}$  druhou hledanou maticí  $\mathbf{B}_{R1}$  snadno vypočteme

$$\mathbf{B}_{R1} = \mathbf{B}_R - \mathbf{D} \mathbf{A}_R.$$

Celý postup ilustrujeme na příkladě.

**Příklad:** Mějme systém popsáný ryzím maticovým zlomkem

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 6s^3 & -2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 + 1 & 3s + 1 \\ 2s^3 & s \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1}.$$

Pro určení matice přímých vazeb a přísně ryzího maticového zlomku dosadíme do rovnice  $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{R1} + \mathbf{D}\mathbf{A}_R$

$$\begin{bmatrix} 6s^3 & -2s \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{R1} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 + 1 & 3s + 1 \\ 2s^3 & s \end{bmatrix},$$

kde jsme neznámé koeficienty v matici  $\mathbf{D}$  označili jako  $\alpha$  a  $\beta$ . Porovnáním koeficientů u sloupcových indexů v maticích  $\mathbf{B}_R$  a  $\mathbf{D}\mathbf{A}_R$  dostaneme soustavu rovnic pro  $\alpha$  a  $\beta$

$$\begin{aligned} 6 &= \alpha + 2\beta \\ -2 &= 3\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Řešení je rovno  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 4$ . Hledané matice přímých vazeb  $\mathbf{D}$  a matice jmenovatele  $\mathbf{B}_{R1}$  přísně ryzího maticového zlomku jsou rovny

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{R1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Převody mezi maticovými zlomky

V tomto odstavci si ukážeme, jak z vyjádření přenosové matice ve tvaru levého maticového zlomku můžeme přejít na vyjádření přenosové matice ve tvaru pravého maticového zlomku a obráceně. Navíc při tomto převodu získáme redukovaný tvar.

Mějme tedy přenosovou matici systému vyjádřenou ve tvaru levého maticového zlomku  $\mathbf{F} = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L$ . Přitom není třeba, aby tento tvar byl redukovaný.

Redukovaný tvar pravého maticového zlomku získáme řešením maticových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_L \mathbf{P} + \mathbf{B}_L \mathbf{Q} &= \mathbf{G} \\ \mathbf{A}_L \mathbf{R} + \mathbf{B}_L \mathbf{S} &= \mathbf{O}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

kde dvojice matic  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  jsou zprava nesoudělné. Předchozí rovnice slouží k určení největšího společného levého dělitele matic  $\mathbf{A}_L$  a  $\mathbf{B}_L$ . Z druhé rovnice předchozí soustavy plyne  $\mathbf{A}_L \mathbf{R} = -\mathbf{B}_L \mathbf{S}$ , a proto přenosovou matici  $\mathbf{F}$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L = -\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}. \tag{4.28}$$

Protože matice  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{S}$  jsou zprava nesoudělné, je vyjádření přenosové matice ve tvaru pravého maticového zlomku  $\mathbf{F} = -\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$  v redukovaném tvaru.

Obdobným způsobem můžeme získat levý maticový zlomek v redukovaném tvaru z pravého maticového zlomku. Mějme tedy přenosovou matici systému vyjádřenou ve tvaru pravého maticového zlomku  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1}$ . Přitom opět není třeba, aby tento tvar byl redukovaný.

Redukovaný tvar levého maticového zlomku získáme řešením maticových rovnic

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_R + \mathbf{Q}\mathbf{B}_R = \mathbf{G} \tag{4.29}$$



$$\mathbf{R}\mathbf{A}_R + \mathbf{S}\mathbf{B}_R = \mathbf{O},$$

kde dvojice matic  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  jsou zleva nesoudělné. Předchozí rovnice slouží k určení největšího společného pravého dělitele matic  $\mathbf{A}_R$  a  $\mathbf{B}_R$ . Z druhé rovnice předchozí soustavy plyne  $\mathbf{R}\mathbf{A}_R = -\mathbf{S}\mathbf{B}_R$ , a proto přenosovou matici  $\mathbf{F}$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_R\mathbf{A}_R^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}. \quad (4.30)$$

Protože matice  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{S}$  jsou zleva nesoudělné, je vyjádření přenosové matice ve tvaru levého maticového zlomku  $\mathbf{F} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}$  v redukovaném tvaru.

#### 4.1.4 Realizace maticových zlomků

V této kapitole odvodíme dosažitelnou realizaci přenosové matice systému vyjádřené ve tvaru pravého maticového zlomku. Potom jednoduchou analogií ukážeme, jak z levého maticového zlomku získáme pozorovatelnou realizaci. Řád realizace bude v obou případech roven řádu jmenovatele maticového zlomku.

##### Dosažitelná realizace

V tomto odstavci ukážeme, jak z pravého maticového zlomku můžeme získat dosažitelnou realizaci, která je mnoharozměrovou obdobou Frobeniova kanonického tvaru pro systémy s jednou vstupní i výstupní veličinou. Omezíme se na přísně ryzí přenosové matice a budeme předpokládat, že matice jmenovatele je sloupcově redukovaná.

Řád realizace bude roven stupni determinantu matice jmenovatele, a proto je-li pravý maticový zlomek v redukovaném tvaru, získáme tímto způsobem přímo minimální realizaci systému.

Mějme tedy přenosovou matici systému vyjádřenou ve tvaru pravého maticového zlomku  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_R(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s)$ . Přitom není třeba, aby tento tvar byl redukovaný, to znamená, že čítec a jmenovatel nemusí být zprava nesoudělní. Pouze jmenovatel  $\mathbf{A}_R$  musí být sloupcově redukovaný. Uvědomme si, že potom řád realizace je roven součtu sloupcových stupňů matice  $\mathbf{A}_R$ .

Vztah mezi vstupem a výstupem systému  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{B}_R(s)\mathbf{A}_R^{-1}(s)\mathbf{U}(s)$  vyjádříme pomocí "částečného stavu"  $\mathbf{V}(s)$  jako

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_R(s)\mathbf{V}(s) &= \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{B}_R(s)\mathbf{V}(s), \end{aligned} \quad (4.31)$$

kde vektor  $\mathbf{V}(s)$  má rozměr  $r$  rovný počtu vstupů. Určíme sloupcové indexy  $k_i$  matice  $\mathbf{A}_R$ . Sloupcový index  $k_i$  je podle první rovnice předchozí soustavy roven nejvyšší derivaci  $i$ -té složky vektoru  $\mathbf{V}$ . Řád systému  $n$  je roven stupni jmenovatele, a protože je jmenovatel sloupcově redukovaný, je řád  $n$  roven součtu sloupcových indexů. Matici  $\mathbf{A}_R$  vyjádříme pomocí matice koeficientů u nejvyšších sloupcových mocnin, pak

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{hc}\mathbf{P} + \mathbf{A}_{lc}\mathbf{Q}, \quad (4.32)$$

kde

$$P = \begin{bmatrix} s^{k_1} & & & & \\ & s^{k_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & s^{k_r} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} s^{k_1-1} & & \dots & & \\ \vdots & & & & \\ s & & & & \\ 1 & & & & \\ & s^{k_2-1} & & & \\ & \vdots & & & \\ & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & s^{k_r-1} & \\ & & & \vdots & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Matice  $A_{hc}$  je matice koeficientů u nejvyšších sloupcových mocnin v matici  $A_R$ . Matice  $A_{lc}$  je matice koeficientů polynomů u nižších než sloupcových mocnin. Nyní zavedeme stavy systému podle vztahu

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1^{(k_1-1)}, & x_2 &= v_1^{(k_1-2)}, & \dots & & x_{k_1} &= v_1 \\ x_{k_1+1} &= v_2^{(k_2-1)} & & \dots & & & x_{k_1+k_2} &= v_2 \\ & \dots & & \dots & & & \dots & \\ & \dots & & \dots & & & x_n &= v_r. \end{aligned}$$

Odtud plynou stavové rovnice uspořádané v  $r$  blocích.

1. blok	2. blok	...	r-tý blok
$\dot{x}_1 = v_1^{(k_1)}$	$\dot{x}_{k_1+1} = v_2^{(k_2)}$		$\dot{x}_{n-k_r+1} = v_r^{(k_r)}$
$\dot{x}_2 = v_1^{(k_1-1)} = x_1$	$\dot{x}_{k_1+2} = x_{k_1+1}$		$\dot{x}_{n-k_r+2} = x_{n-k_r+1}$
...	...	...	...
$\dot{x}_{k_1} = v_1 = x_{k_1}$	$\dot{x}_{k_1+k_2} = v_2 = x_{k_1+k_2-1}$		$\dot{x}_n = v_r = x_{n-1}$

Každý blok, jehož rozměr je  $k_i$ , má jednotky pod hlavní diagonálou. Pouze první řádek bloků není zatím určen, neboť na pravé straně první stavové rovnice je pouze pomocný stav  $v_i^{(k_i)}$ . Stavové rovnice pro první řádky bloků určíme úpravou rovnice  $U = A_R V$ . Po dosazení z (4.32) dostaneme

$$U = (A_{hc}P + A_{lc}Q)V.$$

Odtud

$$PV = -A_{hc}^{-1}A_{lc}QV + A_{hc}^{-1}U. \quad (4.34)$$

Podle (4.33) platí

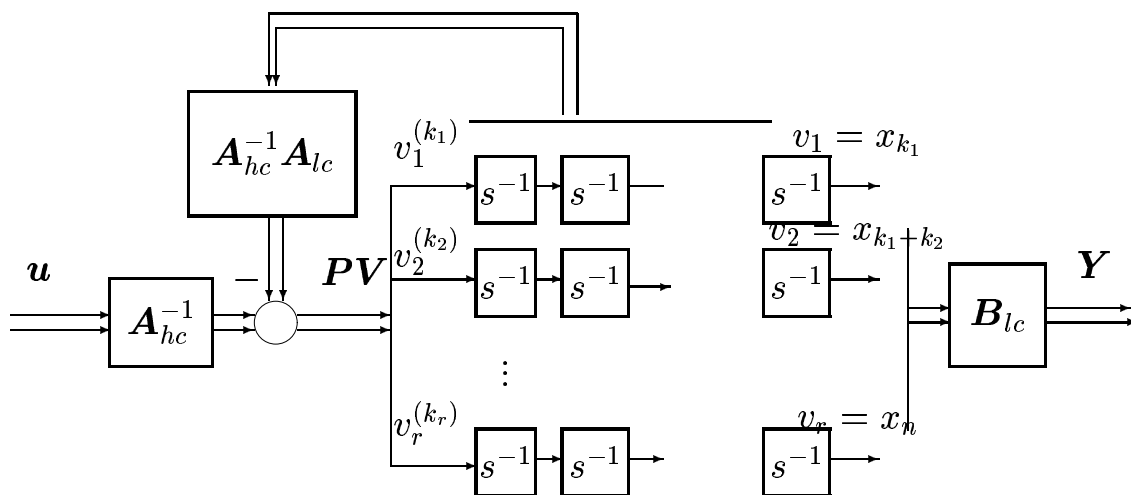
$$PV = \begin{bmatrix} s^{k_1}v_1(s) \\ s^{k_2}v_2(s) \\ \dots \\ s^{k_r}v_r(s) \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} v_1^{(k_1)} \\ v_2^{(k_2)} \\ \dots \\ v_r^{(k_r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{k_1+1} \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}.$$

Proto (4.34) představuje stavové rovnice prvních řádků bloků. Výstupní rovnici  $Y = B_R V$  upravíme dekompozicí polynomiální matice  $B_R$  podle vztahu

$$B_R = B_{lc} Q,$$

kde konstantní matice  $B_{lc}$  je matice koeficientů polynomů v matici  $B_R$  a matice  $Q$  je dle (4.33). Tato dekompozice je vždy možná, neboť dle předpokladu je systém přísně ryzí.

Ideové blokové schéma realizace je uvedeno na obr. 4.1. Každý blok je tvořen kaskádou  $k_i$  integrátorů. Jak jsou kaskády integrátorů vázány na vstupní, výstupní a zpětnovazební signály je pouze schematicky naznačeno. Uvedený postup ilustrujeme na příkladě.



Obrázek 4.1: Ideové blokové schéma dosažitelné realizace

Mějme ryzí systém popsáný maticovým zlomkem

$$F(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) \\ (s+2)^2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = B_R A_R^{-1}.$$

Sloupcové stupně jmenovatele jsou  $k_1 = 2$  a  $k_2 = 3$ . Stupeň jmenovatele rovný řádu systému je  $n = k_1 + k_2 = 5$ . Matice koeficientů u nejvyšších mocnin jmenovatele je rovna

$$A_{hc} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{hc}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Provedeme rozklad matice jmenovatele

$$A_R = A_{hc} P + A_{lc} Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & s^2 \\ 0 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Také provedeme rozklad matice čitatele  $\mathbf{B}_R$

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{lc}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & s^2 \\ 0 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vypočteme ještě matici koeficientů zpětné vazby

$$\mathbf{A}_{hc}^{-1}\mathbf{A}_{lc} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stavové rovnice systému mají matice  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$  a  $\mathbf{C}_c$  rovny

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -2 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednotlivé bloky v matici  $\mathbf{A}_c$  jsou rozměru  $2 \times 2$  a  $3 \times 3$  a v prvních řádcích bloků jsou záporně vzaté řádky matice  $\mathbf{A}_{hc}^{-1}\mathbf{A}_{lc}$ . Matice  $\mathbf{B}_c$  má v řádcích odpovídajících prvním řádkům bloků odpovídající řádek matice  $\mathbf{A}_{hc}^{-1}$ . Výstupní matice  $\mathbf{C}_c$  je rovna matici  $\mathbf{B}_{lc}$ .

### Pozorovatelná realizace

Pozorovatelnou realizaci systému získáme z přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  vyjádřené ve tvaru levého maticového zlomku.

Omezíme se na přísně ryzí přenosové matice a budeme předpokládat, že matice jmenovatele je **řádkově redukováná**. Připomeňme, že matice jmenovatele  $\mathbf{A}_L$  je řádkově redukováná, když matice  $\mathbf{A}_{hr}$  (sestavená z koeficientů u nejvyšších řádkových mocnin matice  $\mathbf{A}_L$ ) je regulární.

Hledáme tedy pozorovatelnou realizaci  $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$  systému popsaného levým maticovým zlomkem  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L$ . Pozorovatelnou realizaci dostaneme úpravou dosažitelné realizace z předchozího odstavce. Pro pozorovatelnou realizaci  $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$  zřejmě platí

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{B}_o. \quad (4.35)$$

Provedeme transpozici přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  a dostaneme

$$\mathbf{F}^T(s) = \mathbf{B}_L^T(\mathbf{A}_L^T)^{-1} = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c,$$

kde  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  je dosažitelná realizace pravého maticového zlomku  $\mathbf{B}_L^T(\mathbf{A}_L^T)^{-1}$ . Realizaci původní přenosové matice  $\mathbf{F}(s)$  získáme další transpozicí. Potom platí

$$\mathbf{F}(s) = \left(\mathbf{B}_L^T(\mathbf{A}_L^T)^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c\right)^T = \mathbf{B}_c^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^T)^{-1}\mathbf{C}_c^T.$$

Porovnáme-li předchozí výraz s (4.35), dostaneme pro pozorovatelnou realizaci

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T, \quad \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_c^T, \quad \mathbf{C}_o = \mathbf{B}_c^T. \quad (4.36)$$

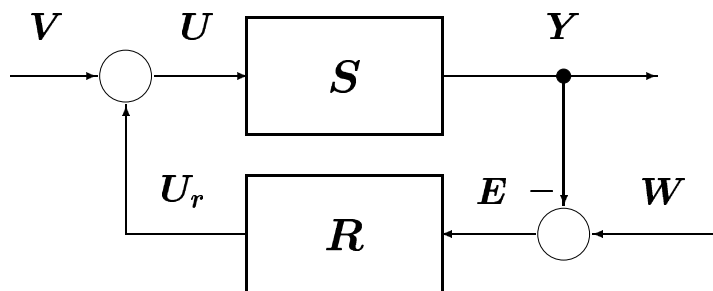
Pozorovatelnou realizaci z levého maticového zlomku  $\mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}_L$  dostaneme tedy následujícím postupem:

1. Levý maticový zlomek transponujeme a získáme pravý maticový zlomek  $\mathbf{F}^T(s) = \mathbf{B}_L^T(\mathbf{A}_L^T)^{-1}$ .
2. Z matic  $\mathbf{A}_L^T$  a  $\mathbf{B}_L^T$  nalezneme dosažitelnou realizaci. Ta vždy existuje, protože původní jmenovatel byl řádkově redukováný, a proto jeho transpozice je sloupcově redukováná.
3. Pozorovatelnou realizaci dostaneme z dosažitelné realizace podle (4.36). Že je tato realizace pozorovatelná se snadno přesvědčíme sestavením matice pozorovatelnosti.

## 4.2 Řízení mnoharozměrových systémů

### 4.2.1 Zpětnovazební řízení

V tomto odstavci použijeme vybudovaný aparát maticových zlomků na analýzu zpětnovazebního regulačního obvodu.



Obrázek 4.2: Zpětnovazební řízení

Uvažujme tedy mnoharozměrový zpětnovazební regulační obvod tvořený systémem  $S$  a regulátorem  $R$  dle obr. 4.2. Přenosová matice systému  $S$  je vyjádřena ve tvaru pravého či levého maticového zlomku

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{A}_L^{-1} \mathbf{B}_L$$

ve redukováném tvaru. Přenosová matice regulátoru  $R$  je také vyjádřena ve tvaru pravého či levého maticového zlomku

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} = \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{Q}_L$$

ve redukováném tvaru. Vstupní veličiny do regulačního obvodu jsou řízení  $W$  a porucha  $V$ . Jako výstupní veličiny uvažujeme regulační odchylku  $E$  a akční veličinu  $U$ . Přenosová

matice  $\mathbf{F}_{wv/eu}$  zpětnovazebního obvodu dle obr. 4.2 je definována

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{wv/eu} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

a je zřejmě rovna

$$\mathbf{F}_{wv/eu} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1} & -\mathbf{S}(\mathbf{I} + \mathbf{RS})^{-1} \\ \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1} & (\mathbf{I} + \mathbf{RS})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Přenosová matice  $\mathbf{F}_{wv/eu}$  může být vyjádřena také ve tvaru

$$\mathbf{F}_{wv/eu} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{R} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.39)$$

O rovnosti předchozích dvou vyjádření přenosové matice  $\mathbf{F}_{wv/eu}$  se snadno můžeme přesvědčit. Porovnáme oba výrazy

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1} & -\mathbf{S}(\mathbf{I} + \mathbf{RS})^{-1} \\ \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{SR})^{-1} & (\mathbf{I} + \mathbf{RS})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{R} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Násobením obou stran zleva či zprava maticí  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{R} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$  dostaneme na obou stranách jednotkovou matici.

Dosadíme-li za přenosové matice systému  $\mathbf{S}$  a regulátoru  $\mathbf{R}$  jejich vyjádření ve tvaru maticového zlomku, dostaneme přenosovou matici zpětnovazebního obvodu ve tvaru

$$\mathbf{F}_{wv/eu} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{B}_R \\ -\mathbf{Q}_R & \mathbf{A}_R \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ -\mathbf{Q}_L & \mathbf{P}_L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_L \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Přenosová matice  $\mathbf{F}_{wv/eu}$  je opět vyjádřena ve tvaru pravého či levého maticového zlomku. Platnost předchozích rozkladů dokážeme tím, že budeme dvakrát invertovat výsledný maticový zlomek. Provedeme to pouze pro pravý maticový zlomek. Dvojí inverzí dostaneme původní přenosovou matici. Pak tedy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{wv/eu} &= \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{B}_R \\ -\mathbf{Q}_R & \mathbf{A}_R \end{bmatrix}^{-1} \right]^{(-1)(-1)} = \\ &= \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{B}_R \\ -\mathbf{Q}_R & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_R^{-1} \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} \\ -\mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Je-li systém  $\mathbf{S}$  a regulátor  $\mathbf{R}$  v minimální realizaci, pak zpětnovazební systém je minimální realizace přenosu  $\mathbf{F}_{wv/eu}$ .

Charakteristický polynom  $\Delta$  zpětnovazebního regulačního obvodu je úměrný determinantu jmenovatele maticového zlomku, čili

$$\Delta \sim \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{B}_R \\ -\mathbf{Q}_R & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \sim \det \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_L \\ -\mathbf{Q}_L & \mathbf{P}_L \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

kde symbol  $\sim$  značí, že polynomy jsou pouze úměrné (totožné až na konstantu úměrnosti).

Také se říká, že polynomy jsou **asociované**.

Abychom dostali jednodušší vztah pro charakteristický polynom zpětnovazebního obvodu, použijeme vztah pro determinant složené matice. Je-li

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

pak pro determinant složené matice  $M$  platí

$$\begin{aligned} \det M &= \det M_1 \det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2), & \text{je-li } \det M_1 &\neq 0, \\ \det M &= \det M_4 \det(M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3), & \text{je-li } \det M_4 &\neq 0. \end{aligned}$$

Použitím předchozích vztahů dostaneme pro charakteristický polynom zpětnovazebního obvodu po následující sérii úprav

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} P_R & B_R \\ -Q_R & A_R \end{bmatrix} &= \det P_R \det(A_R + Q_R P_R^{-1} B_R) = \\ &= \det P_R \det(A_R + P_L^{-1} Q_L B_R) = \\ &= \det P_R \det P_L^{-1} \det(P_L A_R + Q_L B_R) \\ &\sim \det(P_L A_R + Q_L B_R), \end{aligned}$$

neboť  $\det P_R \det P_L^{-1}$  je pouze konstanta (a ne polynom). Podobný vztah bychom dostali úpravou jmenovatele levého maticového zlomku. Označíme

$$\begin{aligned} F_1 &= P_L A_R + Q_L B_R, \\ F_2 &= A_L P_R + B_L Q_R, \end{aligned} \tag{4.42}$$

potom charakteristický polynom je úměrný determinantu matic  $F_1$  a  $F_2$

$$\Delta \sim \det F_1 \sim \det F_2. \tag{4.43}$$

Také nejednotkové invariantní polynomy polynomiální matice  $F_1$  jsou asociované s nejednotkovými invariantními polynomy polynomiální matice  $F_2$  a konečně tyto invariantní polynomy jsou asociované s nejednotkovými invariantními polynomy zpětnovazebního systému. Důkaz viz (Kučera, 1979).

## 4.2.2 Modální řízení

Nyní budeme řešit problém návrhu takového diskrétního regulátoru  $R$ , aby zpětnovazební regulační obvod tvořený systémem  $S$  a regulátorem  $R$  měl přiřazený zvolené módy. Protože se jedná o mnohazměrový systém, módy systému nejsou určeny pouze póly systému, ale jeho invariantními polynomy. Protože se jedná o diskrétní systém, budou všechny prvky polynomiálních matic polynomy v  $d$ .

Mějme tedy daný mnohazměrový systém  $S$  popsany přenosovou maticí ve tvaru pravého či levého maticového zlomku  $S = B_R A_R^{-1} = A_L^{-1} B_L$  a  $q$  polynomů  $l_1, l_2, \dots, l_q$ , které splňují podmínku, že polynom  $l_i$  dělí polynom  $l_{i+1}$ , pro  $i = 1, \dots, q-1$ . Problém je nalézt regulátor  $R$ , jehož přenosová matice je vyjádřena ve tvaru pravého či levého maticového zlomku  $R = Q_R P_R^{-1} = P_L^{-1} Q_L$  takový, aby zpětnovazební regulační obvod měl invariantní polynomy  $l_1, l_2, \dots, l_q$ .

Problém přiřazení invariantních polynomů má řešení pouze tehdy, když  $q \leq \min(m, r)$ , to znamená, že počet invariantních polynomů musí být menší nebo roven počtu vstupů i výstupů systému.

Regulátor  $R$ , pokud existuje, je určen řešením lineární polynomiální rovnice

$$\mathbf{A}_L \mathbf{P}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R = \mathbf{C}_m, \quad (4.44)$$

kde  $\mathbf{C}_m$  rozměru  $(m, m)$  je libovolná polynomiální matice, jejíž nejednotkové invariantní polynomy jsou asociované (to je stejné až na multiplikační konstantu) s polynomy  $l_1, l_2, \dots, l_q$ .

Podobně regulátor  $R$ , pokud existuje, je určen řešením lineární polynomiální rovnice

$$\mathbf{P}_L \mathbf{A}_R + \mathbf{Q}_L \mathbf{B}_R = \mathbf{C}_r, \quad (4.45)$$

kde  $\mathbf{C}_r$  rozměru  $(r, r)$  je libovolná polynomiální matice, jejíž nejednotkové invariantní polynomy jsou asociované s polynomy  $l_1, l_2, \dots, l_q$ .

Uvědomme si, že pokud vyjadřujeme všechny polynomiální matice v proměnné  $d$ , neuvažujeme vůbec invariantní polynomy s kořenem  $\lambda = 0$ . Měli bychom tedy správně mluvit pouze o "pseudoinvariantních polynomech". Proto uvedený postup nelze použít pro spojitý systémy.

### 4.2.3 Stabilizující regulátory

Uvažujme nyní velmi důležitý problém syntézy stabilizujících regulátorů v mnohazměrovém diskrétním zpětnovazebním regulačním obvodu. Pro daný diskrétní systém  $S$  vyjádřený ve tvaru pravého či levého maticového zlomku budeme hledat množinu všech regulátorů  $R$ , které zajistí stabilitu zpětnovazebního regulačního obvodu.

Tento problém má řešení pouze tehdy, když systém  $S$  nemá skryté nestabilní módy. Potom stabilizující regulátor je realizace, která nemá skrytou nestabilitu, přenosové matice

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} = (\mathbf{Y}_R - \mathbf{A}_R \mathbf{H}) (\mathbf{X}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{H})^{-1}, \quad (4.46)$$

kde polynomiální matice  $\mathbf{X}_R, \mathbf{Y}_R$  splňují maticovou polynomiální rovnici

$$\mathbf{A}_L \mathbf{X}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_R = \mathbf{I} \quad (4.47)$$

a kde  $\mathbf{H}$  je libovolná stabilní racionální matice kompatibilních rozměrů.

Podobně pro stabilizující regulátor  $R$ , který je realizací, která nemá skrytou nestabilitu, jejíž přenosová matice je vyjádřena ve tvaru levého maticového zlomku

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{Q}_L = (\mathbf{X}_L + \mathbf{H} \mathbf{B}_L)^{-1} (\mathbf{Y}_L - \mathbf{H} \mathbf{A}_L), \quad (4.48)$$

kde polynomiální matice  $\mathbf{X}_L, \mathbf{Y}_L$  splňují maticovou polynomiální rovnici

$$\mathbf{X}_L \mathbf{A}_R + \mathbf{Y}_L \mathbf{B}_R = \mathbf{I} \quad (4.49)$$

a kde  $\mathbf{H}$  je libovolná stabilní racionální matice kompatibilních rozměrů.

O tom, že je stabilní zpětnovazební regulační obvod, tvořený systémem  $S$ , jehož přenosová matice je vyjádřena ve tvaru pravého či levého maticového zlomku a regulátorem  $R$  dle (4.46) nebo (4.48), se snadno přesvědčíme dosazením přenosových matic řízeného systému



i regulátoru do (4.42).

Nejprve upravíme výraz pro přenosovou matici regulátoru  $R$  podle (4.46). Protože  $\mathbf{H}$  je dle předpokladu libovolná stabilní racionální matice, vyjádříme ji ve tvaru pravého maticového zlomku

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}, \quad (4.50)$$

kde polynomiální matice  $\mathbf{N}$  je dle předpokladu stabilní polynomiální matice. Přenosová matice regulátoru dle (4.46) je potom rovna

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} = (\mathbf{Y}_R - \mathbf{A}_R \mathbf{M} \mathbf{N}^{-1}) (\mathbf{X}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{M} \mathbf{N}^{-1})^{-1}.$$

Provedeme sérii úprav předchozího výrazu pro přenosovou matici stabilizujícího regulátoru

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (\mathbf{Y}_R - \mathbf{A}_R \mathbf{M} \mathbf{N}^{-1}) ((\mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_R \mathbf{M}) \mathbf{N}^{-1})^{-1} \\ &= (\mathbf{Y}_R \mathbf{N} - \mathbf{A}_R \mathbf{M}) \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_R \mathbf{M})^{-1} \\ &= (\mathbf{Y}_R \mathbf{N} - \mathbf{A}_R \mathbf{M}) (\mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_R \mathbf{M})^{-1}. \end{aligned}$$

Podle předchozích úprav můžeme libovolný stabilizující regulátor vyjádřit ve tvaru maticového zlomku  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1}$ , kde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R &= \mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_R \mathbf{M}, \\ \mathbf{Q}_R &= \mathbf{Y}_R \mathbf{N} - \mathbf{A}_R \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$\mathbf{N}$  je libovolná stabilní polynomiální matice a  $\mathbf{M}$  je libovolná polynomiální matice.

Nyní dosadíme do (4.42) a vypočteme matici  $\mathbf{F}_2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \mathbf{A}_L \mathbf{P}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R \\ &= \mathbf{A}_L (\mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_R \mathbf{M}) + \mathbf{B}_L (\mathbf{Y}_R \mathbf{N} - \mathbf{A}_R \mathbf{M}) \\ &= (\mathbf{A}_L \mathbf{X}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_R) \mathbf{N} + (\mathbf{A}_L \mathbf{B}_R - \mathbf{B}_L \mathbf{A}_R) \mathbf{M} \\ &= \mathbf{I} \mathbf{N} + \mathbf{O} \mathbf{M} \\ &= \mathbf{N}. \end{aligned}$$

V předchozích úpravách jsme využili vztah (4.47) a rovnost  $\mathbf{A}_L \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_L \mathbf{A}_R$ , která plyne z toho, že přenosová matice systému je vyjádřena pravým či levým maticovým zlomkem  $\mathbf{B}_R \mathbf{A}_R^{-1} = \mathbf{A}_L^{-1} \mathbf{B}_L$ . Protože matice  $\mathbf{N}$  je dle předpokladu stabilní polynomiální matice, je stabilní charakteristický polynom  $\Delta = \det \mathbf{F}_2 = \det \mathbf{N}$  celého zpětnovazebního regulačního obvodu.

Zbývá ukázat, že každý stabilizující regulátor lze vyjádřit podle (4.46) nebo (4.48). Pokud regulátor  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} = \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{Q}_L$  stabilizuje zpětnovazební regulační obvod, pak podle (4.42) je matice  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_L \mathbf{P}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R$  stabilní matice. Řekněme, že je rovna nějaké stabilní polynomiální matici  $\mathbf{N}$ . Pak tedy platí

$$\mathbf{A}_L \mathbf{P}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Q}_R = \mathbf{N}. \quad (4.52)$$

Vynásobíme-li rovnici (4.47) zprava maticí  $\mathbf{N}$ , dostaneme rovnici  $\mathbf{A}_L \mathbf{X}_R \mathbf{N} + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_R \mathbf{N} = \mathbf{N}$ , a proto jedno řešení předchozí rovnice (4.52) je  $\mathbf{P}_R = \mathbf{X}_R \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}_R = \mathbf{Y}_R \mathbf{N}$ , kde  $\mathbf{X}_R$  a  $\mathbf{Y}_R$  jsou řešení maticové rovnice (4.47). Obecné řešení maticové rovnice (4.52) je podle (4.51), kde  $\mathbf{M}$

je libovolná polynomiální matice. Tím jsme prokázali, že libovolný stabilizující regulátor je podle (4.46) a (4.47). Pro stabilizující regulátor vyjádřený jako levý maticový zlomek platí obdobný postup.

#### 4.2.4 Stabilní nesoudělná faktorizace přenosové matice systému

V předchozí části jsme vyjadřovali přenosové matice mnohazměrových spojitých či diskrétních systémů ve tvaru maticových zlomků, kde "čitatel" i "jmenovatel" maticového zlomku byla polynomiální matice. Tento přístup je vhodný k analýze spojitých i diskrétních systémů.

Při syntéze řízení je tento přístup vhodný pouze pro diskrétní systémy, kde polynomiální matice jsou vyjádřeny v operátoru zpoždění  $d$ . Pro spojitě systémy tento přístup vhodný není, neboť se obtížně zajišťuje ryzost regulátoru.

V (Vidyasagar, 1985) je přenosová matice systému (spojitého nebo diskrétního) vyjádřena jako maticový zlomek, kde jednotlivé faktory jsou stabilní kauzální či ryzí racionální matice. Množina stabilních kauzálních či ryzích racionálních matic tvoří nekomutativní okruh. Tento přístup je přímou analogií obecného přístupu k přenosům systémů s jedním vstupem a výstupem, které jsme vyjadřovali jako prvek podílového tělesa okruhu stabilních přenosů.

Dělitel jednotky v okruhu stabilních kauzálních či ryzích racionálních matic je taková racionální matice, která je sama spolu se svou inverzí prvkem tohoto okruhu. Takovou racionální matici budeme nazývat unimodální maticí a značit  $U$ .

Pro dvě racionální matice  $A$  a  $B$ , které jsou prvky okruhu stabilních kauzálních či ryzích racionálních matic, je obdobným způsobem definován největší společný pravý či levý dělitel. Nechť racionální matice  $G$  je největší společný pravý dělitel racionálních matic  $A$  a  $B$ , pak platí

$$XA + YB = G, \quad (4.53)$$

kde  $A$ ,  $B$  a  $G$  a nějaké  $X$  a  $Y$  jsou prvky okruhu stabilních kauzálních či ryzích racionálních matic.

Stabilní racionální matice  $A$  a  $B$  jsou v příslušném okruhu zprava nesoudělné, platí-li

$$XA + YB = I \quad (4.54)$$

pro nějaké  $X$  a  $Y$  z příslušného okruhu. Předchozí rovnice je takzvaná pravá Bezoutova identita.

Pro nesoudělné matice platí následující zajímavé tvrzení: Jsou-li racionální matice  $A$  a  $B$  zprava nesoudělné v příslušném okruhu, vytvoříme složenou matici  $F = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ . Potom existuje racionální matice  $C$  taková, že složená matice  $\begin{bmatrix} F & C \end{bmatrix}$  je jednotka v okruhu stabilních kauzálních či ryzích racionálních matic.

Libovolnou přenosovou matici systému  $F$  můžeme vyjádřit ve faktorizovaném tvaru

$$F = B_R A_R^{-1} = A_L^{-1} B_L, \quad (4.55)$$

kde  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $A_L$  a  $B_L$  jsou stabilní přenosové matice,  $A_R$  a  $A_L$  jsou čtvercové a  $\det A_R \neq 0$ ,  $\det A_L \neq 0$  a dvojice  $B_R$  a  $A_R$  jsou zprava nesoudělné v okruhu stabilních racionálních

matic a dvojice  $\mathbf{A}_L$  a  $\mathbf{B}_L$  jsou zleva nesoudělné. Tomuto způsobu vyjádření přenosové matice systému říkáme **stabilní faktorizace racionální matice**.

Vyjádření přenosové matice systému ve faktorizovaném tvaru není jediné. Pro libovolnou unimodální matici  $\mathbf{U}$  v příslušném okruhu platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_R \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_R^{-1} = (\mathbf{B}_R \mathbf{U})(\mathbf{A}_R \mathbf{U})^{-1} = \bar{\mathbf{B}}_R \bar{\mathbf{A}}_R^{-1}, \quad (4.56)$$

kde  $\mathbf{B}_R$ ,  $\mathbf{A}_R$  i  $\bar{\mathbf{B}}_R$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_R$  jsou stabilní faktory přenosové matice systému.

Platí-li pro pravou a levou nesoudělnou faktorizaci (4.55), pak podle Bezoutovy identity existují stabilní racionální matice  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$ , že platí

$$\mathbf{X} \mathbf{B}_R + \mathbf{Y} \mathbf{A}_R = \mathbf{I}. \quad (4.57)$$

Potom existují také stabilní racionální matice  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{W}$ , že platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{X} \\ -\mathbf{B}_L & \mathbf{A}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_R & -\mathbf{V} \\ \mathbf{B}_R & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \quad (4.58)$$

Předchozí vztahy definují takzvanou **dvojitě nesoudělnou faktorizaci přenosové matice  $\mathbf{F}$** .

Nesoudělnou faktorizaci přenosové matice systému určíme pomocí stavových rovnic systému podle následujícího postupu:

Uvažujme nejprve přísně ryzi spojitý systém popsany stavovými rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Jeho přenosová matice je zřejmě  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ . Předpokládáme, že systém je stabilizovatelný a detekovatelný. Potom existují takové konstantní matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{H}$ , že

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{H} \mathbf{C} \quad (4.60)$$

jsou stabilní matice. Připomeňme, že matice  $\mathbf{K}$  je matice stavové zpětné vazby ve stavovém regulátoru a matice  $\mathbf{H}$  je matice stavové injekce v pozorovateli stavu systému. Potom stabilní racionální matice  $\mathbf{A}_R$ ,  $\mathbf{B}_R$ ,  $\mathbf{A}_L$ ,  $\mathbf{B}_L$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{W}$  splňující (4.55) a (4.58) jsou určeny následujícími vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{A}_L &= \mathbf{I} - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H} \\ \mathbf{B}_R &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{A}_R &= \mathbf{I} - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{H} \\ \mathbf{W} &= \mathbf{I} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Důkaz předchozího tvrzení je jednoduchý. Pro přenosovou matici  $\mathbf{F}$  platí následující série

úprav

$$\begin{aligned}
F &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= C(sI - (A_0 + BK))^{-1}B \\
&= C((sI - A_0) + BK)^{-1}B \\
&= C \left[ (I - BK(sI - A_0)^{-1})(sI - A_0) \right]^{-1} B \\
&= C(sI - A_0)^{-1} \left[ I - BK(sI - A_0)^{-1} \right]^{-1} B \\
&= C(sI - A_0)^{-1} B \left[ I - K(sI - A_0)^{-1} B \right]^{-1} \\
&= B_R A_R^{-1}.
\end{aligned}$$

Pro levý maticový zlomek platí podobně

$$F = C(sI - A)^{-1}B = A_L^{-1}B_L.$$

Jednoduchými úpravami dokážeme také, že podle (4.58) platí

$$\begin{aligned}
B_L V + A_L W &= I \\
Y A_R + X B_R &= O \\
-Y V + X W &= O.
\end{aligned}$$

Pokud je systém pouze ryzí, to znamená, že existuje přímá vazba mezi jeho vstupem a výstupem. Potom jeho přenosová matice je rovna

$$F = C(sI - A)^{-1}B + D = A_L^{-1}B_L + D = B_R A_R^{-1} + D, \quad (4.62)$$

kde  $A_L^{-1}B_L$  i  $B_R A_R^{-1}$  popisují striktně ryzí část přenosu a  $D$  je konstantní matice přímé vazby mezi vstupem a výstupem systému. Ryzí přenosovou matici můžeme tedy vyjádřit

$$\begin{aligned}
F &= A_L^{-1}B_L + D = A_L^{-1}(B_L + A_L D) = \bar{A}_L^{-1} \bar{B}_L, \\
F &= B_R A_R^{-1} + D = (B_R + D A_R) A_R^{-1} = \bar{B}_R \bar{A}_R^{-1}.
\end{aligned} \quad (4.63)$$

Stabilní faktory  $\bar{A}_L$ ,  $\bar{B}_L$ ,  $\bar{A}_R$  a  $\bar{B}_R$  ryzí přenosové matice souvisejí se stabilními faktory  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $A_R$  a  $B_R$  její striktně ryzí části a maticí přímé vazby mezi vstupem a výstupem  $D$  podle následujících vztahů plynoucích z (4.63)

$$\begin{aligned}
\bar{A}_R &= A_R, & \bar{B}_R &= B_R - D A_R \\
\bar{A}_L &= A_L, & \bar{B}_L &= B_L - A_L D.
\end{aligned} \quad (4.64)$$

Matice  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{V}$  a  $\bar{W}$  jsou podle (4.58) definovány

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} & \bar{X} \\ -\bar{B}_L & \bar{A}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_R & -\bar{V} \\ \bar{B}_R & \bar{W} \end{bmatrix} = I \quad (4.65)$$

a platí pro ně

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= X, & \bar{Y} &= Y - X D \\
\bar{V} &= V, & \bar{W} &= W - D V.
\end{aligned} \quad (4.66)$$

Pro přísně ryzí systém popsaný stavovými rovnicemi (4.59) dvojité nesoudělnou faktorizaci

jeho přenosové matice získáme podle (4.61), a pokud je systém pouze ryzí, má tedy přímou vazbu mezi vstupem a výstupem, pak dvojitě nesoudělná faktorizace jeho přenosové matice je určena podle (4.64) a (4.66).

#### 4.2.5 Stabilizace

V tomto odstavci se opět budeme zabývat mnohazměrovým regulačním obvodem podle obr. 4.2. Daný řízený systém  $S$  a navrhovaný regulátor  $R$  jsou popsány jejich přenosovými maticemi, které jsou vyjádřeny ve faktorizovaném tvaru

$$\begin{aligned} S &= B_R A_R^{-1} = A_L^{-1} B_L, \\ R &= Q_R P_R^{-1} = P_L^{-1} Q_L, \end{aligned} \quad (4.67)$$

kde  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $A_L$ ,  $B_L$  i  $P_R$ ,  $Q_R$ ,  $P_L$ ,  $Q_L$  jsou nyní stabilní ryzí nebo kauzální racionální matice.

Protože přenosové matice systému i regulátoru jsou vyjádřeny pomocí stabilních faktorů, platí pro zpětnovazební regulační obvod podle obr. 4.2 ekvivalence následujících tvrzení:

- Zpětnovazební regulační obvod je stabilní.
- Racionální matice

$$P_L A_R + Q_L B_R \quad (4.68)$$

je unimodální matice v okruhu stabilních kauzálních či ryzích racionálních funkcí.

- Racionální matice

$$A_L P_R + B_L Q_R \quad (4.69)$$

je unimodální matice v příslušném okruhu.

Důkaz předchozího tvrzení viz (Vidyasagar, 1985).

Mějme tedy zpětnovazební regulační obvod podle obr. 4.2. Libovolný regulátor  $R$ , který zajistí stabilitu zpětnovazebního regulačního obvodu, má stabilní faktory  $P_R$ ,  $Q_R$ ,  $P_L$  a  $Q_L$  takové, že platí

$$A_L P_R + B_L Q_R = I, \quad (4.70)$$

respektive

$$P_L A_R + Q_L B_R = I. \quad (4.71)$$

Toto silné tvrzení plyne z předchozí věty, neboť jednotková matice  $I$  je jistě unimodální matice. Protože regulační obvod je stabilní, pak podle (4.68) je racionální matice  $F_2 = A_L \bar{P}_R + B_L \bar{Q}_R$  unimodální maticí pro stabilní faktory  $\bar{P}_R$  a  $\bar{Q}_R$  regulátoru  $R$ . Proto podle (4.56) můžeme zvolit faktory regulátoru  $P_R = \bar{P}_R F_2^{-1}$  a  $Q_R = \bar{Q}_R F_2^{-1}$ . Potom platí

$$A_L P_R + B_L Q_R = A_L \bar{P}_R F_2^{-1} + B_L \bar{Q}_R F_2^{-1} = I.$$

Odtud plyne důležité tvrzení o parametrizaci všech stabilizujících regulátorů.

Všechny regulátory, které zajistí stabilitu zpětnovazebního mnohazměrového regulačního obvodu podle obr. 4.2, jsou vyjádřeny ve tvaru

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_R \mathbf{P}_R^{-1} = (\mathbf{Y}_R - \mathbf{A}_R \mathbf{H}) (\mathbf{X}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{H})^{-1}, \quad (4.72)$$

$\det(\mathbf{X}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{H}) \neq \mathbf{O}$ , nebo

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_L^{-1} \mathbf{Q}_L = (\mathbf{X}_L + \mathbf{H} \mathbf{B}_L)^{-1} (\mathbf{Y}_L - \mathbf{H} \mathbf{A}_L), \quad (4.73)$$

$\det(\mathbf{X}_L + \mathbf{H} \mathbf{B}_L) \neq \mathbf{O}$ , kde stabilní racionální matice  $\mathbf{X}_R$ ,  $\mathbf{Y}_R$  splňují rovnici

$$\mathbf{A}_L \mathbf{X}_R + \mathbf{B}_L \mathbf{Y}_R = \mathbf{I} \quad (4.74)$$

a stabilní racionální matice  $\mathbf{X}_L$ ,  $\mathbf{Y}_L$  splňují rovnici

$$\mathbf{X}_L \mathbf{A}_R + \mathbf{Y}_L \mathbf{B}_R = \mathbf{I} \quad (4.75)$$

a kde  $\mathbf{H}$  je libovolná stabilní racionální matice kompatibilních rozměrů.

Předchozí parametrizace přímo plyne z (4.70) a (4.71), neboť faktory regulátoru podle (4.72) a (4.73) jsou obecné řešení rovnic (4.70) a (4.71).

Tím jsme obdrželi nejobecnější vztahy pro regulátor stabilizující lineární mnohazměrový regulační obvod. Platí pro spojitý i diskrétní regulační obvod. Všimněme si formální shody (4.72) až (4.75), kde všechny matice jsou prvky okruhu stabilních racionálních matic s (4.46) až (4.49), kde všechny matice jsou pouze polynomiální matice. Proto parametrizace regulátoru podle (4.46) až (4.49) platí pouze pro diskrétní systémy.

Jediná nevýhoda tohoto elegantního přístupu je to, že (4.74) a (4.75) jsou rovnice v okruhu stabilních racionálních matic. Takové rovnice přímo řešit neumíme a obvykle je převádíme opět na polynomiální maticové rovnice.



## Část III

# Stochastické systémy a jejich řízení





## Kapitola 5

# Analýza stochastických systémů

V této části skriptu se budeme zabývat řízením systémů, jejichž stavové a výstupní veličiny jsou náhodné (stochastické) procesy. Takové systémy budeme nazývat **stochastické systémy**. Ukážeme, že je lze modelovat jako systémy, na které kromě deterministických vstupů působí i další náhodné veličiny.

### 5.1 Lineární stochastický systém

V předchozích částech skriptu jsme uvažovali deterministický stavový model lineárního diskrétního systému

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Pro deterministický systém je charakteristické, že na základě znalosti stavu systému a jeho vstupu můžeme přesně určit jeho příští stav a výstup.

Tento způsob popisu je v mnoha případech k popisu vlastností reálných objektů nedostatečný - určitá složka jejich výstupu totiž nemusí být přesně predikovatelná a je proto nutné popisovat tyto signály jako náhodné procesy. Díváme-li se na model dynamického systému jako na **generátor dat**, pak tuto stochastickou složku stavu a výstupu systému můžeme přirozeným způsobem popsat zavedením dalších náhodných vstupů systému. Dostaneme tak **lineární stochastický systém** popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

kde  $\mathbf{u}(t)$  je deterministický vstup modelu a  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{e}(t)$  jsou stacionární náhodné posloupnosti nazývané **šum procesu** a **šum měření**. Abychom mohli jednoduše popsat vlastnosti takto vzniklých signálů (stavu a výstupu), budeme předpokládat, že tyto posloupnosti tvoří stejně rozdělené náhodné veličiny, které jsou nezávislé na současných a minulých hodnotách stavu a vstupu, mají nulovou střední hodnotou

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0}\tag{5.2}$$

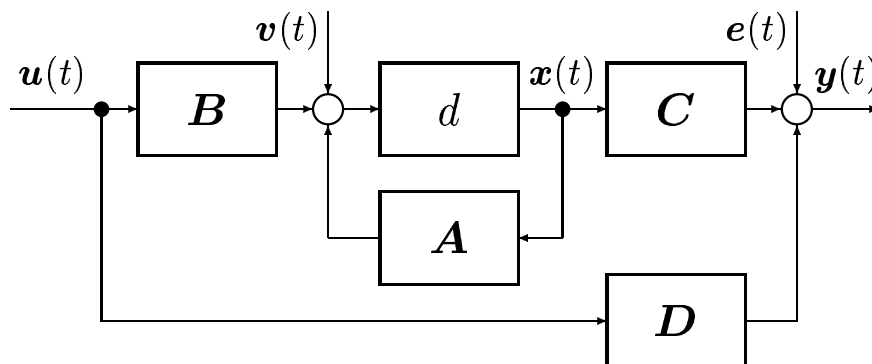
a kovarianční funkci

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2), \quad (5.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \delta(t_1 - t_2) &= 1 && \text{pro } t_1 = t_2 \\ &= 0 && \text{pro } t_1 \neq t_2. \end{aligned}$$

Náhodný proces (posloupnost) s těmito vlastnostmi nazýváme **bílý šum**. Model (5.1) poskytuje dostatečně obecný popis jak deterministické, tak stochastické složky výstupu. Ukážeme totiž, že stochastické signály se složitějšími vlastnostmi můžeme generovat průchodem bílého šumu vhodným dynamickým systémem.



