SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKEJ A POTRAVINÁRSKEJ TECHNOLÓGIE
ÚSTAV INFORMATIZÁCIE, AUTOMATIZÁCIE A MATEMATIKY

Teória automatického riadenia

Bratislava, 2014

Ing. Ján Drgoňa

Obsah

1 Teória **3**

1.1 Dynamické systémy . . . 3

1.1.1 Klasifikacia dynamických systémov . . . 3

1.1.2 Reprezentácia a charakteristiky dynamických systémov . . . 4

1.1.3 Vlastnosti dynamických systémov . . . 6

1.2 Vybrané pojmy z matematiky . . . 7

1.2.1 Lineárna algebra . . . 7

1.2.2 Normy . . . 7

1.2.3 Štandardný optimalizačný problém . . . 8

1.2.4 Riccatiho rovnica . . . 8

1.3 Vybrané pojmy z Teórie riadenia . . . 8

1.3.1 Robustné riadenie . . . 8

1.3.2 Optimálne riadenie . . . 9

1.4 $\mathcal{H}_\infty$ riadenie . . . 9

1.4.1 Základné aspekty $\mathcal{H}_\infty$ riadenia . . . 9

1.4.2 Optimálny $\mathcal{H}_\infty$ regulátor . . . 10

1.4.3 $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping . . . 11

1.4.4 Návrh $\mathcal{H}_\infty$ regulátora pomocou metódy zmiešanej citlivosti . . . 11

1.4.5 Výhody, nevýhody a použitie $\mathcal{H}_\infty$ riadenia . . . 13

2 Príklad a syntéza $\mathcal{H}_\infty$ regulátora **14**

2.1 Proces a jeho matematický model . . . 14

2.1.1 Chemický prietokový reaktor . . . 14

2.1.2 Matematický model reaktora . . . 15

2.1.3 Ustálený stav reaktora . . . 15

2.1.4 Parametre reaktora a neurčitosť modelu . . . 15

2.1.5 Nominálny, maximálny a minimálny prenos procesu . . . 15

2.2 Návrh $\mathcal{H}_\infty$ regulátora pomocou metódy zmiešanej citlivosti . . . 17

2.2.1 Demonštrácia robustných vlastností $\mathcal{H}_\infty$ regulátora . . . 20

3 Záver **27**

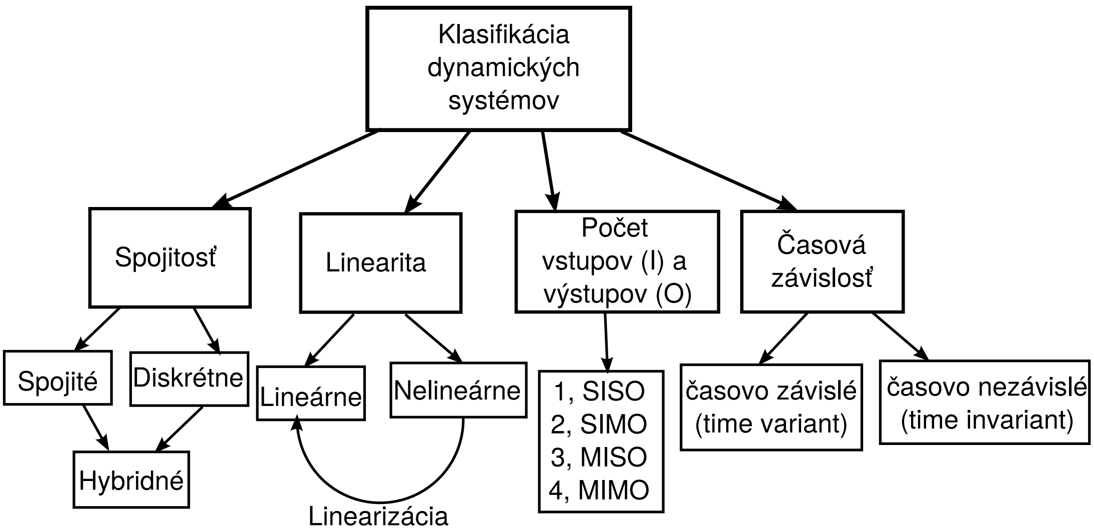
Literatúra **28**

Kapitola 1

Teória

1.1 Dynamické systémy

1.1.1 Klasifikacia dynamických systémov



Obr. 1.1: Klasifikácia dynamických systémov

SISO (Single Input, Single Output)

Ide o najjednoduší typ systému s jedným vstupom a jedným výstupom. Jednoduchosť týchto systémov umožňuje pri návrhu riadenia využitie techník frekvenčnej analýzy, ako Bodeho diagram, Nyquistove kritérium stability a pod., kde regulátor môže byť navrhnutý pomocou polynomiálnych vyjadrení ktoré sú vo všeobecnosti veľmi ľahko riešiteľné.

MIMO (Multiple Inputs, Multiple Outputs)

Sú systémy s viacerými vstupmi a viacerými výstupmi, s možnosťou vzájomnej interakcie, čo sa v anglickej literatúre nazýva ako cross-coupling efekt. Takéto systémy majú vo všeobecnosti komplexný charakter čo zásadne zvyšuje náročnosť syntézy riadenia pre dané systémy, vďaka nemožnosti využiť polynomiálny prístup návrhu regulátorov a je nutné použiť matematicky náročnejšie zovšeobecnenia metód návrhu regulátorov pre SISO systémy.

Lineárne časovo invariantné systémy (eng. LTI systems)

Lineárne systémy sú také, pre ktoré platí princíp superpozície. Koncept Lineárnych systémov je v literatúre hlboko rozpracovaný, spomenieme len [10, 4, 5].

1.1.2 Reprezentácia a charakteristiky dynamických systémov

Prenosová funkcia systému

Je matematická reprezentácia vstupno výstupného (I/O) modelu systému, tj vzt'ahov medzi vstupmi do systému a výstupmi zo systému pri meniacich sa priestorových a časových frekvenciách pre LTI systémy s nulovými počiatočnými podmienkami. Prenos systému $G(s)$ je definovaný ako pomer laplaceových obrazov výstupvnej $y(t)$ a vstupnej veličiny $u(t)$ pri nulových počiatočných podmienkach.

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \tag{1.1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \tag{1.2}$$

Frekvenčná prenosová funkcia systému

$G(jw)$ je fourierova transformácia zodpovedajúca prenosovej funkcii systému $G(s)$, získaná jednoduchou výmenou komplexnej premennej s za komplexnú premennú jw

$$G(jw) = \frac{Y(jw)}{U(jw)} \tag{1.3}$$

$$G(jw) = G(s)_{s=jw} \tag{1.4}$$

Frekvenčný prenos je komplexná veličina priradená reálnej premennej w, ktorá charakterizuje vynútené kmitanie systému na výstupe $y(t)$ v závislosti od vstupu do systému $u(t)$, pri frekvencii w. Pre LTI systémy a harmonické signály s rovnakou frekvenciou na vstupe aj výstupe môžeme vstupné a výstupné funkcie vyjadrit' v komplexnom tvare.

$$U(jw) = A_1 e^{j(wt+\phi_1)} \tag{1.5}$$

$$Y(jw) = A_2 e^{j(wt+\phi_2)} \tag{1.6}$$

Potom nôžeme Frekvenčný prenos $G(jw)$ vyjadrit' ako pomer rovníc 1.5 a 1.6.

$$G(jw) = \frac{A_2}{A_1} e^{j(\phi_2-\phi_1)} \tag{1.7}$$

Kde zosilnenie systému je reprezentované absolútnou hodnotou frekvenčného prenosu 1.8 určenou pomerom amplitúd výstupného a vstupného signálu. Fázový posun medzi vstupným a výstupným signálom je potom reprezentovaný agumentom frekvenčného prenosu 1.9.

$$A(w) = |G(jw)| \tag{1.8}$$

$$\phi(w) = \phi_2 - \phi_1 \tag{1.9}$$

Daný prenos potom môžemem vyjadrit' v tvare 1.10.

$$G(jw) = A(w) e^{j\phi(w)} \tag{1.10}$$

Frekvenčné charakteristiky dynamických systémov

$$G(jw) = Re[G(jw)] + jIm[G(jw)] \tag{1.11}$$

Zobrazenie frekvenčného prenosu 1.10 v komplexnej Gaussovej rovine pozostávajúci z reálnej a imaginárnej zložky prenosu, alebo tiež Nyquistov diagram 1.12 reprezentuje dve závislosti:

- amplitúdovú frekvenčnú charakteristiku $A = A(w)$
- fázovú frekvenčnú charakteristiku $\phi = \phi(w)$.

Ktoré charakterizujú nasledovné vzťahy

$$|G(jw)| = \sqrt{(Re[G(jw)])^2 + (Im[G(jw)])^2} \tag{1.12}$$

$$\phi = arctg\frac{Im[G(jw)]}{Re[G(jw)]} \tag{1.13}$$

Samostatné zobrazenia týchto závislostí na logaritmickej osi sa nazýva logaritmické frekvenčné charakteristiky, alebo tiež Bodeho diagram. Frekvenčná analýza s oboma typmi frekvenčných charakteristík sa dajá pohodlne realizovať pomocou softvérového balíka MATLAB príslušnými príkazmi $bode(sys)$ [15] a $nyquist(sys)$ [16], kde premenná sys reprezentuje model analyzovaného systému. O frekvenčných charakteristikých a frekvenčnej analýze hlbšie pojednávajú napríklad tieto publikácie [10, 5, 2, 1]

Vybrané pojmy z frekvenčnej analýzy

- **Šírka frekvenčného pásma systému** (eng. system bandwidth)

  Je rozdiel medzi hornou a dolnou hranicou frekvenčnej odozvy systému. Fyzikálna reprezentácie je zjednodušene definovaná ako šírka frekvenčného intervalu pre ktoré vstupné sínusoidové signály budú na výstupe nadobúdať približne rovnaké hodnoty zosilnenia a fázového posunu bez významých odchýliek. Šírka pásma je matematicky definovaná ako frekvencia pri ktorej systém utlmuje vstup o 3dB, čo zodpovedá redukcii zosilnenia výstupného signálu na $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zo zosilnenia vstupného signálu, čo približne zodpovedá 70% zosilnenia vstupného signálu $A_2 = 0.7\,A_1$. Vyčíslené zosilnenie systému $|G(jw)| = 0.7$ potom ľahko získame z rovnice 1.8.

  Šírka frekvenčného pásma systému sa využíva ako indikátor schopnosti systému sledovať referenčný signál, vo všeobecnosti platí, čím je širšia, tým je rýchlejšia odozva systému.

- **Bezpečnosť v zosilnení** (eng. gain margin)

  Indikuje ako veľmi môžeme navýšiť zosilnenie pri danej fázovej kritickej frekvencii w_p, aby bol systém stále stabilný. Vyčísluje sa nasledovne v dB 1.14.

  $$G_M = -20log|G(jw_p)| \tag{1.14}$$

  Vo všeobecnosti je systém stabilný ak $G_M > 0$.

- **Bezpečnosť vo fáze** (eng. phase margin)

  Indikuje koľko prídavného posunutia vo fáze pri danej kritickej frekvencií v zosilnení w_g systém znesie pred tým než sa stane nestabilným. Vyčísľuje sa nasledovne 1.15.

  $$\phi_M = 180° - \phi(w_g) \tag{1.15}$$

  Vo všeobecnosti je systém stabilný ak $\phi_M > 0$.

- **Kritické frekvencie** (eng. crossover frequencies)

  Fázová kritická frekvencia (eng. phase crossover frequency) w_p určuje zosilnenie systému pre fázový posun $\phi = -180°$. Čo reprezentuje systém s práve opačnou odozvou na vstupný signál.

  Majme príklad abstraktného modelu auta, kde vstupný signál je otočenie volantom doprava alebo doľava v závislosti od požadovaného smeru jazdy, a výstup reprezentujúci skutočný smer jazdy. V našom príklade pri fázovom posune $\phi = -180°$ bude mať skutočný smer jazdy práve opačný smer k smeru otočenia volantu, čiže otočenie volantu smerom doľava spôsobí zabočenie auta doprava a naopak.

  Kritická frekvencia zosilnenia (eng. gain crossover frequency) w_g je frekvencia pri ktorej je zosilnenie systému rovné 0dB, čo znamená že výstupná s vstupná amplitúda sú identické.

- **Rezonančné zosilnenie** (eng. peak resonance)

  $$|G(jw)|_{max} = max(\sqrt{(Re[G(jw)])^2 + (Im[G(jw)])^2}) \tag{1.16}$$

  Je hodnota maximálneho zosilnenia systému na celom frekvenčnom spektre.

- **Rezonančná frekvencia** (eng. resonance frequency)

  Je frekvencia výskytu rezonančného zosilnenia.

1.1.3 Vlastnosti dynamických systémov

Stabilita

Predstavuje jeden zo základných konceptov v systémovej analýze a teórii riadenia. Predstavuje schopnosť systému po vychýlení vrátiť sa do pôvodného stavu. Naopak ak je systém nestabilný, výstup zo systému môže nadobúdať nekonečné hodnoty aj pri vstupoch s konečnou hodnotou. Definícia: Majme rovnovážny stav systému $x^e = 0$, ktorý je stabilný, ak riešenie stavovej rovnice $x(t) = [x(t_0), t]$, ktoré začína v nejakom stave $x(t_0)$ blízkom rovnoážnemu stavu $x^e = 0$, zostane blízko tomuto rovnovážnemu stavu, alebo sa k nemu bude približovať [2].

Rozlišujú viaceré typy stability, ako kritéria stability založené na analýze stavových rovníc napr. BIBO stabilita, asymptotická stabilita, marginálna stabilita, Lyapunova stabilita [5], alebo kritéria stability založené na analýze frekvenčných karakteristík ako Nyquistove kritérium stability, alebo bezpečnosť vo fáze a v zosilnení (eng. Phase margin and gain margin).

