Miroslav Fikar

Dynamická optimalizácia procesov

STU Bratislava

Verzia: 26. januára 2016

Publikácia sa zaoberá dynamickou optimalizáciou procesov. Určená je graduovaným študentom, môže však poslúžiť aj iným záujemcom, ktorí sa zaujímajú o túto problematiku.

© Prof. Dr.-Ing. Miroslav Fikar

Lektori: Doc. Ing. J. Cvejn, PhD.
Prof. Ing. B. Roháľ-Iľkiv, CSc.

Vydala Slovenská Technická Univerzita v Bratislave a Slovenská e-akadémia, n.o., 2007.

ISBN 978-80-89316-08-3

Kniha bola vytvorená s pomocou podpory Európskeho sociálneho programu, projektu „Rozvoj ľudských zdrojov pre výskum a vývoj v oblasti automatizácie“ (RLZ VVA), kód projektu 13120200015.

Európsky **sociálny** fond

Predhovor

Táto publikácia sa zaoberá teoretickými a praktickými aspektmi dynamickej optimalizácie. Vznikla na základe výskumnej činnosti autora v tejto oblasti v posledných desiatich rokoch. Je rozdelená na štyri časti.

V prvej teoretickej časti sa zaoberáme jednak odvodením základných metód a prúdov v oblasti dynamickej optimalizácie a jednak ich aplikáciou na lineárne systémy. Preberajú sa princípy variačného počtu, Pontrjaginovho princípu minima a Bellmanovho princípu optimality. Metódy sú aplikované na jednoduché problémy z lineárnych systémov.

Druhá časť je venovaná numerickým metódam. Tieto nadväzujú na materiál z predošlej časti a rozširujú ho tak, aby dynamickú optimalizáciu bolo možné použiť na širšiu triedu problémov. Na základe rozličného stupňa aproximácie sú rozdelené jednotlivé triedy metód, ktoré sú potom rozoberané v individuálnych kapitolách. Dôraz je kladený na deterministické prístupy. Ďalej sa v tejto časti venujeme aj niektorým otázkam a problémom, ktoré sa v dynamickej optimalizácii môžu vyskytovať.

V tretej časti sú uvedené programové balíky, v ktorých vývoji autor participoval. Pomocou týchto je možné jednoduchým spôsobom riešiť niektoré z uvedených problémov v predošlých kapitolách.

Štvrtá časť je venovaná aplikáciám v oblasti dynamickej optimalizácie. Ukazuje nielen použitie metód a programových balíkov, ale aj problémy, ktoré sa môžu vyskytnúť. Vybrané sú tri aplikácie, ktoré sú zoradené od jednoduchších až po zložité problémy na hranici riešiteľnosti v súčasnom stave poznania v problematike.

Táto publikácia by nevznikla nebyť bohatej a dlhej spolupráce so školou chemického inžinierstva ENSIC v Nancy, Francúzsko a konkrétne s profesormi M. A. Latifi, J.-P. Corriou, pracovníkmi a doktorandmi B. Chachuat, F. Fournier, F. Lesage.

V Bratislave by som sa chcel poďakovať Prof. J. Miklešovi za uvedenie do problematiky a svojím doktorandom a diplomantom M. Čižniarovi a T. Hirmajerovi, Š. Ševčíkovi, ktorých výskum otvoril nové možnosti v tejto oblasti.

Záverom ďakujem obom lektorom, ktorými boli prof. Ing. B. Roháľ-Iľkiv, PhD. a doc. Ing. J. Cvejn, PhD., ktorí významnou mierou prispeli k skvalitneniu viacerých častí diela.

Bratislava, november 2007

M. Fikar

O autorovi

M. Fikar získal titul Ing. na Chemickotechnologickej fakulte Slovenskej Technickej Univerzity (STU) v roku 1989, titul Dr. v roku 1994, titul docent v roku 2000 a je profesorom od roku 2007. Od skončenia univerzity pôsobí na Oddelení (najskôr Katedre) informatizácie a riadenia procesov FCHPT STU, ktoré vedie od roku 2003. V súčasnosti je riaditeľom Ústavu informatizácie, automatizácie a matematiky. V roku 1999 získal štipendium Alexandra von Humboldt v Nemecku. Pôsobil na Technical University Lyngby, Technische Universität Dortmund, Ruhr Universität Bochum, CRNS-ENSIC Nancy a iných.

Publikačná činnosť prof. Fikara zahŕňa vyše 200 prác a je spoluautorom viacerých kníh, napríklad Process Modelling, Identification, and Control (spolu s J. Miklešom, Springer, 2007). Vo svojej vedeckovýskumnej práci za zaoberá dynamickou optimalizáciou a prediktívnym riadením, prítomnosťou obmedzení v systémoch, identifikáciou, optimalizáciou a riadením v procesnom priemysle.