Obrázek 5.1: Lineární stochastický systém

Položme si nyní otázku, jak se vyvíjí stav a výstup stochastického systému (5.1) v čase. Přitom se omezíme na popis vývoje stavu a výstupu pomocí jejich střední hodnoty a (sdružené) kovarianční funkce, tj. prvními dvěma momenty.

Pro vývoj střední hodnoty stavu a výstupu, které budeme stručněji označovat

$$\boldsymbol{\mu}_x(t) = \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) \} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\mu}_y(t) = \mathcal{E} \{ \mathbf{y}(t) \},$$

platí v důsledku linearitu operátoru střední hodnoty

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t+1) \} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \} \\ &= \mathbf{A} \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) \} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathcal{E} \{ \mathbf{v}(t) \} \\ \mathcal{E} \{ \mathbf{y}(t) \} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \} \\ &= \mathbf{C} \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) \} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathcal{E} \{ \mathbf{e}(t) \}, \end{aligned}$$

neboli vzhledem k (5.2)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x(t+1) &= \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_x(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\mu}_y(t) &= \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_x(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Střední hodnota stavu a výstupu stochastického systému se tedy vyvíjí stejně jako stav a výstup deterministického systému.

Vývoj kovarianční matice stavu a sdruženou kovarianční matici stavu a výstupu určíme takto: označme odchylku stavu systému od jeho střední hodnoty

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}_x(t)$$

a zaved' me kovarianční matici stavu

$$\mathbf{P}_x(t) = \text{cov} \{ \mathbf{x}(t) \} = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \}.$$

Odečtením rovnic (5.1) a (5.4) dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{e}(t), \end{aligned}$$

a tedy

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{v}^T(t) + \mathbf{v}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t).$$

Aplikujeme-li nyní operátor střední hodnoty, dostaneme vzhledem k předpokladu nezávislosti šumů a současných a minulých stavů a (5.3)

$$\mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}(t+1)\tilde{\mathbf{x}}^T(t+1) \} = \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.$$

Podobně

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t+1)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{e}^T(t) + \mathbf{v}(t)\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{x}}^T(t) + \mathbf{v}(t)\mathbf{e}^T(t), \\ \tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{e}^T(t) + \mathbf{e}(t)\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{x}}^T(t) + \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t) \end{aligned}$$

a odtud

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}(t+1)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) \} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{S}, \\ \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) \} &= \mathbf{C}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Tyto výsledky lze shrnout do rovnice pro časový vývoj kovarianční matice stavu

$$\mathbf{P}_x(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (5.5)$$

a rovnice pro sdruženou kovarianční matici stavu a výstupu

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} & \mathbf{A}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \\ \mathbf{C}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{S}^T & \mathbf{C}\mathbf{P}_x(t)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Podobným postupem lze odvodit vztahy pro autokovarianční funkci stavu

$$\mathbf{R}_{xx}(t, s) = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(s) \},$$

která je (pro  $t \geq s$ ) dána rovnicí

$$\mathbf{R}_{xx}(t, s) = \mathbf{A}^{t-s}\mathbf{P}_x(s), \quad (5.7)$$

a autokovarianční funkci výstupu

$$\mathbf{R}_{yy}(t, s) = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(s) \},$$

která bude (opět pro  $t \geq s \geq 0$ )

$$\mathbf{R}_{yy}(t, s) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-s}\mathbf{P}_x(s)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\delta(t-s) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-s-1}\mathbf{S}(1 - \delta(t-s)). \quad (5.8)$$

Jsou-li šумы  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{e}$  gaussovské procesy a počáteční stav  $\mathbf{x}(0)$  má rovněž Gaussovo rozdělení, je i stav a výstup systému gaussovský proces a je plně charakterizován momenty (5.4) a (5.6).

Předpokládáme-li dále, že počáteční stav  $\mathbf{x}(0)$  systému (5.1) má momenty

$$\mathcal{E}\{\mathbf{x}(0)\} = \boldsymbol{\mu}_x(0) \text{ a } \text{cov}\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{P}_x(0), \quad (5.9)$$

lze řešení rekurzivních rovnic (5.4) a (5.5) vyjádřit explicitně a platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x(t) &= \mathbf{A}^t \boldsymbol{\mu}_x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-\tau-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau), \\ \mathbf{P}_x(t) &= \mathbf{A}^t \mathbf{P}_x(0) (\mathbf{A}^T)^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{A}^\tau \mathbf{Q} (\mathbf{A}^T)^\tau. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Je-li matice  $\mathbf{A}$  stabilní, pak řada pro kovarianční matici stavu konverguje a lze nalézt ustálené řešení

$$\mathbf{P}_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x(t),$$

které vyhovuje Ljapunovově rovnici

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{A} \mathbf{P}_x \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (5.11)$$

Ustálená kovariance výstupu pak je

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{C} \mathbf{P}_x \mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \quad (5.12)$$

## 5.2 Průchod náhodného signálu lineárním dynamickým systémem

Zabývejme se nyní otázkou, jak lze charakterizovat vlastnosti náhodných signálů po průchodu lineárním dynamickým systémem, který je definován vnějším popisem. Uvažujme jednorozměrný kauzální systém popsáný impulsní charakteristikou  $g(t)$  (platí tedy  $g(t) = 0$  pro  $t < 0$ ), jehož vstupem je náhodná posloupnost s konečnými druhými momenty  $u(t)$  se střední hodnotou

$$\mu_u(t) = \mathcal{E}\{u(t)\} \quad (5.13)$$

a autokovarianční funkcí

$$\mathbf{R}_{uu}(t, s) = \mathcal{E}\{(u(t) - \mu_u(t))(u(s) - \mu_u(s))\}. \quad (5.14)$$

Pro výstupní proces platí

$$y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^t g(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau). \quad (5.15)$$

Lze ukázat, že pro stabilní systém tato řada konverguje (ve středně kvadratickém smyslu) a výstup  $y(t)$  je také náhodná posloupnost s konečnými momenty druhého řádu.

Střední hodnota procesu  $y(t)$  bude

$$\mu_y(t) = \mathcal{E} \{y(t)\} = \mathcal{E} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) \right\} = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\mathcal{E} \{u(t-\tau)\} = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\mu_u(t-\tau). \quad (5.16)$$

Vidíme, že střední hodnotu výstupní posloupnosti získáme průchodem střední hodnoty vstupní posloupnosti systémem  $g(t)$ . K výpočtu kovarianční funkce opět definujeme odchylky

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \mu_u(t) \quad \text{a} \quad \tilde{y}(t) = y(t) - \mu_y(t).$$

Odečtením rovnic (5.15) a (5.16) dostaneme

$$\tilde{y}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\tilde{u}(t-\tau),$$

tj. rozdíl mezi signálem a jeho střední hodnotou se filtruje dynamickým systémem stejně jako jeho střední hodnota. Autokovarianční funkce výstupu potom bude

$$\begin{aligned} R_{yy}(t, s) &= \mathcal{E} \{ \tilde{y}(t)\tilde{y}(s) \} & (5.17) \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\tilde{u}(t-\tau) \right) \left( \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\sigma)\tilde{u}(s-\sigma) \right) \right\} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\tau)g(\sigma)\mathcal{E} \{ \tilde{u}(t-\tau)\tilde{u}(s-\sigma) \} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\tau)g(\sigma)R_{uu}(t-\tau, s-\sigma) \end{aligned}$$

a podobně vzájemná kovarianční funkce výstupu a vstupu

$$\begin{aligned} R_{yu}(t, s) &= \mathcal{E} \{ \tilde{y}(t)\tilde{u}(s) \} & (5.18) \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\tilde{u}(t-\tau) \right) \tilde{u}(s) \right\} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\mathcal{E} \{ \tilde{u}(t-\tau)\tilde{u}(s) \} \\ &= \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)R_{uu}(t-\tau, s). \end{aligned}$$

Je-li navíc vstupní proces normální, je i výstupní proces normální (lineární kombinace normálních veličin je opět normální veličina) a je plně charakterizován prvními dvěma momenty (5.16) a (5.17).

Zjednodušíme nyní tyto obecné výsledky v případě, že vstupní proces je stacionární (v širším smyslu). V tom případě jeho střední hodnota

$$\mu_u(t) = \mu_u$$

je konstantní a kovarianční funkce

$$R_{uu}(t, s) = R_{uu}(t-s)$$

je nezávislá na posunutí v čase, tj. je funkcí pouze časového rozdílu  $t-s$ .

**Poznámka:** Výše uvedený zápis chápeme jako **definici** nové funkce jedné proměnné  $R_{uu}(\cdot)$ . Pro zjednodušení zápisu obě funkce rozlišujeme pouze jejich argumenty.  $\square$

Rovnice (5.16) se v případě stacionárního vstupního procesu zjednoduší na

$$\mu_y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)\mu_u(t-\tau) = \left( \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) \right) \mu_u = K \mu_u = \mu_y, \quad (5.19)$$

kde

$$K = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)$$

je zesílení systému. Autokovarianční funkce výstupu bude

$$R_{yy}(t, s) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\tau)g(\sigma)R_{uu}(t-s+\sigma-\tau) = R_{yy}(t-s) \quad (5.20)$$

a vzájemná kovarianční funkce vstupu a výstupu

$$R_{yu}(t, s) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)R_{uu}(t-s-\tau) = R_{yu}(t-s). \quad (5.21)$$

Upozorníme na tomto místě, že při zápisu autokovarianční funkce je důležité dodržet pořadí veličin  $y$  a  $u$  v indexu a jim odpovídajících časových okamžiků  $t, s$  v argumentu.

Střední hodnota výstupu je konstantní a obě kovarianční funkce jsou rovněž pouze funkcí časového rozdílu  $t-s$ . Výstupní proces je tedy opět stacionární (v širším smyslu), vstupní a výstupní proces jsou navíc vzájemně stacionární.

Vztah (5.21) lze psát ve tvaru

$$R_{yu}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau)R_{uu}(t-\tau) = g * R_{uu},$$

tj. vzájemná kovarianční funkce vstupu a výstupu je konvolucí (popsané operátorem  $*$ ) impulsní charakteristiky systému a autokovarianční funkce vstupu. Podobně bychom dostali

$$\begin{aligned} R_{yy}(t, s) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} R_{uu}(t-(s-\tau))g(\tau) \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uu}(t-(s-\tau))g(\tau) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_{uu}(t-s-\nu)g(-\nu) \\ &= R_{yy}(t-s), \end{aligned}$$

neboli

$$R_{uy}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_{uu}(t-\nu)g(-\nu) = R_{uu} * \bar{g},$$

kde funkce  $\bar{g}$  je definována vztahem

$$\bar{g}(t) = g(-t)$$

a

$$R_{yy}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g(\tau)R_{uu}(t-\tau-\nu)g(-\nu) = g * R_{uu} * \bar{g}.$$

Tak jako v případě lineárních časově invariantních deterministických systémů lze vztahy mezi vstupy a výstupy elegantně popisovat ve frekvenční oblasti. Označme

$$G(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)z^{-\tau} \quad (5.22)$$

přenos systému (5.15) v  $\mathcal{Z}$ -transformaci. Rovnici (5.19) pak lze psát jako

$$\mu_y = G(1)\mu_u.$$

Definujme dále (výkonové) spektrální hustoty procesu jako (oboustrannou)  $\mathcal{Z}$ -transformaci (pokud existuje) autokovarianční, popř. vzájemné kovarianční funkce vyčíslené na jednotkové kružnici

$$z = e^{j\omega T_s}, \quad \omega \in (-\omega_N, +\omega_N)$$

kde  $\omega_N = \pi/T_s$  je Nyquistova frekvence a  $T_s$  je perioda vzorkování náhodné posloupnosti. V literatuře se často uvažuje tato hodnota implicitně rovna jedné, což odpovídá transformaci měřítka frekvenční osy  $(-\omega_N, +\omega_N)$  na standardní interval  $(-\pi, +\pi)$ . V technických aplikacích však je často vhodnější pracovat s měřítkem frekvenční osy, odpovídajícím spojitým signálům. Označme

$$\begin{aligned} S_{uu}(\omega) &= S_{uu}(z)|_{z=e^{j\omega T_s}}, & \text{kde} & \quad S_{uu}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)z^{-\tau}, & (5.23) \\ S_{yy}(\omega) &= S_{yy}(z)|_{z=e^{j\omega T_s}}, & \text{kde} & \quad S_{yy}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau)z^{-\tau}, \\ S_{yu}(\omega) &= S_{yu}(z)|_{z=e^{j\omega T_s}}, & \text{kde} & \quad S_{yu}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau)z^{-\tau}. \end{aligned}$$

**Poznámka:** Funkce  $S_{uu}(\omega)$  a  $S_{uu}(z)$  opět pro zjednodušení zápisu rozlišujeme pouze jejich argumenty. Lze ukázat, že uvedená definice spektrální hustoty formálně odpovídá Fourierově transformaci kovarianční funkce (posloupnosti) - viz zavedení  $\mathcal{Z}$ -transformace jako Laplaceovy transformace posloupnosti vzniklé jako součin spojitě funkce a posloupnosti Diracových impulsů  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \delta_c(t-\tau)$  v kapitole 1.3.  $\square$



Transformací rovnice (5.21) odvodíme

$$\begin{aligned}
S_{yu}(z) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu} R_{yu}(\nu) \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) R_{uu}(\nu - \tau) \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} z^{-\nu} g(\tau) R_{uu}(\nu - \tau) \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} z^{-\tau} g(\tau) z^{-(\nu-\tau)} R_{uu}(\nu - \tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{\infty} z^{-\tau} g(\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu} R_{uu}(\nu)
\end{aligned}$$

a odtud použitím definic přenosu (5.22) a spektrálních hustot (5.23) dostaneme

$$S_{yu}(z) = G(z)S_{uu}(z) \quad \text{neboli} \quad S_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega T_s})S_{uu}(\omega). \quad (5.24)$$

Podobně bychom pro opačné pořadí vstupu a výstupu odvodili

$$S_{uy}(z) = S_{uu}(z)G^*(z) \quad \text{neboli} \quad S_{uy}(\omega) = S_{uu}(\omega)G(e^{-j\omega T_s}), \quad (5.25)$$

kde

$$G^*(z) = G(z)|_{z=z^{-1}}.$$

Vztah pro spektrální hustotu výstupu odvodíme transformací rovnice (5.20)

$$\begin{aligned}
S_{yy}(z) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu} R_{yy}(\nu) \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\tau)g(\sigma)R_{uu}(\nu+\sigma-\tau) \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} z^{-\tau}g(\tau)z^{\sigma}g(\sigma)z^{-(\nu+\sigma-\tau)}R_{uu}(\nu+\sigma-\tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{\infty} z^{-\tau}g(\tau) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z^{-\nu}R_{uu}(\nu) \sum_{\sigma=0}^{\infty} z^{\sigma}g(\sigma)
\end{aligned}$$

a odtud opět použitím definic přenosu (5.22) a spektrálních hustot (5.23)

$$S_{yy}(z) = G(z)S_{uu}(z)G^*(z) \quad \text{neboli} \quad S_{yy}(\omega) = \left| G(e^{-j\omega T_s}) \right|^2 S_{uu}(\omega). \quad (5.26)$$

Všechny uvedené vztahy pro momenty a spektrální hustoty lze zobecnit i na mnoharozměrové systémy s přenosovou maticí

$$\mathbf{G}(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{G}(\tau)z^{-\tau}.$$

Pro mnoharozměrové systémy dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yu}(t) &= \mathbf{G} * \mathbf{R}_{uu} & \rightarrow & \mathbf{S}_{yu}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{S}_{uu}(z) \\ \mathbf{R}_{uy}(t) &= \mathbf{R}_{uu} * \overline{\mathbf{G}}^T & \rightarrow & \mathbf{S}_{uy}(z) = \mathbf{S}_{uu}(z)\mathbf{G}^*(z) \\ \mathbf{R}_{yy}(t) &= \mathbf{G} * \mathbf{R}_{uu} * \overline{\mathbf{G}}^T & \rightarrow & \mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{S}_{uu}(z)\mathbf{G}^*(z), \end{aligned}$$

kde v mnoharozměrovém případě

$$\mathbf{G}^*(z) = \mathbf{G}^T(z) \Big|_{z=z^{-1}}.$$

Vztah (5.26) má názornou fyzikální interpretaci. Protože

$$\frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} S_{uu}(\omega) d\omega = R_{uu}(0) = \sigma_u^2 = \mathcal{E} \{u^2(t)\}$$

je měřítkem výkonu procesu, lze hodnotu výkonové spektrální hustoty  $S_{uu}(\omega)$  v bodě  $\omega$  chápat jako hustotu výkonu vstupního procesu v okolí frekvence  $\omega$ . Součin

$$G(e^{j\omega T_s})G(e^{-j\omega T_s}) = |G(e^{j\omega T_s})|^2$$

udává výkonové zesílení na této frekvenci a hodnota  $S_{yy}(\omega)$  je pak hustota výkonu výstupního procesu v okolí této frekvence.

Vztahy pro vzájemnou kovarianční funkci (5.21) a vzájemnou spektrální hustotu (5.24) umožňují identifikovat impulsní charakteristiku a přenos dynamického systému. Uvažujme jako vstupní proces diskretní bílý šum s autokovarianční funkcí

$$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$$

a spektrální hustotou

$$S_{uu}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)z^{-\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \delta(\tau)z^{-\tau} = z^0 = 1.$$

Pro takový vstup dostaneme pro vzájemnou kovarianční funkci vztah

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\sigma)R_{uu}(\tau-\sigma) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} g(\sigma)\delta(\tau-\sigma) = g(\tau) \quad (5.27)$$

a pro vzájemnou spektrální hustotu vztah

$$S_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega T_s})S_{uu}(\omega) = G(e^{j\omega T_s}) \cdot 1 = G(e^{j\omega T_s}). \quad (5.28)$$

Vzájemná kovarianční funkce je tedy přímo rovna **impulsní charakteristice** systému a vzájemná spektrální hustota jeho **frekvenčnímu přenosu**.

Důležitou otázkou při práci s pojmy střední hodnota, kovarianční funkce a spektrum je vztah mezi těmito teoretickými funkcemi, definovanými pomocí operátoru střední hodnoty nad všemi možnými realizacemi, a charakteristikami, které jsme schopni určit na základě měření jediné pozorované realizace. Jestliže pro nějakou funkci  $f(\cdot)$  má náhodný proces

$x(t)$  vlastnost

$$\mathcal{E}\{f(x)\} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{t=1}^H f(x(t)),$$

říkáme, že je **ergodický** vzhledem k veličině  $f(\cdot)$ . Pro praktické použití výsledků tohoto odstavce je důležitá následující věta.

**Věta 5 (Ergodicita lineárních procesů)** *Nechť  $\mathbf{y}(t)$  je stacionární proces vzniklý průchodem bílého šumu  $\mathbf{e}(t)$  s omezenými čtvrtými momenty stabilním lineárním filtrem*

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{e}(t - \tau).$$

Potom platí

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{t=1}^H \mathbf{u}(t) \mathbf{y}^T(t - \tau) = \mathcal{E}\{\mathbf{u}(t) \mathbf{y}^T(t - \tau)\} = \mathbf{R}_{uy}(\tau)$$

a

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{t=1}^H \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^T(t - \tau) = \mathcal{E}\{\mathbf{y}(t) \mathbf{y}^T(t - \tau)\} = \mathbf{R}_{yy}(\tau)$$

s pravděpodobností jedna.

Tato věta potvrzuje smysluplnost budované teorie, neboť za uvažovaných předpokladů můžeme všechny potřebné charakteristiky získat měřením.

### 5.3 Spektrální faktorizace diskrétního náhodného procesu

Ukázali jsme, že kovarianční funkce, a tedy i spektrální vlastnosti náhodného procesu závisí pouze na odchylkách uvažovaných signálů od jejich střední hodnoty. Proto v tomto odstavci můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že deterministický vstup systému (5.1)  $\mathbf{u}$  je nulový a vstupem systému budou pouze bílé šумы  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{e}$ . Popis systému se zjednoduší na

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t). \end{aligned}$$

Za předpokladu stability matice  $\mathbf{A}$  budou po uplynutí dostatečně dlouhé doby od počátečního času  $t_0$ , ve kterém je definován počáteční stav  $\mathbf{x}(0)$ , stav i výstup stochastického systému stacionární náhodné procesy s nulovou střední hodnotou (proč?). K určení jejich kovariančních matic je třeba řešit Ljapunovovu rovnici (5.11) a rovnici (5.12). Označme kvůli formální shodě s výsledky předchozího odstavce

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}.$$

Přenos mezi takto definovaným vstupem systému  $\mathbf{u}$  a výstupem systému  $\mathbf{y}$  bude

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

a spektrální hustota vstupu bude dána jeho kovarianční maticí

$$\mathbf{S}_{uu}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

Podle výše uvedených vztahů tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{yu}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}_{uy}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{S}_{yy}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Pro vzájemně nezávislé bílé šумы  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{e}$  s kovarianční maticí

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2)$$

se tento výsledek zjednoduší na

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{Q} (z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T} \mathbf{C}^T + \mathbf{R},$$

kde jsme použili zkrácené značení  $\mathbf{X}^{-T} = (\mathbf{X}^T)^{-1}$ .

**Příklad (rozklad spektrální hustoty).** Uvažujme nyní spektrální hustotu, která je nezápornou racionální funkcí  $\cos(\omega T_s)$  (ukážte)

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \frac{(z + 0.5)(z^{-1} + 0.5)}{(z + 0.25)(z^{-1} + 0.25)}. \quad (5.29)$$

Pro  $\mathbf{S}_{uu}(\omega) = 1$  můžeme tuto racionální spektrální hustotu vyjádřit ve tvaru (5.26)

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = G(z)G^*(z)$$

celkem čtyřmi způsoby s přenosy

$$G_1(z) = \frac{z + 0.5}{z + 0.25} \quad (5.30)$$

$$G_2(z) = \frac{1 + 0.5z}{z + 0.25} \quad (5.31)$$

$$G_3(z) = \frac{z + 0.5}{1 + 0.25z} \quad (5.32)$$

$$G_4(z) = \frac{1 + 0.5z}{1 + 0.25z}. \quad (5.33)$$

Stochastický signál s danými spektrálními vlastnostmi můžeme tedy získat průchodem bílého šumu dynamickými systémy s přenosy  $G_1(z)$  a  $G_2(z)$ . Výstup bude stacionární proces, protože oba tyto přenosy jsou stabilní. (V případě přenosů  $G_3(z)$  a  $G_4(z)$ , které jsou nestabilní, není výstupní proces dobře definován.) Z nich právě jeden přenos  $G_1(z)$  nemá ani žádné nuly mimo jednotkovou kružnici, tj. je stabilní a má minimální fázi. Proto i jeho inverze je stabilní přenos. Takovému rozkladu spektrální hustoty říkáme **spektrální fak-**

**torizace** náhodného procesu. Tento výsledek platí obecně a je možné ho formulovat do následující věty.

**Věta 6 (Spektrální faktorizace)** *Předpokládejme, že  $S_{yy}(\omega) \geq 0$  je racionální funkcí  $\cos(\omega T_s)$  (popř.  $e^{j\omega T_s}$ ). Pak existuje právě jedna monická (tj. s jednotkovými koeficienty u nejvyšších mocnin  $z$ ) racionální funkce  $G(z)$ , která má všechny póly uvnitř jednotkové kružnice a všechny nuly uvnitř jednotkové kružnice nebo na jednotkové kružnici taková, že*

$$S_{yy}(\omega) = \sigma^2 \left| G(e^{j\omega T_s}) \right|^2.$$

Důkaz tohoto tvrzení, které lze zobecnit i na mnohazměrové systémy, je založen na přímé konstrukci přenosu  $G(z)$  na základě všech možných spektrálních faktorů (všimněte si symetrií v poloze pólů a nul spektrální hustoty (5.29)).

Uvažujme nyní náhodný proces vzniklý průchodem bílého šumu s rozptylem  $\sigma^2$  dynamickým systémem s přenosem  $G(z)$  dle předchozí věty. Jeho spektrální hustota pak bude právě  $S_{yy}(\omega)$ . Platí tedy i následující věta.

**Věta 7 (Věta o realizaci)** *Pro každou racionální spektrální hustotu  $S_{yy}(\omega) \geq 0$  existuje právě jeden dynamický systém s přenosem  $G(z)$ , který je monickou (tj. s jednotkovými koeficienty u nejvyšších mocnin  $z$ ) racionální funkcí, má všechny póly uvnitř jednotkové kružnice a všechny nuly uvnitř jednotkové kružnice nebo na jednotkové kružnici, takový, že stacionární proces s danou spektrální hustotou můžeme získat jako výstup tohoto systému, je-li na vstupu diskretní bílý šum.*

Důležitým praktickým důsledkem této věty je, že – omezíme-li se na stacionární procesy s racionálními spektry – lze všechny takové procesy získat filtrací diskretního bílého šumu a rovněž při analýze stačí předpokládat, že vstupní proces je bílý šum. Všechny náhodné procesy, které jsou předmětem našeho zájmu, lze tedy reprezentovat ve tvaru

$$y(t) = \frac{c(d)}{a(d)} e(t), \quad (5.34)$$

kde  $e$  je diskretní bílý šum s rozptylem  $\sigma_e^2$ ,  $d$  je operátor zpoždění  $dy(t) = y(t-1)$  a  $a(d)$ ,  $c(d)$  jsou polynomy

$$\begin{aligned} a(d) &= 1 + a_1 d + \dots + a_{n_a} d^{n_a}, \\ c(d) &= 1 + c_1 d + \dots + c_{n_c} d^{n_c}, \end{aligned}$$

nebo v časové oblasti

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c). \quad (5.35)$$

Tato reprezentace stochastického procesu se nazývá ARMA model. Podle věty o realizaci lze nalézt polynomy  $a(d)$  a  $c(d)$ , které jsou oba stabilní (pomineme-li případ kořenů polynomu  $c(d)$  na jednotkové kružnici). Transformaci (5.34) proto lze invertovat a platí též

$$e(t) = \frac{a(d)}{c(d)} y(t). \quad (5.36)$$

Posloupnost  $\{\dots, y(t-1), y(t)\}$  tedy obsahuje veškerou informaci o neměřitelné (a v mnoha případech pouze abstraktní) posloupnosti  $\{\dots, e(t-1), e(t)\}$ .

Ukážeme nyní důležitou vlastnost této bílé posloupnosti a zavedeme pojem **inovace**. Uvažujme hodnotu náhodného procesu

$$y(t+1) = \frac{c(d)}{a(d)}e(t+1). \quad (5.37)$$

Provedeme-li naznačené dělení polynomů, dostaneme vzhledem k tomu, že oba polynomy jsou monické

$$\frac{c(d)}{a(d)} = 1 + \frac{d\bar{c}(d)}{a(d)},$$

a tedy

$$y(t+1) = \frac{\bar{c}(d)}{a(d)}e(t) + e(t+1).$$

Dosažením za hodnotu  $e(t)$  podle (5.36) dostaneme

$$y(t+1) = \frac{\bar{c}(d)a(d)}{a(d)c(d)}y(t) + e(t+1)$$

a po úpravě

$$y(t+1) = \frac{\bar{c}(d)}{c(d)}y(t) + e(t+1). \quad (5.38)$$

Je vidět, že hodnotu  $e(t+1)$  můžeme interpretovat jako tu část informace o  $y(t+1)$ , která není obsažena v minulé historii procesu  $\{\dots, y(t-1), y(t)\}$ . Proto ji nazýváme **inovace** procesu. Protože posloupnost  $e(t)$  je bílá, je

$$\hat{y}(t+1) = \frac{\bar{c}(d)}{c(d)}y(t) \quad (5.39)$$

nejlepší predikcí výstupu  $y(t+1)$  na základě známé historie procesu  $\{\dots, y(t-1), y(t)\}$  ve smyslu minimalizace střední kvadratické chyby

$$\mathcal{E} \left\{ (y(t+1) - \hat{y}(t+1))^2 \right\}$$

a reprezentaci náhodného procesu ve tvaru

$$y(t) = \frac{c(d)}{a(d)}e(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)e(t-\tau) \quad (5.40)$$

nazýváme **inovační reprezentace**.

V následujících kapitolách uvidíme, že inovační reprezentace hraje důležitou roli při optimální filtraci a predikci. Poznamenejme zde pouze, že díváme-li se na model dynamického systému

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)e(t-\tau)$$

jako na generátor dat, pak v případě, že pracujeme s inovační reprezentací, tj. vstupní posloupnost je bílá, umožňuje tento model snadný převod do tvaru prediktoru (5.39).

Jestliže však vstupní posloupnost není bílá, není (5.39) optimální prediktor, neboť chyba predikce  $e(t+1)$  je korelovaná s dostupnými daty, a proto může být dále zmenšena.

**Příklad (prediktor pro ARMA proces).** Uvažujme spektrální hustotu (5.29), kterou lze podle věty o realizaci získat průchodem bílého šumu filtrem

$$y(t) = \frac{1 + 0.5d}{1 + 0.25d} e(t).$$

Protože

$$\frac{1 + 0.5d}{1 + 0.25d} = 1 + \frac{0.25d}{1 + 0.25d},$$

lze tento proces podle (5.39) popsat jako

$$y(t+1) = \frac{0.25}{1 + 0.5d} y(t) + e(t+1)$$

a optimální prediktor výstupu  $y(t+1)$  je

$$\hat{y}(t+1) = \frac{0.25}{1 + 0.5d} y(t).$$

□

## 5.4 Diskretizace spojitého lineárního stochastického systému

V tomto odstavci ukážeme, jak lze získat diskrétní popis spojitého lineárního stochastického systému. Uvažujme **spojitý lineární stochastický systém s diskrétním měřením výstupu** popsaný stavovou rovnicí

$$d\mathbf{x}_c(\tau) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(\tau) d\tau + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(\tau) d\tau + d\mathbf{w}_c(\tau),$$

kde  $d\mathbf{w}_c(\tau)$  je tzv. přírůstek **Wienerova procesu**. Tento přírůstek má nulovou střední hodnotu, kovarianci

$$\mathcal{E} \left\{ d\mathbf{w}_c(\tau) d\mathbf{w}_c^T(\tau) \right\} = \mathbf{Q}_c d\tau$$

a hodnoty přírůstků v nepřekrývajících se časových intervalech jsou nezávislé. Formálně lze tuto rovnici upravit na tvar

$$\dot{\mathbf{x}}_c(\tau) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(\tau) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(\tau) + \mathbf{v}_c(\tau), \quad (5.41)$$

kde náhodný proces  $\mathbf{v}_c(\tau)$  je bílý šum s autokovarianční funkcí

$$\text{cov} \{ \mathbf{v}_c(\tau_1), \mathbf{v}_c(\tau_2) \} = \mathbf{Q}_c \delta_c(\tau_1 - \tau_2), \quad (5.42)$$

kde  $\delta_c(\tau)$  je Diracova funkce. Zápis (5.41) je však třeba chápat pouze jako symbolickou analogii (5.1), neboť derivace Wienerova procesu

$$\mathbf{v}_c(\tau) = \frac{d\mathbf{w}_c}{d\tau}$$

neexistuje. Proto je přesná definice spojitého stochastického systému podstatně obtížnější než v diskretním případě. Podrobně je tento problém rozebrán v (Åström, 1970).

Předpokládejme, že deterministický vstup procesu je generován tvarovacím členem nulového řádu a výstup systému je vzorkován s periodou  $T_s$ , takže platí

$$\mathbf{u}_c(\tau) = \mathbf{u}(t) \quad \text{pro} \quad tT_s \leq \tau < (t+1)T_s,$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_c((t + \varepsilon)T_s) + \mathbf{e}'(t),$$

kde  $T_s$  je perioda vzorkování,  $\varepsilon T_s$  je časové posunutí mezi změnou řízeného vstupu soustavy a vzorkováním výstupu,  $\tau$  je spojitý a  $t$  je diskretní čas. O diskretním šumu měření  $\mathbf{e}'(t)$  budeme předpokládat, že je to diskretní bílý šum s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí  $\mathbf{R}'$ , nekorelovaný se šumem procesu. Takový šum má konstantní spektrální hustotu na intervalu  $(-\omega_N, \omega_N)$  a můžeme ho tedy interpretovat jako šum vzniklý vzorkováním spojitého šumu s konstantní spektrální hustotou v dostatečně širokém frekvenčním pásmu, který byl před vlastním vzorkováním filtrován filtrem typu dolní propust tak, aby vyhověl požadavkům Shannonovy věty o vzorkování.

Později budeme uvažovat systém zapojený ve zpětnovazební smyčce s regulátorem. Pak zpoždění  $\varepsilon = (T_s - T_c)/T_s$ , kde  $T_c$  je doba výpočtu regulátoru, tj. zpoždění mezi změřením hodnoty výstupu a vygenerováním nové hodnoty řízeného vstupu regulátorem.

Obecné řešení stavové rovnice přechodu pro přechod ze stavu v čase  $\tau_0$  do stavu v čase  $\tau$  má tvar

$$\mathbf{x}_c(\tau) = e^{\mathbf{A}_c(\tau - \tau_0)} \mathbf{x}_c(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\mathbf{A}_c(\tau - \nu)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c(\nu) d\nu + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\mathbf{A}_c(\tau - \nu)} \mathbf{v}_c(\nu) d\nu.$$

Odtud pro  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(tT_s)$  dostaneme

$$\mathbf{x}(t+1) = e^{\mathbf{A}_c T_s} \mathbf{x}(t) + \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c(T_s - \nu)} \mathbf{B}_c d\nu \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t),$$

kde

$$\mathbf{v}(t) = \int_{tT_s}^{(t+1)T_s} e^{\mathbf{A}_c((t+1)T_s - \nu)} \mathbf{v}_c(\nu) d\nu$$

je diskretní bílý šum. Tím dostáváme známé vztahy pro matice ekvivalentního diskretního systému

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c T_s}$$

a

$$\mathbf{B} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c(T_s - \nu)} \mathbf{B}_c d\nu = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} d\nu \mathbf{B}_c.$$

K určení rovnice popisující diskretní výstup  $\mathbf{y}(t)$  určíme nejprve stav v čase měření výstupu

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) = e^{\mathbf{A}_c \varepsilon T_s} \mathbf{x}(t) + \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} d\nu \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}_\varepsilon(t),$$



kde

$$\mathbf{v}_\varepsilon(t) = \int_{tT_s}^{(t+\varepsilon)T_s} e^{\mathbf{A}_c((t+\varepsilon)T_s - \nu)} \mathbf{v}_c(\nu) d\nu.$$

Odtud dostaneme

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c \varepsilon T_s} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_c \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} d\nu \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_c \mathbf{v}_\varepsilon(t) + \mathbf{e}'(t).$$

Matice výstupní rovnice tedy budou

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c \varepsilon T_s}$$

a

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_c \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c(\varepsilon T_s - \nu)} \mathbf{B}_c d\nu + \mathbf{D}_c = \mathbf{C}_c \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} d\nu \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c.$$

Šum výstupní rovnice lze vyjádřit jako

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{v}_\varepsilon(t) + \mathbf{e}'(t).$$

Kovarianční matice šumu diskretního systému určíme jako

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(t) \} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( \int_{tT_s}^{(t+1)T_s} e^{\mathbf{A}_c((t+1)T_s - \nu_1)} \mathbf{v}_c(\nu_1) d\nu_1 \right) \left( \int_{tT_s}^{(t+1)T_s} e^{\mathbf{A}_c((t+1)T_s - \nu_2)} \mathbf{v}_c(\nu_2) d\nu_2 \right)^T \right\} \\ &= \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c(T_s - \nu)} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T(T_s - \nu)} d\nu \\ &= \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T \nu} d\nu, \end{aligned} \quad (5.43)$$

kde jsme využili vztahu

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{v}_c(\nu_1) \mathbf{v}_c^T(\nu_2) \} = \mathbf{Q}_c \delta_c(\nu_1 - \nu_2)$$

a „prosívací vlastnosti“ Diracova impulsu. Podobně

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{v}(t) (\mathbf{C}_c \mathbf{v}_\varepsilon(t) + \mathbf{e}'(t)) \} \\ &= \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c(\varepsilon T_s - \nu)} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T(\varepsilon T_s - \nu)} \mathbf{C}_c^T d\nu \\ &= \int_0^{\varepsilon T_s} e^{\mathbf{A}_c \nu} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T \nu} \mathbf{C}_c^T d\nu \end{aligned} \quad (5.44)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathcal{E} \{ (\mathbf{C}_c \mathbf{v}_\varepsilon(t) + \mathbf{e}'(t)) (\mathbf{C}_c \mathbf{v}_\varepsilon(t) + \mathbf{e}'(t))^T \} \\ &= \int_0^{\varepsilon T_s} \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c(\varepsilon T_s - \nu)} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T(\varepsilon T_s - \nu)} \mathbf{C}_c^T d\nu + \mathbf{R}' \\ &= \int_0^{\varepsilon T_s} \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c \nu} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}_c^T \nu} \mathbf{C}_c^T d\nu + \mathbf{R}'. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Kovarianční matice diskrétního šumu tedy bude

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2). \quad (5.46)$$

Všimněte si, že vzorkování vlastnosti šumu silně ovlivňuje, zejména:

- i pro diagonální matici šumu procesu  $\mathbf{Q}_c$  nemusí být (typicky není) matice diskretizovaného šumu procesu  $\mathbf{Q}$  diagonální
- i pro nekorelované šумы procesu a měření nejsou pro  $\varepsilon > 0$  diskretizované šумы procesu a měření nekorelované.

V limitním případě  $\varepsilon \rightarrow 1$ , odpovídajícímu zanedbatelnému výpočetnímu zpoždění v regulátoru  $T_c \rightarrow 0$ , bude mít kovarianční matice jednoduchou strukturu

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_1) \\ \mathbf{e}(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_2) \\ \mathbf{e}(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c^T\mathbf{Q} & \mathbf{C}_c^T\mathbf{Q}\mathbf{C}_c + \mathbf{R}' \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2).$$

Rozvineme-li vztahy pro matice popisující diskretizovaný systém do řady, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_c T_s + \frac{\mathbf{A}_c^2 T_s^2}{2!} + \dots \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_c T_s + \frac{\mathbf{A}_c \mathbf{B}_c T_s^2}{2!} + \dots \\ &= \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}_c T_s}{2!} + \dots \right) \mathbf{B}_c T_s \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_c T_s + \frac{(\mathbf{A}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_c \mathbf{A}_c^T) T_s^2}{2!} + \dots \\ \mathbf{S} &= \mathbf{Q}_c \mathbf{C}_c^T \varepsilon T_s + \frac{(\mathbf{A}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_c \mathbf{A}_c^T) \mathbf{C}_c^T \varepsilon^2 T_s^2}{2!} + \dots \\ &= \left( \mathbf{Q}_c + \frac{(\mathbf{A}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_c \mathbf{A}_c^T) \varepsilon T_s}{2!} + \dots \right) \mathbf{C}_c^T \varepsilon T_s \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}' + \mathbf{C}_c \mathbf{Q}_c \mathbf{C}_c^T \varepsilon T_s + \frac{\mathbf{C}_c (\mathbf{A}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_c \mathbf{A}_c^T) \mathbf{C}_c^T \varepsilon^2 T_s^2}{2!} + \dots \\ &= \mathbf{R}' + \mathbf{C}_c \left( \mathbf{Q}_c + \frac{(\mathbf{A}_c \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_c \mathbf{A}_c^T) \varepsilon T_s}{2!} + \dots \right) \mathbf{C}_c^T \varepsilon T_s. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Zanedbáním členů 2. a vyššího řádu dostaneme Eulerovu aproximaci spojitého systému včetně vztahů pro kovarianční matice.

Všimněte si přitom, že s rostoucí periodou vzorkování roste rozptyl diskrétního šumu procesu a vzájemná kovariance obou diskrétních šumů, zatímco relativní vliv šumu měření  $\mathbf{e}'(t)$  klesá.



## Kapitola 6

# Přehled metod odhadování

V této kapitole si připravíme formální aparát, který využijeme v následujících kapitolách k řešení úloh optimální filtrace a identifikace stochastických systémů. Popisem situací, v nichž se vyskytuje prvek náhodnosti či neurčitosti, se zabývá statistika. Proto začneme přehledem vybraných statistických metod odhadování. Zvláštní pozornost budeme věnovat bayesovským metodám. V závěru kapitoly ukážeme některé vhodné numerické postupy.

### 6.1 Odhad minimalizující střední kvadratickou chybu

Předpokládejme, že  $\mathbf{x}$  je náhodný vektor, jehož hodnotu chceme odhadnout, a  $\mathbf{y}$  jsou měřitelná data, která obsahují nějakou informaci o  $\mathbf{x}$ . Dále předpokládejme, že známe jejich sdružené rozdělení (hustotu pravděpodobnosti)  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Označme dále střední hodnoty a kovarianční matice

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_x &= \mathcal{E}\{\mathbf{x}\} \\ \boldsymbol{\mu}_y &= \mathcal{E}\{\mathbf{y}\} \\ \mathbf{P}_{xx} &= \mathcal{E}\left\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T\right\} \\ \mathbf{P}_{xy} &= \mathcal{E}\left\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T\right\} \\ \mathbf{P}_{yy} &= \mathcal{E}\left\{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T\right\}.\end{aligned}$$

Pro danou (změřenou) hodnotu  $\mathbf{y}$  najdeme odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y})$  využívající měřenou veličinu  $\mathbf{y}$  a minimalizující střední kvadratickou chybu (Mean Square Error) jako odhad, který minimalizuje kritérium

$$J_{\text{MS}} = \mathcal{E}\left\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}))\right\}. \quad (6.1)$$

Minimalizaci kritéria  $J_{\text{MS}}$  lze provést následujícím postupem. Přepišme kritérium jako

$$J_{\text{MS}} = \iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y})) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Integraci bez vyznačení mezí budeme vždy chápat jako integraci přes celý obor příslušné

proměnné. Sdruženou hustotu lze upravit na  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{y})p(\mathbf{y})$ , takže

$$J_{\text{MS}} = \iint (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y})) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Vnitřní integrál je nezáporný, právě tak jako  $p(\mathbf{y})$ , proto minimalizace kritéria je ekvivalentní minimalizaci vnitřního integrálu pro každé  $\mathbf{y}$ . Minimalizujeme tedy hodnotu výrazu

$$\begin{aligned} J'_{\text{MS}} &= \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y})) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \\ &= \mathcal{E} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{x} | \mathbf{y} \} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}^T(\mathbf{y}) \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}^T(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

K určení minima dostaneme rovnici

$$\frac{\partial J'_{\text{MS}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y})} = -2\mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} + 2\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) = 0,$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) = \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \}. \quad (6.2)$$

Odhad minimalizující střední kvadratickou chybu je tedy **podmíněná střední hodnota**. Lze ukázat, že pro tento odhad platí

$$\mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) \} = \mathcal{E} \{ \mathbf{x} \},$$

neboť

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) \} &= \int \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iint \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iint \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &= \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že tato vlastnost neznamená, že odhad je **nevychýlený**, tj.

$$\mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}(\mathbf{x}_0)) \} = \mathbf{x}_0,$$

kde symbolem  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0)$  jsme označili hodnotu měřených dat odpovídající hodnotě odhadované proměnné  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ .

Označíme-li

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}),$$

pak měřítkem kvality odhadu je kovarianční matice chyby odhadu

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}} = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \},$$

kde využíváme skutečnosti, že  $\mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}} \} = 0$ , která bude

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}} = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \int \mathbf{P}_{x|\mathbf{y}}(\mathbf{y})p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \mathbf{P}_{x|\mathbf{y}},
\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{P}_{x|\mathbf{y}}(\mathbf{y})$  je podmíněná kovarianční matice chyby odhadu pro dané  $\mathbf{y}$  (která může být obecně pro různá  $\mathbf{y}$  různá) a  $\mathbf{P}_{x|\mathbf{y}}$  je její (nepodmíněná) střední hodnota, která již není funkcí  $\mathbf{y}$ . Kritérium  $J_{\text{MS}}$  můžeme upravit na tvar

$$J_{\text{MS}} = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} \} = \mathcal{E} \{ \text{tr } \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} \} = \mathcal{E} \{ \text{tr } \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \} = \text{tr } \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}}.$$

MS odhad tedy rovněž minimalizuje stopu kovarianční matice chyby odhadu.

Platí-li pro dvě náhodné veličiny

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{y} \} = \iint \mathbf{x}^T \mathbf{y} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0,$$

říkáme, že jsou **ortogonální**. Důležitou vlastnost MS odhadu popisuje následující věta.

**Věta 8 (Princip ortogonality.)** *Nechť veličiny  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  mají sdružené rozdělení pravděpodobnosti  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Potom pro libovolnou funkci dat  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  platí*

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) (\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x}|\mathbf{y} \}) \} = 0. \quad (6.3)$$

□

Chyba odhadu  $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}$  je tedy ortogonální ke všem možným funkcím dostupných dat  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ . Poznamenejme, že místo existence sdruženého rozdělení stačí předpokládat existenci všech potřebných momentů. Důkaz lze provést přímým výpočtem

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E} \{ \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) (\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x}|\mathbf{y} \}) \} = \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) (\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x}|\mathbf{y} \}) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} - \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \left( \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} - \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \left( \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} - \iint \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y},
\end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$\int \left( \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x},$$

neboli

$$\mathcal{E} \{ \mathcal{E} \{ . \} \} = \mathcal{E} \{ . \}.$$

Důsledkem principu ortogonality je nerovnost

$$\mathcal{E} \{ \| \mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x}|\mathbf{y} \} \|^2 \} \leq \mathcal{E} \{ \| \mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{y}) \|^2 \}, \quad (6.4)$$

kde

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

je Euklidovská norma. MS odhad je tedy nejlepší (ve smyslu této normy) aproximací hodnoty  $\mathbf{x}$  na základě dostupných dat. Odvození lze rovněž provést přímým výpočtem. Jsou-li náhodné veličiny  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  ortogonální, platí pravděpodobnostní varianta **Pythagorovy věty** (zkuste dokázat !)

$$\mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \right\} = \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x}\|^2 \right\} + \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{y}\|^2 \right\}. \quad (6.5)$$

S použitím Pythagorovy věty upravíme výraz

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|^2 \right\} &= \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} + \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|^2 \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \}\|^2 \right\} + \mathcal{E} \left\{ \|\mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|^2 \right\} \\ &\geq \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \}\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z ortogonality výrazu  $(\mathbf{x} - \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \})$  k výrazu  $(\mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \} - \mathbf{g}(\mathbf{y}))$ , neboť tento výraz je také funkcí dat  $\mathbf{y}$ . Rovnost v nerovnosti (6.4) nastává pouze v případě  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathcal{E} \{ \mathbf{x} | \mathbf{y} \}$ .

## 6.2 Lineární odhad minimalizující střední kvadratickou chybu

V předchozím odstavci jsme hledali odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}$  minimalizací kritéria (6.1) bez jakýchkoli omezení. Získaný jednoduchý výsledek (6.2) je však v řadě případů použitelný jen velmi obtížně, protože vyžaduje znalost sdruženého rozdělení a výpočet podmíněné střední hodnoty. Omezíme se proto nyní při minimalizaci kritéria (6.1) na odhady  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})$  (Linear Mean Square), které jsou pouze **lineární funkcí** dat, tj. mají tvar

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad (6.6)$$

kde matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  můžeme volit. Vypočteme hodnotu kritéria pro takový odhad a dostaneme

$$\begin{aligned} J_{\text{LMS}} &= \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \text{tr} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \right\} \\ &= \text{tr} \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \right\} \\ &= \text{tr} \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b})(\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b})^T \right\} \\ &= \text{tr} \left[ \mathbf{P}_{xx} + \mathbf{A}(\mathbf{P}_{yy} + \boldsymbol{\mu}_y \boldsymbol{\mu}_y^T) \mathbf{A}^T + (\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_x)^T + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_x)^T - 2\mathbf{A}\mathbf{P}_{yx} \right], \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že stopa skalární veličiny je tato veličina sama, že ve stopě součinu matic je možno cyklicky permutovat a že operátor střední hodnoty a stopy komutují.

K určení minima tohoto výrazu je třeba znát vztahy pro derivaci stopy matice

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} \operatorname{tr} \mathbf{XYZ} &= \mathbf{X}^T \mathbf{Z}^T, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \operatorname{tr} \mathbf{XYX}^T &= 2\mathbf{XY},\end{aligned}$$

s jejichž použitím dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} J_{\text{LMS}} = 2\mathbf{A}(\mathbf{P}_{yy} + \boldsymbol{\mu}_y \boldsymbol{\mu}_y^T) + 2(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_x) \boldsymbol{\mu}_y^T - 2\mathbf{P}_{xy} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} J_{\text{LMS}} = +2(\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_x) + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y = 0. \quad (6.8)$$

Z (6.8) plyne

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y$$

a dosazením do (6.7) dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_{yy} - \mathbf{P}_{xy} = 0,$$

neboli pro regulární matici  $\mathbf{P}_{yy}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \\ \mathbf{b} &= \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \boldsymbol{\mu}_y.\end{aligned}$$

Optimální lineární středně kvadratický odhad je tedy dán vztahem

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y). \quad (6.9)$$

Považujeme-li  $\boldsymbol{\mu}_x$  za apriorní odhad  $\mathbf{x}$ , který nijak nevyužívá informaci obsaženou v datech, pak korekce tohoto odhadu

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)$$

je založena na odchylce hodnoty měření  $\mathbf{y}$  od očekávané hodnoty  $\boldsymbol{\mu}_y$ . Váha této korekce roste s těsností vazby mezi veličinami  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ , popsanou vzájemnou kovarianční maticí  $\mathbf{P}_{xy}$ , a klesá s rostoucí neurčitostí měření  $\mathbf{y}$ , popsanou kovarianční maticí  $\mathbf{P}_{yy}$ . Důležitou vlastností odhadu  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})$  je právě skutečnost, že závisí pouze na prvních dvou momentech – středních hodnotách  $\boldsymbol{\mu}_x$ ,  $\boldsymbol{\mu}_y$  a kovariancích  $\mathbf{P}_{xy}$  a  $\mathbf{P}_{yy}$ .

Odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})$  má opět vlastnost

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}) \} &= \int (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_y - \boldsymbol{\mu}_y) \\ &= \boldsymbol{\mu}_x.\end{aligned}$$

Kovarianční matici chyby odhadu je možné určit takto:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}} &= \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}))^T \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \right) \left( (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \right)^T \right\}\end{aligned} \quad (6.10)$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \\
&= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx}.
\end{aligned}$$

Zamysleme se nyní nad souvislostí principu ortogonalit a LMS odhadu. Přímým výpočtem lze snadno ukázat, že platí

$$\mathcal{E} \{1 \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}))\} = \mathcal{E} \left\{ 1 \cdot \left( (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \right) \right\} = 0$$

a

$$\mathcal{E} \left\{ \mathbf{y}^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})) \right\} = \text{tr} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{y} \left( (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \right)^T \right\} = 0.$$

Odtud přímo vyplývá, že LMS odhad je ortogonální ke všem **lineárním** funkcím dat  $\mathbf{g}_{lin}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ . Podle Pythagorovy věty tedy pro libovolnou lineární funkci dat platí

$$\mathcal{E} \{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y})\| \} \leq \mathcal{E} \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{g}_{lin}(\mathbf{y})\| \}, \quad (6.11)$$

což potvrzuje, že LMS odhad je nejlepší lineární odhad (ve smyslu Euklidovské normy) určený na základě daných dat. Naopak podle principu ortogonalit z předchozích dvou podmínek ortogonalit plyne vztah pro LMS odhad (6.9).

### 6.3 MS a LMS odhad pro normálně rozdělené veličiny

Uvažujme sdruženou normální hustotu pravděpodobnosti (h.p.)

$$p \left( \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix} \right), \quad (6.12)$$

kde  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x}$  jsou vektory rozměru  $n_y$  a  $n_x$ . Tato h.p. má tvar

$$\begin{aligned}
p \left( \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \right) &= (2\pi)^{-(n_y+n_x)/2} \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1/2} \\
&\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned} \quad (6.13)$$

Nášim cílem bude určit podmíněnou hustotu pravděpodobnosti  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ . Sdruženou kovarianční matici můžeme upravit na součin trojúhelníkových matic transformací

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & 0 \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \end{bmatrix}.$$

Protože transformační matice má jednotkový determinant, platí pro determinant kovarianční matice

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \end{bmatrix}.$$

Dále můžeme rozklad kovarianční matice na součin trojúhelníkových matic použít k nalezení inverze kovarianční matice ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy}^{-1} + \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{P}_{x|y}^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} & -\mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{P}_{x|y}^{-1} \\ -\mathbf{P}_{x|y}^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} & \mathbf{P}_{x|y}^{-1} \end{bmatrix},$$

kde  $\mathbf{P}_{x|y}$  značí matici

$$\mathbf{P}_{x|y} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx}.$$

Odtud je vidět, že kvadratickou formu v exponentu h.p. (6.13) je možné psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} = \\ & = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) + \\ & + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))^T \mathbf{P}_{x|y}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)). \end{aligned}$$

Označme dále

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y).$$

Výraz  $\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}$  se v aplikacích v teorii řízení často nazývá **Kalmanovo zesílení**. Na základě uvedeného rozkladu kvadratické formy a vztahu pro determinant sdružené kovarianční matice lze sdruženou h.p. (6.13) psát ve tvaru součinu marginální h.p.  $p(\mathbf{y})$  a podmíněné h.p.  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$

$$\begin{aligned} p\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}\right) &= (2\pi)^{-(n_y+n_x)/2} \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1/2} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y \\ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix} \right\} \\ &= (2\pi)^{-n_y/2} \det \mathbf{P}_{yy}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \right\} \\ &\cdot (2\pi)^{-n_x/2} \det \mathbf{P}_{x|y}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{x|y})^T \mathbf{P}_{x|y}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{x|y}) \right\}. \end{aligned}$$

Tento velmi důležitý výsledek shrneme v následující větě.

**Věta 9** *Uvažujme sdruženou h.p. (6.13). Potom marginální h.p.  $p(\mathbf{y})$  a podmíněná h.p.  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  mohou být popsány takto:*

*Marginální h.p.  $p(\mathbf{y})$  je normální*

$$p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y; \mathbf{P}_y)$$

*s kovarianční maticí*

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{P}_{yy}.$$

Podmíněná h.p.  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  je rovněž normální

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{x|y}; \mathbf{P}_{x|y})$$

s parametry

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \cdot \mathbf{P}_{yy}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)$$

$$\mathbf{P}_{x|y} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \cdot \mathbf{P}_{yy}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{yx}.$$

□

Tento výsledek tedy ukazuje, že v případě normálního rozdělení je odhad podmíněnou střední hodnotou zároveň odhadem lineárním a platí

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{x}}_{\text{LMS}}(\mathbf{y}).$$

Tento výsledek potvrzuje velký praktický význam normálního rozdělení.

## 6.4 Numerické metody podmiňování, integrace a skládání normálních rozdělení

V předchozích odstavcích jsme viděli, že v řadě případů je třeba určit parametry podmíněné h.p.

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})}, \quad (6.14)$$

marginální h.p.

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}, \quad (6.15)$$

nebo složené h.p.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}). \quad (6.16)$$

V této kapitole ukážeme, jak mohou být tyto operace (6.14), (6.15) a (6.16) realizovány v případě normálně rozdělených veličin (které jsou plně charakterizovány střední hodnotou a kovarianční maticí), a to numericky robustním způsobem, vycházejícím z reprezentace pozitivně semidefinitních kovariančních matic v  $LD$ -faktorizovaném tvaru.

### 6.4.1 Podmiňování a integrace

Uvažujme sdruženou normální hustotu pravděpodobnosti (h.p.)

$$p\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix}\right), \quad (6.17)$$

kde  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x}$  jsou vektory rozměru  $n_y$  a  $n_x$ .

Dále předpokládejme, že sdružená kovarianční matice (6.17) je dána ve faktorizovaném tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{L}_{x|y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_y & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{x|y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y^T & \mathbf{K}^T \\ 0 & \mathbf{L}_{x|y}^T \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

kde  $\mathbf{L}_y$  a  $\mathbf{L}_{x|y}$  jsou monické (tj. s jednotkami na diagonále) dolní trojúhelníkové matice a  $\mathbf{D}_y = \text{diag} [\mathbf{d}_y^T]$  a  $\mathbf{D}_{x|y} = \text{diag} [\mathbf{d}_{x|y}^T]$  jsou diagonální matice s nezápornými prvky. Pro tuto faktorizaci budeme dále používat značení

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{yy} & \mathbf{P}_{yx} \\ \mathbf{P}_{xy} & \mathbf{P}_{xx} \end{bmatrix} = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_{x|y} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y^T & \mathbf{K}^T \\ 0 & \mathbf{L}_{x|y}^T \end{bmatrix} \right|.$$

Z faktorizace (6.18) plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= \mathbf{L}_y \mathbf{D}_y \mathbf{L}_y^T \\ \mathbf{P}_{xy} &= \mathbf{K} \mathbf{D}_y \mathbf{L}_y^T \\ \mathbf{P}_{xx} &= \mathbf{K} \mathbf{D}_y \mathbf{K}^T + \mathbf{L}_{x|y} \mathbf{D}_{x|y} \mathbf{L}_{x|y}^T. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vztahů pro podmíněnou střední hodnotu a podmíněnou kovarianční matici (viz odstavec 6.3), dostaneme následující výsledek:

**Věta 10** Jsou-li  $LD$ -faktory sdružené kovarianční matice (6.17) blokově rozděleny jako

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_{x|y} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}_y^T & \mathbf{K}^T \\ 0 & \mathbf{L}_{x|y}^T \end{bmatrix} \right|,$$

pak faktory marginální kovarianční matice  $\mathbf{P}_y$  budou

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{L}_y \mathbf{D}_y \mathbf{L}_y^T = \left| \mathbf{d}_y; \mathbf{L}_y^T \right|$$

a faktory podmíněné kovarianční matice  $\mathbf{P}_{x|y}$  budou

$$\mathbf{P}_{x|y} = \mathbf{L}_{x|y} \mathbf{D}_{x|y} \mathbf{L}_{x|y}^T = \left| \mathbf{d}_{x|y}; \mathbf{L}_{x|y}^T \right|.$$

Podmíněná střední hodnota je dána rovnicí

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je řešení lineární soustavy rovnic

$$\mathbf{L}_y \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y.$$

□

Ukázali jsme, že výpočet parametrů marginální a podmíněné h.p. lze v případě normálního rozdělení převést na problém nalezení  $LD$ -faktorizace sdružené kovarianční matice. V případě podmiňování skalární veličinou, tj.  $n_y = 1$ , je také  $\mathbf{L}_y = 1$  a vektor  $\mathbf{K}$  v  $LD$ -faktorizaci je přímo roven Kalmanovu zesílení.

### 6.4.2 Určení sdružené hustoty pravděpodobnosti

Nechť je dána hustota pravděpodobnosti

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x; \mathbf{P}_x)$$

a veličina  $\mathbf{y}$  je afinní funkcí  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{e},$$

kde  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{d}$  jsou matice a vektor se známými prvky a  $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{P}_e)$ . Budeme hledat sdruženou h.p. vektoru veličin  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$ .

Přímým výpočtem lze ukázat, že tato sdružená h.p.  $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  je normální

$$p\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{P}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_e & \mathbf{C}\mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_x\mathbf{C}^T & \mathbf{P}_x \end{bmatrix}\right).$$

Pokud jsou všechny kovarianční matice v  $LD$ -faktorizovaném tvaru, určíme sdruženou h.p. podle následující věty:

**Věta 11** *Nechť je dána hustota pravděpodobnosti*

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x; \mathbf{P}_x),$$

kde

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{L}_x\mathbf{D}_x\mathbf{L}_x^T = \left| \mathbf{d}_x; \mathbf{L}_x^T \right|,$$

a podmíněná hustota pravděpodobnosti

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{y|x}; \mathbf{P}_e),$$

kde podmíněná střední hodnota veličiny  $\mathbf{y}$  je

$$\boldsymbol{\mu}_{y|x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

a podmíněná kovarianční matice

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{L}_e\mathbf{D}_e\mathbf{L}_e^T = \left| \mathbf{d}_e; \mathbf{L}_e^T \right|.$$

Sdružená kovarianční matice ve faktorizovaném tvaru pak je

$$\left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_x \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}_e^T & 0 \\ \mathbf{L}_x^T\mathbf{C}^T & \mathbf{L}_x^T \end{bmatrix} \right|.$$

□

### 6.4.3 Algoritmus dyádové redukce

V mnoha případech je dána faktorizovaná kovarianční matice

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^T$$

ve tvaru, kde  $\mathbf{M}$  není monická dolní trojúhelníková matice, a je třeba transformovat tuto faktorizaci tak, aby  $\mathbf{M}$  byla (alespoň blokově) dolní trojúhelníková, aby bylo možné získat

parametry marginálního a podmíněného rozdělení.

Existuje řada ortogonálních transformací, z nichž z hlediska počtu operací i numerických vlastností mezi nejvýhodnější patří transformace realizovaná posloupností tzv. **dyádových redukcí**.

Uvažujme matici hodnoty (nejvýše) dvě, danou součtem dvou dyád

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \mathbf{m}_i d_i \mathbf{m}_i^T + \mathbf{m}_j d_j \mathbf{m}_j^T,$$

kde  $\mathbf{m}_i^T$  a  $\mathbf{m}_j^T$  jsou  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek matice  $\mathbf{M}^T$  a  $d_i, d_j$  jsou odpovídající prvky na diagonále  $\mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{d}^T]$

$$\mathbf{m}_i^T = [0, \dots, 0, 1, m_{i,i+1}, \dots, m_{i,n}],$$

$$\mathbf{m}_j^T = [0, \dots, 0, m_{j,i}, m_{j,i+1}, \dots, m_{j,n}].$$

**Věta 12** Rozklad matice  $\mathbf{Q}_{i,j}$  může být modifikován na

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \tilde{\mathbf{m}}_i \tilde{d}_i \tilde{\mathbf{m}}_i^T + \tilde{\mathbf{m}}_j \tilde{d}_j \tilde{\mathbf{m}}_j^T,$$

kde prvek  $\tilde{m}_{j,i}$  je nulový, tj.

$$\tilde{\mathbf{m}}_i^T = [0, \dots, 0, 1, \tilde{m}_{i,i+1}, \dots, \tilde{m}_{i,n}],$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_j^T = [0, \dots, 0, 0, \tilde{m}_{j,i+1}, \dots, \tilde{m}_{j,n}],$$

pomocí **dyádové redukce** (Peterka, 1986)

$$\tilde{d}_i = d_i + m_{j,i}^2 d_j$$

$$\tilde{d}_j = d_j / \tilde{d}_i d_i$$

$$\mu = d_j / \tilde{d}_i m_{j,i}$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_j = \mathbf{m}_j - m_{j,i} \mathbf{m}_i$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_i = \mathbf{m}_i + \mu \tilde{\mathbf{m}}_j.$$

□

Aby byly prvky  $m_{i,i} = 1$ , pole  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{M}^T$  mohou být případně rozšířena jednotkovou maticí s nulovými váhami. Transformaci matice  $\mathbf{M}^T$  na horní trojúhelníkovou matici provedeme postupnou aplikací algoritmu dyádové redukce na řádky, jejichž prvky je třeba vynulovat.

## 6.5 Odhad metodou maximální věrohodnosti

Použití metody maximální věrohodnosti je vhodné v situacích, kdy nemáme žádnou apriorní znalost o odhadované **deterministické** veličině  $\mathbf{x}$ , ale máme představu o závislosti měřené veličiny  $\mathbf{y}$  na této odhadované deterministické veličině  $\mathbf{x}$ . Tato závislost je popsána podmíněnou hustotou pravděpodobnosti  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ . Pro dané měření  $\mathbf{y}$  lze tuto podmíněnou h.p. interpretovat jako funkci odhadované veličiny  $\mathbf{x}$

$$l(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}),$$

kterou nazýváme **věrohodnostní funkce**. Maximálně věrohodný odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}(\mathbf{y})$  (Maximum Likelihood) je definován jako hodnota  $\mathbf{x}$ , která maximalizuje věrohodnost pro pozorovaná data

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{x}} l(\mathbf{x}|\mathbf{y}). \quad (6.19)$$

Protože hustoty pravděpodobnosti mají často tvar exponenciální funkce a funkce  $\ln(\cdot)$  je monotónně rostoucí, je v mnoha případech výhodné maximalizovat logaritmus věrohodnostní funkce. Je-li tato logaritmická věrohodnostní funkce diferencovatelná, dostaneme nutnou podmínku maxima ve tvaru tzv. **věrohodnostní rovnice**

$$\left. \frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}} = 0. \quad (6.20)$$

Protože  $\mathbf{x}$  je považováno za deterministickou veličinu, nemá v této souvislosti smysl hovořit o opačné podmíněné hustotě  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ .

### Příklad (Měření s normálním šumem)

Uvažujme model měření neznámé veličiny  $\mathbf{x}$  zatížené normálně rozděleným šumem

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e},$$

kde  $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ , tj.

$$p_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-n_y/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}}.$$

Protože veličina  $\mathbf{y}$  vznikla (pro danou hodnotu  $\mathbf{x}$ ) lineární transformací náhodné veličiny  $\mathbf{e}$  s jednotkovou transformační maticí

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{e} + \mathbf{C}\mathbf{x},$$

bude podmíněná h.p.

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = p_{\mathbf{e}}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})$$

a věrohodnostní funkce  $\mathbf{x}$  pro dané  $\mathbf{y}$  pak bude dána

$$l(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = p_{\mathbf{e}}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n_y/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})}.$$

Logaritmus věrohodnostní funkce bude

$$\ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) - \frac{n_y}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}|.$$

Odtud dostaneme věrohodnostní rovnice

$$\frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = 0.$$

Pro normální rozdělení šumu tedy

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (6.21)$$

□

Všimněme si, že zatímco kvadratická kritéria používaná pro MS odhady vážila přímo chyby odhadu parametrů

$$J_{\text{MS}} = \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}}) \right\},$$

aplikace metody maximální věrohodnosti vede v případě normálního šumu měření na maximalizaci věrohodnostní funkce, což je ekvivalentní minimalizaci kvadratického kritéria

$$J_{\text{ML}} = \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}) \right\}.$$

Metoda maximální věrohodnosti tedy minimalizuje **vážený součet čtverců chyb predikce výstupu** (reziduí)

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}$$

a jako váhovou matici používá **matici přesnosti**  $\mathbf{R}^{-1}$ .

Vyšetříme opět základní vlastnosti odhadů metodou maximální věrohodnosti. Odhad (6.21) je **nevychýlený**, neboť (připomeňme, že odhadujeme deterministickou veličinu  $\mathbf{x}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} | \mathbf{x} \} &= \mathcal{E} \left\{ \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \middle| \mathbf{x} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e}) \middle| \mathbf{x} \right\} \\ &= \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Kovarianční matice chyby odhadu je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}} &= \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}})^T \middle| \mathbf{x} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left( \mathbf{x} - \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e}) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \mathbf{x} - \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e}) \right)^T \middle| \mathbf{x} \right\} \\ &= \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathcal{E} \{ \mathbf{e}\mathbf{e}^T | \mathbf{x} \} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}} = \left( \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1}. \quad (6.22)$$

Všimněte si, že pro  $n_y = 1$  a  $\mathbf{C} = 1$ , tj. model měření

$$y = x + e,$$

dostaneme

$$P_{\hat{x}_{\text{ML}}} = R,$$

tedy chyba odhadu je právě chyba měření.



Pomocí zavedené kovarianční matice chyby ML odhadu (6.22) můžeme upravit vztah pro odhad (6.21) na tvar

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{ML}}} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}. \quad (6.23)$$

Nyní můžeme porovnat vlastnosti odhadů ML a MS v případě modelu měření

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e},$$

kde  $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ . Podle předchozího odstavce bude MS odhad

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}} &= \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \\ &= \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \boldsymbol{\mu}_x) \end{aligned}$$

a kovarianční matice chyby odhadu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}} &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} \\ &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}. \end{aligned}$$

Použitím této kovarianční matice můžeme předchozí vztah pro odhad upravit na

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MS}} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}} \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \boldsymbol{\mu}_x).$$

Dále budeme potřebovat **lemma o inverzi matice**, podle kterého za předpokladu, že existuje inverze matice  $\mathbf{A}$ , platí

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1}. \quad (6.24)$$

Podle tohoto lemmatu dostaneme

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{MS}}} = (\mathbf{P}_{xx}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1}.$$

Porovnáním těchto vztahů s (6.23) a (6.22) vidíme, že v případě chybějící apriorní informace o  $\mathbf{x}$ , což můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\mu}_x = 0$$

a

$$\mathbf{P}_{xx} \rightarrow \infty, \text{ neboli } \mathbf{P}_{xx}^{-1} \rightarrow 0,$$

je ML odhad možno považovat za limitní případ MS odhadu.

Všimněme si ještě jedné zajímavé souvislosti. Aby ML odhad (6.21) existoval, musí mít matice měření plnou hodnotu. Jinak totiž není matice  $\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$  invertovatelná. Tento požadavek nemusí být v praktických aplikacích vždy splněn, a proto se provádí tzv. regularizace odhadu modifikací této matice na

$$\varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}.$$

Všimněme si, že pro pozitivně definitní  $\mathbf{P}_{xx}$  je matice

$$\mathbf{P}_{xx}^{-1} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$$

rovněž vždy pozitivně definitní, a tedy invertovatelná. Apriorní informace vystupující v MS odhadech tedy přirozeným způsobem regularizuje kovarianční matice chyby MS odhadu.

### Příklad ( $n$ nezávislých měření)

Uvažujme  $n$  nezávislých měření veličiny  $x$  s různými přesnostmi, která mohou být popsána modelem

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}x + \mathbf{e},$$

kde

$$\mathbf{C} = [1 \dots 1]^T$$

a

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N} \left( 0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \right).$$

Aplikací estimátoru (6.22), (6.23) dostaneme vztah pro kovarianci chyby odhadu

$$P_{\hat{x}_{\text{ML}}} = \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2} \right)^{-1}$$

a vlastní odhad

$$\hat{x}_{\text{ML}} = \frac{\frac{y_1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{y_n}{\sigma_n^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}}.$$

Příspěvky jednotlivých měření se tedy skládají s váhami úměrnými jejich přesnosti  $1/\sigma_i^2$ . V případě měření se stejnou přesností dostaneme očekávaný výsledek

$$P_{\hat{x}_{\text{ML}}} = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$\hat{x}_{\text{ML}} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

□

Význam odhadů metodou maximální věrohodnosti plyne z následující věty.

**Věta 13 (Cramér–Raova mez)** *Nechť  $\hat{\mathbf{x}}$  je nevychýlený odhad deterministické proměnné  $\mathbf{x}$  založený na měřené veličině  $\mathbf{y}$ . Potom kovarianční matice chyby odhadu  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  je zdola ohraničena*

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} \geq \mathbf{F}^{-1},$$

kde  $\mathbf{F}$  je Fischerova informační matice

$$\mathbf{F} = \mathcal{E} \left\{ \left( \frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right) \left( \frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\}$$

$$= -\mathcal{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}^2} \right\}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když platí

$$\frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = k(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}).$$

□

Nerovnost mezi maticemi  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}} \geq \mathbf{F}^{-1}$  zde chápeme v tom smyslu, že rozdíl  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{F}^{-1} \geq 0$  je pozitivně semidefinitní matice.

V případě, že podmínka na tvar derivace platí, tj.

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}^{-1},$$

říkáme, že odhad je **eficientní**. Lze ukázat, že pokud tuto podmínku lze splnit, pak ji splňuje maximálně věrohodný odhad (eficientní odhady nemusejí vždy existovat).

Ve vyšetřovaném případě měření s normálním šumem jsme dostali

$$\frac{\partial \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}),$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 \ln l(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}^2} = -\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}.$$

Platí tedy

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}}^{-1}$$

a odhad  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}$  je efficientní.

V případě  $n$  nezávislých normálních měření jsme ukázali, že

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_n^2}.$$

Pro rostoucí počet měření  $n$  (za předpokladu, že posloupnost  $1/\sigma_i^2$  neklesá příliš rychle k nule) pak platí  $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}} \rightarrow 0$ , a tedy pravděpodobnost

$$P(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}}\| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Říkáme, že odhad **konverguje podle pravděpodobnosti**. Odhady s touto vlastností nazýváme **konzistentní**.

## 6.6 Bayesovské metody

Klasická statistika pracuje s pojmem **pravděpodobnost** ve smyslu objektivně existující limity relativních četností výskytu uvažovaného jevu. Odhadované parametry jsou považovány za neznámé konstanty. Statistická inference je založena na pojmu **náhodného výběru** z daného rozdělení s neznámými parametry. Na základě znalosti rozdělení, ze kterého získáváme vzorky, jsou odvozeny vlastnosti náhodných výběrů daného rozsahu. Po prove-

dení pokusu se náhodný výběr stává vektorem známých hodnot a na základě těchto hodnot a vlastností náhodného výběru usuzujeme o hodnotách neznámých parametrů (a rizikách plynoucích z chyb s nimi spojenými).

Bayesovská statistika naproti tomu používá pojem pravděpodobnosti ke kvantitativnímu popisu neurčitosti. Pojem **náhodný** může být interpretován rovněž jako **neurčitý** a hustota pravděpodobnosti je pak interpretována jako subjektivní míra důvěry racionálně a konzistentně uvažující osoby o hodnotě odhadovaného parametru. Lze ukázat, že neurčitost má pravděpodobnostní strukturu, tj. že axiomatická matematická teorie pravděpodobnosti vede na operace (popisované například pomocí hustot pravděpodobnosti), které odpovídají přirozeným principům racionálního chování v podmínkách neurčitosti. Význam subjektivní interpretace hustoty pravděpodobnosti je pak v tom, že umíme formálně popsat a kvantifikovat proces akumulování informace získané pozorováním či experimentem.

Bayesovská statistická inference tedy spočívá v korekci subjektivní apriorní hustoty pravděpodobnosti objektivními daty. Tato korekce je popsána Bayesovým vzorcem a spočívá v podmiňování subjektivní představy objektivními daty (v (Savage, 1954) je ukázáno, že za určitých předpokladů o vlastnostech dat lze tímto způsobem dosáhnout libovolně velkého snížení neurčitosti). Informace o parametrech, obsažená v datech, je reprezentována (neparametricky) výslednou podmíněnou hustotou pravděpodobnosti. Výhodou bayesovského přístupu je také přirozená možnost skládání informace z mnoha zdrojů. Získáme tak matematické prostředky, jak zabudovat do inferenčního algoritmu apriorní informaci, která nemusí být v datech obsažena.

### 6.6.1 Bayesovský přístup k popisu neurčitosti

Základní charakteristikou bayesovské statistiky je interpretace pojmu **náhodný** ve smyslu **neurčitý**. Neurčitost lze formálně popsat tak, že pro neurčitý parametr  $\theta$ , nabývající libovolné hodnoty z množiny  $\Omega$ , popíšeme subjektivní míru důvěry, že hodnota parametru  $\theta$  leží v libovolné měřitelné množině  $\Omega_i \subset \Omega$ . Je-li tento „systém preferencí“ konzistentní (tj. splňuje například požadavek aditivity (de Finetti, 1974)), existuje funkce  $p(\theta)$  popisující subjektivní rozdělení **jednotkového množství důvěry** na množině  $\Omega$ . Míra důvěry  $M[ \cdot ]$ , že hodnota parametru leží v množině  $\Omega_i$ , je potom dána

$$M[\theta \in \Omega_i] = \int_{\Omega_i} p(\theta) d\theta.$$

Z předpokladu, že  $\theta \in \Omega$ , plyne

$$\int_{\Omega} p(\theta) d\theta = 1.$$

Z požadavku

$$\Omega_i \supseteq \Omega_j \Rightarrow M[\theta \in \Omega_i] \geq M[\theta \in \Omega_j]$$

pro všechny měřitelné množiny  $\Omega_i, \Omega_j$  vyplývá, že  $p(\theta) \geq 0$ . Funkce  $p(\theta)$  má tedy vlastnosti pravděpodobnostní míry a nazývá se **subjektivní hustota pravděpodobnosti**.

Význam interpretace subjektivní hustoty pravděpodobnosti jako popis neurčitosti parametru  $\theta$  je v tom, že umožňuje **kvantitativní popis** procesu **akumulace informace** získané experimenty či pozorováním do **subjektivního** modelu. Termín „subjektivní“ je

zde použit ve významu „model vytvářený subjektem“, nikoli jako „model neobjektivní, nepřesný“. Využíváme přitom skutečnosti, že **neurčitost** má **strukturu pravděpodobnosti**, tj. že operace, odvozené formálně z axiomatické teorie pravděpodobnosti, odpovídají operacím, vyplývajícím z obecně přijímaných principů racionálního chování v podmínkách neurčitosti. Dvě základní operace mohou být popsány pomocí subjektivního rozdělení pravděpodobnosti takto (Peterka, 1981a):

- Neurčitost proměnných  $\theta_1, \theta_2$  z množiny  $\Omega^1 \times \Omega^2$  je popsána subjektivní hustotou pravděpodobnosti  $p(\theta_1, \theta_2)$ . Jak můžeme popsat neurčitost parametru  $\theta_1$ ?

Popis neurčitosti parametru  $\theta_1$  budeme hledat ve tvaru

$$M[\theta_1 \in \Omega_i^1] = \int_{\Omega_i^1} p_1(\theta_1) d\theta_1.$$

Protože

$$M[\theta_1 \in \Omega_i^1] = M[\theta_1 \in \Omega_i^1 \& \theta_2 \in \Omega^2],$$

je zřejmě

$$M[\theta_1 \in \Omega_i^1] = \int_{\Omega_i^1} \int_{\Omega^2} p(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 d\theta_1,$$

a tedy hustota pravděpodobnosti  $p_1$  bude

$$p_1(\theta_1) = \int_{\Omega^2} p(\theta_1, \theta_2) d\theta_2. \quad (6.25)$$

Neurčitost proměnné  $\theta_1$  je tedy popsána **marginálním subjektivním rozdělením pravděpodobnosti**.

- Neurčitost proměnných  $\theta_1, \theta_2$  z množiny  $\Omega^1 \times \Omega^2$  je popsána subjektivní hustotou pravděpodobnosti  $p(\theta_1, \theta_2)$ . Zjistíme, že hodnota parametru  $\theta_2 = \hat{\theta}_2$ . Jak můžeme nyní popsat neurčitost parametru  $\theta_1$ ?

Pro známou hodnotu  $\theta_2 = \hat{\theta}_2$  bude zřejmě pro popis neurčitosti  $\theta_1$  významné pouze rozdělení

$$p(\theta_1|\hat{\theta}_2) \propto p(\theta_1, \theta_2)|_{\theta_2=\hat{\theta}_2}$$

(symbol  $\propto$  vyjadřuje úměrnost), neboť není racionální důvod tento „systém relativních preferencí“ měnit. Pouze je třeba provést normalizaci celkového množství důvěry

$$M[\theta_1 \in \Omega^1|\theta_2 = \hat{\theta}_2] = \int_{\Omega^1} k p(\theta_1, \hat{\theta}_2) d\theta_1 = 1.$$

Odtud dostaneme hodnotu normalizující konstanty  $k$ , a tedy

$$p(\theta_1|\hat{\theta}_2) = \frac{1}{\int_{\Omega^1} p(\theta_1, \hat{\theta}_2) d\theta_1} p(\theta_1, \hat{\theta}_2),$$

neboli (po obvyklém zjednodušení zápisu, kde rozdíl mezi funkcí a její hodnotou v daném bodě plyne pouze z kontextu)

$$p(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_2) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)}{p(\boldsymbol{\theta}_2)}. \quad (6.26)$$

Neurčitost proměnné  $\boldsymbol{\theta}_1$  při známé hodnotě proměnné  $\boldsymbol{\theta}_2$  je tedy popsána **podmíněným subjektivním rozdělením pravděpodobnosti**.

Předchozí vztah lze rovněž psát ve tvaru

$$p(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2) = p(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_2) p(\boldsymbol{\theta}_2), \quad (6.27)$$

který popisuje způsob, jak **skládat** popisy neurčitosti parametrů, známe-li popis neurčitosti parametru  $\boldsymbol{\theta}_1$  pro známé hodnoty parametru  $\boldsymbol{\theta}_2$  (podmíněné rozdělení) a popis neurčitosti parametru  $\boldsymbol{\theta}_2$  (marginální rozdělení). Opakovaným použitím vztahu (6.27) dostaneme vztah pro sdružený popis neurčitosti  $N$  parametrů

$$p(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_N) = \prod_{k=1}^{N-1} p(\boldsymbol{\theta}_k|\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_N) \cdot p(\boldsymbol{\theta}_N), \quad (6.28)$$

nazývaný **řetězové pravidlo**.

Uvedené dvě základní operace definují logickou strukturu bayesovské statistické inference. Jejich numerická realizace v případě normálního rozdělení subjektivní hustoty pravděpodobnosti byla popsána v odstavci 6.4.

Podobné vztahy platí i pro podmíněná rozdělení pravděpodobnosti. Předpokládejme, že odhadujeme hodnotu  $\boldsymbol{\theta}$  pomocí měřených dat  $\mathbf{y}_1$  a  $\mathbf{y}_2$ . Potom

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2)}{p(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2)}. \quad (6.29)$$

Dosadíme-li podle (6.27)

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) p(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2) = p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_2) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2)$$

a určíme-li marginální podmíněnou h.p. podle (6.25)

$$p(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2) = \int p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_2) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2) d\boldsymbol{\theta},$$

dostaneme známý **Bayesův vzorec**

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \frac{p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_2) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2)}{\int p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_2) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2) d\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.30)$$

Neuvažujeme-li hodnotu  $\mathbf{y}_2$ , dostaneme

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1) = \frac{p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{\int p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}.$$

Je-li dána hodnota  $\mathbf{y}_1$ , pak funkci  $p(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta})$  lze považovat za funkci nikoli  $\mathbf{y}_1$ , ale  $\boldsymbol{\theta}$ . Jak jsme již uvedli v odstavci o metodě maximální věrohodnosti, tuto podmíněnou h.p. nazýváme **věrohodnostní funkcí pro  $\mathbf{y}_1$**  a značíme  $l(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta})$ . Aktualizaci podmíněné h.p. podle

Bayesova vzorce lze tedy psát ve tvaru součinu věrohodnostní funkce a apriorní h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1) \propto l(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}).$$

Tuto úvahu je možné zopakovat i s uvažováním další informace  $\mathbf{y}_2$ . Dostaneme

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \propto l(\mathbf{y}_1|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}_2)p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2),$$

kde podmíněná h.p.  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2)$  je opět z hlediska dat  $\mathbf{y}_1$  apriorní h.p.

Vidíme, že věrohodnostní funkce je jediným prostředkem, jak změřená data, tj. v tomto případě  $\mathbf{y}_1$ , mohou modifikovat **apriorní** znalost o parametru  $\boldsymbol{\theta}$ , popsanou h.p.  $p(\boldsymbol{\theta})$ , popř.  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_2)$ . V obou případech jde o informaci známou **před** změřením dat  $\mathbf{y}_1$ . Věrohodnostní funkce pak reprezentuje veškerou informaci o  $\boldsymbol{\theta}$  obsaženou v těchto datech. Výsledná podmíněná h.p. popisuje **aposteriorní** znalost o parametru  $\boldsymbol{\theta}$ , tj. znalost, která využívá informaci obsaženou v datech  $\mathbf{y}_1$ .

Vliv dat na apriorní h.p. může být vyjádřen sekvenčně (rekurzívně). Uvažujeme-li postupnou akumulaci informace z **nezávislých, stejně rozdělených** dat  $y_1, y_2, \dots$ , je zřejmě

$$p(\mathbf{y}|\theta) = \prod_{i=1}^n p(y_i|\theta),$$

takže také věrohodnostní funkci lze psát ve tvaru

$$l(\theta|\mathbf{y}) = l(\theta|y_1)l(\theta|y_2) \dots l(\theta|y_n).$$

Podmiňování daty pak bude

$$\begin{aligned} p(\theta|y_1) &\propto l(\theta|y_1) p(\theta) \\ p(\theta|y_1, y_2) &\propto l(\theta|y_1, y_2) p(\theta) \\ &\propto l(\theta|y_2) l(\theta|y_1) p(\theta) \\ &\propto l(\theta|y_2) p(\theta|y_1) \\ &\vdots \\ p(\theta|y_1, \dots, y_n) &\propto l(\theta|y_n) p(\theta|y_1, \dots, y_{n-1}), \end{aligned}$$

tj. aposteriorní h.p. z kroku  $y_1$  je apriorní h.p. pro krok  $y_2$ , a tento proces lze rekurzívně opakovat. Zvláště výhodné je, podaří-li se najít takový analytický tvar aktualizované podmíněné h.p., který se při modifikaci věrohodnostní funkcí reprodukuje. Pro **reproduktivní se podmíněné h.p.** lze funkcionální rekuzi redukovat na algebraickou rekuzi na parametrech této podmíněné h.p.

Z multiplikativního charakteru akumulace informace je dále zřejmé, že

- na pořadí skládání informace obsažené v nezávislých datech nezáleží
- nulová hodnota apriorní h.p. již nemůže být žádnými hodnotami dat změněna.

**Poznámka:** Je-li  $\int l(\theta|\mathbf{y}) d\theta < \infty$ , potom funkci

$$\frac{l(\theta|\mathbf{y})}{\int l(\theta|\mathbf{y}) d\theta}$$

nazýváme standardizovaná věrohodnostní funkce. □

### 6.6.2 Volba apriorní hustoty pravděpodobnosti

Častým tématem diskuzí kritizujících bayesovskou metodologii je závislost výsledků na apriorní informaci. V situacích, kdy data nesou informaci o odhadovaných parametrech (což odpovídá předpokladu správně zvolené struktury modelu a dobře navrženého identifikačního experimentu), by **neinformativní** apriorní h.p. měla být **dominována** věrohodností, tj. apriorní h.p. by měla být **lokálně plochá** vzhledem k věrohodnostní funkci. Tuto vlastnost má např. **rovnoměrné rozdělení** pravděpodobnosti.

**Poznámka:** Uvažujme apriorní h.p.  $p(\theta) > 0$ ,  $p(\theta) \propto \text{konst.}$  Není-li objem množiny možných hodnot parametru konečný, pak taková h.p. nemůže být hustotou pravděpodobnosti a nazýváme ji **nevlastní apriorní h.p.**. Při řešení praktických úloh však musí být neinformativní h.p. úměrná konstantě pouze v oblasti nenulové věrohodnostní funkce a nikoli na celé množině.  $\square$

Požadavek, aby apriorní h.p. byla dominována věrohodnostní funkcí, je rozumný za předpokladu, že při vhodně zvolené struktuře modelu a dostatečně bohatém testovacím signálu může experiment přinést dostatečné množství informace o všech parametrech. Tato informace může být akumulována tak dlouho, až je podstatně přesnější než apriorní informace; výsledná podmíněná h.p. tedy není na apriorní h.p. příliš závislá. Tento požadavek se nazývá **princip stabilního odhadu**.

Naopak v situacích, kdy akumulovaná informace obsažená v datech není přesnější než informace apriorní, není věrohodnostní funkce dominující. V takové situaci může být sporné, zda vůbec má smysl experiment provádět. Výjimkou je situace, kdy uživatel zná apriorní informaci (např. omezení získané matematicko-fyzikální analýzou problému), která není v datech obsažena. Potom dochází k žádoucímu **skládání** této apriorní informace s informací obsaženou v datech a nepožadujeme, aby apriorní informace byla informací v datech úplně potlačena, tj. věrohodnostní funkce nemusí být dominující.

V mnoha situacích je výhodné najít určitý kompromis mezi neinformativní a informativní apriorní h.p. Vhodně zvolená informativní apriorní h.p. může např. podstatně zlepšit přechodový děj při identifikaci parametrů pro adaptivní řízení (Kárný a Halousková, 1992). K otázce volby informativní apriorní h.p. se vrátíme v dalších odstavcích.

Další problém souvisí s volbou parametrizace modelu. Jestliže zvolíme apriorní h.p. parametru  $\theta$  lokálně rovnoměrnou, potom distribuce  $\theta^{-1}$ ,  $\log \theta$  nebo jiných transformací parametru  $\theta$ , které rovněž mohou odpovídat „rozumné“ parametrizaci modelu, již rovnoměrná nebude. Bayesovská inference v různých souřadných systémech s „neinformativní“ apriorní h.p. (interpretujeme-li „neinformativní“ jako „rovnoměrně rozdělenou“) by tedy vedla k rozdílným výsledkům.

Odpověď na otázku, při které parametrizaci modelu je správné volit neinformativní apriorní h.p. jako rovnoměrně rozdělenou, spočívá v nalezení tzv. **věrohodností posouvaných daty** (data translated likelihood (Box a Tiao, 1973)). Předpokládejme, že existuje transformace souřadnic taková, že v transformovaných souřadnicích se průběhy věrohodnostní funkce v závislosti na datech liší **pouze polohou**, zatímco **tvar** věrohodnostní funkce je **na datech nezávislý**. V těchto souřadnicích je tedy množství informace obsažené ve věrohodnostní funkci nezávislé na hodnotě odhadovaného parametru a apriorní subjektivní h.p. je právě v tomto souřadném systému lokálně rovnoměrná. Při použití jiného souřadného systému je třeba rovnoměrné apriorní rozdělení transformovat.



Obecně je množství informace obsažené ve věrohodnostní funkci popsané hodnotou Fischerovy míry informace. Neinformativní apriorní hustotu pravděpodobnosti libovolného parametru  $\xi$  lze proto určit podle **Jeffreysova pravidla** (Box a Tiao, 1973) tak, aby

$$p(\xi) \propto \mathcal{F}(\xi)^{1/2},$$

tj. apriorní h.p. je úměrná odmocnině z Fischerovy míry informace

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{E} \left\{ -\frac{\partial^2 \log l(\xi|\mathbf{y})}{\partial \xi^2} \right\},$$

a je tedy rovnoměrná právě tehdy, když  $\mathcal{F}(\xi)$  je nezávislá na hodnotě  $\xi$ . Toto pravidlo lze zobecnit i na vektorové parametry.

Souvislost neinformativní apriorní h.p. s vlastnostmi věrohodnostní funkce budeme nyní ilustrovat na odhadování parametrů polohy (tj. střední hodnoty) a parametrů měřítka (tj. rozptylu) normálního rozdělení.

### Příklad (Apriorní h.p. pro parametr polohy)

Nechť  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  je náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  se známým rozptylem  $\sigma^2$ . Věrohodnostní funkce pro  $\mu$  bude mít tvar ( $y_i$  jsou nezávislé náhodné veličiny)

$$\begin{aligned} l(\mu|\sigma, \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}. \end{aligned}$$

Upravíme exponent na tvar

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\mu - \bar{y})^2,$$

kde

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

je výběrový průměr. Protože první část tohoto výrazu  $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  je pro známá data konstantní, věrohodnostní funkce bude

$$l(\mu|\sigma, \mathbf{y}) \propto e^{-\frac{(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2/n}}.$$

Poloha těchto křivek je určena statistikou  $\bar{y}$  a jejich tvar určený parametrem  $\sigma^2/n$  je na datech nezávislý (viz obr. 6.1, kde jsou vyznačeny průběhy věrohodnostní funkce pro  $\bar{y} = 2, 4, 6, 8$ ).  $\square$

Věrohodnostní funkce v předchozím příkladu je posouvána daty, proto pro odhad parametru polohy  $\mu$  je vhodnou neinformativní h.p. rovnoměrné rozdělení.

Obrázek 6.1: Průběhy věrohodnostní funkce pro parametr polohy

### Příklad (Apriorní h.p. pro parametr měřítka)

Nechť  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  je náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  se známou střední hodnotou  $\mu$ . Věrohodnostní funkce pro  $\sigma$  bude mít tvar

$$\begin{aligned} l(\sigma|\mu, \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\propto \sigma^{-n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

kde

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$$

je výběrový rozptyl. Poloha i tvar křivky závisejí na hodnotě statistiky  $s^2$  (viz obr. 6.2, kde jsou vyznačeny průběhy věrohodnostní funkce pro  $s^2 = 1, 2, 4, 6$ ).  $\square$

Věrohodnostní funkce v tomto příkladu není posouvána daty, a proto pro odhad parametru měřítka  $\sigma$  není lokálně rovnoměrné rozdělení vhodnou neinformativní h.p.

### Příklad (dokončení)

Najdeme věrohodnostní funkci pro odhad parametru měřítka z předcházejícího příkladu v transformovaných souřadnicích  $\log \sigma$ . Vynásobíme-li věrohodnostní funkci konstantou  $s^n$ , platí

$$l(\sigma|\mu, \mathbf{y}) \propto \frac{s^n}{\sigma^n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}},$$

Obrázek 6.2: Průběhy věrohodnostní funkce pro parametr měřítka

a tedy (protože  $x^n = \exp(n \log x)$ )

$$l(\log \sigma | \mu, \mathbf{y}) \propto \exp \left( n(\log s - \log \sigma) - \frac{n}{2} e^{2(\log s - \log \sigma)} \right).$$

Věrohodnostní funkce  $l(\log \sigma | \mu, \mathbf{y})$  je zřejmě posouvaná daty. □

Tento příklad ukazuje, že rovnoměrné rozdělení je vhodnou neinformativní apriorní h.p. k odhadu parametru  $\log \sigma$ . Známe-li neinformativní apriorní h.p. v „souřadnicích“  $\log \sigma$ , pak tuto h.p. v „souřadnicích“  $\sigma$  získáme podle věty o transformaci h.p.

$$p(\sigma | \mu) = p(\log \sigma | \mu) \left| \frac{d \log \sigma}{d \sigma} \right| \propto \sigma^{-1}.$$

Tato apriorní h.p. je vyznačena na obr. 6.2 čárkovanou čarou. Interpretace pojmu „neinformativní“ apriorní h.p. je tedy zhruba taková, že v každém souřadném systému je hodnota takové apriorní h.p. úměrná „schopnosti“ věrohodnostní funkce modifikovat apriorní h.p. (viz obrázek).

### 6.6.3 Odhad parametrů normálního rozdělení $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

V tomto odstavci shrneme výsledky normální teorie, tj. odhadování parametrů rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Uvedeme vlastnosti podmíněné h.p. parametru polohy  $\mu$  pro známý parametr měřítka  $\sigma$  i výsledky pro současné odhadování parametrů  $\mu$  a  $\sigma$ . Chceme-li získat bodový odhad těchto parametrů, volíme obvykle maximum aposteriorní h.p. (tzv. MAP odhady), nebo aposteriorní podmíněnou střední hodnotu. Pro normální rozdělení tyto dva odhady splývají.

**Odhad parametru  $\mu$  pro známé  $\sigma$** 

Nechť  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  je náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  se známým rozptylem  $\sigma^2$ . Budeme hledat aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\mu$

$$p(\mu | \sigma, \mathbf{y}).$$

Věrohodnostní funkci a neinformativní apriorní h.p. jsme našli v příkladu v předchozím odstavci ve tvaru

$$l(\mu | \sigma, \mathbf{y}) \propto e^{-\frac{(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2/n}},$$

kde  $\bar{y} = 1/n \sum_{i=1}^n y_i$  je výběrový průměr a neinformativní apriorní h.p.

$$p(\mu | \sigma) \propto \text{konst.}$$

Bayesovský odhad parametru  $\mu$  s touto apriorní h.p. bude tedy úměrný věrohodnostní funkci. Po určení příslušné normalizační konstanty dostaneme aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\mu$

$$p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) = (2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} e^{-\frac{(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2/n}}, \quad (6.31)$$

tj. parametr  $\mu$  je popsán aposteriorní podmíněnou h.p.

$$p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\bar{y}, \sigma^2/n).$$

**Odhad parametru  $\sigma$  pro známé  $\mu$** 

Nechť  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  je opět náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  se známou střední hodnotou  $\mu$ . Budeme hledat aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\sigma > 0$

$$p(\sigma | \mu, \mathbf{y}).$$

Věrohodnostní funkci jsme našli v předchozím odstavci ve tvaru

$$l(\sigma | \mu, \mathbf{y}) \propto \sigma^{-n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $s^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$  je výběrový rozptyl. Neinformativní apriorní h.p. jsme našli v příkladu v předchozím odstavci

$$p(\sigma | \mu) \propto \sigma^{-1}.$$

Bayesovský odhad parametru  $\sigma$  s touto apriorní h.p. bude

$$p(\sigma | \mu, \mathbf{y}) \propto l(\sigma | \mu, \mathbf{y})p(\sigma | \mu) = \sigma^{-(n+1)} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}.$$

Po určení příslušné normalizační konstanty dostaneme aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\sigma$

$$p(\sigma|\mu, \mathbf{y}) = \frac{(ns^2)^{n/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \sigma^{-(n+1)} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad (6.32)$$

kde  $\Gamma(\cdot)$  je funkce gamma. Veličina  $x = ns^2/\sigma^2$  má aposteriorní podmíněné rozdělení  $\chi_n^2$  (chí-kvadrát s  $n$  stupni volnosti), jehož hustota pravděpodobnosti je

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}.$$

Rozdělení  $\chi_n^2$  je rozdělení součtu čtverců  $n$  nezávislých veličin s rozdělením  $\mathcal{N}(0, 1)$  a pro  $x \sim \chi_n^2$  platí

$$\mathcal{E}\{x\} = n,$$

$$\text{cov}\{x\} = n.$$

### Současný odhad parametrů $\mu$ a $\sigma$

Nechť  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$  je náhodný výběr z rozdělení  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , kde oba parametry  $\mu, \sigma$  jsou neznámé. Budeme hledat aposteriorní podmíněnou h.p. těchto parametrů

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{y}).$$

Věrohodnostní funkce bude mít tvar

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma | \mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\propto \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Upravíme nyní výraz v exponentu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \mu)^2 \\ &= \nu s^2 + n(\bar{y} - \mu)^2, \end{aligned}$$

kde

$$\nu = n - 1$$

je počet stupňů volnosti,

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

je výběrový průměr a

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

je výběrový rozptyl (na rozdíl od odhadu parametru  $\sigma$  pro známý parametr  $\mu$  je v tomto případě počet stupňů volnosti nižší  $\nu = n-1$ ).