Riaditeľnosť

Hovorí o tom, či sme schopný daný systém dostať z počiatočného do ľubovoľného požadovaného stavu len vhodnou manipuláciou hodnôt dostupných vstupov do systému v konečnom časovom horizonte [5].

Stabilizovateľnosť

Systém je stabilizovateľný, pokiaľ všetky neriadené stavy majú stabilnú dynamiku. Takže aj keď niektoré stavy nemajú vlastnosť riaditeľnosti, správanie všetkých stavov zostane ohraničené.

Pozorovateľnosť

Hovorí, o tom ako dobre sme schopný extrahovať informácie o vnútorných stavoch systému len na základe informácií o výstupoch systému [5].

Robustnosť

Je v teórii riadenia miera schopnosti systému odolávať zmenám bez nutnosti zmeny konfigurácie stabilných počiatočných podmienok. V zásade nám hovorí o schopnosti systému pracovať aj napriek vplyvu bežne sa vyskytujúcicm nepredvídaným poruchám a chybám a tým pádom odolávať a predchádzať havarijným stavom. Robustnosť je akýmsi indikátorom spoľahlivosti systému.

Odľahčujúci praktický príklad: Motory Ruskej techniky z obdobia 2. sv. vojny spomenieme napríklad tanky T-34, sú vo všeobecnosti považované za robustné vďaka schopnosti fungovať aj v nepriaznivých podmienkach, alebo s použitím menej kvalitného paliva [26].

Neurčitosť modelu

Je miera nepresnosti vybraných parametrov modelu dynamického systému, ktoré sú namiesto konkrétnych singulárnych hodnôt zadané v intervalovej podobe s maximálnou a minimálnou možnou hodnotou. Neurčitosť modelu je dôležitým aspektom pri modelovaní a riadení reálnych systémov, pri ktorých hodnoty niektorých parametrov buď nedokážeme merať vôbec alebo len s obmedzenou presnosťou. Podrobnejším opis konceptu robustnosti a modelovania neurčitostí modelu sa rozoberá napríklad v publikáciách [9, 8, 4].

Nominálna stabilita a nominálne správanie systému

Hovoria o tom že systém je stabilný a zabezpečuje požadované vlastnosti správania pri nulových neurčitostiach modelu.

Robustná stabilita a robustné správanie systému

Hovoria o tom že systém je stabilný a zabezpečuje požadované vlastnosti správania pri zahrnutí všetkých možných hodnotôt neurčitostí modelu a ich vzájomných kombinácií až po najhorší možný variant (eng. worst case model uncertainty).

1.2 Vybrané pojmy z matematiky

1.2.1 Lineárna algebra

Hilbertov priestor $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ priestor, alebo tiež Hilbertov priestor je matematickým zovšeobecnením metód lineárnej algebry a kalkulu z dvoj a troj dimenzionálneho Euklidovho priestoru na priestory s ľubovoľnou konečnou alebo nekonečnou dimenziou. Je to abstraktný vektorový priestor maticovo hodnotových funkcií, ktoré sú analytické a ohraničené v otvorenej pravej polovici komplexnej roviny, definované ako Re(s) > 0. Pomocou Hilbertovho priestoru sme chopný vyjadrovať vzdialenosti a uhly vektorov aj vo vyšších dimenziách, ktoré sú nevyhnutné pri návrhu a riešení problémov riadenia. Viac o Hilbertových priestoroch sa čitateľ môže dozvedieť napríklad z publikácií [7, 8]

Hodnosť matice

Je číslo predstavujúce maximálny počet lineárne nezávislých riadkov alebo stĺpcov matice. Reprezentuje 'nedegeneratívnost'' systému lineárnych rovníc a lineárnych transformácií zapísaných pomocou matice A. Všeobecný zápis hlavne v anglickej literatúre je $rank(A)$.

Faktorizácia, alebo dekompozícia Matíc

Je matematická operácia rozkladajúca pôvodnú maticu na produkt matíc. Poznáme rôzne typy maticových dekompozícií, každá so špecifickým využitím pre konkrétne typy problémov.

1.2.2 Normy

Norma je konvexná funkcia ktorá priraďuje kladné hodnoty dĺžok všetkýn nenulovým vektorom. Tieto funkcie sa využívajú na vyjadrenie vzdialeností medzi objektami vo vektorom priestore. všeobecná formuácia: p-norma vektoru $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$, alebo skrátene $\|x\|_p$, môže byť zadaná ako

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x|^p \right)^{1/p} \tag{1.17}$$

s nasledujúcimi vlastnosťami

- $\|x\|_p > 0$,
- $\|x\|_p = 0$, vtedy a len vtedy $x = 0$,
- $\|cx\|_p = |c|\|x\|_p$, pre každé $c \in \mathbb{R}$,
- $\|x_1 + x_2\|_p = \|x_1\|_p + \|x_2\|_p$.

Jedna (Manhattan) Norma

1-norma alebo Manhattan norma je definovaná ako suma absolútnych hodnôt všetkých elementov x_i vektora x

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|. \tag{1.18}$$

Dva (Euklidovská) Norma

Dva norma alebo euklidovská norma môže byť interpretovaná ako najkratšia vzdialenosť bodu od počiatku definovaná nasledovne

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \tag{1.19}$$

Nekonečno Norma

Nekonečno norma je definovaná ako maximálna hodnota všetkých elementov x_i vektora x

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \tag{1.20}$$

1.2.3 Štandardný optimalizačný problém

Štandardný matematický optimalizačný problém je definovaný ako problém nájdenia najlepšieho riešenia spomedzi množiny všetkých možných riešení a môže byť zadaný nasledovne 1.21

$$J^* = \min_x f_0(x) \tag{1.21a}$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m \tag{1.21b}$$
$$h_i(x) = 0, \qquad i = 1, \dots, p \tag{1.21c}$$

Prvá časť (1.21a) sa nazýva účelová funkcia s doménou $f_0 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, ktorá priradzuje každej optimalizovanej premennej $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ konkrétnu hodnotu $f_0(x)$ a ktorej výsledná hodnota sa má pri riešení optimalizačného problému minimalizovať.

Ohraničenia pre optimalizované premenné, povoľujúce len určitú množinu hodnôt optimalizovaných premenných pre ktoré je daný oprimalizačný problém riešiteľný sú reprezentované rovicami (1.21b) pre ohraničenia v tvare nerovnosti a (1.21c) pre ohraničenia v tvare rovnosti.

1.2.4 Riccatiho rovnica

Je typ algebraickej nelineárnej rovnice, ktorá vyplýva z problému optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte v spojitom aj diskrétnom čase. Pri probléme optimálneho riadenia chceme nájsť také optimálne hodnoty akčných zásahov, ktoré zabezpečia optimálne správanie riadenej veličiny v budúcnosti. Optimálne hodnoty aktuálnych akčných zásahov v ľubovoľnom čase môžu byť nájdené s využitím riešenia Riccatiho rovnice a aktuálneho meraného stavu vyvýjajúceho sa v čase. Dva fundamentálne problémy optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte, ktorých riešenie je určené Riccatiho rovnicou sú Lineárny kvadratický regulátor (eng. Linear Quadratic Rregulator) a Lineárny kvadratický gaussov regulátor (eng Linear Quadratic Gaussian) opísaných v kapitole 1.3.2.

Pri MIMO systémoch nadobúda Riccatiho rovnica maticový tvar. Všeobecný zápis spojitej Riccatiho rovnice má nasledovný tvar 1.22, kde X je neznáma symetrická matica o rozmeroch $n * n$ a A, B, Q, R sú reálne matice koeficientov problému.

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0 \tag{1.22}$$

Riešenie algebraických Riccatiho rovních môžeme získať pomocou maticovej faktorizácie alebo itreračným spôsobom. Hlbšie preniknutie do problematiky významu a riešenie Riccatiho rovníc pre potreby optimálneho a robustného riadenia ponúkajú publikácie [7, 8, 4].

1.3 Vybrané pojmy z Teórie riadenia

1.3.1 Robustné riadenie

Ide o kategóriu teórie riadenia, ktorá sa zaoberá vplyvom vnútornýmch neurčitostí ako aj vplyvom vonkajších porúch na riadené procesy, a riešením problémov návrhu riadenia pre takéto systémy s neurčitosťami. Robustné riadiace systémy sú navrhované s cieľom dlhodobej a stabilnej robustnej funkčnosti aj napriek výskytu neurčitých parametrov alebo porúch ktorých hodnoty sú uvažované v určitej množine ohraničených hodnôt. Metódy robustného riadenia teda vyhodnocujú všetky možné scenáre a z nich vyberajú priemerný, najlepší a najhorší možný scenár [20]. Hlavným cieľom robustného riadenia je potom predchádzanie najhoršiemu možnému scenáru, na rodziel od optimálneho riadenia, ktoré sa snaží o dosiahnutie najlepšieho možného scenáru. Vybraná literatúra k téme robustného riadenia [4, 7, 8, 9, 11].

1.3.2 Optimálne riadenie

Optimálne riadenie rieši problém nájdenia takého zákonu riadenia pre daný systém, aby boli splnené určité podmienky optimality. Problém riadenia zahŕňa účelovú funkciu ktorá je funkciou stavov a riadiacich veličín. Potom optimálne riadenie je súbor diferenciálnych rovníc opisujúcich cesty riadiacich veličín ktoré minimalizujú tento účelový funkcionál. Problém optimálneho riadenia je potom vyjadrený ako všeobecný optimalizačný problém.

K najznámejším metódam optimálneho riadenia patria nasledovné:

- **Lineárny kvadratický regulátor - LQR**

  Je metóda optimálneho riadenia, ktorá predpokladá riadený systém v lineárnom tvare a účelovú funkciu v tvare kvadratickej funkcie. Riešenie je získané pomocou Riccatiho rovníc a výsledkom je potom optimálny lineárny stavový spätnoväzbový regulátor v tvare $u = -Kx$ [21, 8].

- **Kalmanov optimálny odhad stavu - LQE**

  Kalmanov filter spracováva merania veličín znečistenými poruchami počas určitej časovej periódy a produkuje odhady neznámych a nemeraných premenných systému. Takýto postup odhadu parametrov založený na optimálnom štatistickom vyhodnotení viacerých vzoriek merania je potom oveľa presnejší ako odhad parametru založený na jedinom meraní [23].

- **Lineárny kvadratický gaussov regulátor - LQG**

  Je rozšírenie použitia tradičného LQR na lineárne systémy s neurčitosťami v tvare bieleho Gaussovho šumu. LQG regulátor vznikne spojením Kalmanovho filtra A lineárneho kvadratického regulátora. Princíp separácie potom zabezpečí že LQR ako aj LQE zložka môžu byť navrhnuté a vypočítané separátne. Výsledkom je opäť lineárny stavový spätnoväzbový regulátor ako pre LQR. Nevýhodou oboch prístupov, LQG ako aj LQR k riadeniu sú však slabé robustné vlastnotsi daných regulátorov. Tieto nedostatky následne motivovali k rozvoju a kombinácii metód optimálneho a robustného riadenia a viedli k vzinku $\mathcal{H}_2$ a $\mathcal{H}_\infty$ metód riadenia [22, 4].

- **$\mathcal{H}_2$ a $\mathcal{H}_\infty$ riadenie**

  Ide o ekvivalentné formy návrhov opmálneho riadenia. Rozdiel je vo využití rozdielnych matematických noriem pri formulácii optimalizačného problému. Pri návrhu a výpočte $\mathcal{H}_2$ riadenia využíva euklidovská 2-norma 1.2.2, na rozdiel od $\mathcal{H}_\infty$ riadenia, ktoré využíva nekonečno normu 1.2.2.

  Nájdenie $\mathcal{H}_2$ regulátora, je v princípe jednoduchým problémom, pretože riešenie je jedinečne dané dvomi Riccatiho rovnami. Na rozdiel od $\mathcal{H}_\infty$ riadenia kde nájdenie riešenia je teoreticky aj numericky náročným problémom, preto často postačuje nájdenie suboptimálneho riešenia s určenou toleranciou. Aspekty $\mathcal{H}_\infty$ riadenia ako hlavnej témy tejto práce si priblížime v nasledujúcej samostatnej kapitole 1.4.

- **Pokročilé metódy optimálneho riadenia**

  Za všetky spomenieme metódy prediktívneho roadenia s modelom (eng. Model Predictive Control - MPC), čo je v súčasnosti veľmi populárna metóda. K hlavným aspektom prediktívneho riadenia patrí široká aplikovateľnosť na rôzne typy dynamických systémov (SISO, MIMO, spojité, diskrétne, hybridné), prirodzené zakomponovanie ohraničení do optimalizačného problému, čo spolu s predikčnými schopnosťami týchto metód vyúsťuje často do veľmi vysokej kvality výsledného riadenia.

1.4 $\mathcal{H}_\infty$ riadenie

1.4.1 Základné aspekty $\mathcal{H}_\infty$ riadenia

Metódy $\mathcal{H}_\infty$ riadenia spadajú v teórii riadenia pod kategóriu robustného riadenia ktorého cieľom je dosiahnutie stability a garantovaného správania riadenia aj pri výskyte neurčitostí a porúch.