Obsah

I Teoretické základy **15**

1 Optimálne riadenie procesov **16**

1.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia a princíp minima . . . 16
1.2 Dynamické programovanie . . . 23
1.3 Pontrjaginov princíp minima . . . 28
1.4 Spätnoväzbové optimálne riadenie lineárnych systémov . . . 29
1.4.1 Dynamické programovanie a lineárne systémy . . . 39
1.5 Optimálne sledovanie, servo problém a odstránenie porúch . . . 41
1.5.1 Problém sledovania . . . 42
1.5.2 Servo problém . . . 44
1.5.3 LQ riadenie s integračnou činnosťou . . . 45
1.6 Ďalšie príklady . . . 45

II Numerické metódy **51**

2 Úvod do numerických metód **52**

2.1 Rozdelenie numerických metód . . . 52
2.2 Hľadanie spojitej trajektórie riadenia . . . 53
2.2.1 Iterácia hraničnej podmienky . . . 53
2.2.2 Iterácia vektora riadenia . . . 53

3 Parametrizácia vektora riadenia **54**

3.1 Formulácia problému . . . 54
3.1.1 Opis systému a funkcionálu . . . 54
3.1.2 Optimalizované premenné . . . 55
3.1.3 Typy obmedzení . . . 55
3.2 Transformácia na statickú optimalizáciu . . . 56
3.3 Odvodenie gradientov . . . 56
3.3.1 Postup . . . 58
3.3.2 Poznámky . . . 59
3.4 Iné spôsoby odvodenia gradientov . . . 60
3.4.1 Metóda konečných rozdielov . . . 60
3.4.2 Citlivostné rovnice . . . 60

4 Kompletná parametrizácia **63**

4.1 Definícia optimalizačného problému . . . 63
4.1.1 Účelová funkcia . . . 63

4.1.2 Optimalizovaný proces 63
4.1.3 Obmedzenia 64
4.1.4 Transformácia do NLP tvaru 64

5 Problémy optimálneho riadenia 67
5.1 Parametrizácia riadenia 67
5.1.1 Po častiach spojité riadenie 68
5.2 Obmedzenia na stavy pozdĺž trajektórie 68
5.2.1 Obmedzenia v tvare rovnosti 68
5.3 Minimalizácia času 69
5.4 Periodické problémy 69

6 Obmedzenia na stavy v dynamickej optimalizácii 71
6.1 Úvod a definícia problému 71
6.2 Metódy pre obmedzenia v tvare nerovnosti pozdĺž trajektórie 71
6.2.1 Celková diskretizácia 72
6.2.2 Koncové obmedzenia 72
6.2.3 Systém bodových obmedzení 72
6.2.4 Kombinácia koncových a vnútorných obmedzení 73
6.2.5 Prídavné premenné 73
6.3 Porovnanie vybraných metód na príklade 74
6.3.1 Výsledky 75
6.4 Záver 77

7 Optimálne riadenie systémov s hybridnou dynamikou 79
7.1 Úvod 79
7.2 Formulácia problému 80
7.3 Odvodenie podmienok optimality 81
7.4 Postup optimalizácie 85
7.4.1 Algoritmus 85
7.4.2 Implementácia algoritmu 87
7.4.3 Integrácia adjungovaných rovníc 87
7.5 Príklady 87
7.5.1 Proces 87
7.5.2 Problém časovej optimalizácie 88
7.5.3 Minimalizácia LQ kritéria 90
7.6 Výsledky 90
7.6.1 Minimalizácia času 90
7.6.2 LQ riadenie 91
7.7 Záver 94

III Programové balíky 95

8 Balík dynopt 96
8.1 Tutoriál 96
8.1.1 Problém bez obmedzení 96
8.1.2 Problém s obmedzeniami a gradientmi 98
8.1.3 Problém so stavovým obmedzením 102

8.1.4 DAE problém . . . 104
8.2 Príklady . . . 106
8.2.1 Rúrkový reaktor . . . 107
8.2.2 Reaktor s piestovým tokom . . . 107
8.2.3 Nelineárny prietokový reaktor . . . 108

9 Balík DYNO **111**
9.1 Tutoriál . . . 111
9.1.1 Hlavný program . . . 112
9.1.2 Funkcia `process` . . . 113
9.1.3 Účelová funkcia a obmedzenia – integrálna časť `costi` . . . 115
9.1.4 Účelová funkcia a obmedzenia – neintegrálna časť `costni` . . . 115
9.1.5 Automatické derivovanie . . . 117
9.2 Príklady . . . 117
9.2.1 Problém s koncovým obmedzením . . . 118
9.2.2 Problém s koncovým obmedzením 2 . . . 118
9.2.3 Vsádzkový reaktor . . . 119
9.2.4 Nelineárny prietokový reaktor . . . 120
9.2.5 Odhad parametrov . . . 121