Věrohodnostní funkci lze upravit na tvar (viz postupy v předchozím odstavci)

$$l(\mu, \sigma | \mathbf{y}) \propto \left(\frac{s}{\sigma}\right)^n e^{\left\{-\frac{n}{2} \left(\frac{\mu - \bar{y}}{s}\right)^2 \frac{s^2}{\sigma^2} - \frac{\nu}{2} \frac{s^2}{\sigma^2}\right\}}.$$

Pro konstantní hodnotu  $s$  je tato věrohodnostní funkce posouvána daty  $\bar{y}$  ve směru osy  $\mu$  a pro konstantní hodnotu  $\bar{y}$  je tato věrohodnostní funkce funkcí poměru  $\frac{s}{\sigma}$ , tj. bude posouvána daty v logaritmických souřadnicích ve směru osy  $\log \sigma$ .

Změnou hodnoty  $s$  ve výrazu  $\left(\frac{\mu - \bar{y}}{s}\right)^2$  dochází rovněž ke změně měřítka ve směru osy  $\mu$ . Předpokládáme-li však, že apriorní informace o parametrech  $\mu$  a  $\sigma$  jsou vzájemně nezávislé, lze tuto interakci zanedbat a neinformativní apriorní h.p. bude

$$p(\mu, \sigma) = p(\mu)p(\sigma) \propto k \cdot \sigma^{-1}.$$

Použitím této apriorní h.p. dostaneme aposteriorní podmíněnou h.p.

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{y}) \propto \sigma^{-(n+1)} e^{\left\{-\frac{n(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2} - \frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

a s použitím vztahů

$$\int_0^\infty x^{-(\nu+1)} e^{-a/x^2} dx = \frac{1}{2} a^{-\nu/2} \Gamma(\nu/2)$$

a

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$

určíme příslušnou normalizační konstantu aposteriorní podmíněné h.p.

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{y}) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu s^2}{2}\right)^{\nu/2} \sigma^{-(n+1)} e^{\left\{-\frac{n(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2} - \frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right\}}. \quad (6.34)$$

Tuto sdruženou podmíněnou h.p. můžeme psát ve tvaru

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{y}) = p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) p(\sigma | \mathbf{y}),$$

kde **podmíněná hustota pravděpodobnosti  $\mu$  pro dané  $\sigma$**  bude totožná s (6.31)

$$p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2/n}\right)^{1/2} e^{-\frac{(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2/n}},$$

což je normální rozdělení

$$p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\bar{y}, \sigma^2/n)$$

(všimněte si, jak přesnost odhadu opět roste s počtem dat) a **marginální hustota pravděpodobnosti**  $\sigma$  bude

$$p(\sigma | \mathbf{y}) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \left( \frac{\nu s^2}{2} \right)^{\nu/2} \sigma^{-(\nu+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.35)$$

Veličina  $\frac{\nu s^2}{\sigma^2}$  má tedy rozdělení chí-kvadrát s  $\nu = n-1$  stupni volnosti

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2} \sim \chi_\nu^2.$$

V případě, že se zajímáme pouze o hodnotu parametru  $\mu$ , ale hodnota parametru  $\sigma$  je neznámá, je třeba najít podmíněnou h.p. obou parametrů a potom určit vyintegrováním pomocného parametru **marginální hustotu pravděpodobnosti**  $\mu$

$$p(\mu | \mathbf{y}) = \int_0^\infty p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) p(\sigma | \mathbf{y}) d\sigma.$$

S využitím výše uvedených vztahů dostaneme

$$p(\mu | \mathbf{y}) = \left( \frac{n}{\nu s^2} \right)^{1/2} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\Gamma(1/2)} \left[ 1 + \frac{n(\mu - \bar{y})^2}{\nu s^2} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (6.36)$$

Veličina  $t = \frac{\mu - \bar{y}}{s/\sqrt{n}}$  má tedy jednorozměrné Studentovo rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti

$$p(t) = \left( \frac{1}{\nu} \right)^{1/2} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\Gamma(1/2)} \left[ 1 + \frac{t^2}{\nu} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

což budeme značit

$$p(\mu | \mathbf{y}) = t(\bar{y}, s^2/n, \nu).$$

Pro velká  $\nu$  se toto rozdělení blíží normálnímu rozdělení.

### Postačující statistiky

Ve všech uvedených případech jsme viděli, že data ovlivňují průběh aposteriorní podmíněné h.p. prostřednictvím věrohodnosti, která závisí pouze na několika známých funkcích dat. V případě odhadu parametru  $\mu$  pro známé  $\sigma$  je

$$l(\mu | \sigma, \mathbf{y}) \propto e^{-\frac{(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2/n}}$$

a všechna další informace v datech (kromě počtu měření a výběrového průměru  $\bar{y}$ ) neovlivní aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\mu$ . Veličinu  $\bar{y}$  spolu s rozsahem náhodného výběru  $n$  proto nazýváme **postačující (suficientní) statistikou pro odhad parametru**  $\mu$ .

Pro odhad parametru  $\sigma$  pro známé  $\mu$  je

$$l(\sigma|\mu, \mathbf{y}) \propto \sigma^{-n} e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}$$

a postačující statistikou pro odhad parametru  $\sigma$  je

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2$$

a počet měření  $n$ .

V případě, že oba parametry  $\mu$ ,  $\sigma$  jsou neznámé, je věrohodnostní funkce

$$l(\mu, \sigma|\mathbf{y}) \propto \sigma^{-(n+1)} e^{\left\{ -\frac{n(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2} - \frac{\nu s^2}{2\sigma^2} \right\}}.$$

Počet měření  $n$  a dále veličiny

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

(výběrový průměr) a

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

(výběrový rozptyl) nazýváme **sdužené postačující statistiky**. Protože jde zároveň o množinu funkcí dat s nejmenším počtem prvků, jsou tyto funkce zároveň **minimální postačující statistiky**.

Existence konečné postačující statistiky umožňuje akumulovat veškerou informaci obsaženou v datech v omezené paměti počítače. V tomto smyslu úzce souvisí s definicí stavu dynamického systému, kterou uvedeme později. Upozorníme zde též, že existence takové konečné postačující statistiky je pro obecná rozdělení spíše zvláštností než obecnou vlastností.

### Informativní apriorní h.p. $\sigma$

Sduženou podmíněnou h.p.  $\mu$  a  $\sigma$  lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$p(\mu, \sigma|\mathbf{y}) = p(\mu|\sigma, \mathbf{y}) p(\sigma|\mathbf{y}),$$

kde  $p(\mu|\sigma, \mathbf{y})$  je dána (6.31) a  $p(\sigma|\mathbf{y})$  je dána (6.35). Marginální podmíněná h.p. parametru  $\mu$  je dána

$$p(\mu|\mathbf{y}) = \int_0^\infty p(\mu|\sigma, \mathbf{y}) p(\sigma|\mathbf{y}) d\sigma. \quad (6.37)$$

Tato integrace ukazuje, jak je aposteriorní podmíněná h.p. parametru  $\mu$  ovlivněna znalostí parametru  $\sigma$ . Je-li apriorně přesně známo, že  $\sigma = \sigma_0$ , pak

$$p(\sigma|\mathbf{y}) = \delta(\sigma - \sigma_0)$$



a potom

$$p(\mu | \mathbf{y}) = \int_0^\infty p(\mu | \sigma, \mathbf{y}) \delta(\sigma - \sigma_0) d\sigma = p(\mu | \sigma_0, \mathbf{y}).$$

Jestliže naopak a priori není o  $\sigma$  známo nic, pak všechna dostupná informace je obsažena v datech, tj.

$$p(\sigma | \mathbf{y}) \propto \sigma^{-(\nu+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}}.$$

Podmíněná h.p. parametru  $\sigma$  tvoří váhy, s nimiž se při výpočtu marginální podmíněné h.p. parametru  $\mu$  podle (6.37) uplatňují jednotlivé hodnoty podmíněné h.p.  $p(\mu | \sigma, \mathbf{y})$  na vytvoření výsledného  $t$ -rozdělení (6.36).

Uvažujme nyní situaci, kdy uživatel má určitou apriorní představu o hodnotě parametru  $\sigma$ , kterou by chtěl zabudovat do výpočtu podmíněné h.p.  $p(\mu | \mathbf{y})$ . Vhodnou **informativní** apriorní h.p.  $p(\sigma)$  lze najít následující myšlenkovou konstrukcí: Předpokládejme, že k určení apriorní h.p.  $p(\sigma)$  máme k dispozici pomocná data  $\mathbf{y}_a = [y_{a1}, \dots, y_{an_a}]^T$ . Na jejich základě určíme marginální aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\sigma$ , která bude mít tvar (6.35)

$$p(\sigma | \mathbf{y}_a) \propto \sigma^{-(\nu_a+1)} e^{-\frac{\nu_a s_a^2}{2\sigma^2}}.$$

Tuto aposteriorní podmíněnou h.p. použijeme jako informativní apriorní h.p. při zpracování hlavního vzorku, tj.

$$p(\sigma) \propto \sigma^{-(\nu_a+1)} e^{-\frac{\nu_a s_a^2}{2\sigma^2}},$$

kde  $\nu_a$  obsahuje informaci o přesnosti tohoto apriorního odhadu a  $s_a$  je informace o hodnotě parametru  $\sigma$ . Aposteriorní podmíněná h.p. pak bude

$$p(\mu, \sigma | \mathbf{y}) \propto \sigma^{-n} e^{\left\{ -\frac{n(\mu - \bar{y})^2}{2\sigma^2} - \frac{\nu s^2}{2\sigma^2} \right\}} \sigma^{-(\nu_a+1)} e^{-\frac{\nu_a s_a^2}{2\sigma^2}}.$$

Odtud marginální podmíněná h.p.

$$p(\sigma | \mathbf{y}) \propto \sigma^{-(\nu_a+\nu+1)} e^{-\frac{\nu_a s_a^2 + \nu s^2}{2\sigma^2}} = \sigma^{-(\bar{\nu}+1)} e^{-\frac{\bar{\nu} \bar{s}^2}{2\sigma^2}},$$

tj. veličina  $\frac{\bar{\nu} \bar{s}^2}{\sigma^2}$  má rozdělení  $\chi_{\bar{\nu}}^2$  s počtem stupňů volnosti

$$\bar{\nu} = \nu_a + \nu \tag{6.38}$$

a faktor měřítka je určen vztahem

$$\bar{\nu} \bar{s}^2 = \nu_a s_a^2 + \nu s^2. \tag{6.39}$$

Marginální rozdělení  $p(\mu | \mathbf{y})$  pak bude

$$p(\mu | \mathbf{y}) \propto \left[ 1 + \frac{n(\mu - \bar{y})^2}{\bar{\nu} \bar{s}^2} \right]^{-\frac{\bar{\nu}+1}{2}}. \tag{6.40}$$

Veličina  $t = \frac{\mu - \bar{y}}{s/\sqrt{n}}$  má tedy Studentovo rozdělení s  $\bar{\nu}$  stupni volnosti.

Vliv informativní apriorní h.p. na výsledný odhad (6.40) tedy spočívá ve zvýšení počtu stupňů volnosti dle (6.38) a ve změně faktoru měřítka (6.39). Při výpočtu výsledného faktoru měřítka dle (6.39) lze jednotlivé počty stupňů volnosti  $\nu_a$  a  $\nu$  chápat jako relativní váhy vlivu apriorního odhadu  $s_a^2$  a výběrového rozptylu  $s^2$  na výslednou hodnotu  $\bar{s}^2$ .

#### 6.6.4 Odhad parametrů lineárního normálního modelu

Předpokládejme, že střední hodnoty výsledků skalárních měření

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_K]^T$$

jsou lineární funkcí známých dat

$$\mathbf{z}_i^T = [z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in}] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

vážených neznámými parametry

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$$

a že jednotlivé měřené hodnoty jsou nezávislé veličiny s normálním rozdělením a stejným rozptylem  $\sigma_e^2$ . Takto definovaný soubor dat nazýváme **normální lineární model** a lze jej popsat soustavou rovnic

$$y_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\theta} + e_i \quad , \quad i = 1, \dots, K, \quad (6.41)$$

kde

$$e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2).$$

Definujeme-li matici dat

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_K^T \end{bmatrix}$$

a vektor

$$\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_K]^T,$$

lze tuto soustavu popsat

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}. \quad (6.42)$$

#### Odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ pro známé $\sigma_e$

Předpokládejme, že parametr  $\sigma_e$  je známý, a hledejme aposteriorní podmíněnou h.p. parametru  $\boldsymbol{\theta}$ . Věrohodnostní funkce bude mít tvar

$$l(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}, \sigma_e) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})}. \quad (6.43)$$

Předpokládejme, že hodnost matice  $\mathbf{Z}$  je  $n$ . Potom kvadratickou formu v (6.43) lze upravit na součet

$$(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y}$$

je odhad vektoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  metodou nejmenších čtverců a

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

je vektor vyrovnaných hodnot  $\mathbf{y}$ . Důkaz lze provést dosazením. První část rozkladu  $(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ , kterou nazýváme **reziduální součet čtverců**, nezávisí na parametrech  $\boldsymbol{\theta}$ . Věrohodnostní funkci je proto možné psát jako

$$l(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}.$$

Křivky konstantní věrohodnosti v prostoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  jsou (hyper)elipsoidy se středem  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  a tvarem nezávislým na  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ; věrohodnostní funkce je (pro danou matici  $\mathbf{Z}$ ) posouváná daty a neinformativní apriorní h.p. je tedy lokálně rovnoměrná. Použitím vztahu

$$\int_{R^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})} d\boldsymbol{\theta} = \frac{(\sqrt{2\pi}\sigma_e)^n}{|\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}|^{1/2}}$$

určíme aposteriorní podmíněnou h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi}\sigma_e)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (6.44)$$

Tato podmíněná h.p. je tedy normální

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \sigma_e^2(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}).$$

**Poznámka:** Matici  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$  lze rovněž psát ve tvaru

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^K \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T.$$

Odtud lze ukázat, jak rostoucí množství dat ovlivňuje přesnost odhadu parametrů (pokud data dostatečně vybudují celý prostor dimenze  $n$ ), a najít nutné a postačující podmínky konvergence odhadu (Bittanti a další, 1990).  $\square$

Pomocí aposteriorní podmíněné h.p. (6.44) můžeme určit **oblasti největší aposteriorní pravděpodobnosti výskytu parametrů** (H.P.D. regions (Box a Tiao, 1973)). Oblast  $\Omega$  v prostoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  se nazývá oblast největší aposteriorní pravděpodobnosti výskytu parametrů s pravděpodobnostním obsahem  $1 - \alpha$ , jestliže

$$\text{a) } P[\boldsymbol{\theta} \in \Omega | \mathbf{y}] = 1 - \alpha,$$

b) pro libovolnou dvojici  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Omega$ ,  $\boldsymbol{\theta}_2 \notin \Omega$  platí

$$p(\boldsymbol{\theta}_1|\mathbf{y}) \geq p(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}).$$

Z těchto vlastností plyne, že oblast největší aposteriori podmíněné h.p. je oblastí s pravděpodobnostním obsahem  $1 - \alpha$  nejmenšího objemu. Protože podmíněná h.p. (6.44) je monotónně klesající funkcí kvadratické formy

$$q(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{\sigma^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

budou oblasti největší aposteriori podmíněné h.p. ohraničené kovariančními elipsoidy

$$q(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{\sigma^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{konst.}$$

Z vlastností mnohazměrného normálního rozdělení vyplývá, že rozdělení kvadratické formy  $q(\boldsymbol{\theta})$  je  $\chi_n^2$ . Oblast, v níž se parametry vyskytují s pravděpodobností  $1 - \alpha$ , je proto určena nerovností

$$q(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{\sigma^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq q_\alpha,$$

kde  $q_\alpha$  je horní  $\alpha$ -kvantil rozdělení  $\chi_n^2$ , tj. platí

$$\int_{-\infty}^{q_\alpha} \chi_n^2(x) dx = 1 - \alpha.$$

### Současný odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ a $\sigma_e$

V tomto odstavci budeme předpokládat parametr  $\sigma_e$  rovněž neznámý a budeme hledat sdruženou aposteriori podmíněnou h.p. parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma_e$ . Věrohodnostní funkce bude mít tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathbf{y}) \propto \sigma_e^{-K} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2} (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})}.$$

Kvadratickou formu opět upravíme na tvar

$$(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

a definujeme **reziduální rozptyl**

$$s^2 = \frac{1}{\nu} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}),$$

kde počet stupňů volnosti je

$$\nu = K - n.$$

Potom věrohodnostní funkci lze upravit na tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathbf{y}) \propto \left(\frac{s}{\sigma_e}\right)^K e^{\left\{-\frac{\nu s^2}{2\sigma_e^2} - \frac{s^2}{2\sigma_e^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{s^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\right\}}.$$

Na základě stejných úvah jako v předchozím odstavci lze ukázat, že neinformativní apriorní h.p. je

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e) \propto \sigma_e^{-1}.$$

Aposteriorní podmíněná h.p. pak bude

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathbf{y}) \propto \sigma_e^{-(K+1)} e^{\left\{ -\frac{\nu s^2}{2\sigma_e^2} - (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{2\sigma_e^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\}}.$$

Tuto podmíněnou h.p. lze psát ve tvaru

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) p(\sigma_e | \mathbf{y}),$$

kde **podmíněná hustota pravděpodobnosti  $\boldsymbol{\theta}$  pro dané  $\sigma_e$**  bude totožná s (6.44)

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi}\sigma_e)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

což je normální rozdělení

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \sigma_e^2 (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}),$$

a **marginální hustota pravděpodobnosti  $\sigma_e$**  bude

$$p(\sigma_e | \mathbf{y}) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \left( \frac{\nu s^2}{2} \right)^{\nu/2} \sigma_e^{-(\nu+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma_e^2}}, \quad (6.45)$$

tedy veličina  $\frac{\nu s^2}{\sigma_e^2}$  má rozdělení chí-kvadrát s  $\nu = K - n$  stupni volnosti

$$\frac{\nu s^2}{\sigma_e^2} \sim \chi_\nu^2.$$

K určení **marginálního rozdělení parametru  $\boldsymbol{\theta}$**  využijeme opět vztah

$$\int_0^\infty x^{-(n+1)} e^{-a/x^2} dx = \frac{1}{2} a^{-n/2} \Gamma(n/2)$$

a dostaneme

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}|^{1/2}}{(\nu s^2)^{n/2}} \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{\Gamma(\nu/2)\Gamma(1/2)^n} \left[ 1 + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\nu s^2} \right]^{-(\nu+n)/2}, \quad (6.46)$$

což je  $n$ -rozměrné Studentovo rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) = t_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}, s^2 (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}, \nu).$$

Podmíněná h.p. (6.46) je opět monotónně klesající funkcí kvadratické formy

$$q(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{s^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Lze ukázat, že tato kvadratická forma má rozdělení  $F(n, \nu)$ . Oblast, v níž se parametry vyskytují s pravděpodobností  $1 - \alpha$ , je proto určena nerovností

$$q(\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}}{s^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq q_\alpha,$$

kde  $q_\alpha$  je horní  $\alpha$ -kvantil rozdělení  $F(n, \nu)$ .



# Kapitola 7

## Filtrace, predikce a interpolace

V této kapitole uvedeme základní výsledky lineární filtrace. Protože úlohy filtrace, predikce a interpolace (též vyrovňávání - smoothing) jsou v teorii řízení většinou formulovány pro časové řady, budeme požadovat, aby navržené algoritmy měly rekurzivní (sekvenční) charakter.

### 7.1 Rekurzivní odhadování

Nejprve ukážeme modifikace některých metod odhadování tak, aby bylo možné zpracovávat měřená data rekurzivně. Přitom dospějeme k důležitému pojmu **bělicí filtr** (whitening filter).

#### Rekurzivní výpočet výběrové střední hodnoty

Základní statistikou při odhadování veličiny  $x$  na základě měření  $k$  hodnot  $y_1, \dots, y_k$  je výběrový průměr

$$\bar{y}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i. \quad (7.1)$$

Chceme-li po změření další hodnoty  $y_{k+1}$  aktualizovat hodnotu  $\bar{y}_k$  na hodnotu  $\bar{y}_{k+1}$ , není třeba provádět celý výpočet (7.1), ale platí

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k+1} &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} y_i \\ &= \frac{1}{k+1} \left( \sum_{i=1}^k y_i + y_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} (k \bar{y}_k + y_{k+1}). \end{aligned}$$

Aktualizaci je tedy možno provádět rekurzivně jako

$$\bar{y}_{k+1} = \frac{k}{k+1} \bar{y}_k + \frac{1}{k+1} y_{k+1} \quad (7.2)$$



$$= \bar{y}_k + \frac{1}{k+1} \tilde{y}_{k+1|k}$$

s počáteční podmínkou  $\bar{y}_0 = 0$ , kde

$$\tilde{y}_{k+1|k} = y_{k+1} - \bar{y}_k$$

je chyba predikce měření  $y_{k+1}$  na základě známých dat  $\{y_1, \dots, y_k\}$ .  $\square$

Výsledná rovnice pro aktualizaci odpovídá svojí strukturou lineárnímu časově proměnnému systému. Je vidět, že vliv nových měření na výběrový průměr s časem klesá. Uvidíme, že podobné vlastnosti budou mít i další rekurzivní metody.

### Rekurzivní výpočet výběrového rozptylu

Další často užívanou statistikou je výběrový rozptyl

$$s_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}_k)^2. \quad (7.3)$$

Aktualizaci  $s_k^2$  na  $s_{k+1}^2$  lze popsat

$$\begin{aligned} s_{k+1}^2 &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (y_i - \bar{y}_{k+1})^2 \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} ((y_i - \bar{y}_k) + (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}))^2 \\ &= \frac{k}{k+1} s_k^2 + \frac{1}{k+1} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 - (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2. \end{aligned}$$

Podle předchozího příkladu upravíme poslední člen

$$(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 = \frac{1}{(k+1)^2} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

a dostaneme konečný vztah

$$\begin{aligned} s_{k+1}^2 &= \frac{k}{k+1} s_k^2 + \frac{k}{(k+1)^2} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \\ &= s_k^2 + \frac{1}{k+1} \left( \frac{k}{k+1} (y_{k+1} - \bar{y}_k)^2 - s_k^2 \right), \end{aligned} \quad (7.4)$$

opět s počáteční podmínkou  $s_0^2 = 0$ .

Podobnými postupy lze odvodit rekurzivní vztahy pro některé další statistiky.

Dále se budeme zabývat vztahy pro sekvenční ML odhad. Nejprve uvažujme jednodušší případ nezávislých chyb měření. Uvažujme měření neznámé deterministické veličiny  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{e}_k, \quad (7.5)$$

kde

$$\mathbf{e}_k \sim \mathcal{N} \left( 0, \text{diag} [\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2] \right).$$

Rovnici (7.5) lze psát maticově

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}.$$

ML odhad pro  $k$  měření bude mít kovarianční matici chyb odhadu podle (6.22)

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k} = \left( \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \right)^{-1} \quad (7.6)$$

a vlastní odhad (6.21) bude

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k. \quad (7.7)$$

Nyní popíšeme aktualizaci těchto veličin po změření hodnoty  $y_{k+1}$ . Model měření můžeme psát jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{c}_{k+1}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( 0, \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix} \right).$$

Kovarianční matice chyb odhadu tedy bude

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} &= \left( \mathbf{C}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{C}_{k+1} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{c}_{k+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{c}_{k+1}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left( \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k + \frac{\mathbf{c}_{k+1} \mathbf{c}_{k+1}^T}{\sigma_{k+1}^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

neboli

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} = \left( \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k}^{-1} + \frac{\mathbf{c}_{k+1} \mathbf{c}_{k+1}^T}{\sigma_{k+1}^2} \right)^{-1}. \quad (7.8)$$

Použijeme-li lemmatu o inverzi matice (6.24), dostaneme

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k} - \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k} \mathbf{c}_{k+1} \left( \mathbf{c}_{k+1}^T \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k} \mathbf{c}_{k+1} + \sigma_{k+1}^2 \right)^{-1} \mathbf{c}_{k+1}^T \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_k}.$$

K nalezení rekurze pro odhad upravme (7.7) v čase  $k+1$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k+1} &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} \mathbf{C}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \\ &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{c}_{k+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}} \left( \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{c}_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} y_{k+1} \right). \end{aligned}$$

Podle (7.6) však

$$\mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k = \mathbf{P}_{\tilde{x}_k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k},$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k+1} = \mathbf{P}_{\tilde{x}_{k+1}} \mathbf{P}_{\tilde{x}_k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k} + \frac{\mathbf{c}_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} y_{k+1}.$$

Konečně podle (7.8)

$$\mathbf{P}_{\tilde{x}_k}^{-1} = \left( \mathbf{P}_{\tilde{x}_{k+1}}^{-1} - \frac{\mathbf{c}_{k+1} \mathbf{c}_{k+1}^T}{\sigma_{k+1}^2} \right)^{-1}.$$

Použitím tohoto vztahu dojdeme ke konečné formě rekurze

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k} + \mathbf{P}_{\tilde{x}_{k+1}} \frac{\mathbf{c}_{k+1}}{\sigma_{k+1}^2} \left( y_{k+1} - \mathbf{c}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k} \right), \quad (7.9)$$

kde opět

$$\tilde{y}_{k+1|k} = y_{k+1} - \mathbf{c}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}k}$$

je chyba predikce měření  $y_{k+1}$ . Počáteční podmínka rekurzí (7.8) a (7.9)

$$\mathbf{P}_{\tilde{x}_0}^{-1} = 0 \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}0} = 0$$

popisuje nulovou apriorní informaci o odhadované veličině  $\mathbf{x}$ .

Porovnáme-li vztahy pro jednorázový a rekurzivní ML odhad, zjistíme, že kromě možnosti zpracovávat data sekvenčně jsme dospěli k výpočetně výhodnému schématu, které nevyžaduje žádné invertování matice, ale pouze skalární dělení. Je-li k dispozici apriorní informace o veličině  $\mathbf{x}$ , inicializací rekurze

$$\mathbf{P}_{\tilde{x}_0}^{-1} = \mathbf{P}_{xx} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}0} = \boldsymbol{\mu}_x$$

dospějeme k rekurzivnímu MS estimátoru. Rekurzivní vztahy pro ML a MS estimátor jsou jinak totožné.

Nyní se vraťme zpět k rekurzivnímu ML estimátoru v případě závislých chyb měření. Rekurze (7.8) a (7.9) byly odvozeny za předpokladu diagonální matice  $\mathbf{R}$ . Je-li tato matice pozitivně (semi)definitní pro všechna  $k$ , lze nezávislosti chyb jednotlivých měření dosáhnout vhodnou filtrací dat.

Uvažujme  $LD$  faktorizaci kovarianční matice šumu  $\mathbf{R}_k$

$$\mathbf{L}_k \mathbf{D}_k \mathbf{L}_k^T = \mathbf{R}_k,$$

kde  $\mathbf{L}_k$  je monická dolní trojúhelníková matice (tj. s jednotkovou diagonálou) a  $\mathbf{D}_k$  je diagonální matice s nezápornými prvky na diagonále. Označme

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{L}_k^{-1}.$$

Vzhledem k definici matice  $\mathbf{L}_k$  tato inverze vždy existuje a  $\mathbf{F}_k$  je rovněž dolní trojúhelníková matice. Vynásobíme-li rovnici popisující měření maticí  $\mathbf{F}_k$ , dostaneme

$$\mathbf{F}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{F}_k \mathbf{e}_k,$$

neboli

$$\mathbf{y}_{Fk} = \mathbf{C}_{Fk}\mathbf{x} + \mathbf{e}_{Fk},$$

kde indexem  $F$  jsou označené filtrované veličiny

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{Fk} &= \mathbf{F}_k\mathbf{y}_k \\ \mathbf{C}_{Fk} &= \mathbf{F}_k\mathbf{C}_k \\ \mathbf{e}_{Fk} &= \mathbf{F}_k\mathbf{e}_k.\end{aligned}$$

Kovarianční matice filtrovaného šumu

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{Fk} &= \mathcal{E} \left\{ \mathbf{e}_{Fk}\mathbf{e}_{Fk}^T \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \mathbf{F}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{F}_k^T \right\} \\ &= \mathbf{F}_k\mathcal{E} \left\{ \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T \right\} \mathbf{F}_k^T \\ &= \mathbf{F}_k\mathbf{R}_k\mathbf{F}_k^T\end{aligned}$$

a využitím  $LD$  faktorizace a definice matice  $\mathbf{F}_k$  dostaneme

$$\mathbf{R}_{Fk} = \mathbf{D}_k.$$

Kovarianční matice filtrovaného šumu je tedy diagonální a protože filtrovaný šum je bílý, nazývá se filtr  $\mathbf{F}_k$  **bělicí filtr** (whitening filter). Označme dále jednotlivé prvky matice  $\mathbf{F}_k$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ f_{21} & 1 & & & & \\ f_{31} & f_{32} & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \dots & 1 & \end{bmatrix}.$$

Pak pro filtrované veličiny platí

$$\mathbf{y}_{Fk} = \mathbf{y}_k + \sum_{i=1}^{k-1} f_{k,i}\mathbf{y}_{k-i}.$$

Řádky matice  $\mathbf{F}_k$  tedy definují posloupnost časově proměnných lineárních filtrů. Z dolní trojúhelníkové struktury matice  $\mathbf{F}_k$  plyne, že tyto filtry jsou kauzální.

Matice  $\mathbf{R}$  má často **pásovou strukturu**. Lze-li například šum měření popsat jako MA proces v ustáleném stavu (tj. začínající v čase  $-\infty$ )

$$e_k = v_k + \sum_{i=1}^n c_i v_{k-i},$$

kde  $v$  je bílý šum, bude mít kovarianční matice šumu strukturu

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_n & & 0 \\ r_1 & r_0 & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & r_n \\ r_n & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & r_0 & r_1 \\ 0 & & r_n & \dots & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

s hodnotami  $r_i$  danými vztahem

$$r_i = \sum_{j=0}^{n-i} c_j c_{j+i},$$

přičemž pokládáme  $c_0 = 1$  (zkuste odvodit!). Potom posloupnost filtrů  $f_{k,i}$ , vzniklých na základě faktorizace této matice, konverguje k lineárnímu filtru

$$y_{Fk} = y_k + \sum_{i=1}^{\infty} f_i y_{k-i},$$

jehož vlastnosti jsou dány spektrální faktorizací příslušného MA procesu. Rozmyslete si, jak lze výhodně tuto posloupnost filtrů počítat rekurentně.

## 7.2 Wienerův filtr

### 7.2.1 Formulace problému

Předpokládejme, že  $\mathbf{x}(t)$  je neznámá náhodná posloupnost,  $\mathbf{y}(t)$  je měřená posloupnost a chceme odhadovat hodnoty posloupnosti  $\mathbf{x}(t)$  na základě měření  $\mathbf{y}(t)$  lineárním, obecně časově proměnným filtrem  $\mathbf{F}$ . Předpokládejme dále, že známe autokovarianční a vzájemné kovarianční funkce těchto posloupností a že k určení hodnoty odhadu  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  máme k dispozici data  $\{\mathbf{y}(t_0), \dots, \mathbf{y}(T)\}$ , kde  $t_0$  je počáteční a  $T$  koncový čas měření. Odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  lineárním filtrem lze obecně popsat jako

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{y}(\tau). \quad (7.10)$$

Filtr  $\mathbf{F}$ , který realizuje LMS odhad veličiny  $\mathbf{x}(t)$ , se nazývá **Wienerův filtr**. Přitom je vhodné rozlišovat tři základní případy:

- pro  $T < t$  hovoříme o úloze optimální predikce
- pro  $T = t$  hovoříme o úloze optimální filtrace
- pro  $T > t$  hovoříme o úloze optimální interpolace.

K nalezení optimálního filtru, který bude realizovat jednu ze tří výše uvedených úloh, je třeba minimalizovat kritérium

$$J_{\text{LMS}} = \text{tr } \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}}(t), \quad (7.11)$$

kde

$$\mathbf{P}_{\hat{x}}(t) = \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T \right\}.$$

Podle principu ortogonality však je toto kritérium minimální, je-li chyba odhadu ortogonální k hodnotám dat (viz odstavec 6.2 o LMS odhadech), tj. platí-li

$$\mathcal{E} \left\{ \left( \mathbf{x}(t) - \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{y}(\tau) \right) \mathbf{y}^T(\nu) \right\} = 0 \quad (7.12)$$

pro  $\nu = t_0, \dots, T$ . Tím jsme získali diskrétní tvar **nestacionární Wiener-Hopfovy rovnice**

$$\mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}(t) \mathbf{y}^T(\nu) \right\} = \mathcal{E} \left\{ \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{y}(\tau) \mathbf{y}^T(\nu) \right\}, \quad \nu = t_0, \dots, T,$$

neboli

$$\mathbf{P}_{xy}(t, \nu) = \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{P}_{yy}(\tau, \nu), \quad \nu = t_0, \dots, T. \quad (7.13)$$

Tento LMS filtr je v případě normálního rozdělení obou veličin též MS optimální a vede tedy na podmíněnou střední hodnotu  $\mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) | \mathbf{y}(t_0), \dots, \mathbf{y}(T) \}$ .

Je-li Wiener - Hopfova rovnice splněna, můžeme na základě ortogonality chyby odhadu a dat dokončit výpočet kovarianční matice chyby odhadu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{x}}(t) &= \mathcal{E} \left\{ \left( \mathbf{x}(t) - \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{y}(\tau) \right) \mathbf{x}^T(t) \right\} \\ &= \mathbf{P}_{xx}(t, t) - \sum_{\tau=t_0}^T \mathbf{F}(t, \tau) \mathbf{P}_{yx}(\tau, t). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Přejdeme nyní k časově invariantnímu Wienerovu filtru. Jsou-li oba procesy  $\mathbf{x}(t)$  a  $\mathbf{y}(t)$  stacionární a počáteční čas měření  $t_0 \rightarrow -\infty$ , bude Wienerův filtr rovněž stacionární a můžeme ho popsat ve tvaru

$$\mathbf{F}(t, \tau) = \mathbf{F}(t - \tau).$$

Dostaneme tak stacionární verzi diskrétní Wiener-Hopfovy rovnice

$$\mathbf{P}_{xy}(t - \nu) = \sum_{\tau=-\infty}^T \mathbf{F}(t - \tau) \mathbf{P}_{yy}(\tau - \nu), \quad \nu = -\infty, \dots, T,$$

kterou lze úpravou sčítacích indexů převést na jednodušší tvar

$$\mathbf{P}_{xy}(\tau) = \sum_{\nu=t-T}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{yy}(\tau - \nu), \quad \tau = t - T, \dots, \infty. \quad (7.15)$$

Rovnice pro kovarianční matici chyby odhadu, která je ve stacionárním případě konstantní, bude

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{x}} &= \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=-\infty}^T \mathbf{F}(t-\tau) \mathbf{P}_{yx}(\tau-t) \\ &= \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=t-T}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{xy}^T(\tau), \end{aligned} \quad (7.16)$$

neboť  $\mathbf{P}_{yx}(-\tau) = \mathbf{P}_{xy}^T(\tau)$  (ukážete!). Řešení Wiener-Hopfovy rovnice velmi úzce souvisí se spektrálními vlastnostmi signálů. Ukážeme řešení ve dvou případech.

### 7.2.2 Řešení W-H rovnice pro úlohu interpolace s nekonečným zpožděním

V tomto odstavci budeme předpokládat, že k odhadu hodnoty  $\mathbf{x}(t)$  máme k dispozici všechna data  $\mathbf{y}(\tau)$ ,  $\tau = -\infty, \dots, \infty$ . Tato úloha se nazývá **interpolace s nekonečným zpožděním** (infinite lag smoothing). Její význam je spíše teoretický - její řešení má velmi jednoduchou interpretaci a umožňuje porovnat výsledek optimálního nekauzálního řešení a řešení s omezujícím požadavkem na kauzalitu filtru.

Wiener - Hopfova rovnice a rovnice pro kovarianční matici odhadu budou

$$\mathbf{P}_{xy}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{yy}(t-\tau)$$

a

$$\mathbf{P}_{\hat{x}} = \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{xy}^T(\tau).$$

Aplikací oboustranné  $\mathcal{Z}$ -transformace dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_{xy}(t) z^{-t} &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) z^{-\tau} \mathbf{P}_{yy}(t-\tau) z^{-(t-\tau)} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) z^{-\tau} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_{yy}(t) z^{-t}, \end{aligned}$$

což jsou výrazy pro spektrální hustoty a přenos

$$\mathbf{S}_{xy}(z) = \mathbf{F}(z) \mathbf{S}_{yy}(z). \quad (7.17)$$

Optimální filtr tedy bude

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{S}_{yy}^{-1}(z). \quad (7.18)$$

K nalezení kovarianční matice chyby použijeme následující obrat. Označme

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t) - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{xy}^T(\tau).$$

Potom zřejmě  $\mathbf{P}_{\hat{x}} = \mathbf{P}(0)$ . Na funkci  $\mathbf{P}(t)$  nyní můžeme užít oboustrannou  $\mathcal{Z}$ -transformaci

a dostaneme

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \mathbf{F}(z)\mathbf{S}_{yx}(z).$$

Použitím (7.18) dostaneme

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \mathbf{S}_{xy}(z)\mathbf{S}_{yy}^{-1}(z)\mathbf{S}_{yx}(z), \quad (7.19)$$

nebo v časové oblasti

$$\mathbf{P}_{\bar{x}} = \mathbf{P}(0) = \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \left[ \mathbf{S}_{xx}(e^{j\omega T_s}) - \mathbf{S}_{xy}(e^{j\omega T_s})\mathbf{S}_{yy}^{-1}(e^{j\omega T_s})\mathbf{S}_{yx}(e^{j\omega T_s}) \right] d\omega. \quad (7.20)$$

Všimněte si podobnosti tohoto výsledku a vztahu pro LMS estimátor (6.10).

### Příklad (Interpolace s nekonečným zpožděním pro systém 1.řádu)

Uvažujme skalární systém

$$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t) + v(t) \\ y(t) &= x(t) + e(t), \end{aligned}$$

kde  $v \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$  a  $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$  jsou nezávislé bílé šумы.  $\mathcal{Z}$ -transformací těchto rovnic dostaneme přenos

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(z) \begin{bmatrix} v(z) \\ e(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-a} & 0 \\ \frac{1}{z-a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(z) \\ e(z) \end{bmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{z-a} & 0 \\ \frac{1}{z-a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z^{-1}-a} & 0 \\ \frac{1}{z^{-1}-a} & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_v^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} & \frac{\sigma_v^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} \\ \frac{\sigma_v^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} & \frac{\sigma_v^2}{(z-a)(z^{-1}-a)} + \sigma_e^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud optimální filtr s nekonečným zpožděním bude

$$f(z) = \frac{S_{xy}(z)}{S_{yy}(z)} = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + (z-a)(z^{-1}-a)\sigma_e^2}.$$

Tento výraz lze upravit na tvar

$$f(z) = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{(z-\alpha)(z^{-1}-\alpha)} = \lambda + \frac{\alpha\lambda}{z-\alpha} + \frac{\alpha\lambda}{z^{-1}-\alpha},$$

kde  $\lambda, |\alpha| < 1$  jsou vhodné konstanty závislé na dynamice systému  $a$  a poměru  $\sigma_v^2/\sigma_e^2$ . Dostaneme tedy **nekauzální interpolátor** se symetrickou impulsní charakteristikou

$$f(t) = \lambda\alpha^{|t|},$$



neboť výraz  $\alpha\lambda/(z^{-1} - \alpha)$  zde interpretujeme jako nekauzální část filtru

$$\frac{\alpha\lambda}{z^{-1} - \alpha} = \alpha\lambda z + \alpha^2\lambda z^2 + \dots$$

Pokuste se odvodit vztahy pro  $\lambda$  a  $\alpha$ . □

### 7.2.3 Řešení W-H rovnice pro úlohu kauzální filtrace

V předchozí sekci jsme viděli, že předpoklad  $T \rightarrow \infty$  sice dovoluje jednoduše odvodit optimální interpolátor ve spektrální oblasti, ale ten je nekauzální. Výsledky proto mají velmi omezenou použitelnost. V tomto odstavci popíšeme postup nalezení filtru, který kromě požadavku optimality vyhovuje též omezujícím požadavkům **kauzality**. Tento filtr je vhodný pro sekvenční zpracování dat měřených v reálném čase.

Uvažujme diskrétní stacionární Wiener-Hopfovou rovnici (7.15) pro  $T = t$ , tj. problém optimální filtrace

$$\mathbf{P}_{xy}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{yy}(t - \tau), \quad \tau = 0, \dots, \infty. \quad (7.21)$$

Protože tato rovnice platí pouze pro  $t \geq 0$ , nemůžeme v tomto případě přímočaře aplikovat oboustrannou  $\mathcal{Z}$ -transformaci. Všimněme si však, že rovnice bude mít triviální řešení v případě, že data  $\mathbf{y}(t)$  budou mít charakter **bílého šumu**, tedy pro

$$\mathbf{P}_{yy}(t) = \mathbf{P}_{yy}(0)\delta(t).$$

Dostaneme totiž

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy}(t) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{yy}(0)\delta(t - \tau) \\ &= \mathbf{F}(t) \mathbf{P}_{yy}(0), \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}_{xy}(t) \mathbf{P}_{yy}^{-1}(0) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}. \quad (7.22)$$

Předpoklad bělosti signálu  $\mathbf{y}$  je samozřejmě velmi silným omezením a mohlo by se zdát, že řešení (7.22) je prakticky nezájímavé. Má-li však měřený signál **racionální** spektrální hustotu  $\mathbf{S}_{yy}(z)$ , můžeme tuto spektrální hustotu faktorizovat jako

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{W}^{-1}(z) \mathbf{W}(z^{-1})^{-T},$$

kde  $\mathbf{W}^{-1}(z)$  je stabilní, minimálně fázový filtr. Tedy i  $\mathbf{W}(z)$  je stabilní a podle věty o realizaci (přesněji řečeno použitím její inverze) průchodem signálu  $\mathbf{y}(t)$  filtrem  $\mathbf{W}(z)$  dostaneme **bílý šum**  $\mathbf{w}(t)$  s kovarianční maticí

$$\mathbf{P}_{ww}(t) = \mathbf{P}_{ww}(0)\delta(t) = \mathbf{I}\delta(t).$$

Posloupnost  $\mathbf{w}(t)$  je **inovační posloupnost**.

Původní úlohu nalézt filtr  $\mathbf{F}$  pro odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  na základě posloupnosti  $\mathbf{y}(t)$  (viz obr. 7.1 vlevo), kde  $\mathbf{F}$  vyhovuje rovnici (7.21), která je obtížně řešitelná, jsme tedy transformovali

na úlohu nalézt filtr  $\mathbf{F}_w$  pro odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  na základě posloupnosti  $\mathbf{w}(t)$  (viz obr. 7.1 vpravo), kde  $\mathbf{F}_w$  vyhovuje rovnici

$$\mathbf{P}_{xw}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{F}_w(\tau) \mathbf{P}_{ww}(t-\tau), \quad \tau = 0, \dots, \infty,$$

která má jednoduché řešení

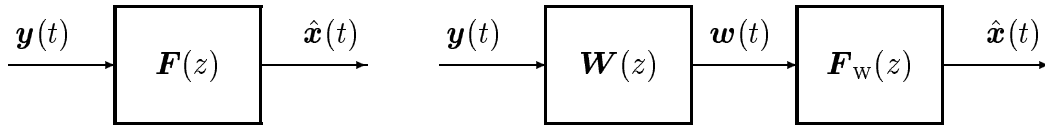
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_w(t) &= \mathbf{P}_{xw}(t) & \text{pro } t \geq 0 \\ &= 0 & \text{pro } t < 0 \end{aligned}$$

Zbývá tedy pouze určit kovarianční funkci  $\mathbf{P}_{xw}(t)$ , přesněji řečeno její kauzální část pro  $t \geq 0$ . Protože platí

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{y}(z),$$

bude spektrální hustota

$$\mathbf{S}_{xw}(z) = \mathbf{S}_{xy}(z)\mathbf{W}^T(z^{-1}).$$



Obrázek 7.1: Modifikace úlohy Wienerovy filtrace bělicím filtrem  $W(z)$

Tato spektrální hustota je oboustrannou  $\mathcal{Z}$ -transformací kovarianční funkce  $\mathbf{P}_{xw}(t)$ , takže platí

$$\mathbf{S}_{xw}(z) = \dots + \mathbf{P}_{xw}(-2)z^2 + \mathbf{P}_{xw}(-1)z + \mathbf{P}_{xw}(0) + \mathbf{P}_{xw}(1)z^{-1} + \mathbf{P}_{xw}(2)z^{-2} + \dots$$

Tento rozvoj spektrální hustoty můžeme rozdělit na **kauzální** (realizovatelnou) část

$$[\mathbf{S}_{xw}(z)]_+ = \mathbf{P}_{xw}(0) + \mathbf{P}_{xw}(1)z^{-1} + \mathbf{P}_{xw}(2)z^{-2} + \dots$$

a **nekauzální** část

$$[\mathbf{S}_{xw}(z)]_- = \dots + \mathbf{P}_{xw}(-2)z^2 + \mathbf{P}_{xw}(-1)z \quad .$$

Spektrální hustotu  $\mathbf{S}_{xw}(z)$ , která je racionální funkcí proměnné  $z$ , lze také interpretovat z hlediska jednostranné  $\mathcal{Z}$ -transformace. Obě tyto interpretace spolu souvisejí tak, že rozložíme-li tuto spektrální hustotu výše uvedeným způsobem

$$\mathbf{S}_{xw}(z) = [\mathbf{S}_{xw}(z)]_+ + [\mathbf{S}_{xw}(z)]_- \quad ,$$

pak kauzální část  $[\mathbf{S}_{xw}(z)]_+$  obsahuje všechny stabilní póly a její relativní řád je nula, tj. její rozvoj obsahuje člen odpovídající mocnině  $z^0$  a členy se zápornými mocninami  $z$ . Naproti tomu nekauzální část  $[\mathbf{S}_{xw}(z)]_-$  obsahuje nestabilní póly a má relativní řád nenulový, tj. obsahuje pouze členy s kladnými mocninami  $z$ . Stabilní póly přitom interpretujeme jako póly generující **klesající posloupnost v záporných mocninách**  $z$ , zatímco nestabilní póly generující nestabilní posloupnost v záporných mocninách  $z$  (v jednostranné  $\mathcal{Z}$ -transformaci)

interpretujeme jako póly generující **klesající posloupnost v kladných mocninách**  $z$ , tj. nekauzální část impulsní charakteristiky (v oboustranné  $\mathcal{Z}$ -transformaci). Porovnejte tuto úvahu s výsledky předcházejícího příkladu!

Optimální filtr  $\mathbf{F}_w$  tedy bude dán

$$\mathbf{F}_w(z) = \left[ \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{W}^T(z^{-1}) \right]_+$$

a původně hledaný filtr  $\mathbf{F}$ , pracující nad posloupností  $\mathbf{y}$ , bude dán sériovým spojením bělicího filtru a filtru  $\mathbf{F}_w$ , tj. vztahem

$$\mathbf{F} = \left[ \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{W}^T(z^{-1}) \right]_+ \mathbf{W}(z). \quad (7.23)$$

Porovnáme-li tento výsledek s nekauzálním filtrem (7.18)

$$\mathbf{F}_{nk}(z) = \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{S}_{yy}^{-1}(z) = \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{W}^T(z^{-1}) \mathbf{W}(z),$$

je vzhledem k vlastnostem filtru  $\mathbf{W}$  zřejmé, odkud je odstraněna složka impulsní charakteristiky působící nekauzalitu filtru  $\mathbf{F}_{nk}(z)$ .