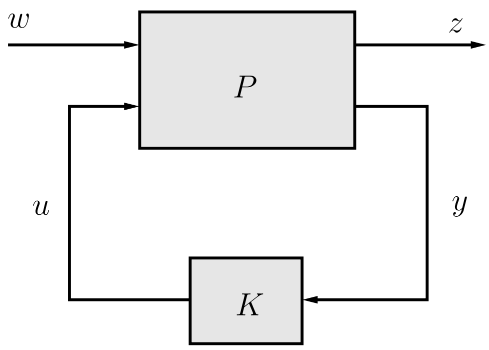
Pri použití $\mathcal{H}_\infty$ metód, sa problém riadenia zvyčajne formuluje ako optimalizačný problém, ktorého riešením je hľadaný optimálny $\mathcal{H}_\infty$ regulátor.

Fráza $\mathcal{H}_\infty$ riadenie je odvodená od názvu matematického priestoru nad ktorým je optimalizácia vykonávaná 1.2.1.

$\mathcal{H}_\infty$ norma je potom reprezentácia maximálnej singulárnej hodnota funkcie nad týmto priestorom, čo môže byt' interpretované ako maximálne zosilnenie v l'ubovol'nom smere pri l'ubovol'ej frekvencii. Pre SISO systémy táto norma efektívne vyjadruje maximálne zosilnenie frekvenčnej odozvy systému. Pri minimalizácii $\mathcal{H}_\infty$ normy v $\mathcal{H}_\infty$ riadení potom minimalizujeme efekt vplyvu premennej s vajväčším zosilnením na riadený systém, čo reprezentuje prevenciu najhoršieho možného scenáru (robustné riadenie). Na rozdiel od $\mathcal{H}_2$ riadenia, kde pomocou minimalizácie $\mathcal{H}_2$ normy minimalizujeme vplyv všetkých premenných na riadený systém, čo má fyzikálnu reprezentáciu v minimalizácií spotreby celkovej energie/nákladov systému (ekonomicky optimálne riadenie bez robustných vlastností). Detailnejšie porovnanie vlastností $\mathcal{H}_2$ a $\mathcal{H}_\infty$ noriem a riadenia sa dá nájst' napríklad v publikácii [4]

1.4.2 Optimálny $\mathcal{H}_\infty$ regulátor

Budeme uvažovat' štandardnú konfiguráciu riadenia zobrazenú na obr. (1.2), kde P je riadený proces a K je navrhovaný regulátor. Signál u je akčný zásah generovaný regulátorom, y sú výstupy z procesu, w sú ostatné vstupné signály do procesu ako napriklad žiadaná veličina alebo poruchy, z sú neriadené výstupy z procesu a x budú interné stavy procesu.



Obr. 1.2: Štandardná konfigurácia riadenia pre $\mathcal{H}_\infty$ problém.

Štandardný riadený objekt, krátko riadený objekt je modelovaný stavovými rovnicami 1.23

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

a možeme sa tiež zapísat' v tvare 1.24, z ktorého vyplýva prenosová matica riadeného objektu v tvare 1.25.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Po označení $K(s)$ ako prenosovú maticu regulátora, definujúcu vzt'ah medzi u a y 1.26. Následne vieme z prenosovej matice riadeného objektu 1.25 odvodit' vzat'h medzi výstupmi procesu z a externými vstupmi do procesu w 1.27, kde prenosová matica medzi týmito veličinami je vyjadrená v tvare 1.28, ako spodná lineárna transformácia.

$$u = K(s)y \tag{1.26}$$

$$z = f_l(P(s), K(s))w \tag{1.27}$$

$$f_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \tag{1.28}$$

Úlohou pri návrhu optimálneho $\mathcal{H}_\infty$ riadenia je nájsť taký regulátor ktorý minimalizuje nekonečno normu výrazu 1.28, vyjadrenú v tvare 1.29, kde $\bar{\sigma}$ je maximálna singulárna hodnota matice $f_l(P(s), K(jw))$.

$$\|f_l(P(s), K(s))\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(f_l(P(s), K(jw))) \tag{1.29}$$

Ako bolo ukázané v práci [3], k optimálnemu riešeniu sa vieme priblížiť aj iteratívnym spôsobom. Avšak nájdenie optimálneho $\mathcal{H}_\infty$ regulátora je často numericky aj analyticky veľmi náročné a pre praktické problémy často aj nepotrebné, pretože môže byť nahradené suboptimálnym $\mathcal{H}_\infty$ regulátorom ktorého riešenie sa dá získať jednoduchším spôsobom. Suboptimálne $\mathcal{H}_\infty$ riadenie hľadá taký regulátor, ktorý pre ľubovoľne malé reálne číslo $\gamma > 0$ uspokojuje nasledovnú nerovnicu 1.30.

$$||f_l(P(s), K(s))||_\infty \leq \gamma \tag{1.30}$$

Na to aby sme mohli nájsť vhodný regulátor $K(s)$ musí byť splnených niekoľko predpokladov [4]:

1. systém A, B_2, C_2, D_2 sa musí dať stabilizovať, a musí byť pozorovateľný
2. matice D_{12} a D_{21} musia mať plnú hodnosť
3. matice D_{11} a D_{22} sú nulové

Za daných predpokladov môžeme nájsť $\mathcal{H}_\infty$ regulátor ako riešenie dvoch Riccatiho rovníc 1.31 a 1.32. Potom možeme regulátor určiť ako je uvedené 1.33

$$A^T X + XA + C_1^T C_1 + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X = 0 \tag{1.31}$$

$$AY + YA^T + B_1 B_1^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y = 0 \tag{1.32}$$

$$K(s) = B_2^T X(sI - A)^{-1}(I - \gamma^{-2} YX)^{-1}(-YC_2Y^T) \tag{1.33}$$

1.4.3 $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping

Súčasná optimalizácia robustného správania a robustnej stabilizácie je zložitý problém. Jedna z metód ktorá uspokojivo zabezpečuje obe tieto vlastnosti sa nazýva v anglickej literatúre $\mathcal{H}_\infty$ loop shaping, ktorá je spojením aplikácie klasických loop-shaping konceptov s frekvenčnými odozvami systémov viac premenných na dosiahnutie dobrých robustných vlastností správania systému. Robustná stabilizácia je následne dosiahnutá pomocou minimalizácie citlivosti odozvy systému cez celé frekvenčné spektrum, čo zabezpečuje že sa systém nevyhcýli od požadovaných trajektórií ani v prípade výskytu poruchy vplývajúcej na systém.

Pre riešenie problémov $\mathcal{H}_\infty$ a všeobecne robustného riadenia je k dispozícii komerčný software Robust toolbox pre MATLAB [18].

1.4.4 Návrh $\mathcal{H}_\infty$ regulátora pomocou metódy zmiešanej citlivosti

Prenosy uzavretej a otvorej skučky (eng. closed and open loop transfer functions)

Prenos uzavretého regulačného obvodu (URO) môže byť definovaný vzťahom 1.34

$$URO(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)} \tag{1.34}$$

Reprezentuje vzťah medzi vstupným signálom a výstupným signálom uzavretého regulačného obvodu (URO) v štandardnom tvare.

Prenos regulačného obvodu v otvorenej slučke zas môže byť definovaný jednoduchým vzťahom 1.35

$$L(s) = P(s)K(s) \tag{1.35}$$

Funkcia citlivosti S (eng. sensitivity function)

Daná vzťahom 1.36

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \tag{1.36}$$

Opisuje tlmenie porúch v uzavretom regulačnom obvode (URO). Poruchy s takými frekvenciami, pre ktoré platí $|S(iw)| < 1$ sú tlmené a naopak pre frekvencie s $|S(iw)| > 1$ platí amplifikácia porúch v uzavretej slučke. Maximálna hodnota citlivosti S_{max} vyskytujúca sa pri frekvencii w_{Sm} je mierou maximálneho zosilnenia poruchy v URO.

Funkcia doplnkovej citlivosti T (eng. complementary sensitivity function)

Daná vzťahom 1.37

$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \tag{1.37}$$

Opisuje ako dobre je regulátor $K(s)$ schopný sledovať referenčný signál. Maximálna hodnota doplnkovej citlivosti T_{max}, vyskytujúca sa pri frekvencii w_{Tm} je mierou maximálneho zosilnenia vplyvu referenčného signálu na výstupný signál.

Vzťah medzi S a T

Pre potreby riadenia sa usilujeme o to aby hodnota funkcie citlivosti S na celom frekvenčnom spektre zostale menšia ako určená hraničná hodnota ϵ, čiže $|S(iw)| < \epsilon$, čím sa zabezpečí dobrý robustný výkon na výstupe z URO bez výrazného vplyvu šumu.

Neposledne sa usilujeme aj o to aby hodnota funkcie doplnkovej citlivosti T na celom frekvenčnom spektre, podobne ako pri funkcii citlivosti S zostala menšia ako daná hraničná ϵ, čiže $|T(iw)| < \epsilon$, čím sa zabezpečí dobrá robustná stabilita URO.

Ako už však vyplýva z názvov funkcií S citlivosť a T doplnková citlivosť, medzi týmito dvomi funkciami je veľmi úzky vzťah definovaný nasledovne.

$$S(s) + T(s) = 1 \tag{1.38}$$

$$|S(iw)| + |T(iw)| = 1 \tag{1.39}$$

Z tohoto vzaťhu je jasné že hodnoty funkcií $S(s)$ a $T(s)$ nemôžu súčasne nadobúdať malé hodnoty, čo vyvoláva konflikt v požiadavkách na zosilnenie otvoreného regulačného obovdu $L(s)$ pri návrhu riadenia.

Dobré vlastnosti sledovania referenčnej hodnoty vyžadujú vysoké hodnoty zosilnení otvoreného regulačného obovdu $L(s)$ vyplývajúcich z podmienky 1.40, odvodenej zo vzťahov 1.35, 1.36 a podmienky $|S(iw)| < \epsilon$.

$$|L(iw)| \geq \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \Rightarrow |S(iw)| < \epsilon \tag{1.40}$$

Naopak dobrá robustnosť systému je zabezpečená pre malé hodnoty zosilnení otvoreného regulačného obovdu $L(s)$ vyplývajúcich z podmienky 1.41, odvodenej zo vzťahov 1.35, 1.37 a podmienky $|T(iw)| < \epsilon$.

$$|L(iw)| \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \Rightarrow |T(iw)| < \epsilon \tag{1.41}$$

Riešenie tohoto problému vyvstáva nasledovne, nakoľko podmienka 1.39 musí byť splnená pre všetky frekvencie a hovorí že pri rovnakej frekvencii nie je možné mať nízke hodnoty oboch citlivostných funkcií $S(s)$ a $T(s)$. To však nevylučuje možnosť, že obe môžu byť dostatočne malé pri rôznych frekvenciách. Našastie pre praktickú riešiteľnosť vo väčsine prípadov sa požiadavky na nízke hodnoty citlivost a doplnkovej citlivosti neprekrývajú vo frekvenčných spektrách, z čoho vyplývajú nasledovné závery:

Na zabezpečenie dobrého sledovania referencie nám postačujú nízke hodnoty funkcie citlivosti $S(s)$ v nižších frekvenčných spektrách vďaka vlastnostiam referenčných signálov, ktoré vo všeobecnosti pozostávajú prevažne z nižších frekvencií.

Naopak na zabezpečenie dobrých robustných vlastností systému nám postačujú nízke hodnoty funkcie doplnkovej citlivosti $T(s)$ vo vyšších frekvenčných spektrách vďaka vlastnostiam porúch ktoré sú väčšinou reprezentované vyššími frekvenciami [12].

Viac o metóde zmiešanej citlivosti sa môžeme dočítať v literatúrach [4, 10].

1.4.5 Výhody, nevýhody a použitie $\mathcal{H}_\infty$ riadenia

Výhody

$\mathcal{H}_\infty$ metódy majú oproti klasickým metódam riadenia výhodu v aplikovateľnosti na MIMO systémy aj s efektom kríženia medzi jednotlivými kanálmi kanálmi.

Nevýhody

Nevýhody $\mathcal{H}_\infty$ techník zahŕňajú matematickú náročnosť návrhu úspešného riadenia, potrebu dostatočne presného modelu riadeného systému a problémy so zakomponovaním nelineárnych ohraničení. Taktiež je vhodné poznamenať že výsledný regulátor je optimálny len s ohľadom na predpísanú účelovú funkciu, čo implicitne nezaručuje najlepšiu možnú variantu vlastností riadenia, ako sú napr. množstvo spotrebovanej energie, čas ustálenia a pod..

Použitie

$\mathcal{H}_\infty$ techniky sú používané na minimalizáciu vplyvu porúch na systém v uzavretej slučke. V závislosti na formulácií problému, vplyv poruchy môže byť meraný s ohľadom na stabilizáciu alebo správanie systému.

Kapitola 2

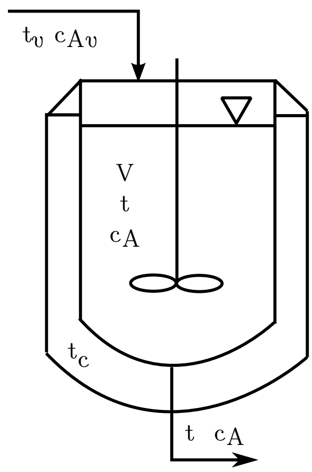
Príklad a syntéza $\mathcal{H}_\infty$ regulátora

2.1 Proces a jeho matematický model

2.1.1 Chemický prietokový reaktor

Na demonštráciu vlastností $\mathcal{H}_\infty$ riadenia som si vybral model prietokového chemického reaktora s dokonalým miešaním, ktorý patrí medzi najdôležitejšie a rozšírené chemickotechnologické procesy. Z hľadiska riadenia patria však reaktory medzi náročne riaditeľné procesy a to hlavne vďaka ich nelineárnemu charakteru dynamiky systému a s vysokým nárokom na bezpečnosť a kvalitu prevádzky.