IV Aplikácie **123**

10 Optimálne riadenie systému reaktorov **124**
10.1 Proces . . . 124
10.1.1 Model reaktorov . . . 124
10.2 Definícia optimalizačného problému . . . 126
10.3 Výsledky a diskusia . . . 126

11 Optimálna prevádzka v čističke odpadových vôd **130**
11.1 Úvod . . . 130
11.2 Model ČOV . . . 131
11.2.1 Process . . . 131
11.2.2 Model . . . 132
11.3 Definícia optimalizačného problému . . . 134
11.3.1 Účelová funkcia . . . 135
11.3.2 Obmedzenia . . . 136
11.3.3 Optimalizačný problém . . . 136
11.3.4 Stavové obmedzenia . . . 137
11.4 Výsledky a diskusia . . . 137
11.5 Záver . . . 139

12 Optimálna zmena prevádzkového režimu v rektifikačnej kolóne **141**
12.1 Modelovanie kolóny . . . 141
12.1.1 Opis modelu . . . 141
12.1.2 Nominálny pracovný bod . . . 143
12.1.3 Jakobiho matica . . . 144
12.1.4 Diferenciálny index modelu . . . 144
12.1.5 Ustálené stavy . . . 146

12.1.6 Dynamické charakteristiky 147
12.2 Simulačné výsledky 151
12.2.1 ISE problémy 151
12.2.2 Problémy minimalizácie času 155

Literatúra **159**

Register **165**

Zoznam obrázkov

1.1.1 Výmenník tepla . . . 21
1.1.2 Optimálne priebehy vstupnej a stavovej veličiny výmenníka tepla . . . 24
1.2.1 Optimálna trajektória v n-rozmernom stavovom priestore . . . 25
1.2.2 Optimálna trajektória . . . 26
1.4.1 Priebeh $P(t)$ pre rôzne hodnoty koeficientu r . . . 33
1.4.2 Optimálne spätnoväzbové riadenie . . . 34
1.4.3 Dva výmenníky tepla zapojené v sérii . . . 34
1.4.4 Simulink program na riešenie odozvy spätnoväzbového systému z príkladu 1.4.2 37
1.4.5 Priebehy x_1, x_2, u_1 pri spätnoväzbovom LQ riadení dvoch v sérii zapojených výmenníkov . . . 37
1.4.6 Optimálna LQ regulácia výstupu . . . 40
1.6.1 Optimálne riadenie auta (x_1 – vzdialenosť, x_2 – rýchlosť, u – akcelerácia) . . . 47
1.6.2 Optimálne riadenie auta s obmedzením rýchlosti (x_1 – vzdialenosť, x_2 – rýchlosť, u – akcelerácia) . . . 48
1.6.3 Stavová rovina a prepínacia krivka . . . 50

4.1.1 Vyznačenie intervalov a bodov kolokácie pre stavové a riadiace profily . . . 65

6.3.1 Porovnanie rozličných parametrizácií (konštantná, lineárna, kvadratická) v prístupe s prídavnými premennými. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie . . . 76
6.3.2 Porovnanie prístupov Max2 a prídavných premenných. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie . . . 77
6.3.3 Bodové obmedzenia s pevnou alebo premenlivou dĺžkou časových intervalov. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie . . . 78

7.5.1 Systém dvoch zásobníkov . . . 87
7.5.2 Odozva hybridného systému na skokovú zmenu vstupného prietoku . . . 88
7.6.1 Optimálne stavové trajektórie s mnohorozmerovým časovo optimálnym riadením 91
7.6.2 Optimálne riadiace trajektórie s mnohorozmerovým časovo optimálnym riadením 91
7.6.3 Optimálne stavové trajektórie s jednorozmerovým časovo optimálnym riadením 92
7.6.4 Optimálna riadiaca trajektória s jednorozmerovým časovo optimálnym riadením 92
7.6.5 Výška hladiny kvapaliny v druhom zásobníku pre rozličné hodnoty koeficienta r 93
7.6.6 Optimálna riadiaca trajektória s LQ riadením . . . 93

8.1.1 Optimálne riadenie pre problém bez obmedzení . . . 99
8.1.2 Optimálne stavové trajektórie pre problém bez obmedzení . . . 99
8.1.3 Optimálne riadenie pre problém s obmedzením . . . 103
8.1.4 Optimálne stavové trajektórie s obmedzením . . . 103

8.1.5 Optimálne riadenie pre problém so stavovým obmedzením 105
8.1.6 Optimálne stavové trajektórie pre problém so stavovým obmedzením 105
8.1.7 Trajektória stavového obmedzenia 105
8.1.8 Optimálne riadenie pre DAE problém 106
8.1.9 Optimálne stavové trajektórie pre DAE problém 106
8.2.1 Optimálne riadenie rúrkového reaktora 107
8.2.2 Optimálne stavové profily rúrkového reaktora 107
8.2.3 Optimálne riadenie reaktora s piestovým tokom 108
8.2.4 Optimálne stavové profily pre reaktor s piestovým tokom 108
8.2.5 Riadenie u_1 pre CSTR 110
8.2.6 Riadenie u_2 pre CSTR 110
8.2.7 Riadenie u_3 pre CSTR 110
8.2.8 Riadenie u_4 pre CSTR 110
8.2.9 Optimálne stavové profily pre pre CSTR 110