K určení kovarianční matice chyby odhadu

$$\mathbf{P}_{\hat{x}} = \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{xy}^T(\tau)$$

definujeme opět

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{P}_{xy}^T(\tau)$$

s vlastností

$$\mathbf{P}_{\hat{x}} = \mathbf{P}(0).$$

Potom

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \mathbf{F}(z) \mathbf{S}_{yx}(z)$$

a použitím (7.23) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z) &= \mathbf{S}_{xx}(z) - \left[ \mathbf{S}_{xy}(z) \mathbf{W}^T(z^{-1}) \right]_+ \mathbf{W}(z) \mathbf{S}_{yx}(z) \\ &= \mathbf{S}_{xx}(z) - \left[ \mathbf{S}_{xw}(z) \right]_+ \mathbf{S}_{wx}(z). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Uvědomíme-li si, že  $[\mathbf{S}_{xw}(z)]_+$  odpovídá v časové oblasti kauzální části kovarianční funkce  $\mathbf{P}_{xw}(\tau)$  pro  $\tau \geq 0$ , odpovídá tomuto součinu konvoluce

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{P}_{xw}(\tau) \mathbf{P}_{wx}(t - \tau)$$

a odtud podle definice  $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{P}_{\hat{x}} = \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{P}_{xw}(\tau) \mathbf{P}_{wx}^T(\tau). \quad (7.25)$$

Pokud bychom stejným postupem určili kovarianční matici chyby predikce pro nekauzální

filtr, dostali bychom transformací výrazu

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \mathbf{S}_{xy}(z)\mathbf{W}^T(z^{-1})\mathbf{W}(z)\mathbf{S}_{yx}(z)$$

výsledek

$$\mathbf{P}_{\hat{x}_{\text{nk}}} = \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}_{xw}(\tau)\mathbf{P}_{xw}^T(\tau).$$

Odtud je vidět ztráta v dosažitelné kvalitě odhadu způsobená omezující podmínkou kauzality filtru

$$\mathbf{P}_{\hat{x}} - \mathbf{P}_{\hat{x}_{\text{nk}}} = \sum_{\tau=-\infty}^{-1} \mathbf{P}_{xw}(\tau)\mathbf{P}_{xw}^T(\tau).$$

Protože  $\mathbf{w}$  je inovační posloupnost, obsahuje posloupnost  $\{\mathbf{w}(t+1), \dots\}$  právě tu informaci o  $\mathbf{x}(t)$ , která není obsažena v posloupnosti minulých hodnot  $\{\dots, \mathbf{y}(t-1), \mathbf{y}(t)\}$ .

### Optimální predikce

Optimální prediktor získáme nyní již poměrně jednoduše aplikací výsledků předchozího odstavce. Předpokládejme, že měříme signál  $\mathbf{y}(t)$  se známou spektrální hustotou  $\mathbf{S}_{yy}(z)$  a chceme predikovat na základě známých hodnot měření až do času  $t$  jeho hodnotu v čase  $t + T_p$ , kde  $T_p$  budeme nazývat počet kroků predikce. Definujme proces  $\mathbf{x}(t)$  jako

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t + T_p). \quad (7.26)$$

Optimální prediktor pak je právě odhad hodnoty tohoto procesu

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t + T_p).$$

Na základě (7.26) platí pro potřebné spektrální hustoty vztahy

$$\mathbf{S}_{xy}(z) = z^{T_p}\mathbf{S}_{yy}(z)$$

a

$$\mathbf{S}_{xx}(z) = z^{T_p}\mathbf{S}_{yy}(z)z^{-T_p} = \mathbf{S}_{yy}(z).$$

Označme opět spektrální faktorizaci  $\mathbf{S}_{yy}(z)$

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{W}^{-1}(z)\mathbf{W}(z^{-1})^{-T}.$$

Optimální prediktor pak podle (7.23) bude dán vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[ \mathbf{W}^{-1}(z)\mathbf{W}(z^{-1})^{-T} z^{T_p}\mathbf{W}^T(z^{-1}) \right]_+ \mathbf{W}(z) \\ &= \left[ \mathbf{W}^{-1}(z)z^{T_p} \right]_+ \mathbf{W}(z). \end{aligned} \quad (7.27)$$

K nalezení kovarianční matice chyby predikce určíme hodnotu funkce

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \left[ \mathbf{S}_{xy}(z)\mathbf{W}^T(z^{-1}) \right]_+ \mathbf{W}(z)\mathbf{S}_{yx}(z).$$

Protože

$$\mathbf{S}_{xy}(z) = z^{T_p} \mathbf{S}_{yy}(z) = z^{T_p} \mathbf{W}^{-1}(z) \mathbf{W}^{-T}(z^{-1})$$

a

$$\mathbf{S}_{yx}(z) = z^{-T_p} \mathbf{S}_{yy}(z) = z^{-T_p} \mathbf{W}^{-1}(z) \mathbf{W}^{-T}(z^{-1}),$$

dostaneme

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{S}_{xx}(z) - \left[ z^{T_p} \mathbf{W}^{-1}(z) \right]_+ z^{-T_p} \mathbf{W}^{-T}(z^{-1})$$

a tomuto součinu odpovídá konvoluce

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t) - \sum_{\tau=T_p}^{\infty} \mathbf{P}_{xw}(\tau) \mathbf{P}_{wx}(t - \tau).$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{P}_{xx}(0) - \sum_{\tau=T_p}^{\infty} \mathbf{P}_{xw}(\tau) \mathbf{P}_{wx}(-\tau) \\ &= \mathbf{P}_{yy}(0) - \sum_{\tau=T_p}^{\infty} \mathbf{P}_{yw}(\tau) \mathbf{P}_{yw}^T(\tau). \end{aligned}$$

Protože  $\mathbf{w}$  je inovační posloupnost, platí též

$$\mathbf{P}_{yy}(0) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{P}_{yw}(\tau) \mathbf{P}_{yw}^T(\tau)$$

(hodnoty  $\mathbf{P}_{yw}(t)$  jsou totožné s hodnotami impulsní charakteristiky), a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{x}} &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{P}_{yw}(\tau) \mathbf{P}_{yw}^T(\tau) - \sum_{\tau=T_p}^{\infty} \mathbf{P}_{yw}(\tau) \mathbf{P}_{yw}^T(\tau) \\ &= \sum_{\tau=0}^{T_p-1} \mathbf{P}_{yw}(\tau) \mathbf{P}_{yw}^T(\tau). \end{aligned} \tag{7.28}$$

Tento výsledek je velice názorný - pro predikci hodnoty  $\mathbf{y}(t+T_p)$  není dostupná právě ta informace, která je obsažena v posloupnosti  $\{\dots, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t+1), \dots, \mathbf{y}(t+T_p)\}$ , ale zároveň není obsažena v posloupnosti  $\{\dots, \mathbf{y}(t-1), \mathbf{y}(t)\}$ . To je však právě informace, obsažená v hodnotách inovací  $\{\mathbf{w}(t+1), \dots, \mathbf{w}(t+T_p)\}$ . Odtud vzhledem k ortogonalitě inovací plyne právě (7.28).

### Příklad (optimální prediktor pro systém 1. řádu).

Najdeme prediktor pro signál

$$y(t) = \frac{z}{z-a} v(t),$$

kde  $v(t)$  je diskrétní bílý šum s rozptylem  $\sigma_v^2$ . Spektrální hustota tohoto signálu zřejmě bude

$$S_{yy} = \frac{\sigma_v^2}{(z-a)(z^{-1}-a)}$$

a bělicí filtr bude mít přenos

$$W(z) = \frac{z-a}{\sigma_v z}.$$

Optimální prediktor podle (7.27) bude

$$\begin{aligned} F(z) &= \left[ \frac{\sigma_v z^{T_p+1}}{z-a} \right]_+ \frac{z-a}{\sigma_v z} \\ &= \sigma_v \left[ z^{T_p} + a z^{T_p-1} + \dots + a^{T_p-1} z + a^{T_p} + \dots \right]_+ \frac{z-a}{\sigma_v z} \\ &= \sigma_v \left[ a^{T_p} + a^{T_p+1} z^{-1} + \dots \right]_+ \frac{z-a}{\sigma_v z} \\ &= a^{T_p} \frac{\sigma_v z}{z-a} \frac{z-a}{\sigma_v z} \\ &= a^{T_p}, \end{aligned}$$

to znamená

$$\hat{x}(t) = \hat{y}(t+T_p) = a^{T_p} y(t). \quad (7.29)$$

Optimální prediktor tedy odpovídá dynamice vývoje střední hodnoty signálu. Chyba predikce podle (7.28) bude

$$P_{\hat{x}} = \sigma_v^2 (1 + a^2 + \dots + a^{2(T_p-1)}) = \frac{\sigma_v^2 (1 - a^{2T_p})}{1 - a^2}. \quad (7.30)$$

□

### 7.3 Kalmanův filtr

V předchozím odstavci jsme řešili problém optimální filtrace pro signály, jejichž vlastnosti a vzájemné vztahy byly charakterizovány autokovariančními funkcemi  $\mathbf{P}_{xx}(t)$  a  $\mathbf{P}_{yy}(t)$  a vzájemnou kovarianční funkcí  $\mathbf{P}_{xy}(t)$ . Tento popis je možné chápat jako **vnější popis** zúčastněných signálů. Tato úloha byla vyřešena Wienerem a Kolmogorovem ve 40. letech.

V 60. letech se hlavní pozornost v teorii řízení obrátila k využívání **vnitřního (stavového) popisu**. Podmínkou řešitelnosti úloh filtrace, predikce a interpolace, formulovaných pomocí vnitřního popisu systému, je možnost odhadovat stav systému na základě pozorování vstupů a výstupů systému. V deterministické formulaci problému lze k odhadování stavu sestavit **pozorovatel stavu**. Ve stochastické formulaci problému lze úlohu odhadu stavu formulovat ve smyslu optimálního LMS odhadu stavu a výsledný optimální pozorovatel stavu se nazývá **Kalmanův filtr**.

### 7.3.1 Formulace problému

Uvažujme lineární stochastický systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (7.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t), \quad (7.32)$$

kde matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  jsou známé a  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  jsou nekorelované diskrétní bílé šумы s kovarianční maticí (opět známou)

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Zobecnění úlohy pro korelované a barevné šумы ukážeme později. Rovněž počáteční stav systému (7.33) popíšeme po zavedení potřebné symboliky.

Naším cílem bude najít algoritmus generující posloupnost lineárních odhadů stavu  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  a kovariančních matic chyb odhadu

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T \right\},$$

přičemž odhad stavu  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  v každém kroku minimalizuje kritérium

$$J_{\text{LMS}}(t) = \text{tr } \mathbf{P}(t).$$

Přepokládejme, že v kroku  $t$  algoritmu známe **apriorní** (tj. využívající data až do času  $t-1$ , ale neberoucí v úvahu data  $\mathbf{y}(t)$ ) odhad stavu  $\mathbf{x}(t)$ , jehož podmíněnou střední hodnotu budeme značit

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$$

(přitom první index označuje běžný čas a druhý index poslední měření, které je užito k určení odhadu), a kovarianční matici chyby odhadu stavu, kterou budeme značit

$$\mathbf{P}(t|t-1).$$

Počáteční stav systému je tedy charakterizován střední hodnotou  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0|-1)$  a kovarianční maticí  $\hat{\mathbf{P}}(0) = \mathbf{P}(0|-1)$ .

Po změření hodnoty výstupu  $\mathbf{y}(t)$  chceme tyto hodnoty aktualizovat a získat **aposteriorní** (tj. zahrnující měření  $\mathbf{y}(t)$ ) odhad stavu

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t)$$

a příslušnou kovarianční matici chyby odhadu

$$\mathbf{P}(t|t).$$

Protože měření  $\mathbf{y}(t)$  bylo získáno pomocí lineárního modelu (7.32), jde vlastně o úlohu, kterou jsme vyřešili v odstavci 6.2 věnovaném LMS odhadům.

Dále budeme chtít nalézt na základě aposteriorního odhadu stavu  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  a kovarianční matice chyby odhadu  $\mathbf{P}(t|t)$  v čase  $t$  apriorní hodnoty těchto veličin  $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t)$  a  $\mathbf{P}(t+1|t)$  v čase  $t+1$ . To je však opět již známá úloha vývoje stavu lineárního stochastického systému (přesněji řečeno jeho prvních dvou momentů), popsána v odstavci 5.1.

Základní myšlenka řešení úlohy je tedy zřejmá. Nyní tento postup budeme realizovat.

### 7.3.2 Kalmanův filtr pro nekorelované šумы

Odvodíme nyní podrobně Kalmanův filtr realizující LMS odhad stavu pro nekorelované šумы procesu a měření. Uvažujme lineární stochastický systém popsáný stavovou rovnicí přechodu (7.31) a výstupní rovnicí (7.32). Apriorní odhad stavu  $\mathbf{x}(t)$  na základě dat  $\mathcal{D}_{t-1} = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{u}(t-1), \mathbf{y}(t-1)\}$  nechť je popsán prvními dvěma momenty

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) | \mathcal{D}_{t-1} \} = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$$

a

$$\mathcal{E} \{ (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1))(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1))^T | \mathcal{D}_{t-1} \} = \mathbf{P}(t|t-1).$$

Zdůrazněme ještě jednou, že jde o podmíněné střední hodnoty. Na základě měření  $\mathbf{y}(t)$ , daného výstupní rovnicí (7.32), chceme najít odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  minimalizující kritérium

$$J_{\text{LMS}}(t) = \text{tr } \mathbf{P}(t|t).$$

Podle (6.9) je tento odhad dán (pro  $\mathbf{P}_{yy} > 0$ )

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{P}_{xy}(t|t-1)\mathbf{P}_{yy}^{-1}(t|t-1)(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)),$$

kde

$$\hat{\mathbf{y}}(t|t-1) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

je střední hodnota měření  $\mathbf{y}(t)$  a  $\mathbf{P}_{xy}(t|t-1)$  a  $\mathbf{P}_{yy}(t|t-1)$  jsou kovarianční matice

$$\mathbf{P}_{xy}(t|t-1) = \mathcal{E} \{ (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1))(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1))^T | \mathcal{D}_{t-1} \}$$

a

$$\mathbf{P}_{yy}(t|t-1) = \mathcal{E} \{ (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1))(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1))^T | \mathcal{D}_{t-1} \}.$$

Na základě (7.32) jsou jejich hodnoty

$$\mathbf{P}_{xy}(t|t-1) = \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T$$

a

$$\mathbf{P}_{yy}(t|t-1) = \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}.$$

Přitom předpokládáme  $\mathbf{P}_{yy}(t|t-1) > 0$  pro všechna  $t$ . Označme dále

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)$$

**chybu predikce** výstupu  $\mathbf{y}(t)$ . Potom pro odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  dostaneme vztah

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1). \quad (7.34)$$

Definujeme-li **Kalmanovo zesílení** datového kroku

$$\bar{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}, \quad (7.35)$$



můžeme (7.34) zjednodušit na

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \bar{\mathbf{L}}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1). \quad (7.36)$$

Kovarianční matice chyby odhadu je podle (6.10)

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{P}_{xy}(t|t-1)\mathbf{P}_{yy}^{-1}(t|t-1)\mathbf{P}_{yx}(t|t-1),$$

což je po dosazení

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1), \quad (7.37)$$

nebo s využitím Kalmanova zesílení (7.35)

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \bar{\mathbf{L}}(t) \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right) \bar{\mathbf{L}}^T(t). \quad (7.38)$$

Použitím lemmatu o inverzi matice (6.24) lze (7.37) pro  $\mathbf{R} > 0$  psát ve tvaru

$$\mathbf{P}^{-1}(t|t) = \mathbf{P}^{-1}(t|t-1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}, \quad (7.39)$$

který popisuje vývoj **matice přesnosti**. Z numerického hlediska je rovněž užitečný tvar

$$\mathbf{P}(t|t) = \left( \mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{C} \right) \mathbf{P}(t|t-1) \left( \mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{C} \right)^T + \bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{R}\bar{\mathbf{L}}^T(t) \quad (7.40)$$

(pokuste se odvodit!).

**Poznámka:** K odvození vztahů pro datový krok Kalmanova filtru je možné též použít princip ortogonality. Předpokládáme-li odhad ve tvaru

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}(t),$$

pak (7.34) plyne rovněž z podmínek ortogonality chyby odhadu k použitým datům

$$\mathcal{E} \left\{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}(t)] \mathbf{y}^T(t) \right\} = 0$$

a

$$\mathcal{E} \left\{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}(t)] \hat{\mathbf{x}}^T(t|t-1) \right\} = 0.$$

□

K výpočtu apriorních hodnot odhadu  $\mathbf{x}(t+1)$  použijeme stavovou rovnici přechodu (7.31). Aplikací operátoru střední hodnoty na tuto rovnici dostaneme

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (7.41)$$

Pro chybu odhadu stavu dostaneme odečtením (7.31) a (7.41)

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)$$

a odtud

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (7.42)$$

Rovnice (7.34) a (7.37) popisují tzv. **datový** nebo též **filtrační** krok algoritmu, rovnice (7.41) a (7.42) popisují tzv. **časový** nebo **predikční** krok algoritmu.

Rozdělení algoritmu na časový a datový krok je výhodné z hlediska přesného porozumění problému. Při praktickém použití a analýze vlastností Kalmanova filtru je možné spojit oba kroky v jedinou rovnici. Protože při standardním způsobu vzorkování, definovaném v odstavci 1.3., používáme měření výstupu  $\mathbf{y}(t)$  k určení řízení  $\mathbf{u}(t+1)$ , které je při použití stavové zpětné vazby funkcí odhadu stavu  $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t)$ , popíšeme zde výpočet  $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t)$  na základě  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ . Dosazením (7.34) do (7.41) po úpravě dostaneme

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + (\mathbf{B} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{D})\mathbf{u}(t) + \mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}(t)\mathbf{y}(t)$$

a

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}(t) \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right) \bar{\mathbf{L}}^T(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.$$

V těchto rovnicích je výhodné použít Kalmanovo zesílení

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}. \quad (7.43)$$

Potom dostaneme

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}(t)\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + (\mathbf{B} - \mathbf{L}(t)\mathbf{D})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t) \quad (7.44)$$

a

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T - \mathbf{L}(t) \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right) \mathbf{L}^T(t) + \mathbf{Q}. \quad (7.45)$$

Rovnice (7.45) spolu s definicí Kalmanova zesílení (7.43) je známá **Riccatiho rovnice**. Odečtením (7.44) od (7.31) lze odvodit

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}(t)\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{v} - \mathbf{L}(t)\mathbf{e}$$

a odtud dostaneme alternativní tvar Riccatiho rovnice

$$\mathbf{P}(t+1|t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}(t)\mathbf{C})\mathbf{P}(t|t-1)(\mathbf{A} - \mathbf{L}(t)\mathbf{C})^T + \mathbf{L}(t)\mathbf{R}\mathbf{L}^T(t) + \mathbf{Q}, \quad (7.46)$$

výhodný pro některé teoretické úvahy i z hlediska numerických vlastností.

### 7.3.3 Kalmanův filtr pro korelované šумы

V tomto odstavci odvodíme rovnice Kalmanova filtru pro případ korelovaných šumů procesu a měření. Ukážeme zde bayesovský přístup, tj. nalezení MS odhadu, a modifikaci úlohy, vedoucí na problém s nekorelovanými šумы, jež je významná pro teoretickou analýzu. Nejprve ještě upřesníme pojem **stav stochastického systému** z bayesovského hlediska.

Stav systému je veličina  $\mathbf{x}(t)$  konečné dimenze taková, že

$$p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1}) = p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (7.47)$$

tj. stav systému  $\mathbf{x}(t)$  obsahuje veškerou informaci obsaženou v datech  $\mathcal{D}_{t-1}$ , která je potřebná k predikci výstupu  $\mathbf{y}(t)$ . Tuto predikci pak můžeme určit podle vztahu

$$p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1}) = \int p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}) d\mathbf{x}(t). \quad (7.48)$$

Uvažujme opět systém (7.31), (7.32), kde  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  jsou gaussovské diskretní bílé šумы,

tentokrát s kovarianční maticí

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (7.49)$$

Ukážeme, jak je možné vyvíjet p.h.p.  $p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1})$ , kterou budeme nazývat **odhad stavu**.

Pro aktualizaci odhadu stavu na základě nově získaných dat  $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\}$

$$p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}) \rightarrow p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_t),$$

což je opět **datový** nebo **filtrační** krok odhadu stavu, platí

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_t) &= \frac{p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\int p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)) p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}) d\mathbf{x}(t)} p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}, \mathbf{u}(t)) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1})} p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}), \end{aligned} \quad (7.50)$$

kde jsme využili předpokládanou vlastnost vstupu

$$p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}, \mathbf{u}(t)) = p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}),$$

kterou nazýváme **přirozené podmínky řízení**. K uzavření rekurze je třeba ještě provést přechod

$$p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_t) \rightarrow p(\mathbf{x}(t+1)|\mathcal{D}_t),$$

což je **časový** nebo **predikční** krok odhadu stavu. Ten lze popsat jako

$$p(\mathbf{x}(t+1)|\mathcal{D}_t) = \int p(\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t), \mathcal{D}_t) p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_t) d\mathbf{x}(t), \quad (7.51)$$

kde soubor p.h.p.

$$p(\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t), \mathcal{D}_t) = p(\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \quad (7.52)$$

popisuje vývoj stavu. Přítomnost výstupu systému  $\mathbf{y}(t)$  v p.h.p. (7.52) je nezbytná právě v případě korelovaného šumu výstupní rovnice a stavové rovnice přechodu.

K existenci stavu systému je tedy potřebná existence podmíněných hustot pravděpodobnosti

$$p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

a

$$p(\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)),$$

splňujících podmínky (7.47) a (7.52) a vstupní signál (regulátor) splňující přirozené podmínky řízení. Tyto p.h.p. jsou definovány právě popisem systému ve stavovém prostoru.

Datový a časový krok algoritmu lze opět spojit do jediného kroku

$$p(\mathbf{x}(t+1)|\mathcal{D}_t) = \int \frac{p(\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1})} p(\mathbf{x}(t)|\mathcal{D}_{t-1}) d\mathbf{x}(t)$$

$$= \frac{p(\mathbf{x}(t+1), \mathbf{y}(t) | \mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1})}{p(\mathbf{y}(t) | \mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1})}. \quad (7.53)$$

Tento vztah použijeme k odvození algoritmu.

Předpokládejme, že

$$p(\mathbf{x}(t) | \mathcal{D}_{t-1}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \mathbf{P}(t|t-1)).$$

V tomto případě tedy  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$  je podmíněná střední hodnota stavu. Sdružená hustota pravděpodobnosti stavu  $\mathbf{x}(t+1)$  a výstupu  $\mathbf{y}(t)$  bude

$$\begin{aligned} & p\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \middle| \mathcal{D}_{t-1}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t-1) \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} & \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \\ \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{S}^T & \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t-1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Odtud podle odstavce 6.3 pro parametry podmíněného rozdělení platí (pro  $\mathbf{P}_{yy} > 0$ )

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y),$$

neboli

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ &+ \left(\mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{S}\right) \left(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (7.54)$$

a pro podmíněnou kovarianční matici

$$\mathbf{P}_{x|y} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_{yy}^{-1}\mathbf{P}_{yx},$$

neboli

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ &- \left(\mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{S}\right) \left(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1} \left(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{S}^T\right). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Struktura rovnic je tedy shodná jako v případě nekorelovaných šumů, pouze Kalmanovo zesílení se změnilo na

$$\mathbf{L}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{S}\right) \left(\mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}\right)^{-1}. \quad (7.56)$$

Jinou možností, jak odvodit Kalmanův filtr v případě korelovaných šumů, je provést vhodnou transformaci rovnic systému (7.31), (7.32). Jsou-li  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  diskrétní bílé šумы s pozitivně definitní kovarianční maticí

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix},$$

pak po změření výstupu  $\mathbf{y}(t)$  nese hodnota šumu

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

jistou informací o hodnotě šumu  $\mathbf{v}(t)$ . Jeho hodnotu můžeme pro  $\mathbf{R} > 0$  odhadnout jako

$$\hat{\mathbf{v}}(t|t) = 0 + \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{e}(t) - 0),$$

kde jsme dosadili  $\hat{\mathbf{v}}(t|t-1) = 0$  a  $\hat{\mathbf{e}}(t|t-1) = 0$ , s (opět pozitivně definitní – proč?) kovarianční maticí

$$\hat{\mathbf{Q}}(t|t) = \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T.$$

Z této úvahy plyne, že transformací stavové rovnice přechodu do tvaru

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}'\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(t) + \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}'(t), \quad (7.57)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}. \end{aligned}$$

dosáhneme blokově diagonálního tvaru kovarianční matice

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}' & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Protože při časovém kroku Kalmanova filtru je hodnota výstupu známá, lze  $\mathbf{y}(t)$  považovat za další (deterministický) vstup soustavy.

Při další analýze vlastností Kalmanova filtru tedy můžeme pro  $\mathbf{R} > 0$  bez újmy na obecnosti předpokládat nekorelované šумы měření.

### 7.3.4 Stochastické vlastnosti Kalmanova filtru

V tomto odstavci budeme analyzovat nejdůležitější stochastické vlastnosti Kalmanova filtru. Pro zjednodušení nebudeme brát v úvahu deterministický vstup modelu, který tyto vlastnosti neovlivňuje. Budeme tedy předpokládat lineární stochastický systém ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

s nekorelovanými bílými šумы.

Kalmanův filtr jsme odvodili jako filtr poskytující **lineární** odhad s nejmenší střední kvadratickou chybou. Je-li navíc šum gaussovský, splývá tento nejlepší lineární odhad (LMS odhad) s MS odhadem, tj. odhadem podmíněnou střední hodnotou.

Všimněme si nyní vlastností posloupnosti chyb predikce

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1).$$

Podle principu ortogonality platí

$$\mathcal{E} \{ [\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)] \mathbf{1} \} = \mathbf{C} \mathcal{E} \{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)] \mathbf{1} \} = 0$$

a

$$\mathcal{E} \{[\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)] \mathbf{y}^T(t-\tau)\} = \mathbf{C} \mathcal{E} \{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)] \mathbf{y}^T(t-\tau)\} = 0, \quad \tau = 1, \dots, t.$$

Navíc též

$$\mathcal{E} \{\varepsilon(t|t-1) \varepsilon^T(t-\tau|t-\tau-1)\} = \mathbf{C} \mathcal{E} \{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)] [\mathbf{y}(t-\tau) - \hat{\mathbf{y}}(t-\tau|t-\tau-1)]^T\} = 0.$$

Posloupnost chyb predikce  $\varepsilon(t|t-1)$  je tedy bílý šum. Použitím výstupní rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon(t|t-1) &= \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)) + \mathbf{e}(t), \end{aligned}$$

a tedy

$$\mathcal{E} \{\varepsilon(t|t-1) \varepsilon^T(t|t-1) | \mathcal{D}_{t-1}\} = \mathbf{C} \mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}.$$

Faktorizujeme-li tuto pozitivně definitní matici na součin

$$\mathbf{C} \mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}_\varepsilon(t) \mathbf{\Gamma}_\varepsilon^T(t),$$

potom platí

$$\varepsilon(t|t-1) = \mathbf{\Gamma}_\varepsilon(t) \boldsymbol{\nu}(t),$$

kde posloupnost  $\boldsymbol{\nu}(t)$  je bílá a má kovarianční funkci

$$\mathcal{E} \{\boldsymbol{\nu}(t) \boldsymbol{\nu}^T(\tau)\} = \mathbf{I} \delta(t - \tau),$$

tedy je to inovační posloupnost procesu  $\mathbf{y}(t)$ . S použitím chyby predikce můžeme totiž přepsat Kalmanův filtr do tvaru

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}(t) \varepsilon(t|t-1) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \varepsilon(t|t-1) \end{aligned}$$

a nahražením chyb predikce inovacemi dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}(t) \mathbf{\Gamma}_\varepsilon(t) \boldsymbol{\nu}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon(t) \boldsymbol{\nu}(t), \end{aligned} \tag{7.59}$$

což je **inovační model** procesu  $\mathbf{y}(t)$ , tj. model, jehož vstupem je bílá posloupnost  $\boldsymbol{\nu}(t)$ , popř.  $\varepsilon(t|t-1)$ , a výstupem proces  $\mathbf{y}(t)$ . Model (7.59) též nazýváme **tvarovací filtr** šumu  $\mathbf{y}(t)$ .

Naopak vyjádříme-li z rovnic Kalmanova filtru hodnotu chyby predikce, dostaneme model

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}(t) \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}(t) \mathbf{y}(t) \\ \varepsilon(t|t-1) &= -\mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

a po přepočtu chyby predikce na inovace

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}(t) \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}(t) \mathbf{y}(t) \\ \boldsymbol{\nu}(t) &= -\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^{-1}(t) \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon^{-1}(t) \mathbf{y}(t) \end{aligned} \tag{7.60}$$

model, jehož vstupem je proces  $\mathbf{y}(t)$  a výstupem bílá posloupnost  $\mathbf{v}(t)$ , případně  $\varepsilon(t|t-1)$ , což je již známý **bělicí filtr** pro proces  $\mathbf{y}(t)$ .

Poznamenejme ještě, že inovace jsou vlastně pouze „dekorelované“ chyby predikce. Tato jejich vlastnost není v mnoha případech podstatná, a proto se často v literatuře tyto dva pojmy přesně nerozlišují. Podstatný rozdíl však je v tom, že kovariance inovací je v případě stacionárních procesů konstantní, zatímco kovariance chyb predikce, generovaných Kalmanovým filtrem, je časově proměnná, pokud filtr nedosáhl ustáleného limitního stavu.

V případě systému s jedním výstupem jsou oba pojmy totožné, pokud připustíme, aby inovace měly obecný rozptyl  $\sigma_v^2$ . Transformujeme-li v tomto případě inovační model (7.59) pro limitní hodnotu zesílení  $\mathbf{L}$  do pozorovatelného kanonického tvaru a položíme-li  $k_i = c_i - a_i$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n-1} & & & 1 \\ -a_n & & & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ c_n - a_n \end{bmatrix} e(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + e(t),\end{aligned}\quad (7.61)$$

kde  $\mathcal{E}\{e(t)^2\} = \sigma_e^2$ , dostaneme stavovou reprezentaci ARMA modelu

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = e(t) + \sum_{i=1}^n c_i e(t-i).$$

V tomto případě je výhodnější použít jako vstupní bílou posloupnost posloupnost chyb predikce - pak platí, že koeficient  $c_0 = 1$ .

Vidíme tedy, že pojmy Kalmanův filtr, inovační model, bělicí filtr a ARMA model spolu velice úzce souvisejí. Tuto souvislost ještě upřesníme v sekci o frekvenčních vlastnostech Kalmanova filtru.

### 7.3.5 Kalmanův filtr pro barevný šum

Dosud jsme předpokládali, že šumy působící na soustavu – ať korelované nebo nekorelované – byly bílé, tj. jejich spektrální hustota byla konstantní. V tomto odstavci ukážeme, jak lze postupovat v případě, kdy spektrální hustota šumu procesu a/nebo šumu měření není konstantní. Takové šumy nazýváme na základě analogie z optiky **barevné** (jako bílé světlo vnímáme světlo, které obsahuje rovnoměrně zastoupené všechny frekvence viditelné části spektra; naopak světlo s nerovnoměrným zastoupením jednotlivých frekvencí vnímáme jako barevné). Využijeme přitom výsledky předchozího odstavce, kde jsme ukázali, jak je možné sestavit **tvarovací filtr šumu**, který vytvoří z bílé posloupnosti posloupnost s požadovanými spektrálními vlastnostmi.

#### Kalmanův filtr pro barevný šum procesu

Předpokládejme, že potřebujeme odhadovat stav soustavy

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),$$

kde šum procesu není bílý. Spektrální hustotu šumu  $\mathbf{S}_{vv}(z)$  můžeme faktorizovat a realizovat **tvárovací filtr šumu** ve tvaru (7.59)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v(t+1) &= \mathbf{A}_v\mathbf{x}_v(t) + \mathbf{B}_v\mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{C}_v\mathbf{x}_v(t) + \mathbf{D}_v\mathbf{v}'(t),\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{v}'(t)$  je bílý šum s kovarianční funkcí  $\mathbf{I}\delta(t)$  a platí

$$\mathbf{S}_{vv}(z) = \left(\mathbf{C}_v(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v + \mathbf{D}_v\right) \left(\mathbf{C}_v(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A}_v)^{-1}\mathbf{B}_v + \mathbf{D}_v\right)^T.$$

Původní systém pak lze popsat jako systém buzený bílým šumem se stavem složeným ze stavu původního systému a stavu tvarovacího filtru šumu

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}_v(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}_v \\ 0 & \mathbf{A}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_v(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t).\end{aligned}$$

Pro tento systém buzený bílým šumem s kovarianční maticí

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

sestrojíme Kalmanův filtr standardním postupem. Všimněte si však, že musíme odhadovat nejen stav soustavy, ale také stav tvarovacího filtru šumu.

### Kalmanův filtr pro barevný šum měření

Předpokládejme, že potřebujeme odhadovat stav soustavy

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}$$

kde šum měření není bílý. Opět můžeme spektrální hustotu šumu  $\mathbf{S}_{ee}(z)$  faktorizovat a realizovat tvarovací filtr šumu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_e(t+1) &= \mathbf{A}_e\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e\mathbf{e}'(t) \\ \mathbf{e}(t) &= \mathbf{C}_e\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{D}_e\mathbf{e}'(t),\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{e}'(t)$  je bílý šum s kovarianční funkcí  $\mathbf{I}\delta(t)$  a platí

$$\mathbf{S}_{ee}(z) = \left(\mathbf{C}_e(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_e)^{-1}\mathbf{B}_e + \mathbf{D}_e\right) \left(\mathbf{C}_e(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A}_e)^{-1}\mathbf{B}_e + \mathbf{D}_e\right)^T.$$

Původní systém pak lze popsat jako systém buzený bílým šumem se stavem složeným ze stavu původního systému a stavu tvarovacího filtru šumu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}_e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}'(t) \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}'(t) \end{bmatrix}.$$

Dostaneme tak opět systém buzený bílým šumem, ale se šumem  $\mathbf{e}'(t)$  vyskytujícím se v obou rovnicích. K sestrojení Kalmanova filtru je tedy třeba využít postup pro korelované šumy popsany v odstavci 7.3.3. Opět musíme odhadovat nejen stav soustavy, ale také stav tvarovacího filtru šumu.

V případě barevného šumu měření je možné v případě, že tvarovací filtr šumu má speciální tvar, postupovat i jiným způsobem, který **nevede na zvýšení dimenze** stavového vektoru. Předpokládejme, že tvarovací filtr šumu lze upravit na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e(t+1) &= \mathbf{A}_e\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e\mathbf{e}'(t) \\ \mathbf{e}(t) &= \mathbf{x}_e(t). \end{aligned}$$

Potom definujeme-li **odvozené měření** jako

$$\mathbf{y}'(t+1) = \mathbf{y}(t+1) - \mathbf{A}_e\mathbf{y}(t),$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t+1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{e}(t+1) - \mathbf{A}_e\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}_e\mathbf{D}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}_e\mathbf{e}(t) \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}_e\mathbf{D})\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{e}(t+1) - \mathbf{A}_e\mathbf{e}(t) \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}_e\mathbf{D})\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_e\mathbf{e}'(t). \end{aligned}$$

Použijeme-li původní stavovou rovnici přechodu a výstupní rovnici

$$\mathbf{y}'(t+1) = (\mathbf{C}\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}_e\mathbf{D})\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_e\mathbf{e}'(t),$$

kde měření realizujeme jako rozdíl  $\mathbf{y}'(t+1) = \mathbf{y}(t+1) - \mathbf{A}_e\mathbf{y}(t)$ , získáme opět systém buzený bílým šumem. Šum procesu a šum měření je korelovaný, a proto je třeba k sestrojení Kalmanova filtru použít postup z odstavce 7.3.3.

Výše uvedený postup lze realizovat alternativně tak, že tvarovací filtry šumu jsou buzeny posloupností  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ . Ve tvarovacích filtrech jsou pak matice

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{I}, \quad \text{popř.} \quad \mathbf{D}_e = \mathbf{I}$$

a posloupnosti  $\mathbf{v}'$  a  $\mathbf{e}'$  mají obecné kovarianční matice  $\mathbf{Q}'$  a  $\mathbf{R}'$ . Je-li barevný jak šum procesu, tak šum měření, je možné použít kombinaci popsanych postupů.

Zařazením tvarovacího filtru šumu do Kalmanova filtru máme možnost ovlivnit jeho frekvenční vlastnosti. Proto někdy předpokládáme, že šum je barevný, s cílem potlačit vliv poruch spíše deterministického charakteru (např. poruch typu skok nebo harmonických poruch) nebo ovlivnit frekvenční vlastnosti přenosu otevřené regulační smyčky, které těsně souvisejí s robustností regulátoru. Podrobněji budeme tuto otázku diskutovat v odstavci 8.2.

### 7.3.6 Konvergence a stabilita Kalmanova filtru

Řešení **diferenční Riccatiho rovnice** (DRR) (7.45)

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T - \mathbf{L}(t) \left( \mathbf{C}^T\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C} + \mathbf{R} \right) \mathbf{L}^T(t) + \mathbf{Q}$$

s Kalmanovým ziskem (7.43)

$$L(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}$$

v mnoha případech pro  $t \rightarrow \infty$  konverguje k limitní hodnotě

$$\mathbf{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t+1|t). \quad (7.62)$$

Jestliže řešení konverguje, pak limitní řešení (7.62) vyhovuje **algebraické Riccatiho rovnici** (ARR)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{L} \left( \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C} + \mathbf{R} \right) \mathbf{L}^T + \mathbf{Q}, \quad (7.63)$$

kde  $\mathbf{L}$  je limitní hodnota Kalmanova zesílení

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T \left( \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}. \quad (7.64)$$

Limitní chování Kalmanova filtru pak charakterizuje stavová matice přechodu

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \quad (7.65)$$

Pro praktické využití Kalmanova filtru je nezbytné znát odpověď na řadu klíčových otázek, především

- jaké jsou podmínky konvergence diferenční Riccatiho rovnice, kolik je možných limitních řešení a jak závisejí na počátečních podmínkách
- jaký je vztah mezi limitními řešeními diferenční Riccatiho rovnice a řešeními algebraické Riccatiho rovnice
- za jakých podmínek je filtr odpovídající limitním hodnotám kovarianční matice stabilní.

Protože struktura řešení je poměrně složitá, zavedeme následující definici.

**Definice 14** *Reálné symetrické pozitivně semidefinitní řešení ARR nazveme stabilizující řešení, jestliže odpovídající stavová matice (7.65) má všechna vlastní čísla uvnitř jednotkové kružnice.*

*Reálné symetrické pozitivně semidefinitní řešení ARR nazveme silné řešení, jestliže odpovídající stavová matice (7.65) má všechna vlastní čísla uvnitř jednotkové kružnice nebo na jednotkové kružnici.*

Dále budeme předpokládat, že kovarianční matice  $\mathbf{Q} \geq 0$  a  $\mathbf{R} > 0$ . Pak existují matice  $\mathbf{\Gamma}_v$  a  $\mathbf{\Gamma}_e$  takové, že

$$\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}_v \mathbf{\Gamma}_v^T \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}_e \mathbf{\Gamma}_e^T$$

a matice  $\mathbf{\Gamma}_e$  je invertovatelná.

Vlastnosti řešení algebraické Riccatiho rovnice shrnuje tato věta (Goodwin a Sin, 1984).

**Věta 15 (Vlastnosti řešení ARR.)** *Nechť dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  je detekovatelná. Potom*

- (i) Existuje jediné silné řešení ARR.
- (ii) Je-li dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  stabilizovatelná, je silné řešení jediným pozitivně semidefinitním řešením ARR.
- (iii) Jestliže dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  nemá žádný nedosažitelný mód na jednotkové kružnici, je silné řešení též stabilizujícím řešením.
- (iv) Jestliže dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  má nějaký nedosažitelný mód na jednotkové kružnici, pak neexistuje žádné stabilizující řešení.
- (v) Jestliže dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  má nějaký nedosažitelný mód uvnitř jednotkové kružnice nebo na jednotkové kružnici, pak silné řešení není pozitivně definitní.
- (vi) Jestliže dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  má nějaký nedosažitelný mód vně jednotkové kružnice, pak kromě silného řešení existují další pozitivně semidefinitní řešení ARE.

Věta vyjmenovává různé varianty podmínek pro existenci a jednoznačnost silného, případně stabilizujícího řešení ARR. Poskytuje vodítko pro konstrukci filtru i v případech, kdy dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  není stabilizovatelná. Takové případy mohou v praktických úlohách filtrace nastat - zvláště významný je případ kořenů na jednotkové kružnici, které mnohdy zavádíme uměle používáním tzv. přírůstkových modelů.

Z bodů (i)-(iii) této věty vyplývají postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost stabilizujícího řešení, které sice nejsou nutné, ale jsou snadno ověřitelné.

**Věta 16 (Stabilizující řešení ARR - postačující podmínky.)** *Nechť dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  je pozorovatelná a dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  dosažitelná. Pak existuje jediné pozitivně definitní řešení ARR, které je zároveň stabilizujícím řešením.*

Zatímco výsledky založené na dosažitelnosti a pozorovatelnosti byly známy již od 60. let, obecnější výsledky s oslabenými předpoklady byly publikovány až v 70. a 80. letech.

Další okruh otázek se týká konvergence řešení DRR k silnému, případně stabilizujícímu řešení ARR, a vlivu počátečních podmínek. Konvergence je zaručena v několika případech.

**Věta 17 (Konvergence DRR I.)** *Nechť dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  je detekovatelná, nechť dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  je stabilizovatelná a nechť  $\mathbf{P}(0| - 1) \geq 0$ . Potom řešení DRR konverguje k silnému řešení ARR, a to exponenciálně rychle.*

**Věta 18 (Konvergence DRR II.)** *Nechť dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  je detekovatelná, nechť dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  nemá žádné nedosažitelné módy na jednotkové kružnici a nechť  $\mathbf{P}(0| - 1) > 0$ . Potom řešení DRR konverguje k silnému řešení ARR a to exponenciálně rychle.*

**Věta 19 (Konvergence DRR III.)** *Nechť dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  je pozorovatelná a počáteční podmínka Riccatiovy rovnice  $\mathbf{P}(0| - 1) > \mathbf{P}$ . Potom posloupnost matic  $\mathbf{P}(t|t-1)$  konverguje k silnému řešení  $\mathbf{P}$ .*

Na rozdíl od předchozích vět není v tomto případě zaručena exponenciální konvergence.

Tyto věty nebudeme přesně dokazovat, ale k pochopení působících mechanismů ukážeme některé souvislosti. Protože vlastnosti řešení Riccatiho rovnice úzce souvisejí s vlastnostmi **diskrétní Ljapunovy rovnice**, připomeneme nejprve některé její vlastnosti.

Ljapunovova rovnice je lineární maticová rovnice ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q},$$

kde všechny matice jsou čtvercové dimenze  $n$ . Označíme-li sloupce matic  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n], \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n],$$

pak tuto rovnici lze rozepsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= a_{11}\mathbf{A}\mathbf{p}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{A}\mathbf{p}_n + \mathbf{q}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_n &= a_{n1}\mathbf{A}\mathbf{p}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{A}\mathbf{p}_n + \mathbf{q}_n, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{A} & \dots & a_{1n}\mathbf{A} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{A} & \dots & a_{nn}\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}.$$

Definujeme-li operátor „přerovnání do vektoru“  $v$

$$v(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

a všimneme-li si, že matice v předchozí rovnici je právě Kroneckerův součin  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ , lze Ljapunovovu rovnici přepsat jako normální lineární rovnici

$$v(\mathbf{P}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})v(\mathbf{P}) + v(\mathbf{Q}),$$

neboli

$$(\mathbf{I}_{n^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})v(\mathbf{P}) = v(\mathbf{Q}).$$

Tato rovnice má právě jedno řešení, není-li matice  $(\mathbf{I}_{n^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$  singulární, tj. nemá-li matice  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$  žádné vlastní číslo rovno jedné. Protože pro Kroneckerův součin matic platí, že vlastní čísla

$$\lambda(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \{\lambda_{Ai}\lambda_{Bj}, \quad i = 1, \dots, n_A, \quad j = 1, \dots, n_B\},$$

dostaneme odtud podmínku jednoznačnosti řešení Ljapunovovy rovnice

$$\lambda_{Ai}\lambda_{Aj} \neq 1.$$

Tato podmínka je automaticky splněna, je-li matice  $\mathbf{A}$  asymptoticky stabilní, tj. má všechna vlastní čísla **uvnitř** jednotkové kružnice.

Všimněme si dále, že pro stabilní matici  $\mathbf{A}$  lze řešení psát ve tvaru řady

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{T} \mathbf{T}^T (\mathbf{A}^T)^i,$$

kde  $\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^T$ . Je-li systém  $\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}$  dosažitelný, pak lineární kombinace matic  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}^2\mathbf{\Gamma}, \dots$  generují celý prostor dimenze  $n$ , a proto je řešení  $\mathbf{P}$  pozitivně definitní.

Nyní se můžeme vrátit k vlastnostem Riccatiový rovnice. Podmínka detekovatelnosti dvojice  $\mathbf{C}, \mathbf{A}$  je přirozená. Není-li systém detekovatelný, existuje nestabilní mód, který se neprojeví na měřeném výstupu, a tudíž chyba odhadu  $\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)$  nemusí být omezená. Naopak je-li dvojice  $\mathbf{C}, \mathbf{A}$  detekovatelná, existuje nějaká (neoptimální) matice stavové injekce  $\mathbf{L}'$  taková, že matice  $\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C}$  je asymptoticky stabilní. Uvažujeme-li tento neoptimální, ale asymptoticky stabilní filtr

$$\hat{\mathbf{x}}_L(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}_L(t) + \mathbf{L}'\mathbf{y}(t),$$

jeho chyba odhadu bude

$$\tilde{\mathbf{x}}_L(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_L(t) + \mathbf{v}(t) - \mathbf{L}'\mathbf{e}(t)$$

a odtud kovarianční matice chyby odhadu bude

$$\mathbf{P}_L(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C})\mathbf{P}_L(t)(\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C})^T + \mathbf{L}'\mathbf{R}\mathbf{L}'^T + \mathbf{Q}.$$

Protože matice  $\mathbf{A} - \mathbf{L}'\mathbf{C}$  je stabilní, má tato Ljapunovova rovnice jednoznačné omezené, symetrické, pozitivně semidefinitní řešení  $\mathbf{P}_L$ . Protože však filtr  $\mathbf{L}'$  není optimální, platí pro libovolnou symetrickou pozitivně semidefinitní počáteční podmínku  $\mathbf{P}_L(0) = \mathbf{P}(0)$  nerovnost

$$\mathbf{P}(t) \leq \mathbf{P}_L(t).$$

Z (7.46) je vidět, že  $\mathbf{P}(t)$  je symetrická pozitivně semidefinitní matice. Nyní jsme ukázali, že z předpokladu detekovatelnosti plyne, že  $\mathbf{P}(t)$  je navíc omezená. Lze ukázat, že při nulových počátečních podmínkách  $\mathbf{P}(0) = 0$  je posloupnost  $\mathbf{P}(t)$  monotónně rostoucí. Je-li monotónně rostoucí posloupnost zároveň omezená, existuje její limita. To je i případ duálního problému kvadraticky optimálního řízení v odstavci 2.4. Při nenulových počátečních podmínkách je situace složitější, neboť nemonotónní omezená posloupnost může také oscilovat.

Souvislost stability Kalmanova filtru s dosažitelností dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  je poněkud překvapivější. Lze ji vysvětlit tak, že pokud nějaký mód není vybuzen šumem procesu  $\mathbf{v}(t)$ , pak filtr není nucen jeho neurčitost korigovat, a tím stabilizovat matici  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ . Přesněji je-li dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  dosažitelná, podle PBH kritéria dosažitelnosti (Kailath, 1980) platí

$$\text{hod } [z\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v] = n.$$

Tato plná hodnota matice se nezmění přidáním sloupců, takže též

$$\text{hod } [z\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v] = n,$$

a přičtením  $\mathbf{\Gamma}_e^{-1}\mathbf{C}$  násobku druhého sloupce k prvnímu sloupci, což je elementární úprava nemění hodnota matice, dostaneme

$$\text{hod } [z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}, \mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v] = n.$$

Ukázali jsme tedy, že rovněž dvojice  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC}, [\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v])$  je dosažitelná. S využitím tohoto výsledku můžeme pro libovolný asymptoticky stabilní filtr  $\mathbf{L}$  psát Ljapunovovu rovnici

$$\mathbf{P}_L = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{P}_L(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T + [\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v][\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v]^T,$$

kteřá má jednoznačné (v důsledku stability) pozitivně definitní (v důsledku dosažitelnosti) řešení. Protože systém je detekovatelný, konverguje diferenční Riccatiho rovnice a chyba odhadu je zhora omezená chybou odhadu suboptimálního filtru  $\mathbf{L}$ . Proto je i matice  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  asymptoticky stabilní. Přepíšeme-li algebraickou Riccatiho rovnici (7.63) stejným způsobem jako Ljapunovovu rovnici

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T + [\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v][\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v]^T,$$

ze stability  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  vyplývá, že její řešení je jednoznačné, a z dosažitelnosti dvojice  $(\mathbf{A} + \mathbf{LC}, [\mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_e, \mathbf{\Gamma}_v])$  vyplývá, že toto řešení je pozitivně definitní. To jsou však právě závěry uvedené věty.