Budeme uvažovať jednoduchý prietokový reaktor s chemickou reakciou prvého poriadku $A \to B$, reprezentovaný schémou 2.1. Pri modelovaní zanedbáme tepelnú kapacitu a odpor steny reaktora, ktorá ohraničuje reakčnú zmes od chladiacej kvapaliny. Hustotu ρ, špecifickú tepelnú kapacitu cp a objem V reakčnej zmesy ako aj úhrnný koeficient prestupu tepla α budeme pokladať za konštantné. Z predpokladu dokonalého miešania vyplýva že teplota τ a koncentrácia c_A reakčnej zmesi na výstupe sú rovnaké ako v reaktore.



Obr. 2.1: Schéma prietokového chemického reaktora

2.1.2 Matematický model reaktora

Diferenciálne rovnice pre takýto reaktor sú dve a to, materiálová bilancia 2.1 a entalpická bilancia 2.2 a uvažujeme počiatočné podmienienky v tvare 2.3.

$$V\frac{dc_A(t)}{dt} = qc_{Av}(t) - qc_A(t) - Vr(c_A(t), \tau(t)) \tag{2.1}$$

$$V\rho c_p\frac{d\tau(t)}{dt} = q\rho c_p\tau_c(t) - q\rho c_p\tau(t) - \alpha F(\tau(t) - \tau_c(t)) + V(-\Delta H)r(c_A(t), \tau(t)) \tag{2.2}$$

$$c_A(0) = c_{A0}; \qquad \tau(0) = \tau_0 \tag{2.3}$$

Kde $r(c_A, \tau)$ reprezentuje rýchlosť reakcie definovanú Arrheniovou rovnicou 2.4 ako funkciu koncentrácie zložky a teploty reakčnej zmesy.

$$r(c_A(t), \tau(t)) = kc_A = k_0e^{-\frac{E}{R\tau(t)}}c_A(t) \tag{2.4}$$

Výstupné stavové veličiny sú koncentrácia zložky v reaktore c_A a teplota reakčnej zmesy v reaktore τ. vstupné veličiny sú objemový prietok q, koncentrácia zložky c_A a teplota vstupného prúdu τ_v. Teplota chladiacej kvapaliny τ_c reprezentuje riadiacu veličinu. Riadenou veličinou bude teplota v reakčnej zmesy τ.

Pre numerické simulácie dynamiky procesu a návrh riadenia je vhodné upraviť diferenciálne rovnice 2.1 a 2.2 do tvaru s časovými konštantami T a zosilneniami Z 2.5 a 2.6.

$$\frac{dc_A(t)}{dt} = \frac{Z_1}{T_1}c_{Av}(t) - \frac{1}{T_1}c_A(t) - \frac{Z_2}{T_1}r(c_A(t), \tau(t)) \tag{2.5}$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{Z_3}{T_2}\tau_c(t) - \frac{1}{T_2}\tau(t) - \frac{Z_4}{T_2}(\tau(t) - \tau_c(t)) + \frac{Z_5}{T_2}r(c_A(t), \tau(t)) \tag{2.6}$$

$$c_A(0) = c_A^s; \qquad \tau(0) = \tau^s \tag{2.7}$$

2.1.3 Ustálený stav reaktora

Pre potreby linearizácie nelineárneho matematického modelu reaktora je nutné vypočítať hodnoty veličín c_A a τ v ustálenom stave. Keďže pre ustálený stav dynamického systému platí podmienka nulových derivácií podľa času, hodnoty veličín v ustálenom stave získame pomocou rovníc 2.8 a2.9.

$$0 = qc_{Av}^s - qc_A^s - Vr(c_A^s, \tau^s) \tag{2.8}$$

$$0 = q\rho c_p\tau_c^s - q\rho c_p\tau^s - \alpha F(\tau^s - \tau_c^s) + V(-\Delta H)r(c_A^s, \tau^s) \tag{2.9}$$

2.1.4 Parametre reaktora a neurčitosť modelu

Všetky parametre a koeficienty reaktora aj s konkrétnymi hodnotami použitých v tomto príklade sumarizuje tabuľka 2.1.

Pri modelovaní a návrhu riadenia bola uvažovaná neurčitosť v prietoku vstupného prúdu q. Závislosti zmeny hodnôt koncentrácie zložky v reaktore c_A^s a teploty reakčnej zmesy v reaktore τ^s v ustálenom stave od meniaceho sa parametra q sú zachytené na obrázku 2.2, z ktorého je zrejmý nelineárny vplyv parametra q na dynamiku reaktora.

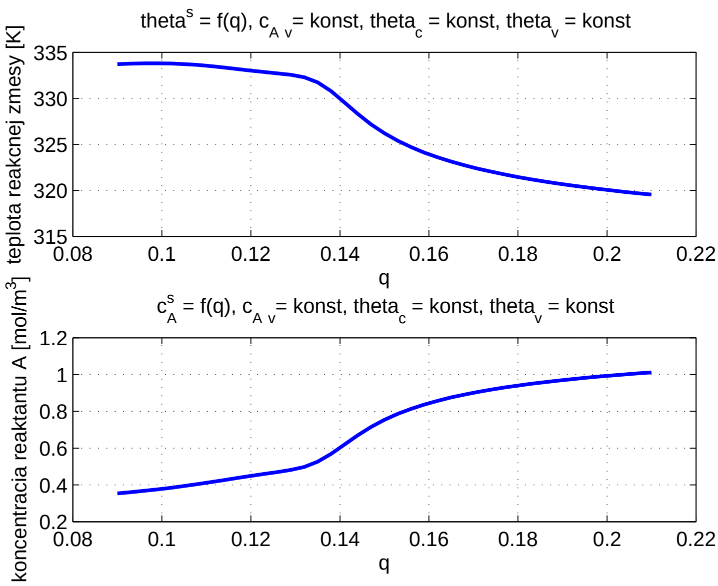
2.1.5 Nominálny, maximálny a minimálny prenos procesu

Pomocou zadaných hodnôt z tabuľky 2.1 a pomocou upravených diferenciálnych rovníc 2.5 a 2.6 môžeme vypočítať jednotlivé zosilnenia a časové konštanty pre konkrétne pracovné body ustáleného stavu reaktora pri meniacom sa parametry q 2.2. Pomocou časových konštánt vieme odvodiť tvar parametrov čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie, ako pomer riadenej veličiny τ (teplota reakčnej zmesy) a riadiacej veličiny τ_c (teplota chladenia).

Kombináciou maximálnych a minimálnych parametrov prenosu môžeme získať všetky prenosy reaktora v uvažovaných pracovných bodoch takzvané Kharitonove prenosy [25], z ktorých ďalej vieme získať

Tabuľka 2.1: Parametre reaktora

Veličina	**označenie**	**hodnota**	**jednotky**
časová premenná	t	-	min
molárna koncentrácia zložky A na vstupe do reaktora	c_{Av}	1,2	$mol\, m^{-3}$
molárna koncentrácia zložky A na výstupe reaktora	c_A	-	$mol\, m^{-3}$
objemový prietok reakčnej zmesi na vstupe	q	$[0,09 - 0,21]$	$m^3\, min^{-1}$
objem reakčnej zmesi v reaktore	V	1,7	m^3
teplota reakčnej zmesi na vstupe do reaktora	τ_v	313	K
teplota reakčnej zmesi v reaktore	τ	-	K
teplota chladiacej kvapaliny	τ_c	318	K
rýchlosť reakcie	$r(c_A, \tau)$	$f(c_A, \tau)$	$mol\, m^{-3}\, min^{-1}$
rýchlostná konštanta reakcie	k	$f(\tau)$	min^{-1}
frekvenčný faktor reakcie	k_0	$7,93 * 10^{15}$	min^{-1}
aktivačná energia reakcie	E	107280	$kJ\, kmol^{-1}$
plynová konštanta	R	8,314	$kJ\, kmol^{-1}\, K^{-1}$
hustota reakčnej zmesy	ro	998	$kg\, m^{-3}$
špecifická tepelná kapacita reakčnej zmesy	c_p	4,05	$kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$
úhrnný koeficient prestupu tepla	$alfa$	41,2	$kJ\, m^{-2}\, min^{-1}\, K^{-1}$
úhrnná plocha prestupu tepla	F	6,08	m^2
reakčná entalpia	ΔH	$-15 * 10^4$	$kJ\, kmol^{-1}$



Obr. 2.2: Závislosti c_A^s a τ^s od zmeny parametra q

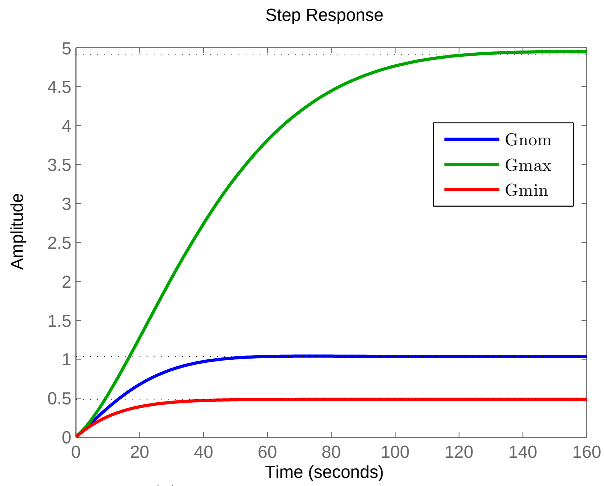
prenosy reaktora s maximálnym $G_{max}(s)$ 2.11 a minimálnym zosilnením $G_{min}(s)$ 2.10. Nakoniec koeficienty pre výsledný nominálny prenos reaktora $G_{nom}(s)$ 2.12, ktorý využijeme pri návrhu riadenia získame jednoducho ako priemer koeficientov čitateľa a menovateľa prenosov $G_{min}(s)$ a $G_{max}(s)$.

$$G_{min}(s) = \frac{0.03646s + 0.00485}{s^2 + 0.1974s + 0.009968} \tag{2.10}$$

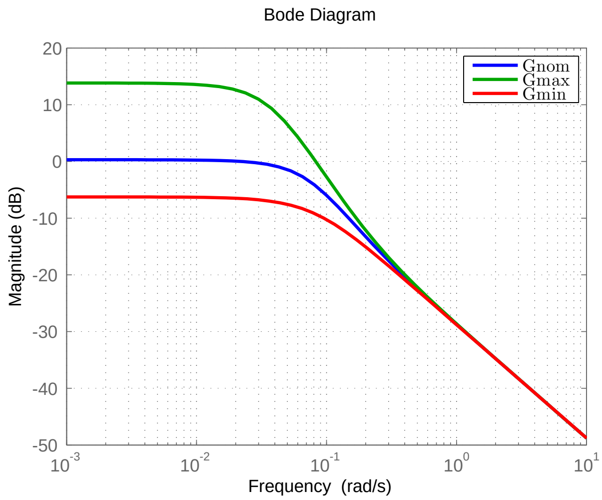
$$G_{max}(s) = \frac{0.03646s + 0.006926}{s^2 + 0.06383s + 0.001409} \tag{2.11}$$

$$G_{nom}(s) = \frac{0.03646s + 0.005888}{s^2 + 0.1306s + 0.005688} \tag{2.12}$$

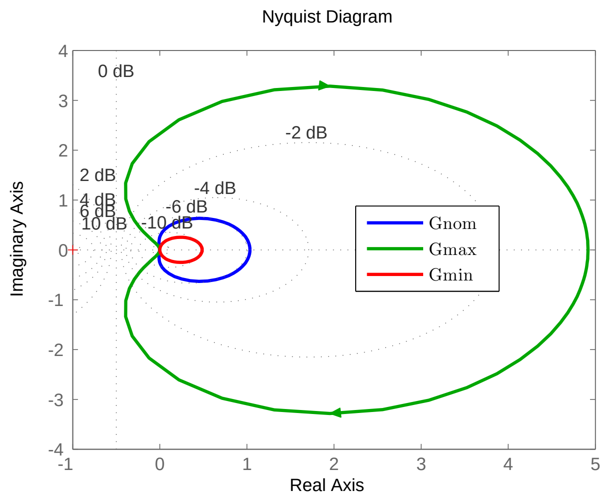
Dynamické vlastnosti týchto prenosov pre náš príklad sú ilustrované graficky ako odozva na jednotkový skok 2.3(a). Frekvenčné charakteristiky sú zas ilustrované ako bodeho diagram závislosti zosilnenia od frekvencie 2.3(b), závislosti fázového posunu od frekvencie 2.3(d) a ako nyquistov diagram 2.3(c).



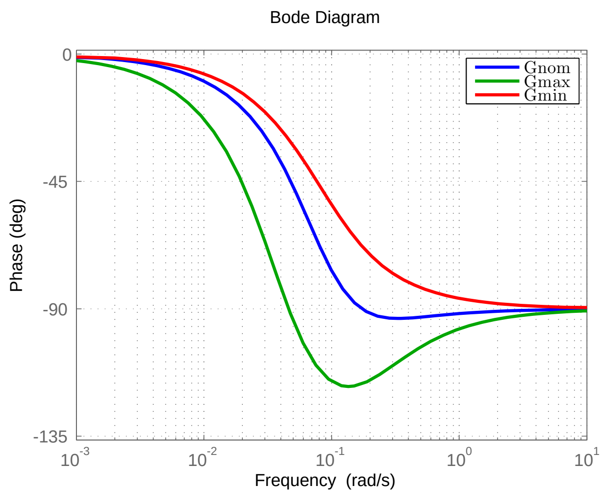
(a) Odozva na jednotkový skok



(b) Bodeho diagram: Frekvenčná odozva zosilnenia



(c) Nyquistov diagram pre frekvenčnú odozvu



(d) Bodeho diagram: Fázová frekvenčná odozva

Obr. 2.3: Dynamická odozva a frekvenčné charakteristiky pre prenosy $G_{min}(s)$, $G_{max}(s)$ a $G_{nom}(s)$.