9.1.1 Optimálna stavová trajektória 117
9.2.1 Porovnanie optimálnych trajektórií pre problémy 9.2.1 a 9.2.2 119
9.2.2 Optimálne trajektórie nájdené pre problém 9.2.3 120
9.2.3 Porovnanie odhadovanej a nameranej trajektórie stavu x_1 v probléme 9.2.5 . . 122

10.1.1 Systém reaktorov 125
10.3.1 Priebehy optimálnych koncentračných profilov zložiek A (plná čiara), B (čiarkovaná čiara) a C (bodkočiarkovaná čiara) 127
10.3.2 Priebehy optimálnych koncentračných profilov zložiek D (plná čiara), E (čiarkovaná čiara) a F (bodkočiarkovaná čiara) 127
10.3.3 Priebeh optimálnej teploty pre $P = 6$ 128
10.3.4 Priebeh optimálnej teploty pre $P = 10$ 128
10.3.5 Priebeh optimálnej teploty pre $P = 20$ 129

11.2.1 Typická ČOV 131
11.2.2 Denné variácie vstupného prietoku a koncentrácie organických zložiek 132
11.4.1 Optimálne stavové trajektórie pre $J = 39.51\%$. Vľavo: obmedzenie na celkový dusík, vpravo: priebeh okysličovania 138
11.4.2 Optimálne stavové trajektórie pre $J = 39.51\%$. Vľavo: koncentrácia S_{NO}, vpravo: rozpustený kyslík, S_{O} 138
11.4.3 Trajektórie založené na spätnoväzbových pravidlách. Vľavo: Obmedzenie na dusík v nominálnom a poruchovom prípade, vpravo: nominálna trajektória okysličovania 139

12.1.1 Štruktúra Jakobiho matice 145
12.1.2 Nečistoty v ustálenom stave 148
12.1.3 Ustálené riadenia 148
12.1.4 Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene R 149
12.1.5 Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene Q^{rebo} 149
12.1.6 Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene koncentrácie nástreku 150
12.1.7 Odozvy pri zmene nástreku. $VL(np)$ - výška hladiny vo varáku, $VL(1)$ - výška hladiny v kondenzátore 150
12.2.1 ISE - zmena žiadanej veličiny 152
12.2.2 Regulácia s konštantným riadením 153

12.2.3 ISE - regulácia s riadením s 10 úsekmi 154
12.2.4 ISE - regulácia s riadením s 20 úsekmi 154
12.2.5 MFT1 – zmena žiadanej veličiny 156
12.2.6 MFT1-4 : zmena žiadanej veličiny 157
12.2.7 Problém regulácie a minimálny čas $t_f = 15$ min 158

Zoznam tabuliek

6.3.1 Štatistika pre metódu prídavných premenných . . . 76
6.3.2 Štatistika pre ostatné metódy . . . 76

10.3.1 Vplyv počtu intervalov P na hodnotu účelovej funkcie J_0 . . . 126

11.2.1 Priemerné zloženie vstupnej koncentrácie . . . 132
11.2.2 Stavové premenné modelu . . . 133
11.2.3 Počiatočná koncentrácia zložiek v prevzdušňovači . . . 133

12.2.1 Štatistika pre ISE problémy . . . 155
12.2.2 Štatistika pre MFT problémy . . . 158

Časť I

Teoretické základy

Kapitola 1

Optimálne riadenie procesov

Táto kapitola sa zaoberá teoretickými základmi dynamickej optimalizácie. Vysvetlené sú tri základné pohľady a prístupy: variačný počet, Pontrjaginov princíp minima a Bellmanovo dynamické programovanie. V druhej časti kapitoly je pre lineárne systémy vysvetlený návrh spätnoväzbového optimálneho riadenia.

1.1 Formulácia úlohy optimálneho riadenia a princíp minima

Pri riadení procesov bolo formulovaných a vyriešených mnoho úloh optimálneho riadenia. Jednu takúto úlohu, ktorá vedie k optimálnemu spätnoväzbovému riadeniu procesov so sústredenými parametrami môžeme formulovať nasledovne (Bryson a Ho, 1975; Kirk, 1970; Lee a Markus, 1967; Pontryagin, 1964; Štecha, 1999; Víteček a Vítečková, 2002; Corriou, 2004).

Majme riadený proces, ktorého matematický model je v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0} \tag{1.1.1}$$

pričom $\boldsymbol{x}$ je n-rozmerný vektor stavových veličín a $\boldsymbol{u}$ je m-rozmerný vektor riadiacich (akčných) veličín. $\boldsymbol{f}$ je n-rozmerová vektorová funkcia, o ktorej predpokladáme, že je spojito diferencovateľná podľa všetkých premenných.