Všimněte si, že kovarianční matice chyby odhadu stavu a Kalmanovo zesílení závisejí pouze na kovarianční matici chyby odhadu v předchozím kroku a nezávisejí na datech. V případě potřeby tedy mohou být napočítány předem a mohou být zkontrolovány jejich vlastnosti (pozitivní definitnost a stabilita).

Výsledky týkající se stability ARR mohou být využity i pro vyšetřování stability Kalmanova filtru pro nelimitní hodnotu zesílení  $\mathbf{L}(t)$ . Lze k tomu využít tzv. falešnou algebraickou Riccatiho rovnici (fake algebraic Riccati equation), kterou získáme přepsáním DRR do tvaru

$$\mathbf{P}(t|t-1) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{A}^T - \mathbf{L}(t) \left( \mathbf{C}^T \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C} + \mathbf{R} \right) \mathbf{L}^T(t) + \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{P}(t+1|t).$$

Označíme-li

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{P}(t+1|t),$$

pak stabilita matice  $\mathbf{A} - \mathbf{L}(t)\mathbf{C}$  pro každé dané  $t$  vyžaduje kromě detekovatelnosti systému též dosažitelnost dvojice  $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{\Gamma}}_v(t))$ , kde

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_v(t)\tilde{\mathbf{\Gamma}}_v^T(t).$$

Tato dvojice bude dosažitelná, bude-li  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  dosažitelná a zároveň bude matice

$$\mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{P}(t+1|t) > 0,$$

tj. pozitivně definitní. Navíc lze ukázat, že řešení DRR má vlastnost monotonicity, tj.

$$\mathbf{P}(t|t-1) > \mathbf{P}(t+1|t) \Rightarrow \mathbf{P}(t+\tau|t+\tau-1) > \mathbf{P}(t+\tau+1|t+\tau)$$

pro libovolné  $\tau \geq 1$ . Stability Kalmanova filtru v každém kroku a jeho konvergence tedy lze dosáhnout také vhodnou volbou počáteční podmínky  $\mathbf{P}(0)$  (viz třetí varianta věty o konvergenci).

Numericky robustní metody k nalezení limitního řešení Riccatiovy rovnice jsou totožné s metodami řešení Riccatiho rovnice odpovídající problému kvadraticky optimálního řízení uvedenými v kapitole 2.4. Hamiltonova matice pro problém optimální filtrace má pro nesin-

gulární matici  $\mathbf{A}$  a pozitivně definitní matici  $\mathbf{R}$  tvar

$$\mathbf{H}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} & -\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (7.66)$$

### 7.3.7 Frekvenční vlastnosti Kalmanova filtru

Vlastnosti limitního Kalmanova filtru, který je časově invariantní, lze popsat rovněž ve frekvenční oblasti. Ukážeme, že z limitního řešení Riccatiho rovnice plyne i řešení úlohy spektrální faktorizace a souvislost kovariancí šumů s geometrickým místem kořenů Kalmanova filtru. Další důležitou vlastností Kalmanova filtru je možnost tvarovat jeho frekvenční charakteristiku modelováním spektrálních vlastností šumů. Naopak v tomto odstavci vynecháme zajímavý teoretický výsledek o ekvivalenci Kalmanova a Wienerova filtru, který lze nalézt např. v (Lewis, 1986b).

#### Souvislost Kalmanova filtru a spektrální faktorizace

Uvažujme limitní Kalmanův filtr daný rovnicí (7.44)

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t),$$

kde  $\mathbf{L}$  je limitní hodnota Kalmanova zesílení (7.64)

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

a  $\mathbf{P}$  je řešení ARR (7.63)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{L} (\mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C} + \mathbf{R}) \mathbf{L}^T + \mathbf{Q}.$$

Je-li dvojice  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  detekovatelná a dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{\Gamma}_v)$  dosažitelná, pak takový filtr existuje, ARR má jediné pozitivně definitní řešení a matice  $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$  je stabilní.

Vytkneme-li z výrazu pro charakteristický polynom uzavřené smyčky stavové injekce výraz  $z\mathbf{I} - \mathbf{A}$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_d(z) &= \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) \\ &= \det\left((z\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C})\right) \\ &= \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C}), \end{aligned}$$

a využijeme-li vlastnost determinantu

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{Y}\mathbf{X}),$$

dostaneme

$$\Delta_d(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L}). \quad (7.67)$$

Přitom determinant  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$  je charakteristický polynom otevřené smyčky

$$\Delta(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (7.68)$$

K získání dalšího výsledku použijeme identitu

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^T + \mathbf{A}\mathbf{P}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^T + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\mathbf{A}^T,$$

kterou lze dokázat přímým výpočtem. Z algebraické Riccatiové rovnice tak dostaneme

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^T + \mathbf{A}\mathbf{P}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^T + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}(\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{C} + \mathbf{R})\mathbf{L}^T = \mathbf{Q}.$$

Abychom na pravé straně rovnice získali výraz pro spektrální hustotu signálu  $\mathbf{y}$ , vynásobíme tuto rovnici zleva výrazem  $\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , zprava výrazem  $(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T$  a přičteme k oběma stranám matici  $\mathbf{R}$ . Tím dostaneme

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{A}^T(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T \\ & + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{L}^T(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\ & = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Využijeme-li rovnosti

$$\mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T,$$

která plyne přímo z definice Kalmanova zesílení, můžeme levou stranu faktorizovat a dostaneme identitu

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I} \right] (\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \left[ \mathbf{C}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I} \right]^T \\ & = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Připomeneme-li definici faktoru kovarianční matice chyby predikce

$$\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}_\varepsilon\mathbf{\Gamma}_\varepsilon^T,$$

pak spektrální hustotu

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \quad (7.70)$$

můžeme psát také ve tvaru

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{W}^{-1}(z)\mathbf{W}(z^{-1})^{-T}, \quad (7.71)$$

kde

$$\mathbf{W}^{-1}(z) = \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I} \right] \mathbf{\Gamma}_\varepsilon, \quad (7.72)$$

což je právě přenos tvarovacího filtru (7.59)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}\mathbf{\Gamma}_\varepsilon\boldsymbol{\nu}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{\Gamma}_\varepsilon\boldsymbol{\nu}(t). \end{aligned}$$

Vrátíme-li se nyní k výsledku (7.67), můžeme pro  $\det \mathbf{W}^{-1}(z)$  psát

$$\begin{aligned} \det \mathbf{W}^{-1}(z) &= \det \left[ \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{L} + \mathbf{I} \right] \det \mathbf{\Gamma}_\varepsilon \\ &= \frac{\Delta_{cl}(z)}{\Delta(z)} \det \mathbf{\Gamma}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.73)$$



Pro bělicí filtr potom platí

$$\det \mathbf{W}(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta_{cl}(z) \det \Gamma_\varepsilon}. \quad (7.74)$$

Tento výsledek ale odpovídá přesně přenosu bělicího filtru (7.60)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{Ly}(t) \\ \boldsymbol{\nu}(t) &= -\Gamma_\varepsilon^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \Gamma_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}(t), \end{aligned}$$

neboť jeho přenos

$$\mathbf{W}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{KC})^{-1} \mathbf{L}] \Gamma_\varepsilon^{-1}$$

je s použitím lemmatu o inverzi matice (6.24) právě

$$\mathbf{W}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{L}]^{-1} \Gamma_\varepsilon^{-1}.$$

Protože limitní Kalmanův filtr (charakteristický polynom  $\Delta_{cl}(z)$ ) je stabilní, je rovněž bělicí filtr (7.74) stabilní a tvarovací filtr (7.73) minimálně fázový. Je-li navíc tvarovací filtr (7.73) (charakteristický polynom  $\Delta(z)$ ) stabilní, pak bělicí filtr (7.74) je minimálně fázový. Vyřešení ARR pro stabilní tvarovací filtr šumu je tedy ekvivalentní úloze najít spektrální faktorizaci tohoto šumu s minimální fází.

### Chang-Letovova rovnice a geometrické místo kořenů

Označíme-li přenos mezi vstupem  $\mathbf{v}'$  s jednotkovou kovarianční maticí a výstupem  $\mathbf{y}$  stochastického systému

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{Ax}(t) + \Gamma_v \mathbf{v}'(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

jako

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Gamma_v,$$

můžeme identitu (7.69) s využitím vztahu (7.67) upravit na

$$\Delta_{cl}(z) \Delta_{cl}(z^{-1}) = \frac{\det(\mathbf{G}(z) \mathbf{G}^T(z^{-1}) + \mathbf{R}) \Delta(z) \Delta(z^{-1})}{\det(\mathbf{CPC}^T + \mathbf{R})}, \quad (7.75)$$

což je tzv. Chang-Letovova rovnice. Její význam je v tom, že umožňuje pro systémy s jedním výstupem přímo nalézt póly limitního Kalmanova filtru, takže není třeba hledat řešení ARR. Přenos  $\mathbf{G}(z)$  je pro systémy s jedním výstupem možné psát jako

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \Gamma_v}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\mathbf{b}^T(z)}{a(z)},$$

kde  $\mathbf{b}^T(z)$  je řádkový vektor a  $a(z) = \Delta(z)$  charakteristický polynom. Rovnici (7.75) pak můžeme psát jako

$$\Delta_{cl}(z) \Delta_{cl}(z^{-1}) = \frac{\mathbf{b}^T(z) \mathbf{b}(z^{-1}) + R a(z) a(z^{-1})}{\mathbf{c}^T \mathbf{P} \mathbf{c}^T + R} \quad (7.76)$$

a k určení pólů limitního Kalmanova filtru  $\Delta_{cl}(z)$  je třeba určit kořeny výrazu

$$\mathbf{b}^T(z)\mathbf{b}(z^{-1}) + Ra(z)a(z^{-1}),$$

které jsou symetrické vůči jednotkové kružnici, a vybrat z nich stabilní kořeny, tj. kořeny uvnitř jednotkové kružnice. Jmenovatel  $\mathbf{c}^T\mathbf{P}\mathbf{c} + R$  je přitom pouze normalizační konstanta. Tuto úlohu nazýváme **faktORIZACE POLYNOMU** a jejím vyřešením převedeme (pro pozorovatelné systémy) úlohu nalezení Kalmanova filtru na úlohu umístění pólů (pole placement), která může být snadno vyřešena například použitím Ackermannova vzorce nebo vyřešením příslušné diofantické rovnice. Vztah (7.76) je tedy důležitým styčným bodem mezi stavovým a polynomiálním přístupem k řešení problému optimální filtrace.

Póly Kalmanova filtru, tj. kořeny rovnice (7.76), jsou pro pozorovatelné systémy, kdy nedojde ke krácení nul a pólů, totožné s nulovými body výrazu

$$1 + \frac{\mathbf{b}^T(z)\mathbf{b}(z^{-1})}{Ra(z)a(z^{-1})} = 1 + \frac{1}{R}\mathbf{G}(z)\mathbf{G}^T(z^{-1}). \quad (7.77)$$

Chceme-li vyšetřit závislost polohy pólů Kalmanova filtru na poměru šumu procesu a šumu měření, můžeme využít podobnosti tohoto výrazu se vztahem používaným v klasické metodě **geometrického místa kořenů**

$$1 + K \mathbf{G}_{ol}(z).$$

Je známo, že při změně zesílení  $K$  se pohybují **póly uzavřené smyčky od pólů otevřené smyčky k nulám otevřené smyčky** (je třeba uvažovat i nuly v nekonečnu). Proto póly  $p_i$  Kalmanova filtru se při změně hodnoty  $1/R$  od nuly do nekonečna budou pohybovat od stabilních pólů součinu  $\mathbf{G}(z)\mathbf{G}^T(z^{-1})$  k jeho stabilním nulám. Při vyhodnocování tohoto geometrického místa kořenů je důležité si uvědomit, že nestabilní převrácené hodnoty těchto  $1/p_i$  se pohybují po trajektoriích symetrických vzhledem k jednotkové kružnici. Pro pól nebo nulu ležící na jednotkové kružnici je třeba tyto symetrické trajektorie uvažovat, abychom získali jejich správné násobnosti, které jsou rozhodující pro určení asymptot trajektorií z pólu nebo nuly vycházejících.

## 7.4 Interpolace

Největší výhoda Kalmanova filtru spočívá v sekvenčním vývoji střední hodnoty stavu a jeho kovarianční matice na základě měřených dat. Proto je Kalmanův filtr vhodný např. pro zpětnovazební řízení zpětnou vazbou od stavu, kdy neměřitelný stav je nahrazen jeho odhadem. Existují ale situace, kdy máme k dispozici množinu vstupních a výstupních dat změřených na určitém intervalu a na základě těchto dat hledáme odhad stavu na stejném intervalu.

Takovému způsobu odhadování říkáme interpolace (vyrovnávání). Odhad stavu v diskrétním čase  $t$  není založen pouze na minulých datech, ale i na datech budoucích, získaných v čase  $\tau > t$ . Odhad založený na větší množině dat bude lepší než odhad založený pouze na minulých měřeních.

Uvažujme lineární diskrétní systém

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (7.78)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t), \quad (7.79)$$

kde matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  jsou známé a  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  jsou nekorelované diskrétní bílé šумы s kovarianční maticí (opět známou)

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (7.80)$$

Předpokládáme, že známe vstupní posloupnost  $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N)$  a výstupní posloupnost  $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(N)$  na časovém intervalu  $t \in [0, N]$ . Naším cílem je na základě dat a známého modelu provést odhad posloupnosti stavů  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(0+1), \dots, \mathbf{x}(N)$ .

Kalmanův filtr využívá k sekvenčnímu odhadu pouze stará data. K získání interpolovaného odhadu je třeba tuto informaci **složit** s informací obsaženou v datech budoucích. Ukážeme, že Kalmanův filtr můžeme vyvíjet také v obráceném směru času a interpolaci je tak možno efektivně realizovat přímým a zpětným během Kalmanova filtru.

Přímý běh Kalmanova filtru byl popsán v předchozích odstavcích. Nyní popíšeme jeho zpětný běh. Nejprve je třeba upravit stavovou rovnici stochastického systému. Existuje-li inverze matice  $\mathbf{A}$ , pro počítání v obráceném směru času platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (7.81)$$

Označením odhadu stavu při zpětném běhu  $\hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau)$  (s horním indexem  $b$ ) budeme rozumět podmíněnou střední hodnotu

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t) | \mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau+1), \mathbf{y}(\tau+1), \dots, \mathbf{u}(N), \mathbf{y}(N) \}.$$

Je to tedy odhad stavu v čase  $t$  založený na datech od času  $\tau$  do konce intervalu odhadování. V tom je rozdíl proti přímému běhu.

Zpětný běh se skládá opět z datového (filtračního) kroku a časového (predikčního) kroku. Datový krok je popsán známým vztahem pro podmíněnou střední hodnotu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^b(t|t) &= \hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) + \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1)) \\ \mathbf{R}_{xx}^b(t|t) &= \mathbf{R}_{xx}^b - \mathbf{R}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{R}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{R}_{xx}^b, \end{aligned} \quad (7.82)$$

kde

$$\mathbf{R}_{xx}^b = \mathbf{R}_{xx}^b(t|t+1).$$

Predikční krok vychází z modelu. Podle (7.83) platí

$$\hat{\mathbf{x}}^b(t-1|t) = \mathbf{A}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}^b(t|t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t-1)) \quad (7.83)$$

$$\mathbf{R}_{xx}^b(t-1|t) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{R}_{xx}^b(t|t) + \mathbf{R}_v)\mathbf{A}^{-T}. \quad (7.84)$$

Získali jsme tedy vztahy pro zpětný běh Kalmanova filtru. Zbývá vyřešit problém, jak složit oba běhy dohromady. To je možné provést jednoduše, jsou-li oba odhady nezávislé.

Zpětný odhad je nezávislý na přímém běhu pouze tehdy, jestliže počáteční odhad pro zpětný běh je nezávislý na odhadu při přímém běhu ve stejném čase. Proto zvolíme

$$(\mathbf{R}_{xx}^b(N))^{-1} = 0 \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{x}}^b(N) = 0$$

(na počátku zpětného běhu nemáme žádnou informaci). Přitom je výhodnější místo kovarianční matice vyvíjet v čase tzv. **informační matici**  $\mathbf{S}(t|\tau)$ , která je rovna inverzi podmíněné kovarianční matice  $\mathbf{S}(t|\tau) = [\mathbf{P}_x^b(t|\tau)]^{-1}$ . Zavedeme také novou proměnnou  $\hat{\mathbf{z}}(t|\tau)$  podle vztahu

$$\hat{\mathbf{z}}(t|\tau) = \mathbf{S}(t|\tau)\hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau). \quad (7.85)$$

Nyní odvodíme filtrační krok pro nově zavedené proměnné. Informační matice bude

$$\mathbf{S}(t|t) = [\mathbf{P}_{xx}^b(t|t)]^{-1} = [\mathbf{P}_{xx}^b - \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b]^{-1},$$

kde  $\mathbf{P}_{xx}^b = \mathbf{P}_{xx}^b(t|t+1)$ . Použijeme-li lemmatu o inverzi matice (6.24), je informační matice rovna

$$\mathbf{S}(t|t) = \mathbf{S}(t|t-1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{C}. \quad (7.86)$$

Z (7.82) dostaneme

$$\hat{\mathbf{x}}^b(t|t) = \hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) + \mathbf{L}(t)(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1)), \quad (7.87)$$

kde  $\mathbf{L}(t)$  je Kalmanův zisk pro zpětný běh. Pomocí jednoduchých úprav můžeme získat jednodušší vztah pro Kalmanův zisk

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^{-1} \\ &= [\mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} (\mathbf{R}_e + \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T)] \mathbf{R}_e^{-1} \\ &= [\mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T - \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T] \mathbf{R}_e^{-1} \\ &= [\mathbf{P}_{xx}^b - \mathbf{P}_{xx}^b \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b (t|t+1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{xx}^b (t|t+1)] \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{xx}^b(t|t) \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{P}_{xx}^b = \mathbf{P}_{xx}^b(t|t+1)$ . Násobením (7.87) informační maticí dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t|t)\hat{\mathbf{x}}^b(t|t) &= \mathbf{S}(t|t)\hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) \\ &= \mathbf{S}(t|t+1)\hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Z předchozího vztahu plyne datový krok

$$\hat{\mathbf{z}}(t|t) = \hat{\mathbf{z}}(t|t+1) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{y}(t). \quad (7.88)$$

Filtrační (datový) krok je popsán vztahy (7.88) a (7.86).

Nyní odvodíme časový krok (zpětnou predikci). Začneme s kovarianční maticí. Z (7.83) plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t-1|t) &= [\mathbf{P}_{xx}^b(t-1|t)]^{-1} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{P}_{xx}^b(t|t) + \mathbf{R}_v]^{-1} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{S}^{-1}(t|t) + \mathbf{R}_v]^{-1} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T [\mathbf{S}(t|t) - \mathbf{S}(t|t)(\mathbf{R}_v^{-1} + \mathbf{S}(t|t))^{-1} \mathbf{S}(t|t)] \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T (\mathbf{S}(t|t) - \mathbf{L}_p(t) \mathbf{S}(t|t)) \mathbf{A}, \end{aligned}$$

kde jsme ve čtvrtém kroku použili lemmatu o inverzi matice (6.24). Časový krok pro in-

formační matici je

$$\mathbf{S}(t-1|t) = \mathbf{A}^T(\mathbf{I} - \mathbf{L}_p(t))\mathbf{S}(t|t)\mathbf{A}, \quad (7.89)$$

kde pomocná matice  $\mathbf{L}_p(t)$  je rovna

$$\mathbf{L}_p(t) = \mathbf{S}(t|t)[(\mathbf{S}(t|t) + (\mathbf{R}_v)^{-1})^{-1}].$$

Pro vývoj střední hodnoty platí podle (7.83)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t-1|t) &= \mathbf{S}(t-1|t)\hat{\mathbf{x}}^b(t-1|t) \\ &= \mathbf{S}(t-1|t)\mathbf{A}^{-1}[\hat{\mathbf{x}}^b(t|t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \\ &= \mathbf{S}(t-1|t)\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{S}^{-1}(t|t)\hat{\mathbf{z}}(t|t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \\ &= \mathbf{S}(t-1|t)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^{-1}(t|t)[\hat{\mathbf{z}}(t|t) - \mathbf{S}(t|t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \end{aligned}$$

a nakonec

$$\hat{\mathbf{z}}(t-1|t) = \mathbf{A}^T(\mathbf{I} - \mathbf{L}_p(t))[\hat{\mathbf{z}}(t|t) - \mathbf{S}(t|t)\mathbf{B}\mathbf{u}(t)], \quad (7.90)$$

kde jsme použili (7.89).

Nyní známe podmíněný odhad  $\hat{\mathbf{x}}^f(t|t)$ ,  $\mathbf{P}_{xx}^f(t|t)$  pro přímý filtr a podmíněný odhad  $\hat{\mathbf{x}}^b(t|t)$ ,  $\mathbf{P}_{xx}^b(t|t)$  nebo  $\hat{\mathbf{z}}(t|t)$ ,  $\mathbf{S}(t|t)$  pro zpětný filtr a zbývá ukázat, jak složit oba odhady dohromady.

Problém odhadu neznámé proměnné  $\mathbf{x}$  na základě dvou nezávislých měření  $\mathbf{y}_1$  a  $\mathbf{y}_2$  za předpokladu, že nemáme žádnou apriorní informaci o  $\mathbf{x}$ , ale známe střední hodnotu a kovarianci  $\mathbf{y}_1$  a  $\mathbf{y}_2$ , jsme již vyřešili v odstavci 6.5. Stručně zopakujeme tento výsledek. Model měření lze popsat jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7.91)$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{bmatrix}.$$

Protože nemáme žádnou apriorní znalost o  $\mathbf{x}$ , zvolíme  $\boldsymbol{\mu}_x = 0$  a  $(\mathbf{R}_x)^{-1} = 0$ . Nemůžeme ale použít obvyklé vztahy pro podmíněné střední hodnoty a kovariance, protože  $\mathbf{R}_x \rightarrow \infty$ . Užijeme opět lemma o maticové inverzi (6.24) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x|y} &= [\mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \\ \mathbf{x} &= [\mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{y}, \end{aligned}$$

který po dosazení za  $\mathbf{C}$  a při nezávislých měřeních je roven

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x|y} &= [(\mathbf{R}_{\varepsilon_1})^{-1} + (\mathbf{R}_{\varepsilon_2})^{-1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}} &= [(\mathbf{R}_{\varepsilon_1})^{-1} + (\mathbf{R}_{\varepsilon_2})^{-1}]^{-1} [(\mathbf{R}_{\varepsilon_1})^{-1} \mathbf{y}_1 + (\mathbf{R}_{\varepsilon_2})^{-1} \mathbf{y}_2]. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Nyní můžeme použít model (7.91) na řešení našeho problému interpolace pomocí

přímého a zpětného odhadu. Apriorní odhady jsou

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^f(t|t) \\ \hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx}^f(t|t) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^b(t|t+1) \end{bmatrix} \right]. \quad (7.93)$$

Uvědomme si, že jsme použili  $\hat{\mathbf{x}}^b(t|t+1)$  a ne  $\hat{\mathbf{x}}^b(t|t)$ , aby odhady byly opravdu nezávislé. Z (7.92) a (7.93) okamžitě plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xx}(t) &= [(\mathbf{P}_{xx}^f(t|t))^{-1} + (\mathbf{P}_{xx}^b(t|t+1))^{-1}]^{-1} = \\ &= [(\mathbf{P}_{xx}^f(t|t))^{-1} + \mathbf{S}(t|t+1)]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(t) &= [(\mathbf{P}_{xx}^f(t|t))^{-1} + \mathbf{S}(t|t+1)]^{-1} [(\mathbf{P}_{xx}^f(t|t))^{-1} \hat{\mathbf{x}}^f(t|t) + \hat{\mathbf{z}}(t|t+1)]. \end{aligned}$$

Použili jsme zde zjednodušené značení  $\mathbf{P}_{xx}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t|N)$  a  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t|N)$ . Jsou to tedy odhady založené na celé množině dat.

Předchozí vztah můžeme ještě modifikovat, abychom přímo viděli, jak interpolace zlepší odhad. Použitím lemmatu o maticové inverzi (6.24) dostaneme pro kovarianční matici

$$\mathbf{P}_{xx}(t) = \mathbf{P}_{xx}^f(t|t) - \mathbf{L}_s(t) \mathbf{P}_{xx}^f(t|t), \quad (7.94)$$

kde pomocná matice  $\mathbf{L}_s(t)$  je rovna

$$\mathbf{L}_s(t) = \mathbf{P}_{xx}^f(t|t) \mathbf{S}(t|t+1) [\mathbf{I} + \mathbf{P}_{xx}^f(t|t) \mathbf{S}(t|t+1)]^{-1}.$$

S použitím  $\mathbf{L}_s(t)$  je podmíněná střední hodnota

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}^f(t|t) + [\mathbf{P}_{xx}(t) \hat{\mathbf{z}}(t|t+1) - \mathbf{L}_s(t) \hat{\mathbf{x}}^f(t|t)] \quad (7.95)$$

Pro interpolaci tedy potřebujeme tři filtry. Přímý Kalmanův filtr, jehož veličiny jsme označovali s indexem  $f$ , zpětný filtr popsany (7.88), (7.86) a (7.90), (7.89) a nakonec filtr popsany vztahy (7.94) a (7.95), který realizuje skládání informace z dopředného a zpětného běhu.

Elegantní modifikace právě popsaného algoritmu je uvedena v (Lewis, 1986b). Výsledný filtr vyžaduje pouze jeden přímý a jeden zpětný běh Kalmanova filtru a složení obou běhů již není třeba. Uvedeme zde pouze výsledky.

Nejprve je třeba provést normální přímý běh Kalmanova filtru. Jeho výsledkem je filtrovaný odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  a  $\mathbf{P}_{xx}(t|t)$  a predikovaný odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t)$  a  $\mathbf{P}_{xx}(t+1|t)$ . Vyhlažování je provedeno zpětným během filtru

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{F}(t) [\hat{\mathbf{x}}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1|t)] \\ \mathbf{P}_{xx}(t) &= \mathbf{P}_{xx}(t|t) - \mathbf{F}(t) [\mathbf{P}_{xx}(t+1|t) - \mathbf{P}_{xx}(t+1)] \mathbf{F}^T(t), \end{aligned} \quad (7.96)$$

kde zisk filtru je roven

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}_{xx}(t|t) \mathbf{A}^T [\mathbf{P}_{xx}(t+1|t)]^{-1}.$$

Počáteční podmínky zpětného filtru jsou rovny koncovým podmínkám přímého filtru. Všimněme si, že pro zpětný filtr (7.96) nejsou potřebná žádná data. Všechna potřebná informace je obsažena v predikovaném a filtrovaném odhadu.

## 7.5 Rozšířený Kalmanův filtr

V tomto skriptu se téměř výhradně zabýváme lineárními modely. Přesto se na tomto místě zmíníme o významné metodě k odhadování stavu **nelineárních stochastických systémů**, nazvané **rozšířený Kalmanův filtr** (extended Kalman filter). Rozšířený Kalmanův filtr je dobrou ilustrací, jak lze některé myšlenky lineární teorie aplikovat poměrně úspěšně i na nelineární problémy.

Problém nelineární filtrace jsme v podstatě vyřešili v odstavci 7.3.3, kde jsme našli funkcionální rekurze pro datový (7.50) a časový (7.51) krok filtrace, založené na obecných modelech vývoje stavu a měření ve tvaru podmíněných hustot pravděpodobnosti. Praktická použitelnost těchto rekurzí je však omezena na případy, kdy funkcionální rekurze lze nahradit algebraickými rekurzemi (jako v případě Kalmanova filtru pro lineární model a normální rozdělení šumu), nebo na velmi jednoduché obecné úlohy, kdy lze zúčastněné p.h.p. vhodným způsobem aproximovat (například tabulkou) a realizovat popsání operace podmiňování a výpočtu marginálních p.h.p. numericky.

Místo globální aproximace je však poměrně jednoduché aproximovat tyto operace lokálně na základě linearizovaného modelu systému v okolí vhodně zvoleného bodu. To je základní myšlenka rozšířeného Kalmanova filtru.

Předpokládejme nelineární diskretní stochastický systém

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{e}(t)), \end{aligned} \quad (7.97)$$

kde  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  jsou bílé posloupnosti s kovarianční maticí

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (7.98)$$

Označme standardním způsobem apriorní odhad stavu v čase  $t$  jako  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ , kovarianční matici chyby odhadu jako  $\mathbf{P}(t|t-1)$  a linearizujme výstupní rovnici v okolí nejlepšího dostupného odhadu, to je v tomto případě apriorních hodnot  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  a  $\hat{\mathbf{e}}(t|t-1) = 0$ . Dostaneme

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \mathbf{u}(t), 0) + \mathbf{C}(t)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)) + \mathbf{\Gamma}_e(t)\mathbf{e}(t), \quad (7.99)$$

kde matice

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \mathbf{u}=\mathbf{u}(t), \mathbf{e}=0}, \\ \mathbf{\Gamma}_e(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \mathbf{u}=\mathbf{u}(t), \mathbf{e}=0}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme jednoduše najít datový krok Kalmanova filtru pro linearizovaný model. Kalmanovo zesílení bude

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T(t) \left( \mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{\Gamma}_e(t)\mathbf{R}\mathbf{\Gamma}_e^T(t) \right)^{-1}, \quad (7.100)$$

korekce střední hodnoty stavu

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{L}(t) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t|t-1), \mathbf{u}(t), 0)) \quad (7.101)$$

a korekce kovarianční matice chyby odhadu

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \mathbf{L}(t) \left( \mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{\Gamma}_e(t)\mathbf{R}\mathbf{\Gamma}_e^T(t) \right) \mathbf{L}^T(t). \quad (7.102)$$

Tím je ukončen popis filtračního kroku algoritmu. Predikční krok algoritmu je pro odhad střední hodnoty stavu dán přímo stavovou rovnicí přechodu (7.97)

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t|t), \mathbf{u}(t), 0). \quad (7.103)$$

K výpočtu kovarianční matice  $\mathbf{P}(t+1|t)$  opět rovnici (7.97) linearizujeme v okolí nejlepšího dostupného odhadu, kterým je tentokrát již aktualizovaný aposteriorní odhad  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ , a dostaneme

$$\mathbf{x}(t+1) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t|t), \mathbf{u}(t), 0) + \mathbf{A}(t) (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t)) + \mathbf{\Gamma}_v(t)\mathbf{v}(t), \quad (7.104)$$

kde matice

$$\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t|t), \mathbf{u}=\mathbf{u}(t), \mathbf{v}=0},$$

$$\mathbf{\Gamma}_v(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t|t), \mathbf{u}=\mathbf{u}(t), \mathbf{v}=0}.$$

Odtud pak pro vývoj kovarianční matice chyby odhadu plyne

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{\Gamma}_v(t)\mathbf{Q}\mathbf{\Gamma}_v^T(t). \quad (7.105)$$

Vzhledem k závislosti matic získaných linearizací na datech je také kovarianční matice chyby odhadu závislá na datech a nejde ji již napočítat předem.

Tím je ukončen predikční krok algoritmu. V případě korelovaných šumů procesu a měření můžeme využít statistické závislosti těchto šumů stejným způsobem jako v odstavci 7.3.3 a v predikčním kroku algoritmu pak použít hodnotu  $\mathbf{v}(t|t)$ .

Protože rozšířený Kalmanův filtr je pouze lokální lineární aproximací, může dojít k jeho divergenci. Proto je třeba při jeho použití jisté opatrnosti. Často používaným opatřením při aplikacích rozšířeného Kalmanova filtru je použití fiktivního šumu procesu, který brání příliš rychlému poklesu kovarianční matice chyb odhadu, a tím udržuje dostatečně velké Kalmanovo zesílení, a tedy i schopnost filtru reagovat na chyby predikce výstupu. Další podrobnosti o divergenci Kalmanova filtru lze najít v (Lewis, 1986b).

Ukážeme dále, jak může být rozšířený Kalmanův filtr použit k odhadu stavu lineárního systému s neznámými parametry. Podrobnější diskuzi o použití rozšířeného Kalmanova filtru k adaptivní filtraci stavu systému s neznámými parametry lze nalézt v (Goodwin a Sin, 1984).



**Příklad (Odhad stavu a parametrů systému 1. řádu).**

Uvažujme systém 1. řádu

$$\begin{aligned}x(t+1) &= ax(t) + v(t) \\ y(t) &= cx(t) + e(t),\end{aligned}$$

kde  $a$  a  $c$  jsou neznámé parametry a  $v$ ,  $e$  bílé šумы s rozptyly  $\sigma_v^2$ ,  $\sigma_e^2$ . Zavedeme-li rozšířený stav

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ a(t) \\ c(t) \end{bmatrix},$$

můžeme rovnice systému přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_2(t)x_1(t) + v(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) \\ x_3(t+1) &= x_3(t) \\ y(t) &= x_3(t)x_1(t) + e(t).\end{aligned}$$

Odtud matice  $\mathbf{C}(t)$ ,  $\mathbf{\Gamma}_e(t)$  ve filtračním kroku algoritmu budou

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} x_3(t) & 0 & x_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_e(t) = 1$$

a matice  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{\Gamma}_v(t)$  v predikčním kroku algoritmu

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) & x_1(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_v(t) = 1.$$

Tyto matice pak použijeme v (7.100) až (7.105). Vyzkoušejte konvergenci rozšířeného Kalmanova filtru pro různé volby počátečních podmínek  $\mathbf{P}(1|0)$  a  $\hat{\mathbf{x}}(1|0)$ !

## Kapitola 8

# Kvadraticky optimální zpětná vazba od výstupu

V kapitole 2 jsme ukázali, že kvadraticky optimální regulátor může být realizován zpětnou vazbou od stavu systému. V případě, že všechny potřebné stavové veličiny nejsou měřitelné, ale systém je pozorovatelný, můžeme k jejich odhadu použít **pozorovatel stavu**. Pokud tento pozorovatel stavu navrhne tak, aby minimalizoval střední kvadratickou chybu odhadu stavu, nazýváme takový optimální pozorovatel stavu **Kalmanův filtr**. Návrhem a vlastnostmi Kalmanova filtru jsme se podrobně zabývali v kapitole 7.3.

Je známo (viz např. skriptum (Štecha a Havlena, 1993)), že při použití metody umístění pólů lze dynamické vlastnosti stavového regulátoru a pozorovatele stavu navrhnout nezávisle a platí tzv. **separační princip**. Ukážeme, že podobné vlastnosti platí i v případě kvadraticky optimálního řízení a kvadraticky optimálního odhadu stavu lineárního stochastického systému, buzeného gaussovským šumem (tzv. LQG problém). K řešení tohoto problému lze zobecnit metodu dynamického programování, popsanou v odstavci 2.3, na tzv. **stochastické dynamické programování**. Hlavní myšlenky tohoto postupu ukážeme v následujícím odstavci.

Optimalizace kvadratického kritéria jakosti regulace není ve většině případů konečným cílem návrhu; je spíše prostředkem, jak nalézt regulátor s příznivými vlastnostmi (viz např. frekvenční vlastnosti LQ regulátoru v odstavci 2.5 nebo frekvenční vlastnosti Kalmanova filtru v odstavci 7.3.7). Využíváme například toho, že kvadraticky optimální regulátory stabilizují řízenou soustavu a navíc mají na základě (2.95) zaručenou amplitudovou bezpečnost (2.98)

$$\left| 1 + \mathbf{k}^T (e^{j\omega T_s} \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \right| \geq \gamma,$$

tj. jejich frekvenční charakteristika se vyhýbá kružnici se středem v kritickém bodě  $-1 + 0j$  a poloměrem  $\gamma$ , z čehož plynou i příznivé vlastnosti z hlediska robustnosti (viz odstavec 2.5). Lze ukázat, že všechny stabilizující regulátory s touto vlastností jsou právě všechny kvadraticky optimální regulátory, parametrizované pozitivně semidefinitními maticemi kritéria.

Tyto vlastnosti však mohou být ztraceny, nahradíme-li zpětnou vazbu od stavu systému zpětnou vazbou od výstupu systému a využíváme odhadu stavu generovaného pozorovatelem. Vhodným návrhem Kalmanova filtru však lze dosáhnout (alepoň částečného)

obnovení těchto příznivých vlastností přenosové funkce otevřené smyčky. Tato metoda návrhu se nazývá **loop transfer recovery** nebo též LTR. Jinou metodou jak tvarovat přenos otevřené smyčky při zachování vlastností uzavřené smyčky je využití **zpětné vazby od reziduí**, tj. chyb predikce Kalmanova filtru  $\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)$ . Přestože tyto metody jsou stále do značné míry založeny na inženýrském citu a metodě zkoušek a omylů, významně rozšiřují použitelnost rozsáhlých teoretických výsledků v oblasti kvadraticky optimálního řízení při praktických aplikacích, a proto jim budeme věnovat zbývající část této kapitoly.

## 8.1 Úloha LQG regulátoru

V tomto odstavci ukážeme hlavní myšlenky odvození tzv. **separačního principu** (v literatuře nazývaného též **certainly equivalence principle**). Předpokládejme, že řízený systém je popsán modelem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t)\end{aligned}\quad (8.1)$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0)$ , který je normálně rozdělenou náhodnou veličinou s danou střední hodnotou  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  a kovarianční maticí  $\mathbf{P}_x(0)$ . Vstup systému  $\mathbf{u}(t)$  může v každém okamžiku záviset na známých datech

$$\mathcal{D}_{t-1} = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{u}(t-1), \mathbf{y}(t-1)\} \quad (8.2)$$

a  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{e}(t)$  jsou stacionární bílé posloupnosti s kovariančními maticemi  $\mathbf{Q}_v$  a  $\mathbf{R}_e$ .

Budeme-li hledat řízení minimalizující kritérium

$$J = \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \right\}, \quad (8.3)$$

zjistíme, že hodnota kritéria je vlivem působících šumů náhodnou veličinou. Proto je třeba přejít k minimalizaci jeho střední hodnoty

$$J = \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) \right\} \right\}. \quad (8.4)$$

Uvažujme nejprve jednodušší případ kvadraticky optimálního řízení stochastického systému, jehož stav je měřitelný. Systém je tedy popsán rovnicí

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (8.5)$$

s počátečním stavem  $\mathbf{x}(0)$ , který je normálně rozdělenou náhodnou veličinou s danou střední hodnotou  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  a kovarianční maticí  $\mathbf{P}_x(0)$ . Šum procesu  $\mathbf{v}(t)$  je stacionární bílá posloupnost s kovarianční maticí  $\mathbf{Q}_v$ . Přípustná strategie řízení je taková, že pro výpočet vstupu systému  $\mathbf{u}(t)$  v čase  $t$  lze využít informaci o stavu systému  $\mathbf{x}(t)$  v čase  $t$ . Přitom chceme najít takový zákon řízení, který minimalizuje kritérium (8.4).

Definujme ztrátovou funkci

$$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_i^{N-1}, t) = \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) + \right. \quad (8.6)$$

$$+ \sum_{k=t}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) \right\}.$$

Pro optimální hodnotu ztrátové funkce pak platí rekurze

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{\mathbf{u}(t)} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + V^*(\mathbf{x}(t+1), t+1) \mid \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t) \right\}. \quad (8.7)$$

V čase  $t = N$  dostaneme

$$V^*(\mathbf{x}(N), N) = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N) = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{P}(N) \mathbf{x}(N). \quad (8.8)$$

V čase  $t = N-1$  platí

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(N-1), N-1) = \min_{\mathbf{u}(N-1)} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \right. \\ \left. + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R}(N-1) \mathbf{u}(N-1) + \right. \\ \left. + \mathbf{x}^T(N) \mathbf{P}(N) \mathbf{x}(N) \mid \mathbf{u}(N-1), \mathbf{x}(N-1) \right\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

K vyčíslení této střední hodnoty lze použít následující úvahu: nechť  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ , kde  $\hat{\mathbf{x}} = \mathcal{E} \{ \mathbf{x} \}$ . Potom zřejmě  $\mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{x}} \} = 0$  a kovarianční matice  $\mathbf{x}$  bude rovna

$$\text{cov} \{ \mathbf{x} \} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \right\} = \mathbf{P}_x.$$

Střední hodnota kvadratické formy  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  pak je

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \right\} &= \mathcal{E} \left\{ (\hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}) \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} \right\} + \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} \right\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E} \left\{ \text{tr} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} \right\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E} \left\{ \text{tr} \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \right\} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} + \text{tr} \tilde{\mathbf{P}}_x \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Střední hodnotu kvadratické formy tedy můžeme vyjádřit pomocí kvadratické formy střední hodnoty a stopy součinu kovarianční matice a matice kvadratické formy. Na základě tohoto výsledku a skutečnosti, že pro známé matice systému platí

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{x}(t+1) \mid \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

a pro kovarianční matici

$$\text{cov} \{ \mathbf{x}(t+1) \mid \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \} = \mathbf{Q}_v,$$

lze (8.9) psát jako

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}(N-1), N-1) = \min_{\mathbf{u}(N-1)} \left( \mathbf{x}^T(N-1) \mathbf{Q}(N-1) \mathbf{x}(N-1) + \right. \\ \left. + \mathbf{u}^T(N-1) \mathbf{R}(N-1) \mathbf{u}(N-1) + \right. \\ \left. + (\mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N-1))^T \mathbf{P}(N) (\mathbf{A} \mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(N-1)) \right) + \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$+ \operatorname{tr} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}(N)).$$

První část tohoto výrazu je totožná s výrazem, který minimalizujeme při hledání kvadraticky optimálního řízení pro deterministický systém. Zbývající část výrazu  $\operatorname{tr} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}(N)$  popisuje zvětšení hodnoty kritéria vlivem šumu procesu. Protože tento přírůstek nezávisí na hodnotě řízení, neovlivní minimalizaci této kvadratické formy ani optimální zákon řízení. Provedeme-li podobnou úvahu pro libovolné  $t$ , dostaneme

$$V^*(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{k=t+1}^N \operatorname{tr} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}(k), \quad (8.11)$$

kde matice  $\mathbf{P}(t)$  je řešením Riccatiho rovnice s počáteční podmínkou  $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N)$ , kterou bychom odvodili indukcí stejně jako v odstavci 2.3. Optimální zákon řízení je tedy shodný s deterministickým zákonem řízení a optimální hodnota kritéria je pak

$$J^* = V^*(\mathbf{x}(0), 0) = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0) + \sum_{t=1}^N \operatorname{tr} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}(t), \quad (8.12)$$

kde druhý člen popisuje zvětšení hodnoty kritéria způsobené přítomností nepredikovatelné složky stavu vlivem šumu  $\mathbf{v}(t)$ .

Nyní se vraťme k původnímu problému, kdy stav systému není přímo měřitelný. Použijeme-li k rekonstrukci stavu systému  $\mathbf{x}(t)$  na základě dostupných dat  $\mathcal{D}_{t-1}$  Kalmanova filtru, dostaneme pro odhad stavu rovnici (viz odstavec 7.3)

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1), \quad (8.13)$$

kde  $\mathbf{L}(t)$  je optimální zesílení Kalmanova filtru a

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)$$

je chyba predikce výstupu. Je známo, že posloupnost  $\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1)$  je bílá a má kovarianční matici

$$\mathbf{Q}_\varepsilon(t|t-1) = \operatorname{cov} \{ \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \} = \operatorname{cov} \{ \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{e}(t) \} = \mathbf{C} \mathbf{P}_x(t|t-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_e, \quad (8.14)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$$

a

$$\mathbf{P}_x(t|t-1) = \operatorname{cov} \{ \mathbf{x}(t) | \mathcal{D}_{t-1} \} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)^T | \mathcal{D}_{t-1} \right\}.$$

Protože stav Kalmanova filtru  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$  je dostupný, matice  $\mathbf{P}_x(t|t-1)$  je vzhledem k optimalitě Kalmanova filtru minimální kovarianční maticí chyby odhadu stavu a platí

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1), \quad (8.15)$$

lze převést úlohu s měřením výstupu na úlohu s přímou zpětnou vazbou od stavu pro systém popsany rovnicí (8.13) buzený bílým šumem s kovarianční maticí (8.14). Pro střední

hodnotu kvadratické formy  $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$  lze totiž na základě (8.15) psát

$$\mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \right\} = \widehat{\mathbf{x}}^T(t|t-1)\mathbf{Q}\widehat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \text{tr } \mathbf{P}_x(t|t-1)\mathbf{Q}. \quad (8.16)$$

Pro optimální hodnotu ztrátové funkce platí rekurze

$$V^*(t) = \min_{\mathbf{u}(t)} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + V^*(t+1)|\mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1} \right\}. \quad (8.17)$$

Všimněte si rozdílu mezi touto rovnicí a (8.7).

Uvažujme nyní optimální hodnotu ztrátové funkce v čase  $t = N$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} V^*(N) &= \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) | \mathcal{D}_{N-1} \right\} \\ &= \widehat{\mathbf{x}}^T(N|N-1)\mathbf{Q}(N)\widehat{\mathbf{x}}(N|N-1) + \text{tr } \mathbf{P}_x(N|N-1)\mathbf{Q}(N). \end{aligned} \quad (8.18)$$

V čase  $t = N-1$  bude platit

$$\begin{aligned} V^*(N-1) &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{Q}(N-1)\mathbf{x}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N)\mathbf{Q}(N)\mathbf{x}(N) | \mathcal{D}_{N-1} \right\} \middle| \mathcal{D}_{N-2}, \mathbf{u}(N-1) \right\} \\ &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \left( \widehat{\mathbf{x}}^T(N-1|N-2)\mathbf{Q}(N-1)\widehat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(N-1))^T \mathbf{P}(N) (\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(N-1)) \right. \\ &\quad \left. + \text{tr } \mathbf{P}_x(N-1|N-2)\mathbf{Q}(N-1) + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr } \mathbf{L}(N-1)\mathbf{Q}_\varepsilon(N-1)\mathbf{L}^T(N-1)\mathbf{P}(N) + \right. \\ &\quad \left. + \text{tr } \mathbf{P}_x(N|N-1)\mathbf{Q}(N) \right). \end{aligned} \quad (8.19)$$

První část tohoto výrazu je opět totožná s výrazem, který minimalizujeme při hledání kvadraticky optimálního řízení pro deterministický systém a který vede na jeden krok diferenční Riccatiho rovnice. Stopy matic ve zbývajících částech výrazu popisují zvětšení hodnoty kritéria vlivem nepřesné znalosti stavu procesu a šumu procesu. Protože však opět tento přírůstek nezávisí na hodnotě řízení, neovlivní minimalizaci této kvadratické formy ani optimální zákon řízení. Opakováním tohoto postupu dostaneme pro obecný čas  $t$  optimální hodnotu kritéria

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \widehat{\mathbf{x}}^T(t|t-1)\mathbf{P}(t)\widehat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \\ &\quad + \sum_{k=t+1}^N \text{tr } \mathbf{L}(k)\mathbf{Q}_\varepsilon(k)\mathbf{L}^T(k)\mathbf{P}(k) + \\ &\quad + \sum_{k=t}^{N-1} \text{tr } \mathbf{P}_x(k|k-1)\mathbf{Q}(k), \end{aligned} \quad (8.20)$$

kde výraz

$$\sum_{k=t+1}^N \operatorname{tr} \mathbf{L}(k) \mathbf{Q}_\varepsilon(k) \mathbf{L}^T(k) \mathbf{P}(k)$$

popisuje zhoršení dosažitelné kvality regulace vlivem stochastické složky systému (šumu procesu  $\varepsilon$  v rovnici (8.13)) a výraz

$$\sum_{k=t}^{N-1} \operatorname{tr} \mathbf{P}_x(k|k-1) \mathbf{Q}(k)$$

popisuje zhoršení dosažitelné kvality regulace vlivem použití odhadu stavu místo jeho přímého měření. Tato složka je minimální právě pro odhad Kalmanovým filtrem, který minimalizuje hodnotu

$$\operatorname{tr} \mathbf{P}_x(k|k-1) \mathbf{Q}$$

pro libovolnou matici  $\mathbf{Q}$ . Optimální hodnota kritéria bude

$$\begin{aligned} J^* = V^*(\hat{\mathbf{x}}(0|-1), 0) &= \hat{\mathbf{x}}^T(0|-1) \mathbf{P}(0) \hat{\mathbf{x}}(0|-1) + \\ &+ \sum_{t=1}^N \operatorname{tr} \mathbf{L}(t) \mathbf{Q}_\varepsilon(t) \mathbf{L}^T(t) \mathbf{P}(t) + \\ &+ \sum_{t=0}^{N-1} \operatorname{tr} \mathbf{P}_x(t|t-1) \mathbf{Q}(t). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Tyto výsledky můžeme shrnout takto. Kvadraticky optimální řízení využívající pouze měření výstupu lze nalézt v následujících krocích:

1. určíme optimální odhad stavu  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ , minimalizující střední kvadratickou chybu odhadu a využívající dostupných dat  $\mathcal{D}_{t-1}$ . Tento odhad lze najít Kalmanovým filtrem se zesílením  $\mathbf{L}(t)$  a má kovarianční matici chyby odhadu  $\mathbf{P}_x(t|t-1)$ . Posloupnost těchto kovariančních matic a zesílení najdeme řešením Riccatiho diferenční rovnice pro problém optimální filtrace.
2. určíme kvadraticky optimální zákon řízení  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$ , minimalizující kritérium (8.3) pro deterministický systém, získaný zanedbáním stochastické složky v modelu (8.1). Posloupnost těchto zesílení najdeme na základě řešení Riccatiho diferenční rovnice pro problém optimálního řízení.
3. aplikujeme nalezený zákon řízení, přičemž neznámý stav  $\mathbf{x}(t)$  nahradíme jeho optimálním odhadem  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$ .