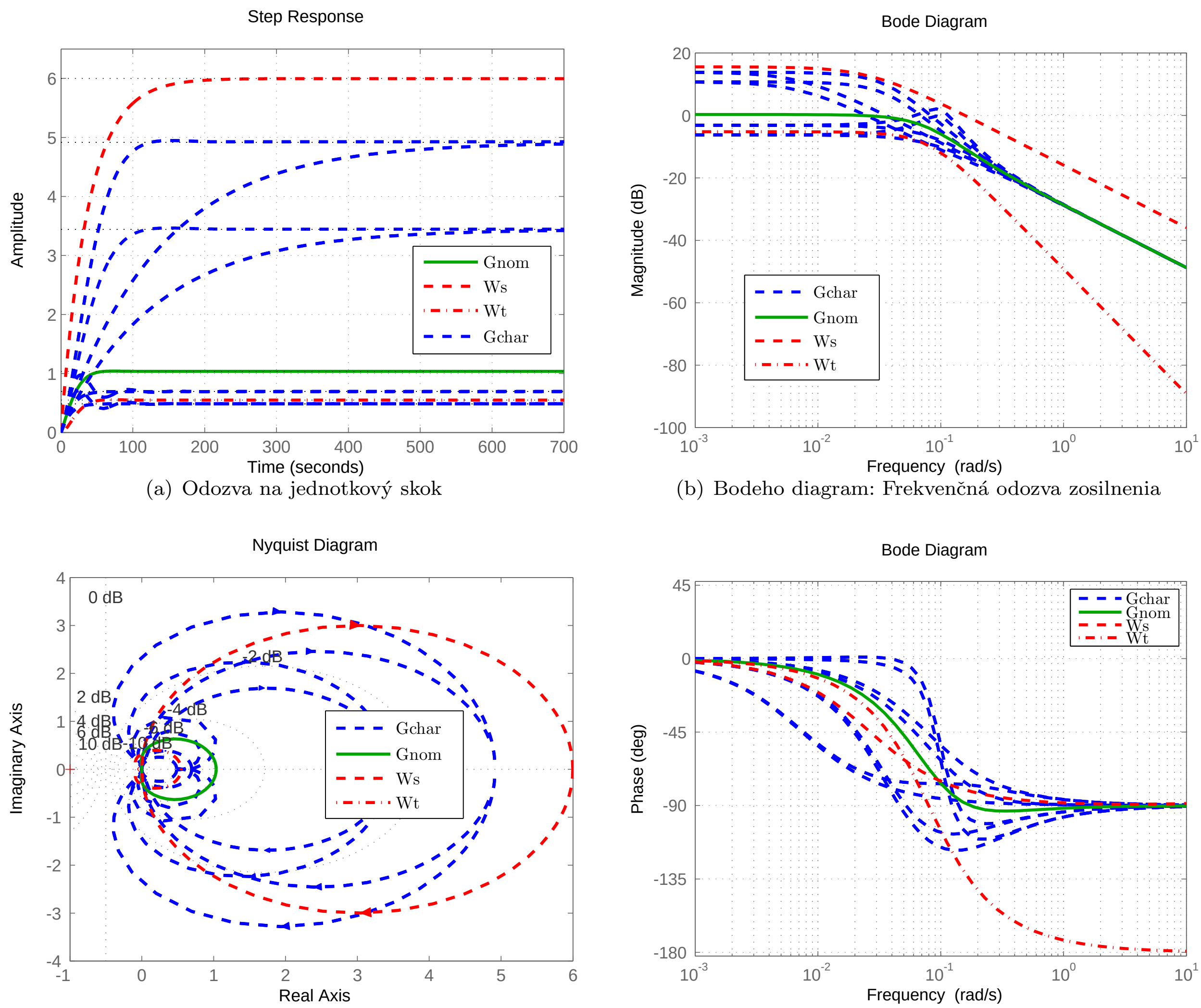
Z výsledných dynamických vlastností a frekvenčných charakteristík sú zrejmé značné rozdiely medzi zosilneniami a časovými konštantami hraničných prenosov $G_{min}(s)$ a $G_{max}(s)$, reprezentujúce vplyvy najmenšej a najvyššej hodnoty poruchy. Čo znamená že reálna dynamika reaktora pri uvažovanej poruche bude oscilovať medzi týmito hraničnými hodnotami. Odstránenie vplyvu porúch na dynamiku procesu je preto jedným z hlavných cieľov pri návrhu robustného $\mathcal{H}_\infty$ regulátora.

2.2 Návrh $\mathcal{H}_\infty$ regulátora pomocou metódy zmiešanej citlivosti

Návrh $\mathcal{H}_\infty$ riadenia som vykonal v programovom prostredí MATLAB [13, 14] metódou zmešanej citlivosti (eng. mixed sensitivity) pomoocu príkazu *mixsyn* [17], ktorý je súčasťou robustného toolboxu [18].

Pri návrhu $\mathcal{H}_\infty$ regulátora touto metódou je najprv nutné vykonať analýzu frekvenčných charakteristýk daného procesu, na základe ktorej navrhneme tvary prenosov pre filtre Ws a Wt, určujúce tvary pre citlivosť S 1.36 a doplnkovú citlivosť T 1.37 analyzovaného procesu.

Porovnanie dynamiky a frekvenčných charakteristík týchto filtrov s dynamikami a frekvenčnými charakteristikami riadeného procesu je ilustrované na obrázkoch 2.4, kde oba filtre vytvárajú 'obálku' okolo všetkých možných dynamík riadeného procesu, reprezentovanými takzvanými Kharitonovymi prenosmi G_{char}. Všimnime si že filter Ws reprezentuje hornú 'obálku' a Wt zas spodnú 'obálku' týchto prenosov. V princípe sa snažíme o to aby, filter Ws bol dostatočne malý na zabezpečenie robustného výkonu a filter Wt zas dostatočne malý na zabezpečenie robustnej stability uzavretého regulačného obvodu.



(a) Odozva na jednotkový skok

(b) Bodeho diagram: Frekvenčná odozva zosilnenia

(c) Nyquistov diagram pre frekvenčnú odozvu

(d) Bodeho diagram: Fázová frekvenčná odozva

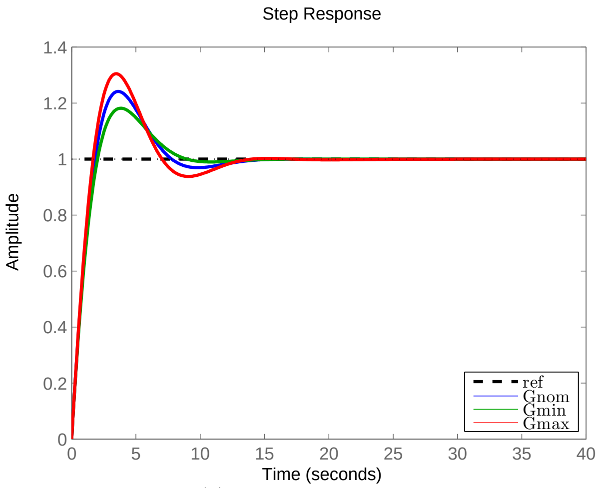
Obr. 2.4: Navrh obalok filtrov pre prenosy G_{min}, G_{max} a G_{nom} s ilustrovanými Kharitonovymi prenosmi G_{char}.

Výsledkom syntézy nominálneho prenosu procesu G_{nom} a prenosov citlivostných filtrov Ws a Wt je regulátor $K_\infty(s)$ ktorý minimalizuje $\mathcal{H}_\infty$ normu prenosu uzavretého regulačného obvodu so zmiešanou citlivosťou. Rád regulátora $K_\infty(s)$ je rovný súčtu rádov jednotlivých filtrov Ws, Wt a riadeného procesu G_{nom}. Kvalitu a robustnosť riadenia výsledného $K_\infty(s)$ regulátora 2.13 sme porovnali s kvalitou riadnenia klasického PID regulátora $K_{PID}(s)$ v štandardnom tvare 2.14, navrhnutého pomoocu príkazu *pidtool*, ktorý je súčasťou Control System Toolboxu [19].

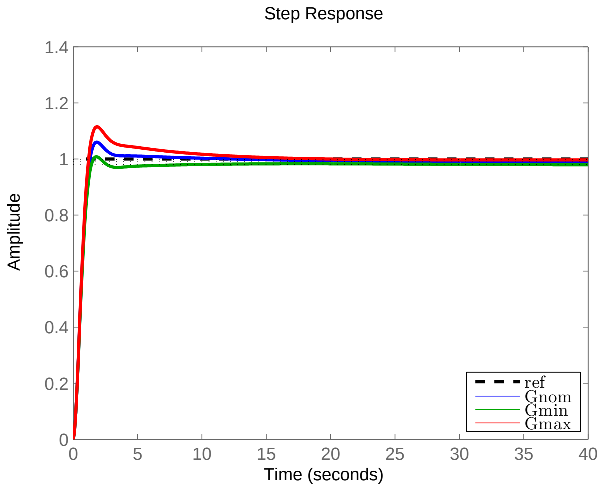
$$K_\infty(s) = \frac{165.2s^6 + 75.76s^5 + 14.86s^4 + 1.603s^3 + 0.1006s^2 + 0.003502s + 5.327e - 05}{s^7 + 3.939s^6 + 1.674s^5 + 0.2949s^4 + 0.02744s^3 + 0.001483s^2 + 4.521e^{-5}s + 5.432e^{-7}} \tag{2.13}$$

$$K_{PID}(s) = 20.5(1 + \frac{1}{2.19s} + 0.000117s) \tag{2.14}$$

Odozvy uzavretých regulačných obvodov (URO) 1.34 na jednotkové skokové zmeny pre prenosy G_{min}, G_{max}, G_{nom} bez vplyvu poruchy sú zobrazené na priebehoch 2.5, kde 2.5(b) reprezentuje odozvu URO s použitím robustného $K_\infty(s)$ regulátora a 2.5(a) reprezentuje odozvu URO použitím klasického $K_{PID}(s)$ regulátora. Z výsledných priebehov vidíme na prvý pohľad, že $K_\infty(s)$ regulátor má v porovnaní s $K_{PID}(s)$ regulátorom menší čas regulácie aj hodnotu maximálneho preregulovania, avšak vykazuje mierne hodnoty trvalej regulačnej odchýlky kôli principiálnej absencii integračného člena pre $\mathcal{H}_\infty$ regulátory.



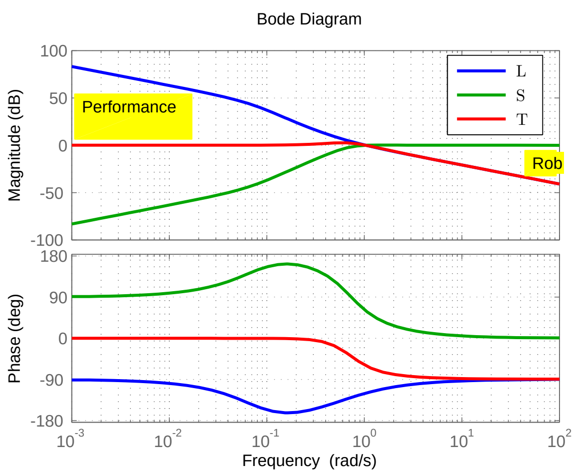
(a) URO odozva PID



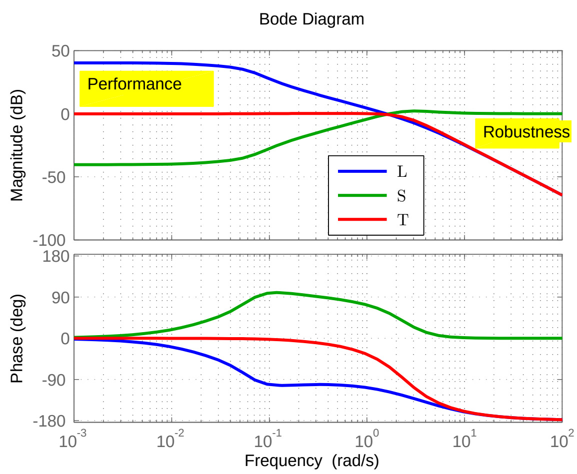
(b) URO odozva $\mathcal{H}_\infty$

Obr. 2.5: Odozvy URO s regulátormi PID 2.5(a) a $\mathcal{H}_\infty$ 2.5(b) pre prenosy G_{min}, G_{max} a G_{nom} na jednotkovy skok.

Pre hlbšiu analýzu vlastností navrhnutých regulátorov nám slúžia aj frekvenčné charakteristiky prenosu otvoreného regulačného obvodu L spolu s frekvenčnými charakteristikami funkcií citlivosti S a doplnkovej citlivosti T pre uvažovaný nominálny model systému G_{nom}, ktoré sú spolu v úzkom vzťahu ako je vidieť na grafických reprezentáciách 2.6. Žlté oblasti v magnitúdovej frekvenčnej charakteristike na ľavej strane spektra označujú vlastnosti sledovania referencie (výkonu) a žlté oblasti na pravej strane spektra označujú mieru robustnej stability systému, pre uvažované regulátory PID a $\mathcal{H}_\infty$.



(a) FCH L, S a T pre PID.



(b) FCH L, S a T pre $\mathcal{H}_\infty$.

Obr. 2.6: Frekvenčné charakteristiky pre L, S a T, s uvažovaným nominálny modelom G_{nom} pre regulátory PID 2.6(a) a $\mathcal{H}_\infty$ 2.6(b).

Odozvy na jednotkové skokové zmeny a frekvenčné charakteristiky URO funkcií citlitovsti S a doplnovej citlivosti T pre všetky uvažované prenosy G_{min}, G_{max}, G_{nom} v URO s PID a $\mathcal{H}_\infty$ regulátormi, zobrayujú odchýlky od nominálneho modelu a sú zobrazené na priebehoch 2.7 a 2.8.