Úlohou optimálneho riadenia je nájsť takú trajektóriu $\boldsymbol{u}(t)$, kde $t \in [t_0, t_f]$, aby funkcionál v Bolzovom tvare

$$J(\boldsymbol{u}(t)) = G_{tf}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

dosiahol minimálnu hodnotu. Predpokladá sa, že na prvky vektora $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{u}$ nie sú kladené ohraničenia. G_{tf} a F sú spojito diferencovateľné skalárne funkcie.

Z praktických úloh riadenia môžu vyplynúť rôzne ďalšie požiadavky a ohraničenia, ktoré treba zahrnúť do formulácie úlohy riadenia. Jedná sa najmä o ohraničenia na riadiace veličiny, ohraničenia na stavové veličiny, ďalšie požiadavky na koncový stav vektora $\boldsymbol{x}(t_f)$. Môžu existovať úlohy s voľným koncovým časom, alebo s pevným koncovým časom t_f.

Predpokladajme, že optimálne riadenie $\boldsymbol{u}^*(t)$ existuje. Pre všetky možné riadenia $\boldsymbol{u}(t)$ platí:

$$J\left[\boldsymbol{u}(t)\right] \geq J\left[\boldsymbol{u}^*(t)\right] \tag{1.1.3}$$

Vzťah (1.1.3) platí vo všeobecnosti. Môže sa stať, že $\boldsymbol{u}^*(t)$, ktoré vyhovuje rovnici (1.1.3) neexistuje. Dokázať problém existencie optimálneho riadenia je matematicky ťažké. V aplikáciách si často pomáhame intuíciou a na základe nej predpokladáme existenciu optimálneho riadenia. Dôkaz existencie je založený na Hamiltonovej-Jacobiho rovnici.

Za účelom vyriešenia nami formulovanej úlohy riadenia budeme predpokladať existenciu optimálneho riadenia $\boldsymbol{u}^*(t)$. Odvodíme podmienky, ktorým musí vyhovovať. Jedná sa o podmienky nevyhnutné, ktoré vyplývajú zo zmeny J pri malej odchýlke $\boldsymbol{u}(t)$ od $\boldsymbol{u}^*(t)$. Pokúsime sa teda riadiacu veličinu veľmi málo zmeniť oproti $\boldsymbol{u}^*(t)$ a určiť nevyhnutné podmienky.

Nech $\boldsymbol{u}^*(t)$ je optimálne riadenie a $\boldsymbol{x}^*(t)$ optimálna odozva systému daná rovnicou (1.1.1) na toto optimálne riadenie. Budeme predpokladať, že odozva na variáciu riadiacej veličiny $\delta\boldsymbol{u}(t)$ je variácia $\delta\boldsymbol{x}(t)$. Teraz môžeme písať odozvu systému

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t) + \delta\boldsymbol{x}(t) \tag{1.1.4}$$

ktorá zodpovedá riadeniu

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*(t) + \delta\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1.5}$$

Ďalej môžeme písať

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.6}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.7}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.8}$$

Z rovnice (1.1.8) vyplýva, že pre lineárne operátory $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ a δ platí komutatívny zákon. Rozvojom do Taylorovho radu v okolí optimálneho stavu platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}^*,\, \boldsymbol{u}^*) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^* \delta\boldsymbol{x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^* \delta\boldsymbol{u} \tag{1.1.9}$$

s tým, že sa berú do úvahy len lineárne členy. Parciálne derivácie v rovnici (1.1.9) sú počítané pre optimálne trajektórie $\boldsymbol{u}^*(t)$ a $\boldsymbol{x}^*(t)$.

Výrazy

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

sú Jacobiho matice. Matice $(\cdot)^*$ sú matice zodpovedajúce optimálnym priebehom $\boldsymbol{u}^*$ a $\boldsymbol{x}^*$. S uvažovaním rovníc (1.1.1) a (1.1.8) môžeme rovnicu (1.1.9) písať

$$\frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \delta\boldsymbol{x} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) \delta\boldsymbol{u} \tag{1.1.12}$$

Funkcionál $J(\boldsymbol{u})$ dosahuje absolútne minimum pre funkciu $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*(t)$ z triedy dovolených funkcií, ak pre ľubovoľnú dovolenú funkciu $\boldsymbol{u}(t)$ platí nerovnosť (1.1.3).