Poznamenejme, že vzhledem ke zvolenému indexování veličin (viz odstavec 1.3) má řízený systém obecně nenulovou přímou vazbu mezi vstupem a výstupem, tj. matice  $\mathbf{D} \neq 0$ . Proto ve zpětnovazební větvi regulátoru musí být alespoň jednokrokové zpoždění. Toto zpoždění se projevuje právě ve využití odhadu  $\hat{\mathbf{x}}(t|t-1)$  využívajícího měřeného výstupu  $\mathbf{y}(t-1)$  k výpočtu řízení  $\mathbf{u}(t)$ .

Abychom získali časově invariantní filtr a časově invariantní zákon řízení, budeme prodlužovat horizont optimalizace  $N \rightarrow \infty$ . V důsledku působících poruch však jsou obě

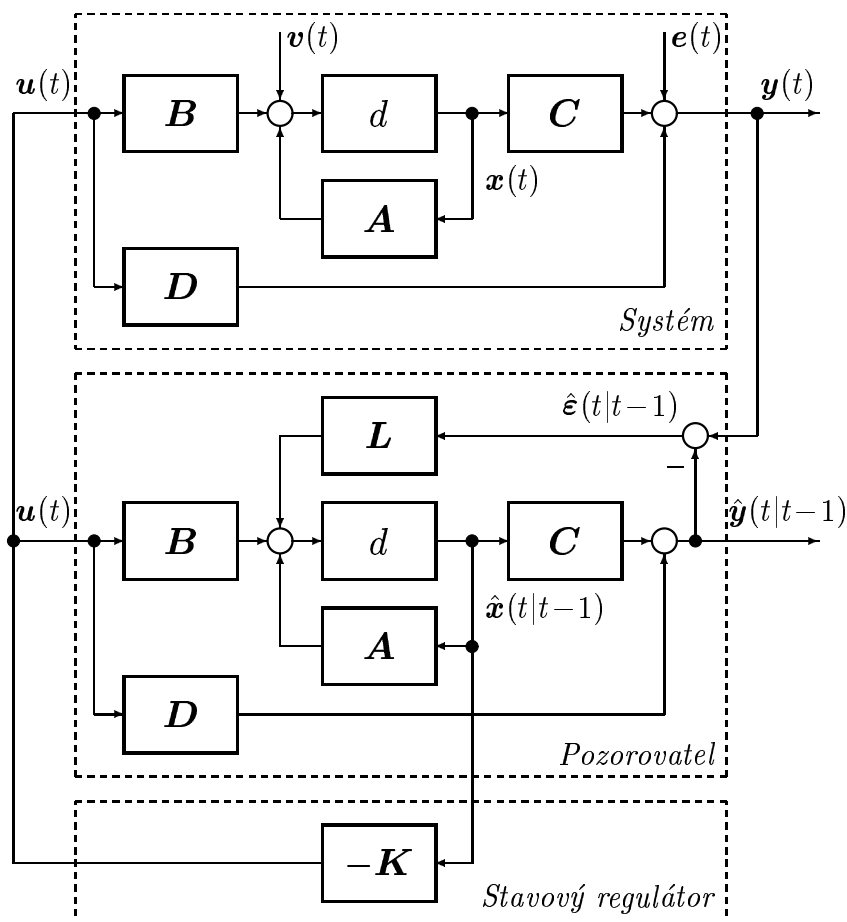
kvadratické formy v kritériu (8.4) trvale nenulové a hodnota tohoto kritéria roste pro rostoucí  $N$  nade všechny meze. Proto je při uvažování nekonečného horizontu optimalizace vhodné použít modifikované kritérium

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N) + \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right\} \right\}. \quad (8.22)$$

Pokud výsledný časově invariantní regulační obvod bude stabilní, budou pro  $t \rightarrow \infty$  posloupnost stavů i vstupů stacionární ergodické posloupnosti (viz odstavec 5.2) a minimalizace kritéria (8.22) bude ekvivalentní minimalizaci střední hodnoty kvadratické formy

$$\mathcal{E} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right\}$$

pro stacionární náhodné procesy  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{u}$ . Zdůrazněme ještě jednou, že k získání ustáleného Kalmanova filtru je třeba prodlužovat počáteční čas měření výstupu  $t_0 \rightarrow -\infty$  a k získání ustáleného zesílení optimálního regulátoru je třeba prodlužovat koncový čas horizontu optimalizace  $N \rightarrow +\infty$ .



Obrázek 8.1: LQG regulátor



Regulační obvod s limitním zesílením kvadraticky optimálního regulátoru  $\mathbf{K}$  a limitním zesílením Kalmanova filtru  $\mathbf{L}$  je na obr. 8.1. Tento obvod je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \\ \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) &= \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Popíšeme-li tento obvod v transformovaných stavových souřadnicích  $\mathbf{x}(t)$  a  $\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1)$ , kde

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t-1),$$

dostaneme rovnici dynamiky

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}(t) - \mathbf{L}\mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Ze struktury složené matice dynamiky stavu je vidět, že opět platí **separační princip** a vlastní čísla uzavřené smyčky jsou dány vlastními čísly matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  kvadraticky optimálního regulátoru a vlastními čísly matice  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  Kalmanova filtru.

## 8.2 Vliv pozorovatele na vlastnosti regulátoru

V tomto odstavci se budeme zabývat možnou ztrátou robustnosti, ke které může dojít zavedením pozorovatele stavu do regulační smyčky, a možností jejího (alespoň částečného) obnovení.

### 8.2.1 Metoda LTR

Uvažujme regulační obvod na obr. 8.1 bez působení náhodných vstupů  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{e}$ . Uspořádáme-li tento obvod podle obr. 8.2, dostaneme standardní schéma s jednotkovou zpětnou vazbou. Veličina ve zpětnovazební větvi bude pro pozorovatelný a stabilizovatelný systém, stabilní pozorovatel stavu a stabilizující stavovu zpětnou vazbu pro  $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t).$$

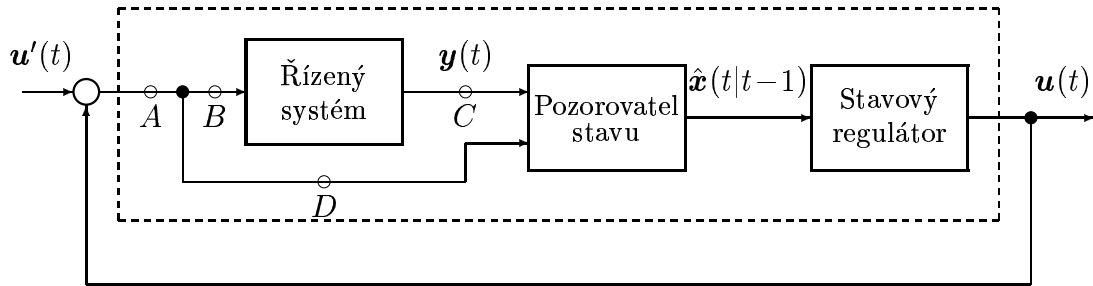
Přenos otevřené smyčky rozpojené v bodě  $A$  bude potom

$$\mathbf{G}_{ol}(z) = -\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (8.25)$$

což je právě přenos otevřené smyčky stavového regulátoru s přímým měřením stavu. V odstavci 2.5 jsme ukázali, že pro tento přenos platí v jednorozměrném případě

$$|1 + G_{ol}(z)| \geq \gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (8.26)$$

Tento přenos otevřené smyčky však není ani přenosem otevřené smyčky rozpojené na vstupu řízeného systému v bodě  $B$ , ani přenosem otevřené smyčky rozpojené na výstupu řízeného



Obrázek 8.2: Regulační smyčka s pozorovatelem stavu

systému v bodě  $C$ . Rozpojíme-li regulační smyčku na vstupu soustavy v bodě  $B$ , dostaneme přenos otevřené smyčky

$$\mathbf{G}'_{ol}(z) = [-\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L}][\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}], \quad (8.27)$$

kde

$$\mathbf{R}(z) = -\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L} \quad (8.28)$$

je přenos mezi body  $C$  a  $B$ , tj. přenos regulátoru, a

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8.29)$$

je přenos mezi body  $B$  a  $C$ , tj. přenos řízené soustavy. Přenos otevřené smyčky  $\mathbf{G}'_{ol}(z)$  může být podstatně odlišný od přenosu  $\mathbf{G}_{ol}(z)$ .

Podmínka (8.26) může být na základě kruhového kritéria (viz odstavec 2.5) interpretována tak, že uzavřená regulační smyčka zůstane stabilní, je-li do regulační smyčky vložena libovolná (i časově proměnná) nelinearita  $\Phi(\cdot)$  vyhovující omezení

$$\frac{1}{1-\gamma}u \geq \Phi(u) \geq \frac{1}{1+\gamma}u. \quad (8.30)$$

Takovou nelinearitu nazýváme **sektorová nelinearita**. Pro  $\gamma \rightarrow 1$ , což je limitní hodnota (dosahovaná pro spojitý kvadraticky optimální regulátor), potom

$$\infty > \Phi(u) \geq \frac{1}{2}u.$$

Pokud tuto nelinearitu vložíme do smyčky v bodě  $A$ , bude na základě (8.26) regulační obvod stabilní i v případě použití pozorovatele stavu. V reálném regulačním obvodu však je nelinearita vložena do obvodu na vstupu řízené soustavy, tj. v bodě  $B$ , kde podmínka (8.26) není splněna. Poměrně jednoduchým řešením by bylo vložení modelu této nelinearity na vstup pozorovatele stavu do bodu  $D$ . Problém však je v tom, že nelinearita  $\Phi(u)$  obvykle není přesně známa a navíc může reprezentovat i nepřesnou znalost modelu řízeného systému. Lze však postupovat jiným způsobem, který její znalost nevyžaduje: vliv přemístění nelinearity z „příznivého“ bodu  $A$  do „nepříznivého“ bodu  $B$  nebude významný, jestliže omezíme vliv vazby procházející bodem  $D$  na přenos otevřené smyčky. Tato vazba přivádí na vstup pozorovatele stavu akční veličinu  $u$  a její vliv bude omezen, bude-li odhad stavu podstatně víc záviset na přivedeném výstupu soustavy  $y$  než na vstupu  $u$ . Toho však lze dosáhnout

jednoduše tak, že k šumu procesu  $\mathbf{v}$  přidáme fiktivní složku, která by vznikla přičtením jistého šumu k akční veličině. Kovarianční matice takto modifikovaného šumu bude

$$\mathbf{Q}'_v = \mathbf{Q}_v + \sigma^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \quad (8.31)$$

Tento šum pro  $\sigma \rightarrow \infty$  bude eliminovat vliv vstupu  $\mathbf{u}$  na odhad stavu  $\hat{\mathbf{x}}$ . Lze ukázat, že pro pozorovatelný a stabilizovatelný systém s minimální fází platí

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} [-\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{L}_\sigma \mathbf{C})^{-1} \mathbf{L}_\sigma][\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] = \mathbf{K}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}, \quad (8.32)$$

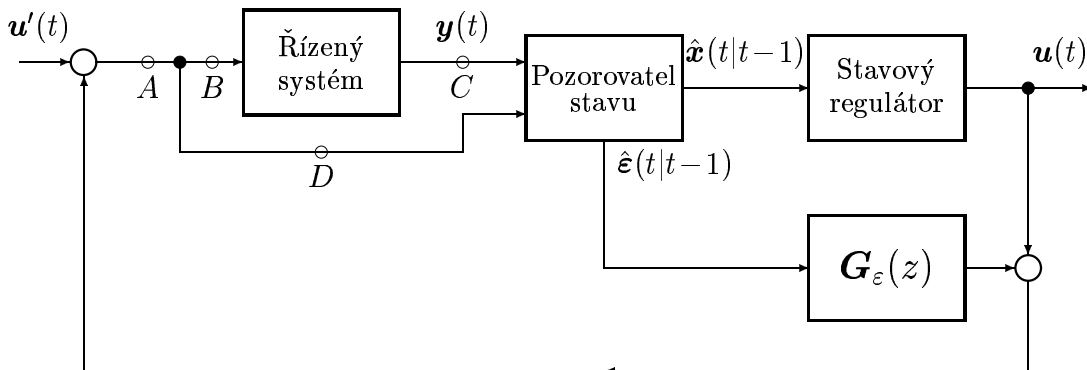
kde  $\mathbf{L}_\sigma$  je zesílení Kalmanova filtru pro modifikovanou matici šumu procesu (8.31). Tak lze dosáhnout obnovení původních vlastností otevřené smyčky regulátoru s přímým měřením stavu.

Dalších „stupňů volnosti“ při tvarování frekvenční charakteristiky otevřené smyčky lze dosáhnout volbou frekvenčně závislého fiktivního šumu. Model soustavy je pak třeba rozšířit o tvarovací filtr šumu.

Výsledný Kalmanův filtr již nebude optimální z hlediska původního šumu, ale zaručí lepší frekvenční vlastnosti otevřené regulační smyčky. Tento postup je proto vhodný i pro návrh deterministických regulátorů, kde kovarianční matice šumu (případně i jeho frekvenční vlastnosti) a váhové matice kvadratického kritéria optimality chápeme hlavně jako nástroje, kterými inženýr ladí vlastnosti regulátoru. Omezení metody LTR jsou poměrně zřejmá z její motivace.

### 8.2.2 Zpětná vazba od reziduí

Základní myšlenkou schématu v předchozím odstavci byla skutečnost, že pro  $t \rightarrow \infty$  je řízení rovno  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ . Ukážeme zde jiný způsob, jak tuto vlastnost zachovat a přitom mít možnost ovlivnit přenos otevřené smyčky.



Obrázek 8.3: Regulační smyčka se zpětnou vazbou od reziduí

Uvažujme schéma podle obr. 8.3. Nebudeme-li uvažovat působení šumu, pak pro  $t \rightarrow \infty$  posloupnost reziduí

$$\varepsilon(t|t-1) \rightarrow 0.$$

Přidáním nulového signálu, filtrovaného libovolným stabilním filtrem  $\mathbf{G}_\varepsilon(z)$ , zřejmě neovlivníme vlastnosti regulačního obvodu na obr. 8.3; vlastnosti obvodu však budou ovlivněny, jakmile tato posloupnost nebude identicky rovna nule.

Určíme-li přenos otevřené smyčky nebo přenos regulátoru, tj. přenos mezi body  $C$  a  $B$ , zjistíme, že na přenosu filtru  $\mathbf{G}_\varepsilon(z)$  závisí. Lze ukázat (viz např. (Anderson a Moore, 1990)), že pro schéma regulátoru podle obr. 8.3, kde zesílení  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{L}$  jsou taková, že matice  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  a  $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$  jsou stabilní, získáme parametrizaci stabilními filtry reziduí  $\mathbf{G}_\varepsilon(z)$  právě všechny stabilizující regulátory s daným přenosem mezi vnějším vstupem systému  $\mathbf{u}'(t)$  a výstupem  $\mathbf{y}(t)$ . Tak jsme alternativním způsobem dospěli k parametrizaci všech stabilizujících regulátorů, popsané v odstavci 4.2.3.

Volbou filtru  $\mathbf{G}_\varepsilon(z)$  můžeme například minimalizovat rozdíl mezi přenosem otevřené smyčky stavového regulátoru s přímým měřením stavu a stavového regulátoru s pozorovatelem stavu. Tento postup se nazývá v literatuře „sensitivity recovery“.



## Část IV

# Identifikace dynamických systémů



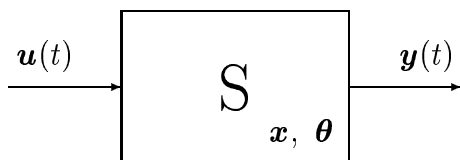
## Kapitola 9

# Stochastické metody identifikace

V této kapitole se budeme zabývat odhadováním parametrů lineárních stochastických systémů. Budeme přitom využívat převážně bayesovského přístupu. Nejvýznamnější reference pro tuto kapitolu jsou (Box a Tiao, 1973), (Peterka, 1981a) a (Peterka, 1986).

### 9.1 Model dynamického systému

Než budeme aplikovat výsledky odstavce 6.6 k identifikaci parametrů dynamických systémů, upřesníme nejprve pojem model dynamického systému.



Obrázek 9.1: Dynamický systém

#### 9.1.1 Souvislost úlohy modelování a řízení

Motivací úlohy identifikace parametrů systému je obvykle úloha nalezení optimálního řízení. Požadavky na model systému pak z této úlohy vyplývají. Uvažujme dynamický systém se vstupem  $\mathbf{u}(t)$  a výstupem  $\mathbf{y}(t)$  podle obr. 9.1. Označme  $\mathcal{D}_{t_0,t}$  (počáteční index  $t_0 = 1$  budeme obvykle vynechávat) množinu vstupních a výstupních dat

$$\mathcal{D}_{t_0,t} = \{\mathbf{u}(t_0), \mathbf{y}(t_0), \dots, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\}.$$

Předpokládejme, že známe historii systému  $\mathcal{D}_{t_0}$  a naším úkolem je nalézt optimální řízení minimalizující na horizontu konečné délky  $T$  kritérium ve tvaru

$$\mathcal{J} = \mathcal{E} \{J(\mathcal{D}_{t_0+1,t_0+T}) | \mathcal{D}_{t_0}\}.$$

K nalezení optimálního zákona řízení je tedy třeba určit rozdělení pravděpodobnosti

$$p(\mathcal{D}_{t_0+1,t_0+T} | \mathcal{D}_{t_0}).$$



Použitím řetězového pravidla (6.28) dostaneme

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}_{t_0+1, t_0+T} | \mathcal{D}_{t_0}) &= p(\mathbf{y}(t_0+T) | \mathbf{u}(t_0+T), \mathcal{D}_{t_0+T-1}) \cdot p(\mathbf{u}(t_0+T) | \mathcal{D}_{t_0+T-1}) \cdot \\ &\vdots \\ &\cdot p(\mathbf{y}(t_0+1) | \mathbf{u}(t_0+1), \mathcal{D}_{t_0}) \cdot p(\mathbf{u}(t_0+1) | \mathcal{D}_{t_0}). \end{aligned}$$

Soubor podmíněných hustot pravděpodobnosti

$$p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) \tag{9.1}$$

pro  $\tau = t_0+1, \dots, t_0+T$  popisuje závislost výstupu systému v čase  $\tau$  na historii systému a vstupu systému v čase  $\tau$ ; tento soubor p.h.p. nazveme *model systému*. Model systému je tedy možno interpretovat jako **prediktor** hodnoty výstupu na základě známé historie systému a současného vstupu systému. Soubor podmíněných hustot pravděpodobnosti

$$p(\mathbf{u}(\tau) | \mathcal{D}_{\tau-1})$$

popisuje závislost vstupu systému v čase  $\tau$  na historii systému. Tato závislost je definována **zákonem řízení** (všimněte si informačního zpoždění v zákonu řízení).

### 9.1.2 Struktura a parametry modelu

Aby byl model systému (9.1) prakticky použitelný, je třeba, aby tento soubor p.h.p. byl parametrizován pomocí konečného počtu parametrů. Identifikovaný model systému pak je charakterizován dvojicí p.h.p.

$$p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) = \int_{\Omega_\theta} p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}) \cdot p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) d\boldsymbol{\theta},$$

kde  $p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta})$  definuje **strukturu** modelu a  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1})$  popisuje neurčitost parametrů, odpovídajících této struktuře.

Nyní ukážeme, jak lze při známé struktuře modelu aktualizovat znalost parametrů podmíněnou daty  $\mathcal{D}_{\tau-1}$

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_{\tau-1})$$

na základě nově získaných dat  $\{\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau)\}$ . Zřejmě  $\mathcal{D}_\tau = \mathcal{D}_{\tau-1} \cup \{\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau)\}$  a platí

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_\tau) &= \frac{p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1})}{\int_{\Omega_\theta} p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) d\boldsymbol{\theta}} \tag{9.2} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_{\tau-1})}{\int_{\Omega_\theta} p(\mathbf{y}(\tau) | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_{\tau-1}) d\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Druhá rovnost platí pouze za předpokladu

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) = p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_{\tau-1}), \tag{9.3}$$

který se nazývá **přirozené podmínky řízení** (Peterka, 1981a). Tento předpoklad nelze odvodit z vlastností dynamických systémů a musí být postulován jako axiom. Interpretace podmínky (9.3) je dvojí:

- Rovnost (9.3) říká, že samotná operace vygenerování vstupu do soustavy (bez změření odpovídajícího výstupu) nezmění subjektivní představu o neurčitosti parametrů. Tento požadavek je splněn, je-li vstup do soustavy generován nejvýše na základě znalosti dat  $\mathcal{D}_{\tau-1}$ .
- Protože

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) p(\mathbf{u}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau-1}) = p(\mathbf{u}(\tau)|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{D}_{\tau-1}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}_{\tau-1}),$$

plyne z (9.3) rovněž rovnost

$$p(\mathbf{u}(\tau)|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{D}_{\tau-1}) = p(\mathbf{u}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau-1}), \quad (9.4)$$

tj. jsou-li parametry určovány pouze na základě znalosti dat  $\mathcal{D}_{\tau-1}$ , pak všechna znalost o parametrech je zprostředkována daty  $\mathcal{D}_{\tau-1}$ .

Dosud používaná parametrizace popisuje systém s **neznámými**, avšak **konstantními** parametry (časově invariantní systém). Obecně systém může být časově proměnný, a tedy

$$p(\mathbf{y}(\tau)|\mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) = \int_{\Omega_{\theta}} p(\mathbf{y}(\tau)|\mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}(\tau)) p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}) d\boldsymbol{\theta}(\tau).$$

Potom k aktualizaci rozdělení parametrů na základě dat potřebujeme kromě vztahu (9.2), který popisuje přechod

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau-1}) \rightarrow p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau}),$$

nazývaný **datový, objektivní** nebo též **filtrační** krok algoritmu, popsat také přechod

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau}) \rightarrow p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\mathcal{D}_{\tau}),$$

nazývaný **časový, subjektivní** nebo též **predikční** krok algoritmu. Tento krok může být bayesovsky popsán jako

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\mathcal{D}_{\tau}) = \int_{\Omega_{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\boldsymbol{\theta}(\tau), \mathcal{D}_{\tau}) p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_{\tau}) d\boldsymbol{\theta}(\tau), \quad (9.5)$$

kde soubor p.h.p.  $p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\boldsymbol{\theta}(\tau), \mathcal{D}_{\tau})$  je **stochastický model vývoje parametrů**.

### 9.1.3 Přehled používaných struktur lineárních modelů

V tomto odstavci budeme konkretizovat pojem **struktura modelu dynamického systému**, pod kterým chápeme soubor p.h.p.

$$p(\mathbf{y}(\tau)|\mathbf{u}(\tau), \mathcal{D}_{\tau-1}, \boldsymbol{\theta}).$$

Ukážeme, jak tato abstraktní definice souvisí s našimi dosavadními poznatky o lineárních stochastických systémech. Obecně je model vždy pouhou aproximací vlastností reálného objektu. V tomto odstavci bude náš přístup poněkud odlišný: budeme předpokládat, že data jsou vygenerována přesně definovaným modelem (lineárním stochastickým systémem) a budeme vyšetřovat, jaký model je schopen přesně popsat vlastnosti použitého generátoru

dat. Vyjdeme z lineárního časově invariantního stavového modelu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t),\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{v}(t)$  a  $\mathbf{e}(t)$  jsou bílé posloupnosti s kovarianční maticí

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

Tento popis definuje dvě důležité a v podstatě nezávislé vlastnosti, a to

- přenos deterministické části modelu

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

- spektrální hustotu náhodné složky modelu

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Q}(z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-T}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}.$$

K úplnému popisu vlastností výstupu systému bychom ještě potřebovali znát popis rozdělení vstupních šumů  $p(\mathbf{v})$  a  $p(\mathbf{e})$ .

Faktorizací spektrální hustoty

$$\mathbf{S}_{yy}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{H}^T(z^{-1})$$

dospějeme k obecné struktuře vnějšího popisu (input-ouput model) lineárního stochastického systému

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(d)\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(d)\mathbf{e}(t), \quad (9.6)$$

kde  $d = z^{-1}$  je operátor zpoždění,

$$\mathbf{G}(d) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1d + \mathbf{G}_2d^2 + \dots$$

je matice impulsních charakteristik deterministického přenosu a

$$\mathbf{H}(d) = \mathbf{I} + \mathbf{H}_1d + \mathbf{H}_2d^2 + \dots$$

je matice impulsních charakteristik tvarovacího filtru šumu. Šum  $\mathbf{e}(t)$  v tomto modelu přitom není totožný se stejně označeným šumem stavového modelu.

Pro účely identifikace jsme strukturu modelu definovali jako podmíněnou hustotu pravděpodobnosti veličiny  $\mathbf{y}(t)$  na základě dostupných dat  $\mathcal{D}_{t-1}$  a parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ . Teorie lineárních stochastických systémů naopak pracuje s modelem ve tvaru „generátoru dat“ založeném na deterministickém vstupu a (hypotetické) bílé posloupnosti vstupního šumu. Model ve tvaru „generátoru dat“ je však s modelem ve tvaru prediktoru ekvivalentní. Model (9.6) můžeme totiž vždy transformovat do tvaru prediktoru. Víme, že tvarovací filtr šumu získaný spektrální faktorizací je **stabilní** a má **minimální fázi**. Inverzní filtr  $\mathbf{H}^{-1}(d)$  je tedy rovněž stabilní. Na základě měřitelných dat  $\mathbf{y}(t)$  můžeme tedy určit posloupnost  $\mathbf{e}(t)$  jako

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{H}^{-1}(d)(\mathbf{y}(t) - \mathbf{G}(d)\mathbf{u}(t)).$$

Budoucí hodnotu výstupu  $\mathbf{y}(t)$  pak můžeme rozložit na

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t|t-1) + \mathbf{e}(t), \quad (9.7)$$

kde  $\mathbf{e}(t)$  je vzhledem k bělosti šumu nepredikovatelná složka výstupu a hodnota

$$\hat{\mathbf{y}}(t|t-1) = \mathbf{H}^{-1}(d)\mathbf{G}(d)\mathbf{u}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{H}^{-1}(d))\mathbf{y}(t) \quad (9.8)$$

je jednoznačně určena minulými hodnotami výstupu a hodnotami vstupu systému. Tím jsme převedli model (9.6) do tvaru prediktoru. Chceme-li zdůraznit, že predikovaná hodnota závisí na parametrech přenosů deterministické a stochastické složky systému, používáme značení

$$\hat{\mathbf{y}}(t|t-1) = \hat{\mathbf{y}}(t|t-1, \boldsymbol{\theta}).$$

Vzhledem k (9.7) pak platí

$$p(\mathbf{y}(t)|\mathbf{u}(t), \mathcal{D}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}) = p_e(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1, \boldsymbol{\theta})), \quad (9.9)$$

kde  $p_e(\cdot)$  je hustota pravděpodobnosti šumu  $\mathbf{e}(t)$ . Pokud platí standardní předpoklad

$$\mathcal{E}\{\mathbf{e}(t)\} = 0,$$

je  $\hat{\mathbf{y}}(t|t-1, \boldsymbol{\theta})$  střední hodnotou výstupu.

Získaná obecná struktura prediktoru (9.8) však stále ještě není prakticky použitelná k identifikaci, neboť nesplňuje požadavek parametrizace **konečným** počtem parametrů. Víme však, že vhodnou parametrizací impulsních charakteristik lineárních systémů je jejich vyjádření ve tvaru podílu polynomů v operátoru  $d$ . Toho nyní využijeme k odvození možných struktur modelů ve tvaru „generátoru dat“ (9.6) a jim odpovídajících modelů ve tvaru prediktoru (9.8).

## ARX model

Uvažujme nejprve lineární diferenční rovnici doplněnou stochastickým nebo chybovým členem

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t). \quad (9.10)$$

Všimněte si, že na základě dohody o vzorkování spojitéch dynamických systémů může vstup  $u(t)$  přímo ovlivnit hodnotu výstupu  $y(t)$ . V této konvenci se literatura často liší.

Model (9.10) nazýváme **model s chybou rovnice** nebo též **ARX model** na základě jeho složek (AutoRegressive model with eXternal input). Definujeme-li polynomy

$$a(d) = 1 + a_1d + \dots + a_{n_a}d^{n_a}$$

a

$$b(d) = b_0 + b_1d + \dots + b_{n_b}d^{n_b},$$

lze ARX model popsat vztahy

$$a(d)y(t) = b(d)u(t) + e(t), \quad (9.11)$$

nebo též

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \frac{1}{a(d)} e(t). \quad (9.12)$$

Zpoždění  $n_a$  a  $n_b$  nazýváme **strukturní parametry** modelu. Jestliže dynamický systém popsaný modelem (9.10) má pevné a předem známé **dopravní zpoždění**  $T_d$ , lze místo použití nulových hodnot parametrů  $b_0, \dots, b_{T_d}$  použít též modelu ve tvaru

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t-T_d) + \frac{1}{a(d)} e(t). \quad (9.13)$$

Parametr  $T_d$  je pak dalším strukturním parametrem ARX modelu.

Je vidět, že zatímco přenos deterministické části systému může být zvolen libovolně, tvarovací filtr náhodné složky je AR proces a je implicitně definován jako jmenovatel přenosu deterministické části modelu. Přes toto strukturní omezení je ARX model velmi významný, neboť (právě v důsledku tohoto omezení) predikovaná střední hodnota výstupu  $\hat{y}(t|t-1)$  je **lineární funkcí** měřitelných dat. K odhadu parametrů tohoto modelu proto můžeme použít **lineární regresi**.

Přepíšeme model do tvaru

$$\hat{y}(t|t-1) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(t-i), \quad (9.14)$$

neboli

$$\hat{y}(t|t-1) = (1 - a(d))y(t) + b(d)u(t). \quad (9.15)$$

Definujeme-li **vektor parametrů**

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b}]^T$$

a vektor dat neboli **regresor**

$$\mathbf{z}(t) = [y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n_a), u(t), u(t-1), \dots, u(t-n_b)]^T,$$

pak závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit kompaktním způsobem jako

$$\hat{y}(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t). \quad (9.16)$$

## ARMAX model

Zásadním nedostatkem ARX modelu jsou jeho omezené možnosti modelování stochastické složky. Tento nedostatek však lze jednoduše odstranit popisem chyby rovnice ve tvaru MA procesu

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = \\ = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \\ + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Tento model nazýváme **ARMAX model** na základě jeho složek (AutoRegressive Moving Average model with eXternal input). Definujeme-li polynom

$$c(d) = 1 + c_1 d + \dots + c_{n_c} d^{n_c},$$

lze ARMAX model popsat vztahy

$$a(d)y(t) = b(d)u(t) + c(d)e(t), \quad (9.18)$$

nebo též

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \frac{c(d)}{a(d)} e(t). \quad (9.19)$$

Chceme-li explicitně popsat vliv dopravního zpoždění, použijeme tvar

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t - T_d) + \frac{c(d)}{a(d)} e(t). \quad (9.20)$$

ARMAX model je ekvivalentní popisu lineárního stochastického systému v pozorovatelném kanonickém tvaru a dovoluje **nezávisle** specifikovat vlastnosti deterministické i stochastické složky modelu. ARMAX model je proto standardním modelem používaným v řadě aplikací.

Označíme-li v modelu (9.6) čitatele a jmenovatele jednotlivých složek

$$G(z) = \frac{b_g(z)}{a_g(z)}$$

a

$$H(z) = \frac{b_h(z)}{a_h(z)},$$

potom lze tento model psát ve tvaru

$$y(t) = \frac{b_g(d)a_h(d)}{a_g(d)a_h(d)} u(t) + \frac{a_g(d)b_h(d)}{a_g(d)a_h(d)} e(t),$$

tj. jako ARMAX model s parametry

$$a = a_g a_h, \quad b = b_g a_h, \quad c = a_g b_h.$$

Jsou-li vhodně zvoleny strukturální parametry (řády)  $n_a$ ,  $n_b$  a  $n_c$ , pak polynomy  $a(d)$ ,  $b(d)$  a  $c(d)$  nemají (jako trojice) společný dělitel, polynomy  $a(d)$ ,  $b(d)$  a  $a(d)$ ,  $c(d)$  (po dvojicích) však společné dělitele mít mohou. Z hlediska počtu identifikovaných parametrů tedy není ARMAX model minimální.

Převědeme-li rovnici (9.18) do tvaru prediktoru, dostaneme použitím obecného výsledku (9.8) vztah

$$\hat{y}(t) = \frac{a(d)}{c(d)} \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + \left(1 - \frac{a(d)}{c(d)}\right) y(t). \quad (9.21)$$

Odtud

$$c(d)\hat{y}(t|t-1) = b(d)u(t) + [c(d) - a(d)] y(t),$$

neboli

$$\hat{y}(t|t-1) = b(d)u(t) + [1 - a(d)] y(t) + [c(d) - 1] (y(t) - \hat{y}(t|t-1)).$$

Definujeme-li opět chybu predikce jako

$$\varepsilon(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1),$$

lze pro vektor parametrů

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b}, c_1, c_2, \dots, c_{n_c}]^T$$

a regresor

$$\mathbf{z}(t) = [y(t-1), \dots, y(t-n_a), u(t), \dots, u(t-n_b), \varepsilon(t-1|t-2), \dots, \varepsilon(t-n_c|t-n_c-1)]^T$$

opět vyjádřit závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech kompaktním způsobem jako

$$\hat{y}(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t).$$

V tomto případě však již nejde o lineární regresi, neboť část vektoru dat  $\varepsilon(t-1|t-2), \dots$  závisí na hodnotách parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ . Tuto závislost, kterou pro zdůraznění závislosti regresoru na parametrech můžeme psát také ve tvaru

$$\hat{y}(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t, \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\theta}),$$

nazýváme **pseudolineární regrese**. Vzhledem k výpočetní jednoduchosti v případě rekurzivního výpočtu je tato přibližná metoda velmi často používaná; analýza jejích vlastností je však podstatně komplikovanější než v případě lineární regrese (9.16). Při použití pseudolineární regrese k identifikaci ARMAX modelů je v literatuře doporučováno též použití **aposteriorních** chyb predikce  $\varepsilon(t|t)$  v regresoru.

Přesné rekurzivní odhadování parametrů ARMAX modelu bayesovským přístupem není možné. Je však možné přesně odhadovat parametry  $a_i$  a  $b_i$  pro **známé** hodnoty parametrů  $c_i$  (Peterka, 1981b). Pro známé parametry  $c_i$  je též možné odhadovat současně parametry i stavy lineárního stochastického systému v pozorovatelném kanonickém tvaru, který je ekvivalentní ARMAX systému (Havlena, 1993a), tj. realizovat **adaptivní Kalmanův filtr**.

### Model s chybou výstupu

V mnoha případech lze vztah mezi vstupem a výstupem popsat lineárními diferenčními rovnicemi a jediným zdrojem stochastické složky je chyba měření, která má charakter bílého šumu. Pak dostaneme popis systému

$$\begin{aligned} x(t) + a_1x(t-1) + \dots + a_{n_a}x(t-n_a) &= b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) \\ y(t) &= x(t) + e(t). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Tento model nazýváme **model s chybou výstupu**. Zapišeme-li tento model pomocí polynomů  $a(d)$ ,  $b(d)$

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + e(t), \quad (9.23)$$

neboli

$$a(d)y(t) = b(d)u(t) + a(d)e(t), \quad (9.24)$$

vidíme, že je (ve stacionárním případě) ekvivalentní ARMAX modelu s parametry  $c(d) = a(d)$ . Z rovnice prediktoru

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) \quad (9.25)$$

dostaneme

$$a(d)\hat{y}(t|t-1) = b(d)u(t),$$

neboli

$$\hat{y}(t|t-1) = b(d)u(t) + [1 - a(d)]\hat{y}(t|t-1). \quad (9.26)$$

Predikovanou střední hodnotu výstupu lze tedy opět psát ve tvaru pseudolineární regrese

$$\hat{y}(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t, \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\theta}),$$

kde vektor parametrů je

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b}]^T$$

a regresor

$$\mathbf{z}(t) = [\hat{y}(t-1|t-2), \dots, \hat{y}(t-n_a|t-n_a-1), u(t), u(t-1), \dots, u(t-n_b)]^T.$$

### Polohové a přírůstkové modely

V mnoha praktických situacích nelze stochastickou složku modelu považovat za stacionární bílý šum, ale má charakter driftu, který lze modelovat jako **náhodnou procházku**

$$v(t) = v(t-1) + e(t) = \sum_{\tau=-\infty}^t e(\tau), \quad (9.27)$$

to jest posloupnost, jejíž **přírůstky** jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou, tj. bílý šum. Použitím této stochastické složky (formálně) například v ARX modelu dostaneme

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + v(t). \quad (9.28)$$

Odečteme-li od této rovnice rovnici popisující výstup v čase  $t-1$ , dostaneme ARX model pracující na přírůstcích dat

$$\begin{aligned} \Delta y(t) + a_1\Delta y(t-1) + \dots + a_{n_a}\Delta y(t-n_a) \\ = b_0\Delta u(t) + b_1\Delta u(t-1) + \dots + b_{n_b}\Delta u(t-n_b) + e(t), \end{aligned} \quad (9.29)$$

kde  $\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$ . Prediktor pak bude mít tvar

$$\hat{y}(t|t-1) = y(t-1) + (1 - a(d))\Delta y(t) + b(d)\Delta u(t), \quad (9.30)$$



tj. referenční hodnotou pro predikci je předchozí hodnota výstupu. Stejným způsobem lze transformovat i další popsané modely.

Modely popisující dynamiku přírůstků výstupu na základě přírůstků vstupu nazýváme **přírůstkové** nebo **inkrementální** modely. Standardní dosud popisované modely nazýváme modely **polohové**. V polohových modelech je třeba obecně uvažovat i absolutní člen, který se v přírůstkovém modelu vyruší.

## 9.2 Identifikace parametrů lineárního regresního modelu

V předchozím odstavci jsme dospěli k obecné struktuře modelu popisující predikovanou střední hodnotu výstupu ve formě lineární (popř. pseudolineární) regrese

$$y(t) = \hat{y}(t|t-1) + e(t) = \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta} + e(t).$$

Představme si nyní, že jsme provedli měření vstupních a výstupních dat  $\mathcal{D}_t$  a chceme na základě těchto dat učinit racionální závěry o hodnotě parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ , případně  $\sigma_e^2$ . Připomeňme, že klasická statistika v této situaci hledá zobrazení

$$\mathcal{D}_t \rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}_t,$$

kteřé poskytuje v nějakém smyslu nejlepší **bodový odhad** neznámých parametrů. Tato zobrazení odpovídají jednotlivým metodám odhadu; přehled některých klasických metod byl uveden v kapitole 6.

Rozumným přístupem k nalezení takových zobrazení je vyhodnotit **chyby predikce**, odpovídající jednotlivým hodnotám parametrů  $\varepsilon(t, \boldsymbol{\theta})$ , a nejlepší odhad  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t$  pak určit minimalizací vhodně zvoleného kritéria ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t \in \text{Arg min}_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t l_{\tau}(\varepsilon(\tau, \boldsymbol{\theta})) \right\}.$$

Tím dostáváme širokou třídu metod, nazývaných **prediction error methods** (PEM) a podrobně analyzovaných v (Ljung, 1987). Typickým představitelem této třídy je **metoda nejmenších čtverců**, kdy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t \in \text{Arg min}_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t \|\varepsilon(\tau, \boldsymbol{\theta})\|_{W(\tau)}^2 \right\},$$

tj. odhad parametrů minimalizuje vážený součet čtverců chyb predikce. PEM metody rovněž úzce souvisejí s metodou maximální věrohodnosti (viz poznámka v odstavci 6.5.).

Bayesovský přístup naopak považuje neznámé parametry rovněž za náhodné veličiny (viz souvislost neurčitosti a pravděpodobnosti, odstavec 6.6.1) a využívá data k **výpočtu** (nikoli odhadu) podmíněné hustoty pravděpodobnosti těchto parametrů. Tato p.h.p. dává uživateli úplnou informaci o parametrech, která je v daných datech obsažena. Jako bodový odhad (pokud je nezbytný) pak lze vzít například maximum této aposteriori p.h.p. (tzv. MAP odhad) nebo podmíněnou střední hodnotu (což je vlastně MS odhad). Pro symetrická unimodální (tj. s jediným lokálním maximem) rozdělení jsou tyto dva odhady totožné.

V příštím odstavci ukážeme, jak lze aplikovat tento přístup na lineární regresní model v případě normálního rozdělení chyb predikce. Uvidíme, že výsledky (ve smyslu bodového

MAP odhadu) jsou ekvivalentní rekurzivní metodě nejmenších čtverců. Tento výsledek je hlubším zdůvodněním této numericky atraktivní, ale jinak v podstatě ad hoc zvolené metody.

Poznamenejme ještě, že kromě klasických a bayesovských statistických přístupů existuje řada jiných racionálních postupů k určení odhadu ve smyslu uvedeného zobrazení. Je možné např. minimalizovat „vzdálenost“ mezi empirickou h.p. pozorovaných dat  $p(\mathcal{Z}_t)$ , kde (pro lineární regresní model)

$$\mathcal{Z}_t = \{[y(\tau), \mathbf{z}^T(\tau)], \tau = 1, \dots, t\},$$

a empirickou hustotou pravděpodobností dat generovaných danou strukturou a parametry modelu  $p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))$ , kde

$$\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}) = \{[\mathbf{z}^T(\tau)\boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}^T(\tau)], \tau = 1, \dots, t\}.$$

Rozdílnost dvou hustot pravděpodobnosti ve smyslu teorie informace lze měřit tzv. Kullback-Leiblerovou vzdáleností (mírou divergence)

$$D(p(\mathcal{Z}_t), p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))) = \int p(\mathcal{Z}_t) \log \frac{p(\mathcal{Z}_t)}{p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))} d\mathcal{Z}_t.$$

Potom

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t \in \text{Arg min}_{\boldsymbol{\theta}} D(p(\mathcal{Z}_t), p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))).$$

Protože tato „vzdálenost“ je zároveň záporně vzatou vzájemnou entropií  $p(\mathcal{Z}_t)$  vzhledem k  $p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))$

$$S(p(\mathcal{Z}_t), p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))) = -D(p(\mathcal{Z}_t), p(\hat{\mathcal{Z}}_t(\boldsymbol{\theta}))),$$

lze tento odhad interpretovat také ve smyslu maximalizace entropie změřených dat vzhledem k datům generovaných modelem. Tento přístup použil (Akaike, 1981) k nalezení známého **Akaikova informačního kritéria** (AIC)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t \in \text{Arg min}_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{t} \left[ \sum_{\tau=1}^t l(\varepsilon(\tau, \boldsymbol{\theta})) + \dim \boldsymbol{\theta} \right],$$

které bere v úvahu také **složitost modelu** a může tak sloužit i k výběru vhodné struktury modelu.

### 9.2.1 Jednorázová identifikace

Pod pojmem jednorázová identifikace máme na mysli jednorázové zpracování celého souboru naměřených dat  $\mathcal{D}_{1,t}$ . Výsledkem této identifikace je podmíněná hustota parametrů, kterou jsme pro případ známého i neznámého rozptylu chyb odvodili pro případ normálního rozdělení těchto chyb v odstavci 6.6.4. Budeme aplikovat tyto obecné výsledky na ARX model dynamického systému.

Ukázali jsme, že v případě ARX modelu jsou predikované střední hodnoty výstupu

dynamického systému

$$\hat{y}(\tau|\tau-1), \quad \tau = 1, \dots, t$$

lineární funkcí známých dat  $\mathbf{z}(\tau)$  a  $n$  neznámých parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  a že měřené hodnoty výstupu jsou dány jako

$$y(\tau) = \mathbf{z}^T(\tau)\boldsymbol{\theta} + e(\tau), \quad \tau = 1, \dots, t,$$

kde hodnoty šumu jsou nekorelované veličiny. Nyní předpokládejme navíc, že tyto hodnoty jsou normálně rozdělené

$$e(\tau) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2),$$

kde  $\sigma_e^2$  je konstantní, rovněž neznámá veličina. Definujeme-li vektor měření výstupu

$$\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(t)]^T,$$

matici dat

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^T(t) \end{bmatrix}$$

a vektor chyb

$$\mathbf{e} = [e(1), e(2), \dots, e(t)]^T,$$

lze tuto situaci popsat kompaktním způsobem jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}. \quad (9.31)$$

V odstavci 6.6.4 jsme ukázali, že sdružená aposteriorní p.h.p. parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma_e$  bude

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathcal{D}_t) \propto \sigma_e^{-(t+1)} e^{\left\{ -\frac{\nu s^2}{2\sigma_e^2} - \frac{1}{2\sigma_e^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\}}.$$

Tuto p.h.p. lze psát také ve tvaru součinu **podmíněné hustota pravděpodobnosti  $\boldsymbol{\theta}$  pro dané  $\sigma_e$**

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e) = \frac{|\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

která má normální rozdělení

$$p(\boldsymbol{\theta} | \sigma_e, \mathcal{D}_t) = \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \sigma_e^2 \mathbf{P}),$$

kde podmíněná střední hodnota parametrů je (není-li použita žádná apriorní informace)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y}$$

a podmíněná normovaná kovarianční matice chyby odhadu parametrů

$$\mathbf{P} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1},$$

a marginální hustoty pravděpodobnosti  $\sigma_e$

$$p(\sigma_e | \mathcal{D}_t) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \left( \frac{\nu s^2}{2} \right)^{\nu/2} \sigma_e^{-(\nu+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma_e^2}},$$

kde výraz

$$\nu s^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

je reziduální součet čtverců a  $\nu = t - n$  je počet stupňů volnosti. Veličina  $\frac{\nu s^2}{\sigma_e^2}$  má rozdělení chí-kvadrát s  $\nu$  stupni volnosti. Pro odhad rozptylu šumu odtud dostaneme

$$\hat{\sigma}_e^2 = \mathcal{E} \{ \sigma_e^2 | \mathcal{D}_t \} = s^2.$$

Marginální rozdělení parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  je

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_t) = \frac{|\mathbf{P}|^{-1/2} \Gamma((\nu+n)/2)}{(\nu s^2)^{n/2} \Gamma(\nu/2) \Gamma(1/2)^n} \left[ 1 + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\nu s^2} \right]^{-(\nu+n)/2},$$

což je  $n$ -rozměrné Studentovo rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathcal{D}_t) = t_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}, s^2 \mathbf{P}, \nu).$$

Pokud prvky matice dat  $\mathbf{Z}$  jsou nekorelované s hodnotami  $e(\tau)$ , je podmíněná střední hodnota  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  nevychýleným odhadem parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ . Platí totiž

$$\mathcal{E} \{ \hat{\boldsymbol{\theta}} | \boldsymbol{\theta} \} = \mathcal{E} \{ (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T (\mathbf{Z} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}) | \boldsymbol{\theta} \} = \boldsymbol{\theta}.$$

Tento závěr je z hlediska identifikace dynamických systémů značně omezující: nevychýlený odhad parametrů získáme pouze pro modely s konečnou impulsní charakteristikou (FIR)

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(t-i) + e(t)$$

se šumem nezávislým na hodnotách vstupu. Pro ARX modely obsahuje matice dat hodnoty měření  $y(t)$  a tento předpoklad tedy není splněn.

### 9.2.2 Rekurzivní identifikace konstantních parametrů

Výsledky předchozího odstavce nyní využijeme k odvození rekurzivních vztahů pro p.h.p.  $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathbf{y})$ . Plyne z nich totiž, že tato p.h.p. se reprodukuje při aplikaci Bayesova vzorce, lze tuto funkcionální rekurzi popsat pomocí algebraické rekurze pro parametry tohoto rozdělení  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $s^2$  a  $\nu$ , popř.  $t$ . Tuto rekurzi nyní odvodíme.

Budeme realizovat postup popsáný vztahem (9.2). Pod pojmem parametry používaným v tomto koncepčním řešení nyní budeme chápat dvojici „parametry ARX modelu  $\boldsymbol{\theta}$ “ (parametry v užším smyslu) a „parametr rozdělení šumu  $\sigma_e^2$ “. Na základě výsledků jednorázového odhadu předpokládáme, že apriorní znalost těchto parametrů na základě dat

$\mathcal{D}_{t-1}$  je popsána p.h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathcal{D}_{t-1}) \propto \sigma_e^{-(\nu(t-1)+1)} e^{-\frac{\nu(t-1)s^2(t-1)}{2\sigma_e^2}} \sigma_e^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))^T \mathbf{P}(t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))}.$$

Pro aktualizaci této p.h.p. platí (9.2) (pro zjednodušení vynecháváme výpočty všech normalizačních koeficientů nezávislých na  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma_e^2$ ), tj.