2.2.1 Demonštrácia robustných vlastností $\mathcal{H}_\infty$ regulátora

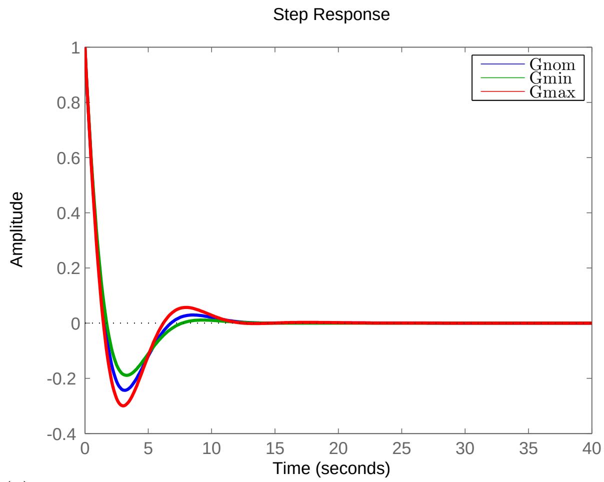
Simulačné priebehy riadenia teploty reakčnej zmesy neurčitého modelu reaktora pomocou $\mathcal{H}_\infty$ regulátora som porovnal s priebehom riadenia pomocou klasického nerobustného PID regulátora.

Pre teplotu τ a koncentráciu c_A reakčnej zmesy som uvažoval počiatočné podmienky rovné hodnotám koncentrácie c_{Av} a teploty τ_v reakčnej zmesy vstupného prúdu uvedené v tabuľke 2.1. Pri takomto nastavení má riadená veličina, čo je teplota reakčnej zmesy τ tendenciu sa ustálit' medzi hodnotami $[320 - 335K]$ v závislosti od maximálnehej a minimálnehej hodnoty prietoku vstupného prúdu q znázornenej na grafe 2.2.

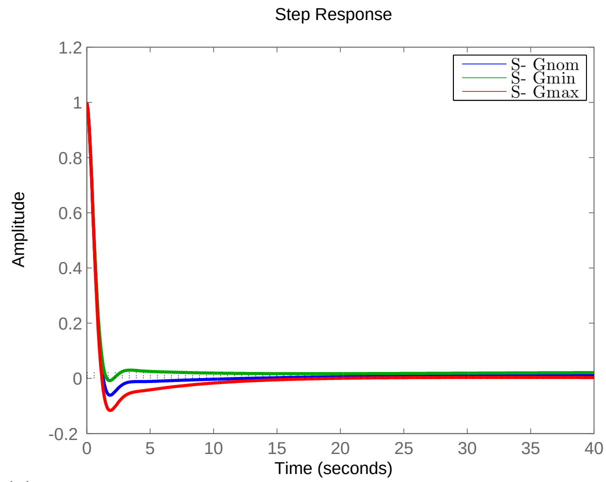
Pri simulásiách som navyše uvažoval reálne fyzikálne obmedzenia pre akčný člen reprezentujúci teplotu chladiacej zmesy, ktorý bol saturovaný v hodnotách $[273.15 - 373.15K]$ ktoré zodpovedajú kvapalnému skupenstvu vody ktorá je uvažovaná ako štandardná chladiaca kvapalina pri atmosferickom tlaku.

S cieľom zachytenia robustých vlastností regulátorov boli vyhodnotené rôzne simulačné scenáre s meniacimi sa skokovými zmenami referenčných hodnôt pre riadenú veličinu τ v čase 5min a sú prezentované nasledovne:

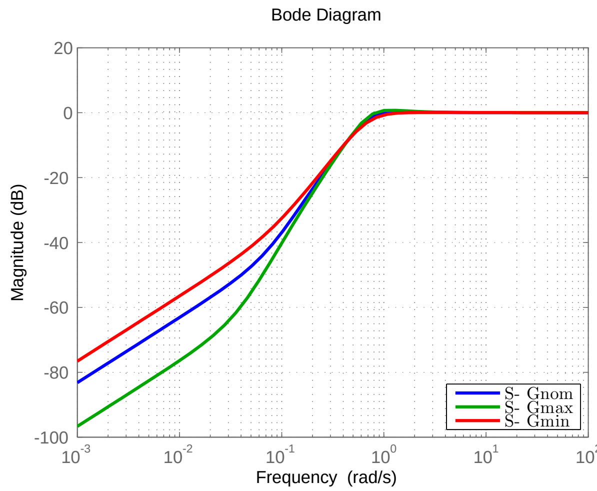
- Odozva URO na skokovú zmenu teploty o $5\,K$, obr. 2.9
- Odozva URO na skokovú zmenu teploty o $10\,K$, obr. 2.10
- Odozva URO na skokovú zmenu teploty o $-5\,K$, obr. 2.11
- Odozva URO na skokovú zmenu teploty o $-10\,K$, obr. 2.12



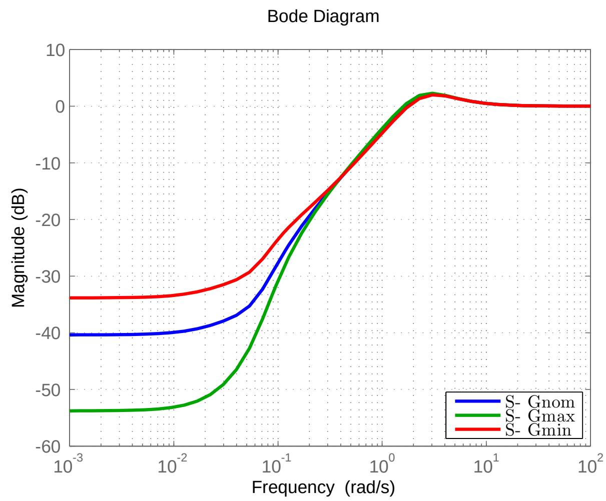
(a) Odozva funkcie citlivosti S, na jednotkový skok pre URO s PID



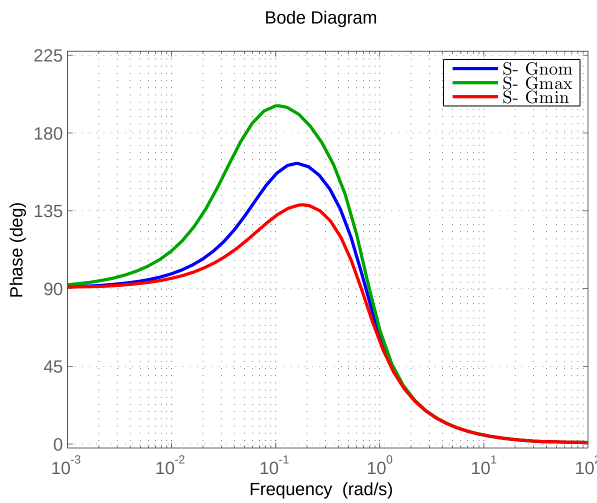
(b) Odozva funkcie citlivosti S, na jednotkový skok pre URO s $\mathcal{H}_\infty$



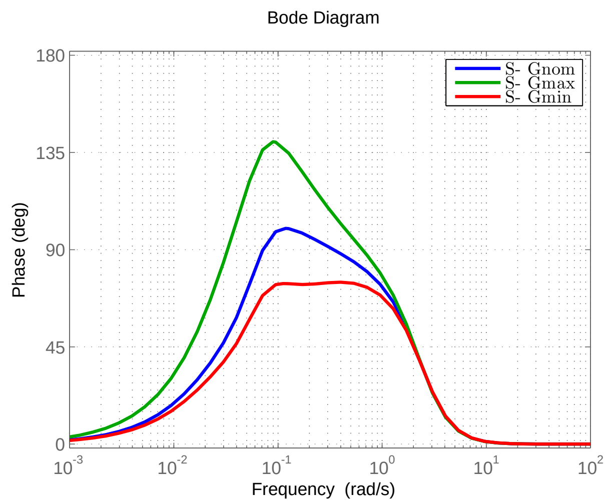
(c) Amplitúdová frekvenčná odozva zosilnenia funkcie citlivosti S, pre URO s PID



(d) Amplitúdová frekvenčná odozva funkcie citlivosti S, pre URO s $\mathcal{H}_\infty$

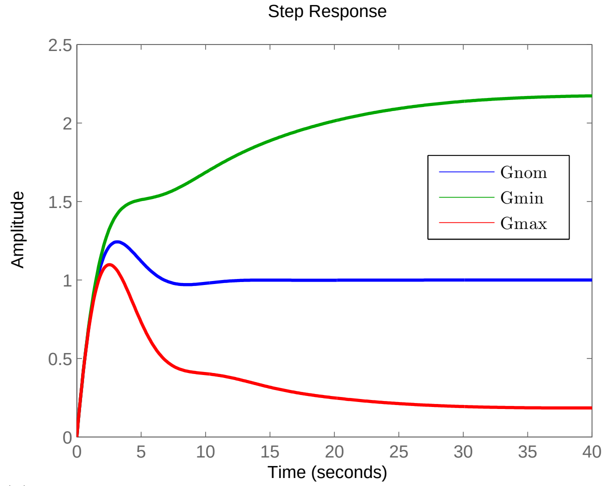


(e) Fázová frekvenčná odozva zosilnenia funkcie citlivosti S, pre URO s PID

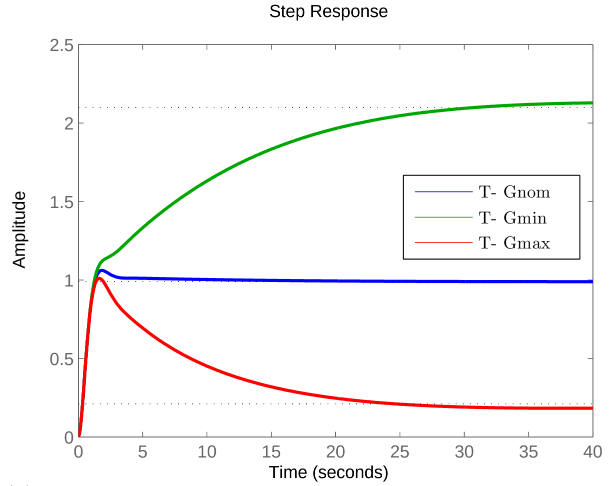


(f) Fázová frekvenčná odozva funkcie citlivosti S, pre URO s $\mathcal{H}_\infty$

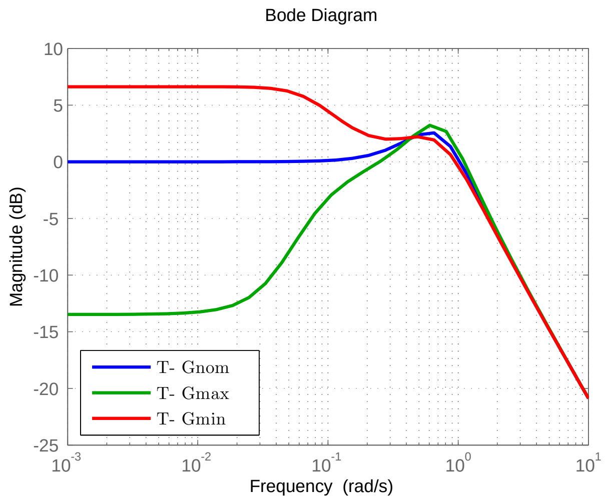
Obr. 2.7: Odozvy na jednotkový skok a frekvenčné charakteristiky funkcií citlivosti S, pre URO s PID regulátorom (prvý stĺpec) a $\mathcal{H}_\infty$ regulátorom (druhý stĺpec) pre uvažované prenosy G_{min}, G_{max} a G_{nom}.