Poznámka 1.1.1 *Vo všeobecnosti inkrement funkcionálu $J(\boldsymbol{x})$ je definovaný ako*

$$\Delta J = J(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) - J(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.13}$$

teda ho môžeme vyjadriť funkcionálne ako

$$\Delta J = \Delta J(\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{x}) \tag{1.1.14}$$

Prvá variácia funkcionálu δJ je časť prírastku funkcionálu ΔJ, ktorá je lineárna vo variácii $\delta\boldsymbol{x}$. Fundamentálna veta variačného počtu hovorí, že ak $\boldsymbol{x}^*$ je extremálne, potom nevyhnutnou podmienkou pre extrém funkcionálu je

$$\delta J(\boldsymbol{x}^*, \delta\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.1.15}$$

pre všetky dovolené $\delta\boldsymbol{x}$.

Na tomto mieste treba poznamenať, že existuje určitá formálna podobnosť podmienky extrému funkcie $y = y(x)$ v tvare $(dy/dx) = 0$ a vzťahu (1.1.15).

Dá sa ukázať, že ak prírastok funkcionálu ΔJ a jeho variácia δJ sú spojité funkcionály a variácia $\delta\boldsymbol{u}$ dosahuje kladné a záporné hodnoty, potom rovnosť

$$\delta J = 0 \tag{1.1.16}$$

je nevyhnutnou podmienkou extrému. Ak sú dovolené len jednostranné variácie, napr. $\delta\boldsymbol{u} \geq 0$, potom $\delta J = 0$ nie je nevyhnutnou podmienkou extrému.

Pre variáciu funkcionálu (1.1.2) platí

$$\delta J = \left(\frac{\partial G_{tf}}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\right)^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \delta\boldsymbol{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \delta\boldsymbol{u}\right] \mathrm{d}t \tag{1.1.17}$$

Parciálne derivácie v (1.1.17) sú počítané pre optimálne trajektórie.

Rovnica (1.1.17) platí pre pevný koncový čas t_f. Koncový stav systému $\boldsymbol{x}(t_f)$ uvažujeme voľný.

Definujme adjungovaný (združený) vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ a upravme rovnicu (1.1.12) nasledovne

$$\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) \delta\boldsymbol{u} \tag{1.1.18}$$

Integrovaním rovnice (1.1.18) v hraniciach od $t = t_0$ do $t = t_f$ dostaneme

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \delta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) \delta\boldsymbol{u}\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.19}$$

Spočítaním rovníc (1.1.17) a (1.1.19) môžeme pre δJ písať

$$\begin{aligned} \delta J \;&=\; \left(\frac{\partial G_{tf}}{\partial \boldsymbol{x}\,(t_f)}\right)^T \delta\boldsymbol{x}(t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\right] \delta\boldsymbol{x} + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)\right] \delta\boldsymbol{u}\right\} \mathrm{d}t \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\mathrm{d}\,(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Deriváciou člena $\boldsymbol{\lambda}^T\delta\boldsymbol{x}$ dostaneme

$$\boldsymbol{\lambda}^T\frac{\mathrm{d}(\delta\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\delta\boldsymbol{x}\right) - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^T}{\mathrm{d}t}\delta\boldsymbol{x} \tag{1.1.21}$$

a rovnica (1.1.20) bude

$$\begin{aligned}\delta J \;&=\; \left(\frac{\partial G_{tf}}{\partial\boldsymbol{x}(t_f)}\right)^T\delta\boldsymbol{x}(t_f)\\ &+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^T}{\mathrm{d}t}\right]\delta\boldsymbol{x}+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{u}}\right)^T+\boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)\right]\delta\boldsymbol{u}\right\}\mathrm{d}t\\ &+\boldsymbol{\lambda}^T\delta\boldsymbol{x}|_{t=t_0}-\boldsymbol{\lambda}^T\delta\boldsymbol{x}|_{t=t_f}\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Ak zavedieme Hamiltonovu funkciu

$$H = F + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{u}) \tag{1.1.23}$$

a ak adjungovaný vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{1.1.24}$$

potom pre pevný začiatočný stav $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, pre ktorý platí $\delta\boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{0}$, je nevyhnutná podmienka optimálneho riadenia daná ako

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{u}}\right)^T\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1.25}$$

pričom koncová podmienka pre adjungovaný vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ bude

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial G_{tf}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)_{t=t_f} \tag{1.1.26}$$

Rovnica (1.1.25) udáva vzťah medzi variáciou funkcionálu a variáciou riadenia. Ak nie sú všetky prvky vektora $\boldsymbol{x}(t_f)$ voľné, potom variácie riadenia nie sú ľubovoľné. Dá sa ukázať, že v úlohách s voľnými ako aj pevnými koncovými bodmi dostávame ekvivalentný výsledok.

Ak predpokladáme, že variácia $\delta\boldsymbol{u}(t)$ je ľubovoľná (teda implicitne $\boldsymbol{u}(t)$ uvažujeme ako neohraničené), ak platí vzťah

$$\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \tag{1.1.27}$$

potom je nevyhnutná podmienka pre extrém (minimum) funkcionálu splnená.