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathcal{D}_t) \propto p(y(t) | \boldsymbol{\theta}, \sigma_e, u(t), \mathcal{D}_{t-1}) p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathcal{D}_{t-1}).$$

Potřebná p.h.p. výstupu  $y(t)$  je na základě modelu (9.16) normální

$$p(y(t) | \boldsymbol{\theta}, \sigma_e, u(t), \mathcal{D}_{t-1}) = \mathcal{N}(\hat{y}(t), \sigma_e^2),$$

kde

$$\hat{y}(t) = \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}.$$

Tato hustota pravděpodobnosti tedy bude

$$p(y(t) | \boldsymbol{\theta}, \sigma_e, u(t), \mathcal{D}_{t-1}) \propto \sigma_e^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta})^2}.$$

Uvědomte si, že veličina  $\boldsymbol{\theta}$  vyskytující se v podmínce je v této p.h.p. známá, a tedy jediným zdrojem neurčitosti výstupu je šum  $e(t)$ . Dosazením těchto p.h.p. do vztahu (9.2) dostaneme (opět s vynecháním normalizačních konstant)

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e | \mathcal{D}_t) &\propto \sigma_e^{-(\nu(t)+1)} e^{-\frac{\nu(t)s^2(t)}{2\sigma_e^2}} \\ &\sigma_e^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \mathbf{P}(t)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))} \\ &\propto \sigma_e^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta})^T (y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta})} \\ &\sigma_e^{-(\nu(t-1)+1)} e^{-\frac{\nu(t-1)s^2(t-1)}{2\sigma_e^2}} \\ &\sigma_e^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))^T \mathbf{P}(t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))}. \end{aligned}$$

Porovnáním těchto výrazů, které jako funkce neznámých parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma_e$  musejí být totožné, dostaneme další dvě podmínky: první z nich je

$$\nu(t) + n = \nu(t-1) + n + 1,$$

což plyne z porovnání exponentů  $\sigma_e$ , a druhá

$$\begin{aligned} \nu(t)s^2(t) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t))^T \mathbf{P}(t)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)) &= \nu(t-1)s^2(t-1) \\ + (y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta})^2 + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))^T \mathbf{P}(t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)), \end{aligned} \quad (9.32)$$

což plyne z porovnání exponentů exponenciální funkce. Úpravami tohoto výrazu dospějeme k rekurzivním vztahům pro statistiky uvažovaného rozdělení, které lze snadno dokázat dosazením do (9.32), a to pro normalizovanou kovarianční matici chyby odhadu

$$\mathbf{P}(t)^{-1} = \mathbf{P}(t-1)^{-1} + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t), \quad (9.33)$$

neboli (použitím lemmatu o inverzi matice (6.24))

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}, \quad (9.34)$$

a pro střední hodnotu parametrů

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t)(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Tyto dvě statistiky plně popisují p.h.p. parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  pro dané  $\sigma_e$  a jejich vývoj je totožný s výsledky známými jako **rekurzivní metoda nejmenších čtverců**. Zavedeme-li značení

$$\varepsilon(t|t-1) = y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \quad (9.36)$$

a

$$\zeta(t) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t), \quad (9.37)$$

můžeme tyto vztahy psát ve tvaru

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \zeta(t)} \quad (9.38)$$

a

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t)}\varepsilon(t|t-1). \quad (9.39)$$

Pro statistiky popisující marginální p.h.p. rozptylu  $\sigma_e$  dostaneme pro počet stupňů volnosti

$$\nu(t) = \nu(t-1) + 1 \quad (9.40)$$

a pro reziduální součet čtverců

$$\nu(t)s^2(t) = \nu(t-1)s^2(t-1) + \frac{(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1))^2}{1 + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}. \quad (9.41)$$

Platí též

$$\mathcal{E} \left\{ \varepsilon(t|t-1)^2 \middle| \sigma_e \right\} = \sigma_e^2(1 + \zeta(t)).$$

Odtud je vidět souvislost poslední uvedené statistiky s odhadem rozptylu šumu. Z vlastností rozdělení  $\chi^2$  plyne

$$\hat{\sigma}_e^2(t) = \mathcal{E} \left\{ \sigma_e^2 \middle| \mathcal{D}_t \right\} = s^2(t)$$

a

$$\text{cov} \left\{ \sigma_e^2 \mid \mathcal{D}_t \right\} = \frac{2}{\nu(t) - 2} s^4(t).$$

Na základě výsledků jednorázového odhadování dále víme, že počet stupňů volnosti

$$\nu = t - n.$$

Proto při inicializaci rekurzivního algoritmu  $s^2(0)$  určuje apriorní informaci o rozptylu šumu, zatímco hodnota  $\nu$  určuje váhu této apriorní informace, neboť jí můžeme přiřadit fiktivní počet vzorků dat, na jejichž základě byla tato informace získána (viz diskuze o informativních apriorních h.p. v odstavci 6.6.2). Interpretace počátečního nastavení vektoru  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$  je zřejmá, při nastavování počátečních hodnot kovarianční matice  $\mathbf{P}(0)$  je opět třeba si uvědomit, že tato kovarianční matice je normalizovaná a že absolutní hodnoty kovariancí jsou zhruba  $s^2(0)\mathbf{P}(0)$ .

### 9.2.3 Sledování časově proměnných parametrů

Výsledky předchozího odstavce jsou založeny v podstatě pouze na datovém kroku algoritmu (9.2). V případě, že se parametry v čase vyvíjejí, je třeba provést ještě časový krok algoritmu koncepčně popsany rovnicí (9.5). Model vývoje parametrů vystupující v (9.5) ovšem v mnoha případech není dostupný, a proto úplně bayesovské řešení nelze najít. Ukážeme zde, že hlavní vlastností aktualizace p.h.p. (9.5) z hlediska sledování časově proměnných parametrů je **zvýšení neurčitosti** apriorní (predikční) p.h.p. v dalším kroku vůči aposteriorní p.h.p. Na základě této vlastnosti ukážeme některé **heuristické přístupy**, zvyšující v časovém kroku algoritmu neurčitost parametrů. Tyto postupy se nazývají **zapomínání**.

Předpokládejme opět, že apriorní znalost hodnot parametrů v čase  $t$  na základě dat  $\mathcal{D}_{t-1}$  je popsána p.h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t) \mid \mathcal{D}_{t-1}) \propto \sigma_e^{-(\nu(t|t-1)+1)} e^{-\frac{\nu(t|t-1)s^2(t|t-1)}{2\sigma_e^2}} \sigma_e^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1))^T \mathbf{P}(t|t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1))}.$$

Zopakujeme zde v podstatě datový krok uvedený v předchozí sekci, povšimněte si však rozdílů ve značení, který odráží skutečnost, že pracujeme s časově proměnnými parametry. Pro datový krok aktualizace této p.h.p. platí (9.2)

$$p(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t) \mid \mathcal{D}_t) \propto p(y(t) \mid \boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t), u(t), \mathcal{D}_{t-1}) p(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t) \mid \mathcal{D}_{t-1}).$$

Potřebná p.h.p. výstupu  $y(t)$  je

$$p(y(t) \mid \boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t), u(t), \mathcal{D}_{t-1}) = \mathcal{N}(z^T(t)\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e^2(t)),$$

neboli

$$p(y(t) \mid \boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t), u(t), \mathcal{D}_{t-1}) \propto \sigma_e(t)^{-1} e^{-\frac{1}{2\sigma_e(t)^2}(y(t) - z^T(t)\boldsymbol{\theta}(t))^2}.$$

Dosazením těchto p.h.p. do vztahu (9.2) dostaneme

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t) | \mathcal{D}_t) &\propto \sigma_e^{-(\nu(t|t)+1)}(t) e^{-\frac{\nu(t|t)s^2(t|t)}{2\sigma_e^2(t)}} \\
 &\sigma_e^{-n}(t) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t)}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))^T \mathbf{P}(t|t)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))} \\
 &\propto \sigma_e^{-1}(t) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t)}(y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t))^T (y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t))} \\
 &\sigma_e^{-(\nu(t|t-1)+1)}(t) e^{-\frac{\nu(t|t-1)s^2(t|t-1)}{2\sigma_e^2(t)}} \\
 &\sigma_e^{-n}(t) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t)}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1))^T \mathbf{P}(t|t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1))}
 \end{aligned}$$

a porovnáním těchto výrazů, které jako funkce neznámých parametrů  $\boldsymbol{\theta}(t)$  a  $\sigma_e(t)$  musí být totožné, dostaneme podmínky

$$\nu(t|t) + n = \nu(t|t-1) + n + 1$$

a

$$\begin{aligned}
 \nu(t|t)s^2(t|t) + (\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))^T \mathbf{P}(t|t)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t)) &= \nu(t|t-1)s^2(t|t-1) \\
 + (y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t))^2 + (\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1))^T \mathbf{P}(t|t-1)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1)).
 \end{aligned}$$

Úpravami tohoto výrazu dospějeme opět k rekurzivním vztahům pro statistiky uvažovaného rozdělení. Pro normalizovanou kovarianční matici chyby odhadu platí

$$\mathbf{P}(t|t)^{-1} = \mathbf{P}(t|t-1)^{-1} + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t),$$

neboli (použitím lemmatu o inverzi matice (6.24))

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}, \quad (9.42)$$

kde

$$\zeta(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t). \quad (9.43)$$

Pro potřeby dalšího výkladu definujme ještě aposteriorní hodnotu

$$\zeta(t|t) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{z}(t). \quad (9.44)$$

Dále dostaneme pro střední hodnotu parametrů

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1) + \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t|t-1), \quad (9.45)$$

kde

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) = y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1). \quad (9.46)$$

Pro statistiky popisující marginální p.h.p. rozptylu  $\sigma_e(t)$  dostaneme pro počet stupňů vol-



nosti

$$\nu(t|t) = \nu(t|t-1) + 1 \quad (9.47)$$

a pro reziduální součet čtverců

$$\nu(t|t)s^2(t|t) = \nu(t|t-1)s^2(t|t-1) + \frac{\varepsilon^2(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}. \quad (9.48)$$

Všimněte si, že korekce odhadu parametrů  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t)$  novými daty  $\{\mathbf{z}^T(t), y(t)\}$  je dána Kalmanovým zesílením

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)},$$

kteřé je úměrné normalizované kovarianční matici odhadu parametrů  $\mathbf{P}(t|t-1)$ . Je-li systém dostatečně buzen, takže pro nějaké  $\alpha > 0$  platí

$$\mathbf{P}(t|t-1)^{-1} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(\tau) > \alpha t \mathbf{I},$$

je kovarianční matice chyby odhadu shora omezená

$$\mathbf{P}(t|t-1) < \frac{1}{\alpha t} \mathbf{I}$$

a pro omezená data klesá toto zesílení s časem k nule. Vliv nových dat na odhad parametrů klesá. Porovnejte tento výsledek se vztahem pro rekurzivní odhad střední hodnoty (7.2). Schopnost **sledovat** časově proměnné parametry tedy vyžaduje, aby prvky kovarianční matice nebyly ‘příliš malé’.

Podívejme se nyní na časový krok koncepčního řešení (9.5)

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\mathcal{D}_\tau) = \int_{\Omega_\theta} p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\boldsymbol{\theta}(\tau), \mathcal{D}_\tau) p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_\tau) d\boldsymbol{\theta}(\tau), \quad (9.49)$$

kde vývoj parametrů v čase je popsán p.h.p.  $p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\boldsymbol{\theta}(\tau), \mathcal{D}_\tau)$ . Předpokládejme, že odhad  $p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_\tau)$  zkonvergoval do jediného bodu, tj.

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau)|\mathcal{D}_\tau) = \delta(\boldsymbol{\theta}(\tau) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau|\tau)).$$

Potom apriorní odhad je

$$p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\boldsymbol{\theta}(\tau), \mathcal{D}_\tau) = p(\boldsymbol{\theta}(\tau+1)|\hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau|\tau), \mathcal{D}_\tau)$$

a má právě neurčitost popsanou touto p.h.p. Obecně tedy konvoluce (9.49) popisuje právě **zvyšování neurčitosti parametrů v čase**, které též nazýváme **zapomínání**, neboť potlačuje vliv starších dat na současné hodnoty odhadu.

Obvykle se používají dva přístupy: první možností je předpokládat, že časové změny (drift) parametrů mohou být popsány modelem

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t) + \boldsymbol{\nu}(t), \quad (9.50)$$

kde  $\boldsymbol{\nu}(t) \sim \mathcal{N}(0; \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}(t))$ . Z rovnice (9.50) pak plyne rovnice časového vývoje kovarianční

matice parametrů

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t) + \mathbf{V}(t). \quad (9.51)$$

Nebudou-li vlastní čísla této matice opět omezována v příštích datových krocích algoritmu (9.45) (např. při nedostatečném vybuzení systému), vede (9.50) na jejich lineární růst; proto se zapomínání indukované modelem vývoje parametrů (9.48) nazývá **lineární zapomínání**. Kovarianční matice  $\mathbf{V}(t)$  přitom může obsahovat **apriorní informaci o možných směrech změn parametrů**. Tento přístup neřeší problém sledování časově proměnného rozptylu šumu.

Druhou možností je zvyšovat neurčitost parametrů (vznikající jejich časovým vývojem) přímo. Výsledkem konvoluce (9.5) je „zploštění“ nebo „rozptýlení“ výsledné p.h.p. Tohoto účinku lze dosáhnout i přímo (i když bez možnosti ovlivňovat jeho velikost nezávisle v jednotlivých směrech) umocněním p.h.p. koeficientem  $\varphi \in (0, 1]$

$$p(\boldsymbol{\theta}(t+1)|\mathcal{D}_t) \propto p^\varphi(\boldsymbol{\theta}(t)|\mathcal{D}_t).$$

Tento postup nazýváme **exponenciální zapomínání** a koeficient  $\varphi$  obvykle nazýváme **faktor zapomínání**.

Analyzujme nyní vliv exponenciálního zapomínání na aposteriorní p.h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t)|\mathcal{D}_t) \propto \sigma_e^{-(\nu(t|t)+1)}(t) e^{-\frac{\nu(t|t)s^2(t|t)}{2\sigma_e^2(t)}} \sigma_e^{-n}(t) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t)}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))^T \mathbf{P}(t|t)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))} \quad (9.52)$$

Porovnáme-li parametry na obou stranách úměrnosti

$$p(\boldsymbol{\theta}(t+1), \sigma_e(t+1)|\mathcal{D}_t) \propto p^\varphi(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t)|\mathcal{D}_t)|_{\boldsymbol{\theta}(t)=\boldsymbol{\theta}(t+1), \sigma_e(t)=\sigma_e(t+1)} \quad (9.53)$$

(tento zápis používáme proto, že rozlišujeme p.h.p. v čase pouze jejich argumenty), dostaneme

$$\begin{aligned} & \sigma_e^{-(\nu(t+1|t)+1)}(t+1) e^{-\frac{\nu(t+1|t)s^2(t+1|t)}{2\sigma_e^2(t+1)}} \\ & \sigma_e^{-n}(t+1) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t+1)}(\boldsymbol{\theta}(t+1) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1|t))^T \mathbf{P}(t+1|t)^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t+1) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1|t))} \\ & \propto \sigma_e^{-(\nu(t|t)+1)\varphi}(t+1) e^{-\frac{\nu(t|t)s^2(t|t)\varphi}{2\sigma_e^2(t+1)}} \\ & \sigma_e^{-n\varphi}(t+1) e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2(t+1)}(\boldsymbol{\theta}(t+1) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))^T \mathbf{P}(t|t)^{-1}\varphi(\boldsymbol{\theta}(t+1) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t))} \end{aligned} \quad (9.54)$$

Porovnáním odpovídajících si členů této úměrnosti na obou stranách (obě strany musejí být jako funkce  $\boldsymbol{\theta}(t+1)$  a  $\sigma_e(t+1)$  ekvivalentní) dostaneme vztahy pro časový krok algoritmu v případě exponenciálního zapomínání

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \frac{1}{\varphi} \mathbf{P}(t|t), \quad (9.55)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t+1|t) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(t|t), \quad (9.56)$$

$$\nu(t+1|t) + n + 1 = \varphi (\nu(t|t) + n + 1), \quad (9.57)$$

$$\nu(t+1|t)s^2(t+1|t) = \varphi \nu(t|t)s^2(t|t). \quad (9.58)$$

Všimněte si, že zapomínání zvyšuje neurčitost p.h.p. parametrů násobením jejich kovarianční matice faktorem  $1/\varphi \geq 1$  a nemění střední hodnotu p.h.p. parametrů. Nejsou-li v tomto případě vlastní čísla této matice opět omezována v datovém kroku algoritmu, vede (9.55) na jejich exponenciální růst.

Dále zapomínání snižuje efektivní počet dat použitý pro odhad  $\sigma_e^2(t)$ , neboť bez zapomínání výraz  $\nu + n = t$ . Z (9.57) plyne pro ustálený **efektivní počet vzorků**  $t_{ef}$  vztah

$$t_{ef} = \varphi(t_{ef} + 1),$$

a tedy

$$t_{ef} = \frac{1}{1 - \varphi}. \quad (9.59)$$

Protože zároveň by mělo platit  $\nu_{ef} = t_{ef} - n > 0$ , vidíme, že rozumný rozsah faktoru zapomínání je např. pro  $n = 5$  zhruba  $\varphi \in \langle 0.8, 1 \rangle$ , čemuž odpovídá  $t_{ef} > 5$ . Úměrně efektivnímu počtu dat je také modifikován reziduální součet čtverců (9.58). Pro odhad parametru  $\sigma_e^2(t)$  platí

$$\hat{\sigma}_e^2(t+1|t) = \frac{\varphi(t-n-1)^2}{(\varphi t - n - 1)^2} \hat{\sigma}_e^2(t|t). \quad (9.60)$$

Pro  $t \gg n$  jsou tyto odhady totožné, pro relativně malé hodnoty  $t$  je apriorní odhad  $\hat{\sigma}_e^2(t+1|t) > \hat{\sigma}_e^2(t|t)$ . Vidíme též, že rozumné chování odhadu  $\hat{\sigma}_e^2$  vyžaduje  $(\varphi t - n - 1) > 0$ .

Zahrnutí apriorní informace při zapomínání exponenciálního typu lze dosáhnout využitím tzv. alternativní p.h.p.  $p_a(\cdot)$ , zapomínání pak lze popsat multiplikativní směsí p.h.p.

$$p(\boldsymbol{\theta}(t+1), \sigma_e(t+1)|\mathcal{D}_t) \propto p^\varphi(\boldsymbol{\theta}(t), \sigma_e(t)|\mathcal{D}_t)|_{\theta(t)=\theta(t+1), \sigma_e(t)=\sigma_e(t+1)} p_a^{1-\varphi}(\boldsymbol{\theta}(t+1), \sigma_e(t+1)|\mathcal{D}_t). \quad (9.61)$$

Tento přístup je podrobně analyzován v (Kulhavý, 1987).

V praxi se často používají vztahy zahrnující oba kroky algoritmu. V případě exponenciálního zapomínání můžeme pro odhad parametrů a vývoj kovarianční matice dostat na základě (9.42), (9.45) a (9.55) buď rovnice

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t+1|t) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1) + \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)} \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \quad (9.62)$$

a

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \frac{1}{\varphi} \left( \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)} \right), \quad (9.63)$$

které popisují rekurzi na apriorních (predikovaných) hodnotách, nebo

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t|t) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(t-1|t-1) + \frac{\mathbf{P}(t-1|t-1)\mathbf{z}(t)}{\varphi + \zeta(t|t-1)} \boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1) \quad (9.64)$$

a

$$\mathbf{P}(t|t) = \frac{1}{\varphi} \left( \mathbf{P}(t-1|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1|t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1|t-1)}{\varphi + \zeta(t|t-1)} \right), \quad (9.65)$$

kteřé popisují rekurzi na aposteriorních (filtrovaných) hodnotách.

### 9.2.4 Omezené zapomínání

Jestliže není identifikovaný systém dostatečně vybuzen, může při vývoji kovarianční matice podle (9.51) nebo (9.55) docházet k neustálému snižování množství akumulované informace o parametrech (považované za zastaralou), aniž je tato informace nahrazována informací novou. Tento jev se v literatuře nazývá **covariance wind-up**. Jádrem problému je možnost neomezeného růstu některých vlastních čísel, tedy „průměru“ kovarianční matice v některých směrech během fáze nedostatečného vybuzení soustavy a následná extrémní citlivost odhadu parametrů na případné vybuzení soustavy v těchto směrech.

K odstranění tohoto jevu se používá řada heuristických i hlouběji zdůvodněných metod. Jednoduchým opatřením je použití exponenciálního zapomínání s **proměnným faktorem zapomínání**, který je volen tak, aby **stopa kovarianční matice** byla udržována konstantní. Protože stopa matice je součtem jejích vlastních čísel, je tímto jednoduchým opatřením omezeno **největší vlastní číslo** matice  $\mathbf{P}(t+1|t)$ .

Jiným opatřením je udržování konstantního **informačního obsahu** kovarianční matice. Tento postup navržený v (Fortescue a další, 1981) vede rovněž na časově proměnný koeficient exponenciálního zapomínání

$$\varphi(t) = 1 - \alpha \frac{\varepsilon^2(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}. \quad (9.66)$$

Tato volba má poměrně snadno interpretovatelný účinek. Dojde-li ke změně parametrů, vzroste chyba predikce a klesne dočasně faktor zapomínání. Po korekci parametrů se faktor zapomínání vrátí k hodnotě blízké jedné.

Podrobná analýza algoritmu exponenciálního zapomínání z hlediska růstu vlastních čísel kovarianční matice  $\mathbf{P}$  je analyzován v (Kulhavý, 1987), kde je také navrženo odstranění tohoto jevu vhodným **omezením** exponenciálního zapomínání. Omezíme-li se nyní na vývoj p.h.p. parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ , lze exponenciální zapomínání považovat za speciální případ lineárního zapomínání, odpovídající volbě kovarianční matice

$$\mathbf{V}(t) = \left( \frac{1}{\varphi} - 1 \right) \mathbf{P}(t|t). \quad (9.67)$$

Platí totiž

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \frac{1}{\varphi} \mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t) + \left( \frac{1}{\varphi} - 1 \right) \mathbf{P}(t|t). \quad (9.68)$$

Omezíme se proto v následujícím výkladu na odvození omezeného lineárního zapomínání. Výsledek pro exponenciální zapomínání pak dostaneme na základě (9.67).

Základní myšlenkou omezeného zapomínání je zapomínat v predikčním kroku algoritmu (9.51) pouze tu informaci, která byla modifikována daty ve filtračním kroku (9.45). Všimněme si, že ve filtračním kroku (9.45) dochází ke změně hodnoty výrazu  $\mathbf{z}^T(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1)$ , což

je projekce neurčitosti vektoru parametrů  $\tilde{\theta}(t|t-1)$  na směr dat  $\mathbf{z}(t)$ . Tato neurčitost je redukována součinitelem  $(1 + \zeta(t|t-1))^{-1}$ , neboť

$$\text{cov} \left\{ \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t) \mid \mathcal{D}_t \right\} = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)}.$$

Naopak pro směry  $\mathbf{P}$ -ortogonální na data  $\mathbf{x}(t) \perp_P \mathbf{z}(t)$ , to je takové, že platí

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t) = 0,$$

není projekce neurčitosti parametrů na tyto vektory  $\mathbf{x}(t)$  filtračním krokem algoritmu ovlivněna, protože

$$\text{cov} \left\{ \mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t) \mid \mathcal{D}_t \right\} = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{x}(t).$$

Omezením zapomínání proto umožníme v predikčním kroku algoritmu zvyšovat neurčitost parametrů podle neomezeného modelu (9.51) pouze ve směru  $\mathbf{z}(t)$ , takže bude platit

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t+1|t)\mathbf{z}(t) &= \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{z}^T(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{z}(t) \\ &= \zeta(t|t) + \zeta_\nu(t), \end{aligned} \quad (9.69)$$

kde jsme označili

$$\zeta_\nu(t) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{z}(t), \quad (9.70)$$

zatímco pro všechny směry  $\mathbf{x}(t) \perp_P \mathbf{z}(t)$  zvýšení neurčitosti nepřipustíme a tedy bude platit

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t+1|t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t|t)\mathbf{x}(t). \quad (9.71)$$

Splnění těchto podmínek dosáhneme volbou „omezené kovarianční matice“  $\mathbf{V}_o(t|t)$  (časové indexování naznačuje závislost této matice na datech  $\mathbf{z}(t)$ ) ve tvaru

$$\mathbf{V}_o(t|t) = \frac{\zeta_\nu(t)}{\zeta^2(t|t)}\mathbf{P}(t|t)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t).$$

Přímým výpočtem se lze jednoduše přesvědčit, že tato omezená kovarianční matice vyhovuje podmínkám (9.69) a (9.71) Využitím vztahu

$$\mathbf{P}(t|t)\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)} = \mathbf{K}(t)$$

dostaneme vztah pro tuto omezenou kovarianční matici

$$\mathbf{V}_o(t|t) = \mathbf{K}(t)\frac{\zeta_\nu(t)}{\zeta^2(t|t)}\mathbf{K}^T(t). \quad (9.72)$$

Predikční krok algoritmu (9.51) s takto modifikovanou kovarianční maticí  $\mathbf{V}_o(t|t)$  nazveme **omezené lineární zapomínání**

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t) + \mathbf{V}_o(t|t). \quad (9.73)$$

Jeho výhodnou vlastností je i efektivnější numerická implementace, neboť matice  $\mathbf{V}_o(t|t)$  má jednotkovou hodnotu.

Ukážeme nyní aplikaci tohoto postupu na exponenciální zapomínání. Protože podle

(9.67)

$$\mathbf{V}(t) = \frac{1-\varphi}{\varphi} \mathbf{P}(t|t),$$

platí

$$\zeta_\nu(t) = \frac{1-\varphi}{\varphi} \zeta(t|t), \quad (9.74)$$

a tedy

$$\mathbf{V}_o(t|t) = \mathbf{K}(t) \frac{\frac{1-\varphi}{\varphi} \zeta(t|t)}{\zeta^2(t|t)} \mathbf{K}^T(t) = \mathbf{K}(t) \frac{1-\varphi}{\varphi \zeta(t|t)} \mathbf{K}^T(t).$$

Spojením (9.42) s (9.73), kde omezená kovarianční matice je dána předchozím vztahem, dostaneme vztah pro aktualizaci kovarianční matice s omezeným exponenciálním zapomínáním

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+1|t) &= \mathbf{P}(t|t) + \mathbf{K}(t) \frac{1-\varphi}{\varphi \zeta(t|t)} \mathbf{K}^T(t) \\ &= \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)} \\ &\quad + \frac{1-\varphi}{\varphi \zeta(t|t-1)} \frac{\mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)} \\ &= \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\varphi \zeta(t|t-1) + \varphi - 1}{\varphi \zeta(t|t-1)} \times \\ &\quad \frac{\mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}, \end{aligned}$$

kde jsme využili skutečnosti, že

$$\zeta(t|t) = \frac{\zeta(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}.$$

Po úpravě dostaneme výsledný vztah

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t|t-1) \mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{P}(t|t-1)}{\alpha(t)^{-1} + \zeta(t|t-1)}, \quad (9.75)$$

kde koeficient

$$\alpha(t) = \frac{\varphi(1 + \zeta(t|t-1)) - 1}{\zeta(t|t-1)} \quad (9.76)$$

lze podle lemmatu o inverzi matic (6.24) interpretovat jako váhu dyády  $\mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t)$  při aktualizaci kovarianční matice

$$\mathbf{P}(t+1|t)^{-1} = \mathbf{P}(t|t-1)^{-1} + \alpha(t) \mathbf{z}(t) \mathbf{z}^T(t).$$

Z (9.76) je vidět, že pro  $\varphi < 1/(1 + \zeta)$  je  $\alpha < 0$ , a tedy neurčitost roste, zatímco pro  $\varphi > 1/(1 + \zeta)$  je  $\alpha > 0$ , a tedy neurčitost klesá.

Zajímavá je také souvislost omezeného lineárního zapomínání indukovaného modelem

(9.51) s omezeným exponenciálním zapomínáním. Protože zapomínání modifikuje kovarianční matici v jediném směru, lze je interpretovat z obou hledisek. Podle (9.74) je omezené lineární zapomínání ekvivalentní s omezeným exponenciálním zapomínáním s proměnným faktorem zapomínání

$$\varphi(t) = \frac{\zeta(t|t)}{\zeta(t|t) + \zeta_\nu(t)}. \quad (9.77)$$

Všimněte si, že tento faktor zapomínání je řízen jak **apriorní informací**, tak **daty**. Pro směry, ve kterých jsou očekávány změny parametrů, a tedy

$$\zeta_\nu(t) > 0,$$

je faktor zapomínání  $\varphi(t) < 1$ . Naopak pro směry, ve kterých změny parametrů očekávány nejsou, a tedy

$$\zeta_\nu(t) \doteq 0,$$

se faktor zapomínání blíží jedné  $\varphi(t) \doteq 1$ , tj. nezapomíná se.

### 9.2.5 Implementace algoritmu nejmenších čtverců

V předchozích odstavcích jsme odvodili rekurentní vztahy pro statistiky sdružené p.h.p. veličin  $\boldsymbol{\theta}$  a  $\sigma_e^2$ , a to jak pro datový krok, tak pro časový krok, který je v případě časově proměnných parametrů netriviální. Nyní ukážeme jednu z výhodných implementací obou těchto kroků, která kromě efektivnosti má i dobré numerické vlastnosti.

Pro datový krok algoritmu platí vztahy (9.42)– (9.48), tj. označíme-li rozptyl výstupu

$$\zeta(t|t-1) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t),$$

chybu predikce výstupu

$$\varepsilon(t|t-1) = y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1)$$

a Kalmanovo zesílení (které v tomto případě není matice, ale vektor)

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)}{1 + \zeta(t|t-1)},$$

dostaneme pro střední hodnotu parametrů

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1) + \mathbf{k}(t)\hat{\varepsilon}(t|t-1),$$

pro kovarianční matici parametrů

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{P}(t|t-1) - \frac{\mathbf{P}(t|t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)},$$

pro počet stupňů volnosti

$$\nu(t|t) = \nu(t|t-1) + 1$$

a pro reziduální součet čtverců

$$\nu(t|t)s^2(t|t) = \nu(t|t-1)s^2(t|t-1) + \frac{\varepsilon^2(t|t-1)}{1 + \zeta(t|t-1)}.$$

Předpokládejme nyní, že kovarianční matice chyby odhadu je dána svými  $LD$ -faktory ve tvaru

$$\mathbf{P}(t|t-1) = \mathbf{L}(t|t-1)\mathbf{D}(t|t-1)\mathbf{L}^T(t|t-1) = \left| \mathbf{d}(t|t-1); \mathbf{L}^T(t|t-1) \right|, \quad (9.78)$$

kde  $\mathbf{L}(t|t-1)$  je monická dolní trojúhelníková matice a  $\mathbf{D}(t|t-1) = \text{diag}[\mathbf{d}(t|t-1)]$  je diagonální matice s nezápornými prvky na diagonále. Sdruženou kovarianční matici výstupu  $\mathbf{y}(t)$  a parametrů  $\boldsymbol{\theta}(t|t-1)$  lze psát ve tvaru

$$\left| \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{d}(t|t-1) \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \dots 0 \\ \mathbf{L}^T(t|t-1)\mathbf{z}(t) & \mathbf{L}^T(t|t-1) \end{array} \right] \right|. \quad (9.79)$$

Převěďme nyní tuto matici vhodnou ortogonální transformací zpět na horní trojúhelníkovou matici. Lze použít například algoritmus dyádové redukce, uvedený v odstavci 6.4.3, pro  $i = 1, j = n+1, \dots, 2$ , čímž budeme postupně pomocí prvního řádku matice nulovat zdola nahoru prvky prvního sloupce matice a generovat zprava doleva nenulové prvky v prvním řádku matice podle schématu

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & x & \dots & x & x \\ x & 0 & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & & & \ddots & & \\ x & & & & 1 & x \\ x & & & & & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ x & 1 & x & \dots & x & x \\ x & & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & & & \ddots & & \\ x & & & & 1 & x \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 1 & x & \dots & x & x \\ 0 & & 1 & \dots & x & x \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & x \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right].$$

Výslednou faktorizovanou sdruženou kovarianční matici rozdělíme na bloky odpovídající výstupu a parametrům. Podle výsledků odstavce 6.4.2 bude mít tato matice strukturu

$$\left| \left[ \begin{array}{c} d_y \\ \mathbf{d}(t|t) \end{array} \right]; \left[ \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{k}^T(t) \\ 0 & \mathbf{L}^T(t|t) \end{array} \right] \right|, \quad (9.80)$$

takže v prvním řádku dostaneme přímo hodnotu Kalmanova zesílení  $\mathbf{k}(t)$ , ve vektoru  $\mathbf{d}$  hodnotu rozptylu výstupu

$$d_y = 1 + \zeta(t|t-1) \quad (9.81)$$

a ve zbylých řádcích aktualizovanou kovarianční matici

$$\mathbf{P}(t|t) = \mathbf{L}(t|t)\mathbf{D}(t|t)\mathbf{L}^T(t|t) = \left| \mathbf{d}(t|t); \mathbf{L}^T(t|t) \right|. \quad (9.82)$$

K provedení datového kroku algoritmu tedy po triangularizaci matice (9.79) zbývá určit aktualizovanou střední hodnotu parametrů

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t-1) + \mathbf{k}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t|t-1), \quad (9.83)$$

počet stupňů volnosti

$$\nu(t|t) = \nu(t|t-1) + 1 \quad (9.84)$$



a reziduální součet čtverců

$$\nu(t|t)s^2(t|t) = \nu(t|t-1)s^2(t|t-1) + \frac{\varepsilon^2(t|t-1)}{d_y}. \quad (9.85)$$

Efektivní numerická implementace datového kroku algoritmu tedy spočívá v sestavení matice (9.79), jejím převedení posloupností dyadických redukcí na tvar (9.80) a ve vyčíslení aktualizovaných statistik (9.83), (9.84) a (9.85). V (9.85) provádíme dělení veličinou  $d_y \geq 1$ , takže je-li dobře ošetřen algoritmus dyadické redukce, je výsledný algoritmus dostatečně robustní i pro „on line“ použití v reálném čase.

V případě konstantních parametrů je časový krok algoritmu triviální, neboť

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t),$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1|t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t),$$

$$\nu(t+1|t) = \nu(t|t)$$

a

$$\nu(t+1|t)s^2(t+1|t) = \nu(t|t)s^2(t|t).$$

V případě časově proměnných parametrů je časový krok definován použitou metodou zapomínání. Všimneme si několika metod.

### Exponenciální zapomínání

V případě exponenciálního zapomínání je časový krok algoritmu popsán vztahy (9.55)–(9.58). Potřebnou modifikaci kovarianční matice chyby odhadu

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \frac{1}{\varphi} \mathbf{P}(t|t)$$

dosáhneme ve faktorizovaném tvaru změnou diagonály rozkladu

$$\mathbf{d}(t+1|t) = \frac{1}{\varphi} \mathbf{d}(t|t), \quad (9.86)$$

ostatní vztahy se nemění.

### Lineární zapomínání

V případě lineárního zapomínání je vývoj kovarianční matice chyby odhadu popsán vztahem (9.51)

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t) + \mathbf{V}(t).$$

Předpokládejme, že i kovarianční matice driftu parametrů je dána ve faktorizovaném tvaru jako

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{L}_v(t) \mathbf{D}_v(t) \mathbf{L}_v^T(t) = \left| \mathbf{d}_v(t); \mathbf{L}_v^T(t) \right|.$$

Korekci kovarianční matice pak lze zapsat ve faktorizovaném tvaru jako

$$\left| \mathbf{d}(t+1|t); \mathbf{L}^T(t+1|t) \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}(t|t) \\ \mathbf{d}_v(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T(t|t) \\ \mathbf{L}_v^T(t) \end{bmatrix} \right|. \quad (9.87)$$

Vlastní realizace zapomínání znamená obnovit vhodnou ortogonální transformací trojúhelníkový tvar faktoru  $\mathbf{L}(t+1|t)$ . Lineární zapomínání tedy vyžaduje v časovém kroku transformaci  $n$  řádků matice  $\mathbf{L}_v(t)$ , což je výpočetně poměrně náročná operace.

### Omezené zapomínání

Časový krok algoritmu se při omezeném exponenciálním zapomínání liší v aktualizaci kovarianční matice chyby odhadu, kde z (9.73) plyne

$$\mathbf{P}(t+1|t) = \mathbf{P}(t|t) + \frac{(1-\varphi)d_y}{\varphi(d_y-1)} \mathbf{k}(t)\mathbf{k}^T(t).$$

Tento vztah lze ve faktorizovaném tvaru psát jako

$$\left| \mathbf{d}(t+1|t); \mathbf{L}^T(t+1|t) \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}(t|t) \\ \frac{(1-\varphi)d_y}{\varphi(d_y-1)} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T(t|t) \\ \mathbf{k}^T(t) \end{bmatrix} \right|. \quad (9.88)$$

Zapomínání tedy realizujeme transformací matice ve výrazu na pravé straně této rovnice na horní trojúhelníkovou matici. V případě omezeného lineárního zapomínání je postup obdobný, pouze váha posledního řádku se změní na

$$\left| \mathbf{d}(t+1|t); \mathbf{L}^T(t+1|t) \right| = \left| \begin{bmatrix} \mathbf{d}(t|t) \\ \frac{\zeta_\nu(t)d_y^2}{(d_y-1)^2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T(t|t) \\ \mathbf{k}^T(t) \end{bmatrix} \right|. \quad (9.89)$$

Omezené zapomínání je tedy výhodné nejen z hlediska bezpečnosti algoritmu, ale - zvláště v případě lineárního zapomínání - i jeho rychlosti.

### 9.2.6 Konvergence metody nejmenších čtverců a návrh identifikačního experimentu

V tomto odstavci ukážeme, jakým způsobem lze přistupovat k řešení otázky konvergence metody nejmenších čtverců. Uvidíme, že podmínka konvergence souvisí s vlastními čísly matice  $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ . Tato vlastní čísla jsou tedy důležitým indikátorem správnosti navrženého identifikačního experimentu.

V tomto odstavci budeme předpokládat, že použitá data jsou deterministická a byla vygenerována na základě „správné“ hodnoty parametrů  $\boldsymbol{\theta}^*$  jako

$$y(t) = \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta}^*. \quad (9.90)$$

Pro odhad hodnoty parametru platí (9.39)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)}{1+\zeta(t)}\varepsilon(t|t-1),$$

kde

$$\varepsilon(t|t-1) = y(t) - \mathbf{z}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1),$$

$$\zeta(t) = \mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)$$

a

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \zeta(t)}.$$

Pro chybu odhadu

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

dostaneme podle rovnice pro vývoj odhadu parametrů

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)}{1 + \zeta(t)}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\ &= \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)}{1 + \zeta(t)} \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1). \end{aligned}$$

Výraz v závorce můžeme psát jako

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)}{1 + \zeta(t)} &= \left( \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \zeta(t)} \right) \mathbf{P}^{-1}(t-1) \\ &= \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{-1}(t-1) \end{aligned}$$

a pomocí této úpravy dostaneme

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1). \quad (9.91)$$

Uvažujme nyní Ljapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy

$$\mathbf{V}(t) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t), \quad (9.92)$$

kde  $\mathbf{P}(t)$  a tedy i  $\mathbf{P}^{-1}(t)$  je pozitivně definitní matice. Bude-li tato Ljapunovova funkce nerostoucí, bude chyba odhadu Ljapunovsky stabilní. Počítejme proto její přírůstek v každém kroku identifikace. Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(t-1) &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t) \left( \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \right) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1)\mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\ &= \left( \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \right)^T \mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1). \end{aligned}$$

Nyní s použitím (9.91) dostaneme

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) = \left( \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^{-1}(t-1) - \mathbf{I} \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1)$$

a po dosazení a transponování, které pro symetrické matice není třeba značit, ale mění

pořadí jejich násobení

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(t-1) &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1) \left( \mathbf{P}^{-1}(t-1)\mathbf{P}(t) - \mathbf{I} \right) \mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1) \left( \mathbf{P}^{-1}(t-1) \left( \mathbf{P}(t-1) - \frac{\mathbf{P}(t-1)\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)\mathbf{P}(t-1)}{1 + \zeta(t)} \right) - \mathbf{I} \right) \\
 &\quad \mathbf{P}^{-1}(t-1)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1) \\
 &= -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1) \frac{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)}{1 + \zeta(t)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t-1).
 \end{aligned}$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že Ljapunovova funkce

$$\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(t-1) \leq 0,$$

tj. je nerostoucí. Z hlediska Ljapunovské teorie stability je tedy chyba odhadu Ljapunovsky stabilní, a tedy omezená. Dále víme, že platí

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t-1) + \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t).$$

Proto také pro nejmenší vlastní číslo matice přesnosti platí

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}(t)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}(t-1)).$$

Aby chyba odhadu konvergovala k nule, stačí, aby platilo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \left( \sum_{\tau=1}^t \mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(\tau) \right) = \infty. \quad (9.93)$$

Je-li totiž funkce

$$\mathbf{V}(t) = \left\| \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \right\|_{\mathbf{P}^{-1}(t)}^2$$

omezená, pak pro nejmenší vlastní číslo  $\lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}(t))$  platí

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \right\|_{\mathbf{P}^{-1}(t)}^2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}(t)) \left\| \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \right\|^2,$$

a tedy z (9.93) plyne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = 0. \quad (9.94)$$

Podmínce (9.93) říkáme podmínka **dostatečného vybuzení** systému (sufficient excitation condition). Zároveň tato úvaha ukazuje, že vlastní čísla matice  $\sum_{\tau=1}^t \mathbf{z}(\tau)\mathbf{z}^T(\tau)$  jsou důležitým indikátorem, zda zvolená data byla vhodná k vybuzení systému z hlediska identifikace.

V případě sledování časově proměnných dat, kdy kovarianční matice je nejen „stlačována“ daty, ale také „expandována“ zapomínáním, je nutné zajistit k zajištění omezené chyby odhadu dostatečné vybuzení systému ve všech časových intervalech. Odpovídající podmínka

existence intervalu  $T_p$  takového, že existují čísla  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  taková, že

$$\alpha_1 \mathbf{I} > \sum_{\tau=t}^{t+T_p} \mathbf{z}(\tau) \mathbf{z}^T(\tau) > \alpha_2 \mathbf{I}, \quad (9.95)$$

se nazývá podmínka **trvalého vybuzení** systému (persistent excitation condition). Tato podmínka implikuje platnost podmínky dostatečného vybuzení. Jestliže platí podmínka trvalého vybuzení (9.95) pro konstantní parametry, lze ukázat, že chyba odhadu konverguje k nule rychlostí  $1/t$  (Goodwin a Sin, 1984).

# Literatura

- Aasnaes, H. B. a T. Kailath (1973). An Innovation Approach to Least-Square Estimation - Part VII. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-18**, No. 6, pp. 601 - 607.
- Akaike, H. (1981). Modern development of statistical methods. In P. Eykhoff (Ed.), *Trends and Progress in System Identification*. Pergamon Press, Oxford.
- Anderson, B. D. O. a J. B. Moore (1979). Optimal Filtering. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Anderson, B. D. O. a J. B. Moore (1990). Optimal Control - Linear Quadratic Methods. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Åström, K. J.(1970). Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, New York.
- Åström, K.J. a P. Eykhoff (1971). System identification - survey. *Automatica* **7**, pp. 123 - 162.
- Bertsekas, D. P. (1987). Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice Hall.
- Bitmead, R. R., M. R. Gevers, I. R. Petersen a R. J. Kaye (1985). Monotonicity and stabilizability properties of solutions of Riccati equation: Propositions, lemmas, theorems, fallacious conjectures and counterexamples. *Systems & Control Letters*, **5**, pp. 309 - 315.
- Bittanti, S., P. Bolzern a M. Campi (1990). Convergence and Exponential Convergence of Identification Algorithms with Directional Forgetting Factor. *Automatica* **26**, No. 5, pp. 929 - 932.
- Box, G. E. P. a Tiao, G. C. (1973). Bayesian Inference in Statistical Analysis. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Bryson, A. E. a Ho, Y. C. (1975). Applied Optimal Control. Hemisfere, New York.
- Chan, S. W., G. C. Goodwin a K. S. Sin (1984). Convergence Properties of the Riccati Difference Equation in Optimal Filtering of Nonstabilizable Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-29**, No. 2, pp. 110 - 118.
- de Finetti, B. (1974). Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment. J. Wiley, New York.

- Desoer C.A., R.W.Liu, J.Murray and R.Saeks (1980). Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-25**, pp.399-412.
- Doyle J., C., Stein G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26**, No.1, pp.4-16.
- Feldbaum, A. A.: Dual Control Theory I-IV (1960, 1961). *Autom. and Rem. Control* **21**, **22**.
- Fortescue, T. R., L. S. Kershenbaum a B. E. Ydstie (1981). Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors. *Automatica* **17**, No. 6, pp. 831 - 835.
- Francis, B. A., Wonham, W. M. (1976). The Internal Model Principle of Control Theory. *Automatica* **12**, pp. 457-465.
- Goodwin, G. C. a K. S. Sin (1984). Adaptive filtering, prediction and control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Goodwin, G. C. (1985). Some Observations on Robust Estimation and Control. 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York.
- Havlena, V. (1993a). Simultaneous state estimation and parameter tracking in a linear system. *Automatica* **29**, No. 4, pp. 1041-1052.
- Havlena, V. (1993b). Simultaneous state estimation and parameter tracking in linear multi-input multi-output ARMAX systems. Proceedings of IFAC World Congress, Vol. 9, pp. 11-14, Sydney, 1993.
- Horowitz I.,M. (1963). Synthesis of Feedback Systems. Academic Press. New York.
- Kailath T. (1980). Linear Systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Kárný, J. et al.: Design of LQ adaptive control: theory and algorithms for practice (1985). Supplement to *Kybernetika* **21**, No. 3-6.
- Kárný, M. a A. Halousková (1992). User supplied information in the design of LQG self-tuning controllers. ACASP'92 Symposium, Grenoble.
- Kučera V. (1974a). Algebraic Theory of discrete optimal control for multivariable systems, *Kybernetika*, Supplements to Vols. 10-12, pp.1-240.
- Kučera V. (1974b). Closed-loop stability of discrete linear single-variable systems. *Kybernetika*, 10, pp.146-171.
- Kučera V. (1979). Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. Wiley, Chichester.
- Kučera V. (1991). Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems. Prentice Hall, London.
- Kučera V. (1993). Diophantine Equations in Control - A Survey. *Automatica*, Nov., pp.1-33.

- Kulhavý, R. (1986). Directional Tracking of Regression Type Model Parameters. 2nd IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Lund.
- Kulhavý, R. (1987). Restricted Exponential Forgetting in Real Time Identification. *Automatica* **23**, pp. 589 - 600.
- Kulhavý, R. a E. Kliokys (1989). Tracking of time-varying parameters in Delta models. *Problems of Control and Information Theory* **18**, No. 2, pp. 107 - 123.
- Lewis, F. L. (1986a). Optimal Control. John Wiley & Sons., New York 1986.
- Lewis, F. L. (1986b). Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory. John Wiley & Sons., New York 1986.
- Ljung L. (1987). System Identification: Theory for the User. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1987.
- Pappas, Laub a Sandell (1980). On the numerical solution of the discrete time Riccati equation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-25**, No. 4.
- Papoulis, A. (1965). Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw Hill, New York.
- Peterka, V. (1981a). Bayesian Approach to System Identification. In P. Eykhoff (Ed.), *Trends and Progress in System Identification*. Pergamon Press, Oxford.
- Peterka, V. (1981b). Real-time parameter estimation and output prediction for ARMA-type system models. *Kybernetika* **17**, No. 6.
- Peterka, V. (1986). Control of Uncertain Processes: Applied Theory and Algorithms. Supplement to *Kybernetika* **22**, No. 3 - 6.
- Poubelle, M. A., R. R. Bitmead a M. R. Gevers (1988). Fake Algebraic Riccati Techniques and Stability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-33**, No. 4, pp. 379 - 381.
- Savage, L.J. (1954). The Foundations of Statistics. John Wiley&Sons, New York.
- Štecha J. (1990). Číslíkové automatické řízení. Postgraduální studium. Skriptum ČVUT, FEL, Praha.
- Štecha, J. a Havlena V. (1993). Teorie dynamických systémů. Skriptum FEL ČVUT, Vydavatelství ČVUT, Praha 1993.
- Vidiasagar M. (1985). Control System Synthesis. A Factorization Approach. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.