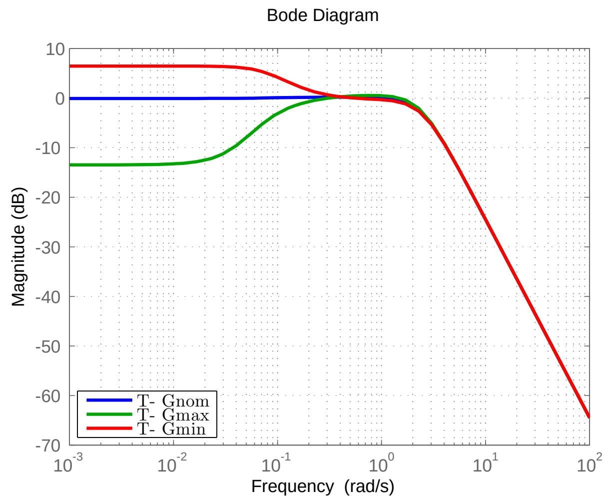
(a) Odozva doplnkovej funkcie citlivosti T, na jednotkový skok pre URO s PID



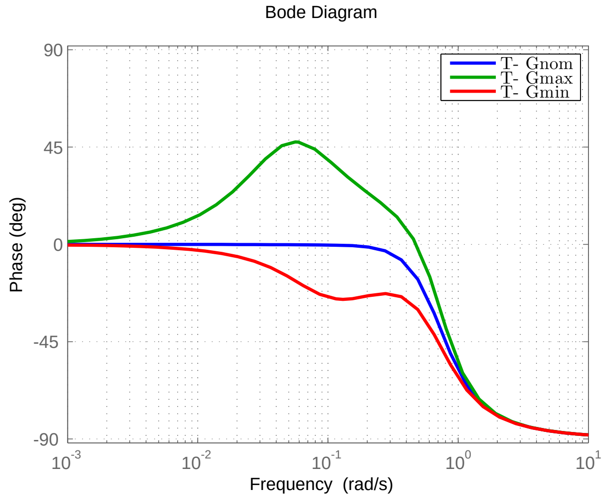
(b) Odozva doplnkovej funkcie citlivosti T, na jednotkový skok pre URO s $\mathcal{H}_\infty$



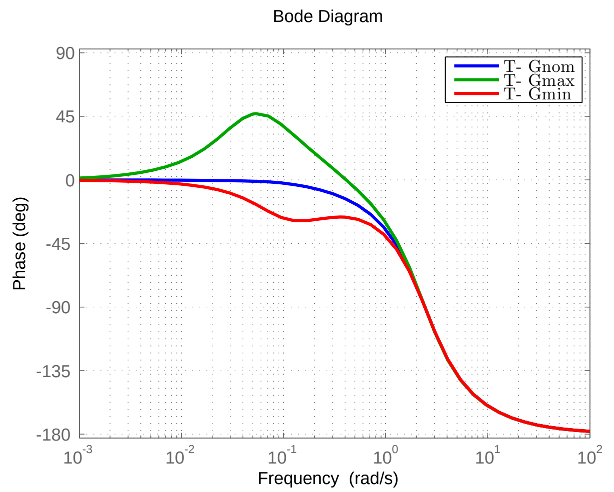
(c) Amplitúdová frekvenčná odozva zosilnenia funkcie doplnkovej citlivosti T, pre URO s PID



(d) Amplitúdová frekvenčná odozva funkcie doplnkovej citlivosti T, pre URO s $\mathcal{H}_\infty$

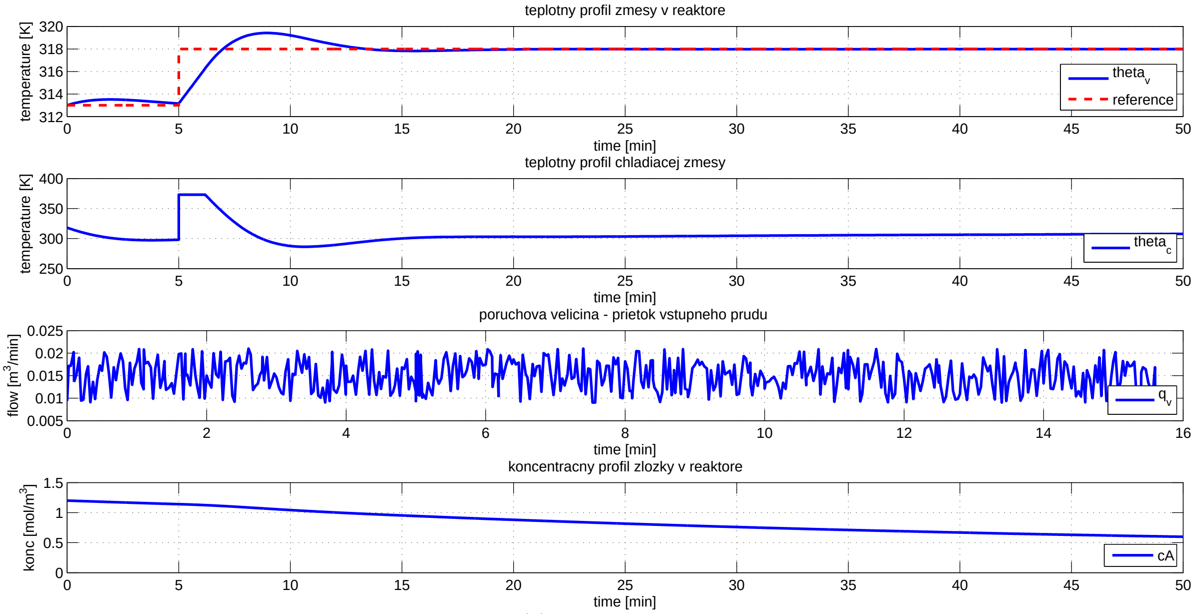


(e) Fázová frekvenčná odozva zosilnenia funkcie doplnkovej citlivosti T, pre URO s PID

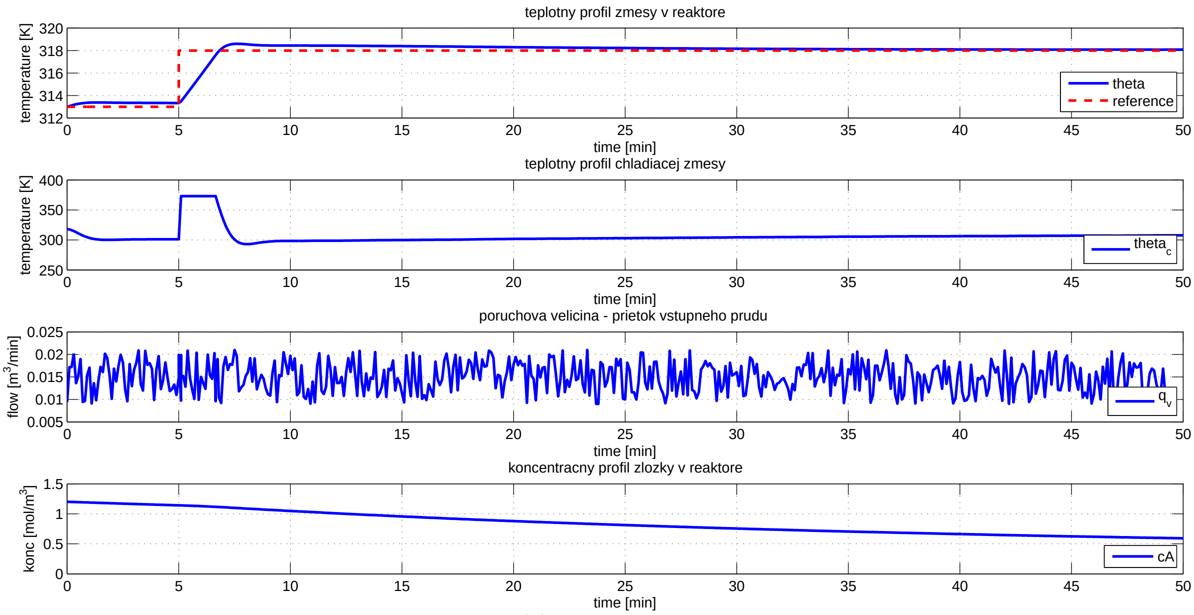


(f) Fázová frekvenčná odozva funkcie doplnkovej citlivosti T, pre URO s $\mathcal{H}_\infty$

Obr. 2.8: Odozvy na jednotkový skok a frekvenčné charakteristiky funkcií doplnkovej citlivosti T, pre URO s PID regulátorom (prvý stĺpec) a $\mathcal{H}_\infty$ regulátorom (druhý sĺpec) pre uvažované prenosy G_{min}, G_{max} a G_{nom}.

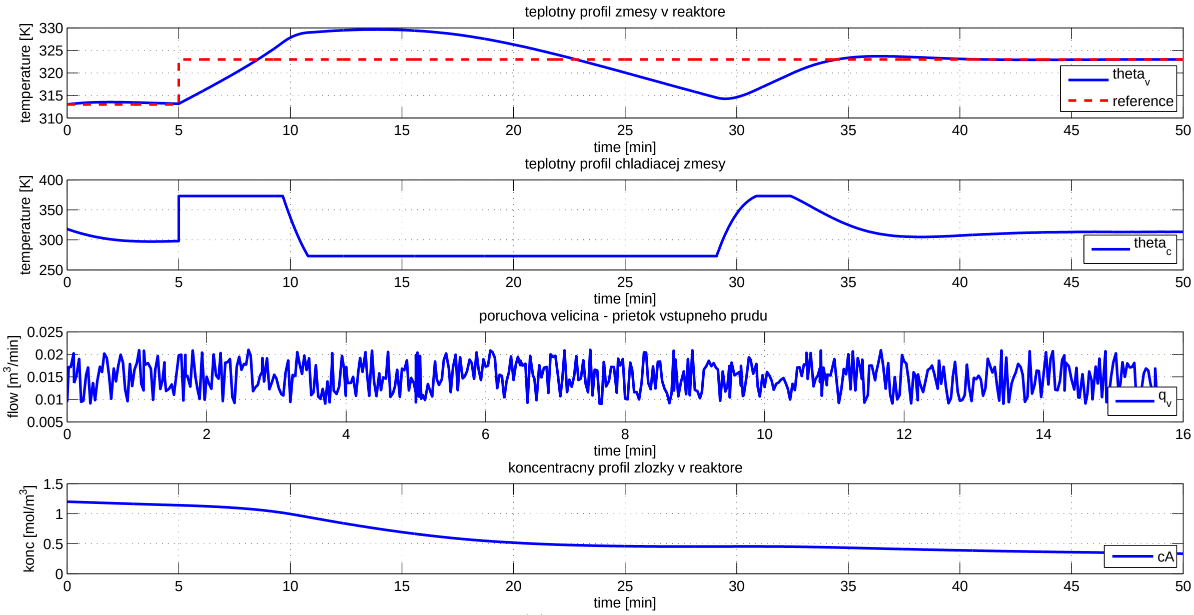


(a) PID riadenie

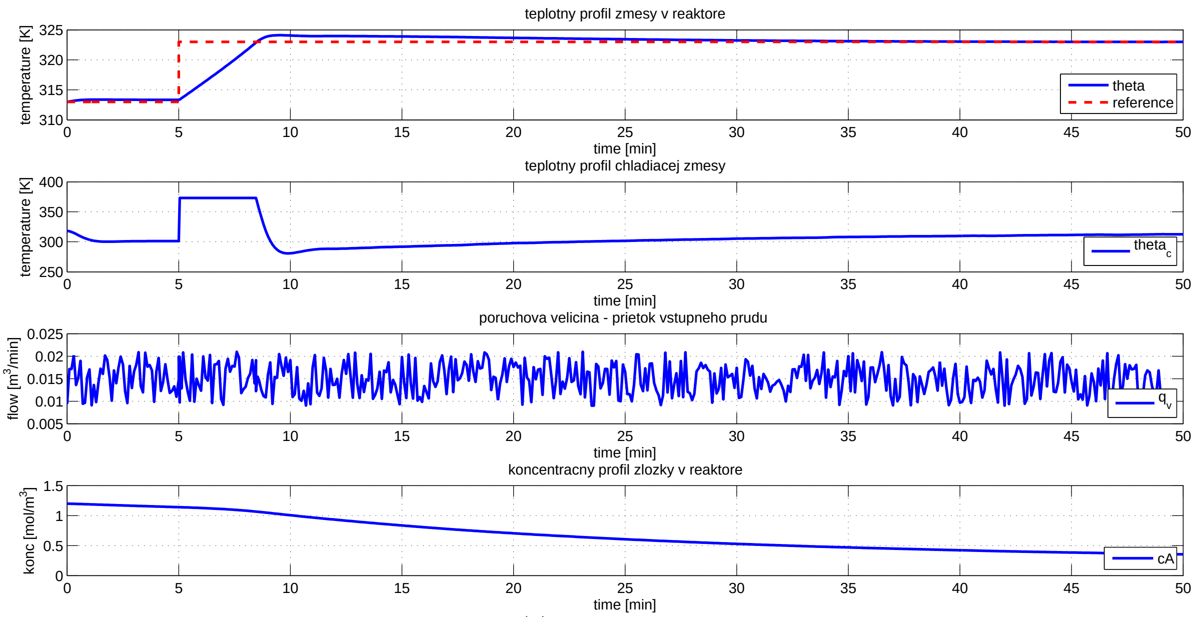


(b) $\mathcal{H}_\infty$ riadenie

Obr. 2.9: Porovnanie priebehov riadenia pre $K_{PID}(s)$ regulátor 2.9(a) a $K_\infty(s)$ regulátor 2.9(b) pri navýšení žiadanej hodnoty o $5\,K$ v čase 5min. Pre každý regulátor sú zobrazené 4 priebehy veličín zhora nadol: riadená veličina τ, riadiaca veličina τ_c, poruchová veličina q, stavová veličina c_A.