Ak riadiace veličiny majú ohraničenia

$$-\alpha_j \le u_j(t) \le \beta_j, \quad j = 1,\,2,\,\ldots, \tag{1.1.28}$$

kde α_j a β_j sú konštanty určujúce najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu prvkov u_j vektora $\boldsymbol{u}$, potom $\delta\boldsymbol{u}(t)$ nemôže byť ľubovoľná a (1.1.27) nezabezpečí nevyhnutnú podmienku pre extrém. Ak riadiaca veličina u_j je na svojom dolnom ohraničení, môže len platiť, že $\delta u_j > 0$. Aby platilo $\delta J > 0$ v rovnici (1.1.25), je nutné aby $\frac{\partial H}{\partial u_j} > 0$

$$u_j^* = -\alpha_j, \quad \text{ak} \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} > 0 \tag{1.1.29}$$

Ak riadiaca veličina u_j je na svojom hornom ohraničení, môže len platiť, že $\delta u_j < 0$. Preto je opäť z rovnice (1.1.25) vyžadované, aby platilo

$$u_j^* = \beta_j, \quad \text{ak} \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} < 0 \tag{1.1.30}$$

V obidvoch prípadoch je zrejmé, že riadiaca veličina bude minimalizovať H, keď sa bude nachádzať na ohraničení.

Nevyhnutné podmienky optimálneho riadenia $\boldsymbol{u}^*(t)$ pre ľubovoľnú variáciu $\delta\boldsymbol{u}$ vyplývajú teda z rovnice (1.1.27).

Zhrnutie dôležitých rovníc teda dáva

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{1.1.31}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.32}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \tag{1.1.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} - \left(\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \tag{1.1.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{1.1.35}$$

Deriváciu H podľa času môžeme písať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.36}$$

Z rovníc (1.1.32) a (1.1.24) vyplýva

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.1.37}$$

Pretože platí rovnica (1.1.27), pravá strana rovnice (1.1.37) sa rovná nule, teda

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.1.38}$$

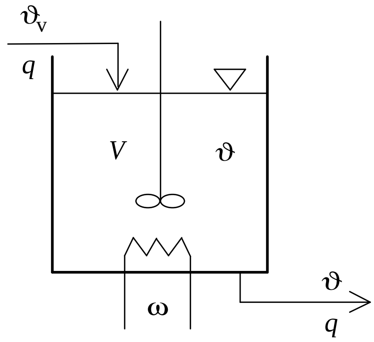
za predpokladu neohraničeného riadenia, alebo za predpokladu, že riadenie nikdy nedosiahne ohraničenie. Z rovnice (1.1.38) vyplýva, že Hamiltonova funkcia je v čase t počas trvania optimálnej odozvy systému konštantná.

Príklad 1.1.1: *Optimálne riadenie výmenníka tepla*

Majme výmenník tepla (obr. 1.1.1), v ktorom ohrievame kvapalinu. Predpokladáme že vo výmenníku je ideálne miešanie a straty tepla do okolia sú nulové. Zádrž vo výmenníku, ako aj prietok na vstupe a výstupe výmenníka sú v čase konštantné. Matematický model výmenníka má tvar

$$\frac{V}{q}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t'} + \vartheta = \vartheta_v + \frac{\omega}{q\rho c_p}$$

kde ϑ je výstupná teplota, ϑ_v – vstupná teplota, t' - čas, ω – tepelný príkon, ρ – hustota kvapaliny, V – objem kvapaliny vo výmenníku, q – objemový prietok kvapaliny, c_p – špecifická tepelná kapacita.



Obr. 1.1.1: Výmenník tepla

Označme

$$\vartheta_u = \frac{\omega}{q\rho c_p}$$

Pretože $\omega/q\rho c_p$ má rozmer teploty, môžeme ϑ_u považovať za riadiacu teplotu. Predpokladajme, že dostatočne dlhý čas máme konštantnú riadiacu teplotu $\vartheta_u = \vartheta_{u0}$. Ak teplota na vstupe do výmenníka bude konštantná, teda $\vartheta_v = \vartheta_{v0}$, potom výmenník tepla v ustálenom stave bude opísaný rovnicou

$$\vartheta_0 = \vartheta_{v0} + \vartheta_{u0}$$

Uvažujme teraz nový ustálený stav pre riadiacu teplotu ϑ_{u1} , ktorý je daný rovnicou

$$\vartheta_1 = \vartheta_{v0} + \vartheta_{u1}$$

Úlohou optimálneho riadenia v otvorenom obvode bude určiť priebeh $\vartheta_u(t')$ z hodnoty ϑ_{u0} na hodnotu ϑ_{u1} tak, aby nejaké kritérium kvality prechodového javu (funkcionál) bolo minimálne. Toto kritérium kvality (funkcionál) definujeme neskôr. Prv než začneme riešiť problém, definujeme si stavovú veličinu ako odchýlku od koncového ustáleného stavu.