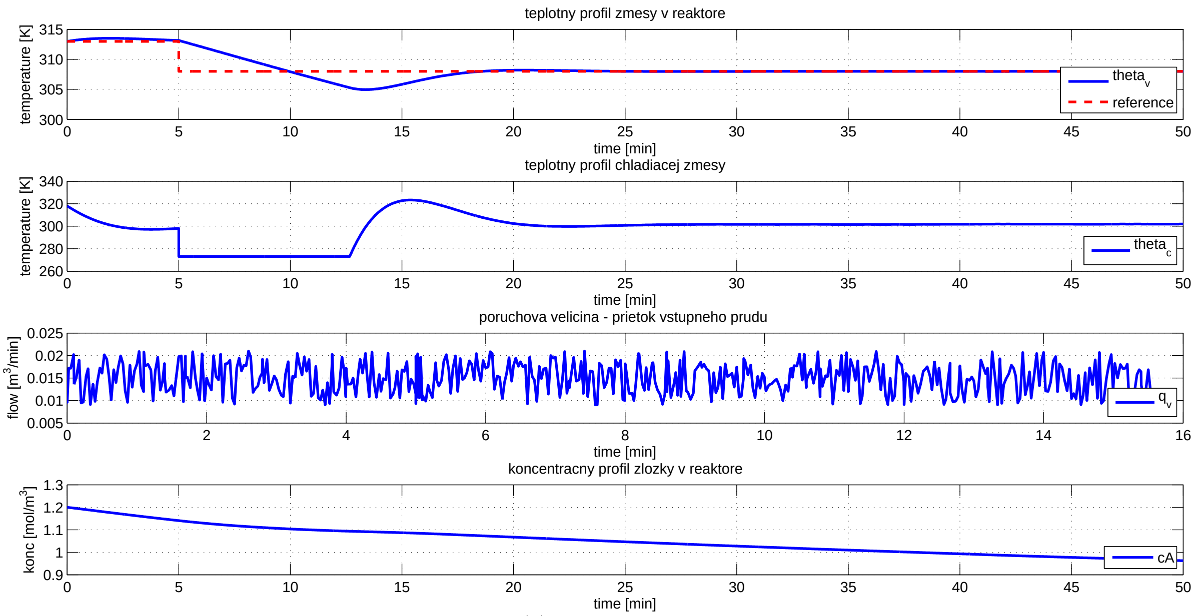


(a) PID riadenie

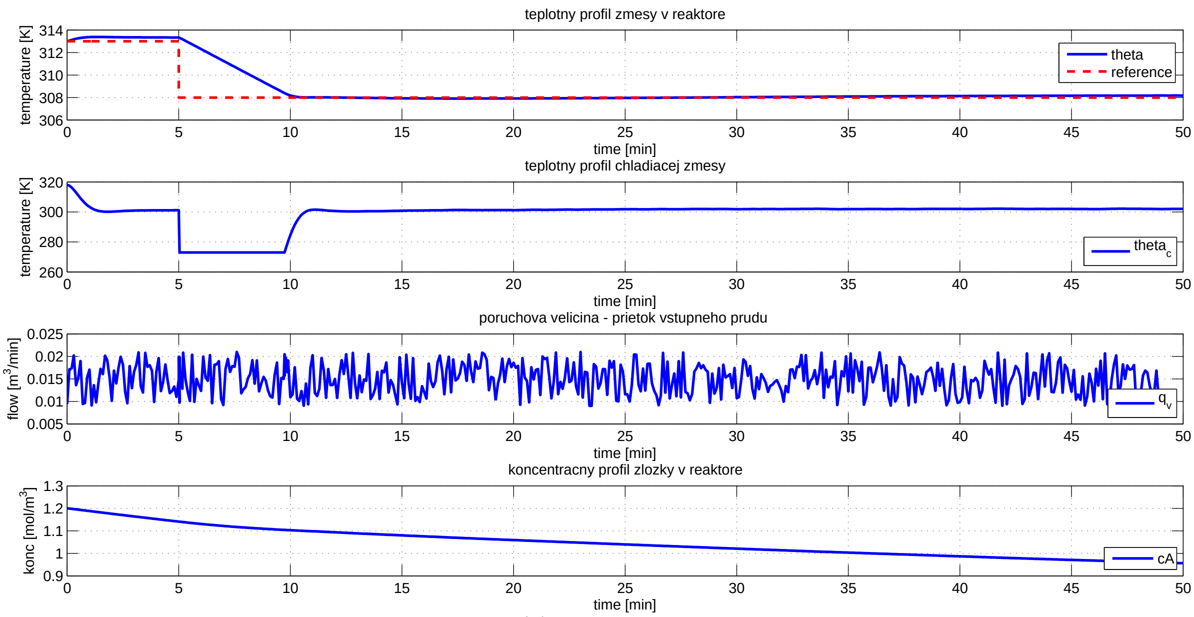


(b) $\mathcal{H}_\infty$ riadenie

Obr. 2.10: Porovnanie priebehov riadenia pre $K_{PID}(s)$ regulátor 2.10(a) a $K_\infty(s)$ regulátor 2.10(b) pri navýšení žiadanej hodnoty o $10\,K$ v čase 5min. Pre každý regulátor sú zobrazené 4 priebehy veličín zhora nadol: riadená veličina τ, riadiaca veličina τ_c, poruchová veličina q, stavová veličina c_A.

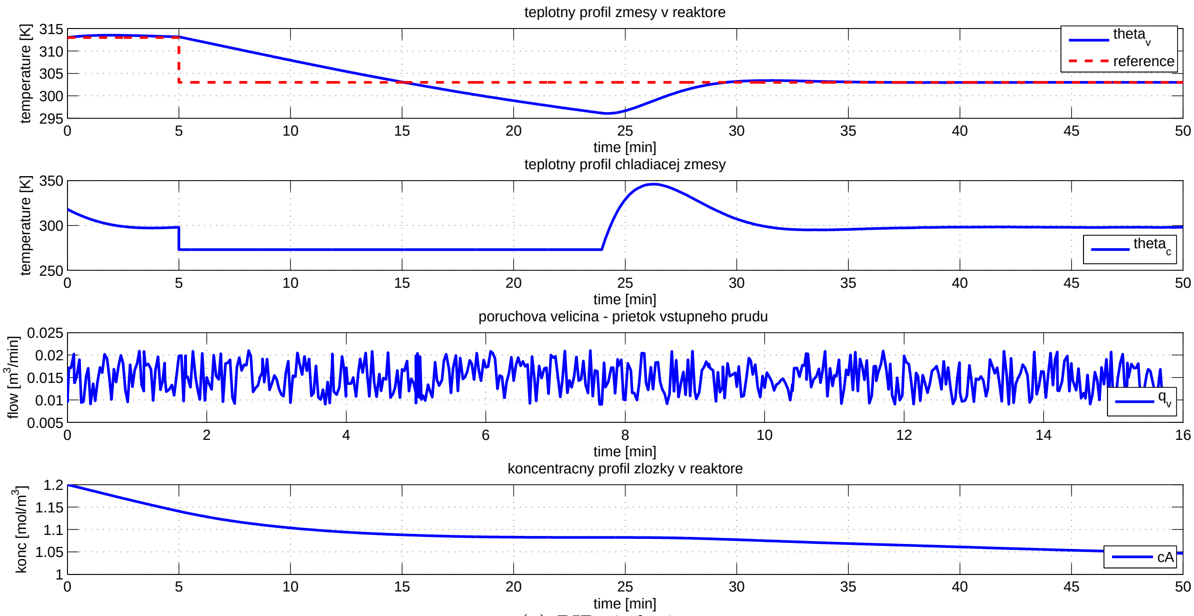


(a) PID riadenie

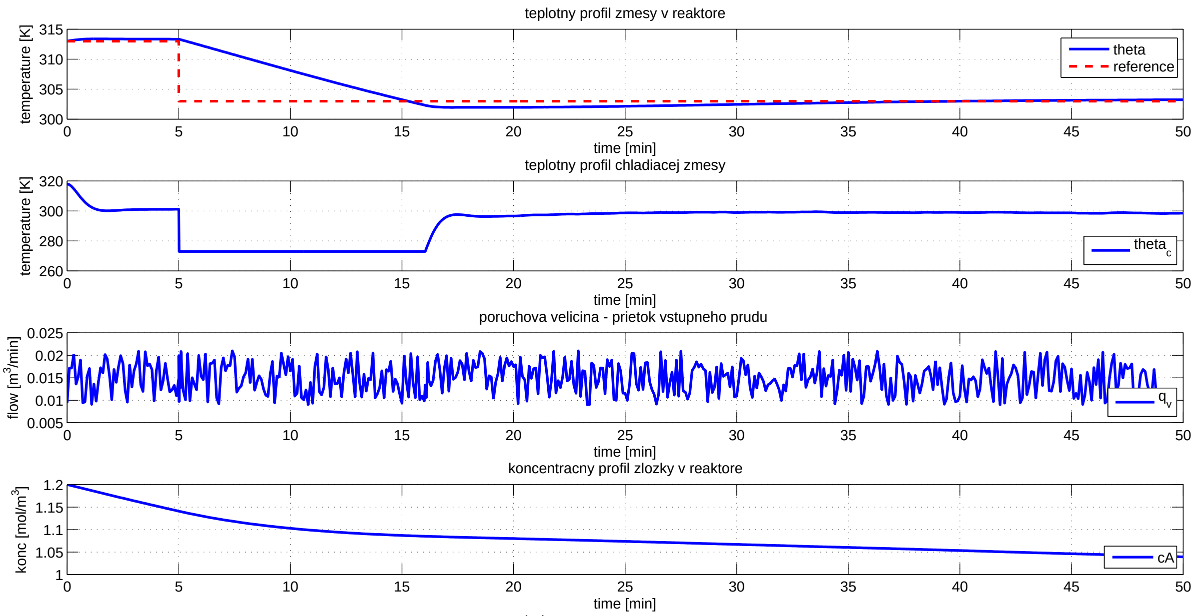


(b) $\mathcal{H}_\infty$ riadenie

Obr. 2.11: Porovnanie priebehov riadenia pre $K_{PID}(s)$ regulátor 2.11(a) a $K_\infty(s)$ regulátor 2.11(b) pri znížení žiadanej hodnoty o 5 K v čase 5min. Pre každý regulátor sú zobrazené 4 priebehy veličín zhora nadol: riadená veličina τ, riadiaca veličina τ_c, poruchová veličina q, stavová veličina c_A.



(a) PID riadenie



(b) $\mathcal{H}_\infty$ riadenie

Obr. 2.12: Porovnanie priebehov riadenia pre $K_{PID}(s)$ regulátor 2.12(a) a $K_\infty(s)$ regulátor 2.12(b) pri znížení žiadanej hodnoty o $10\,K$ v čase 5min. Pre každý regulátor sú zobrazené 4 priebehy veličín zhora nadol: riadená veličina τ, riadiaca veličina τ_c, poruchová veličina q, stavová veličina c_A.

Kapitola 3

Záver

Úlohou tejto práce bolo v prvej časti teoreticky priblížiť problematiku $\mathcal{H}_\infty$ riadenia a v časti druhej návrh a simulačné otestovanie vlastností $\mathcal{H}_\infty$ regulátora a porovnanie s klasickým typom proporcionálno-integračno-derivačného (PID) regulátora. Ako riadený proces som si zvolil prietokový chemický reaktor s dokonalým miešaním zmesy, pri modelovaní som uvažoval niekoľko zjednodušujúcich predpokladov ktoré samozrejme spôsobujú odchylky od reálneho správania sa systému, tieto zjednodušenia však nezabraňujú demonštrácii robustných vlastností porovnávaných regulátorov pri odstraňovaní vplyvu uvažovanej poruchy do systému, v našom prípade išlo o fluktuácie v prietoku reakčnej zmesy na vstupe do reaktora. Pre lepšiu demonštráciu robustných vlastností testovaných regulátorov, som vykonal z počiatočného stavu reakčnej zmesy niekoľko skokových zmien riadenej veličiny τ na rôzne žiadané hodnoty v intervale $[-10\,K, 10\,K]$. Z výsledných priebehov zobrazených graficky na 2.9 , 2.10 ,2.11 a 2.12, môžeme pozorovať dobré robustné správanie $\mathcal{H}_\infty$ regulátora, ktorý bol schopný uriadiť teplotu v reaktore pri všetkých vykonaných skokových zmenách, čo už však neplatí pre klasický PID regulátor, ktorý stráca schopnosť uriadiť reaktor na požadovanú teplotu pri narastajúcich odchýlkach požadovanej teploty v reaktore od uvažovaného počiatočného stavu reaktora. Možným spôsobom ako alternatívne zabezpečiť robustnosť riadenia reaktora by bol napríklad návrh adaptívneho regulátora, ktorý by prispôsoboval svoje parametre v závislosti od dynamických meniacehich sa stavov v reaktore.

Literatúra

[1] Mikleš, J., Fikar, M. *Process Modelling, Identification, and Control*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2007

[2] Mikleš, J., Fikar, M. *Modelovanie, identifikácia riadenie procesov 1.* Bratislava : STU Bratislava, 2004.

[3] Mikleš, J., Fikar, M. *Modelovanie, identifikácia riadenie procesov 2.* Bratislava : STU Bratislava, 2004.

[4] Skogestad S, Postlethwaite I, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*, Willey, 2nd edition, 2007.

[5] Wikibooks Control Systems: http://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems

[6] Course on Dynamics of multidisplicinary and controlled Systems, Christian Schmid: http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/main.html

[7] Kemin Zhou, J. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*

[8] Kemin Zhou, *Essentials of Robust Control* 1999.

[9] J. Doyle, B Francis, A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory* Macmillan publishing 1990.

[10] K. J. Astrom, R. M. Murray, *Feedback Systems* Princeton university press 2012.

[11] M. Thoma, A. Wyner, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1987.

[12] Department of Electrical and Computer Engineering Johns Hopkins University, *Frequency domain design, Control Systems Design Courses* http://www.ece.jhu.edu/~pi/Courses/454/

[13] Mathworks MATLAB http://www.mathworks.com/products/matlab/

[14] Wikipedia MATLAB http://en.wikipedia.org/wiki/MATLAB

[15] MATLAB: bode http://www.mathworks.com/help/ident/ref/bode.html

[16] MATLAB: nyquist http://www.mathworks.com/help/control/ref/nyquist.html

[17] MATLAB: Syntéza $\mathcal{H}_\infty$ regulátora metódou mixsyn http://www.mathworks.com/help/robust/ref/mixsyn.html

[18] MATLAB: Robust Control Toolbox http://www.mathworks.com/products/robust/

[19] MATLAB: Control System Toolbox http://www.mathworks.com/products/control/

[20] Wikipedia Best worst and average case http://en.wikipedia.org/wiki/Best,_worst_and_average_case

[21] Wikipedia LQR http://en.wikipedia.org/wiki/Linear-quadratic_regulator

[22] Wikipedia LQG http://en.wikipedia.org/wiki/Linear-quadratic-Gaussian_control

[23] Wikipedia LQE - Kalmanov filter hhttp://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter

[24] Wikipedia Princíp separácie http://en.wikipedia.org/wiki/Separation_principle

[25] Wikipedia Kharitonova theoréma http://en.wikipedia.org/wiki/Kharitonov%27s_theorem

[26] Wikipedia Dejiny tankov http://sk.wikipedia.org/wiki/Dejiny_tankov