Stavovú veličinu definujeme v bezrozmernom tvare

$$x(t') = \frac{\vartheta(t') - \vartheta_1}{\vartheta_{u1} - \vartheta_{v0}}$$

Riadiacu (akčnú) veličinu definujeme takto

$$u(t') = \frac{\vartheta_u(t') - \vartheta_{u1}}{\vartheta_{u1} - \vartheta_{v0}}$$

Ďalej definujeme bezrozmernú časovú premennú

$$t = \frac{q}{V} t'$$

Model výmenníka teraz môžeme písať

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = u(t)$$

so začiatočnou podmienkou

$$x(0) = x_0 = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{\vartheta_{u1} - \vartheta_{v0}}$$

Majme teda riadený systém, ktorý je opísaný diferenciálnou rovnicou prvého rádu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + x = u$. Budeme hľadať taký priebeh $u(t)$, aby sme dosiahli minimum funkcionálu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[x^2(t) + ru^2(t)\right] \mathrm{d}t$$

kde $t_0 = 0$ je začiatočný čas, v ktorom je určená hodnota $x(0) = x_0$, t_f – čas určujúci hornú hranicu uvažovaného časového intervalu, $r > 0$ – váhový koeficient.

Koncová hodnota $x(t_f)$ je nie zadaná, teda budeme riešiť problém s voľným koncovým bodom. Keď je zadaná začiatočná podmienka, potom J závisí len od $u(t)$, pretože $u(t)$ určuje $x(t)$ podľa rovnice riadeného systému.

Hamiltonova funkcia pre náš prípad bude

$$H = x^2 + ru^2 + \lambda(-x + u)$$

Ďalej musí platiť

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + \lambda$$

Koncová podmienka pre adjungovanú veličinu $\lambda(t)$ je

$$\lambda(t_f) = 0$$

Pre prípad neohraničenej riadiacej veličiny minimum H podľa u dostaneme z rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

z ktorej vyplýva

$$2ru + \lambda = 0$$

Optimálne riadenie teda je

$$u^*(t) = -\frac{1}{2r}\lambda^*(t)$$

Treba poznamenať, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2r > 0$$

takže pre $u(t)$ v skutočnosti H dosahuje absolútne minimum.

Vyriešením systému rovníc

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\lambda^*}{\mathrm{d}t} &= -2x^* + \lambda^* \\
\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} &= -x^* - \frac{1}{2r}\lambda^*
\end{aligned}$$

so začiatočnou a koncovou podmienkou

$$\lambda^*(t_f) = 0$$

$$x^*(0) = x_0$$

môžeme dostať optimálne riadenie zo vzťahu $u^*(t) = -(1/2r)\lambda^*(t)$. Vyššie uvedený systém diferenciálnych rovníc má jediné riešenie

$$\begin{aligned} \lambda^*(t) &= \frac{2x_0}{\beta}\sinh\gamma(t_f - t) \\ x^*(t) &= \frac{x_0}{\beta}\left[\gamma\cosh\gamma(t_f - t) + \sinh\gamma(t_f - t)\right] \end{aligned}$$

pričom $\beta = \gamma\cosh\gamma t_f + \sinh\gamma t_f$, $\gamma = \sqrt{1 + 1/r}$. To, že $\lambda^*(t)$ a $x^*(t)$ sú riešením daného systému diferenciálnych rovníc, môžeme jednoducho dokázať priamo dosadením. Dá sa ukázať (veta o jednoznačnosti riešenia diferenciálnych rovníc), že toto riešenie je jediné. Ak riešenie problému optimálneho riadenia existuje, potom optimálne riadenie musí vyhovovať nevyhnutnej podmienke

$$u^*(t) = \frac{x_0}{r'\beta}\sinh\gamma(t_f - t)$$

Existenciu optimálneho riadenia možno dokázať aj matematicky, avšak v praktických aplikáciách sa existencia optimálneho riadenia posudzuje z fyzikálneho rozboru. $u^*(t)$ dáva priebeh optimálneho riadenia a $x^*(t)$ priebeh odozvy na optimálny priebeh riadiacej veličiny.

V mnohých aplikáciách neprichádza do úvahy konečný čas t_f. Časový interval, v ktorom hľadáme optimálne riadenie, je od času $t = 0$ do času $t = \infty$. Priebeh optimálnej odozvy a optimálneho riadenia potom je

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x_0 e^{-\gamma t} \\ u^*(t) &= -\frac{x_0}{r(1+\gamma)}e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

Na obr. 1.1.2 sú optimálne priebehy $u(t)$ a $x(t)$ pre $t_f = \infty$, $x_0 = 1$, $r = 1$.

1.2 Dynamické programovanie

V päťdesiatych rokoch minulého storočia Bellman a jeho spolupracovníci rozpracovali nový prístup k riešeniu variačných úloh – *metódu dynamického programovania*. Metóda dynamického programovania sa často používa pri analýze a syntéze systémov automatického riadenia (Bellman, 1957).

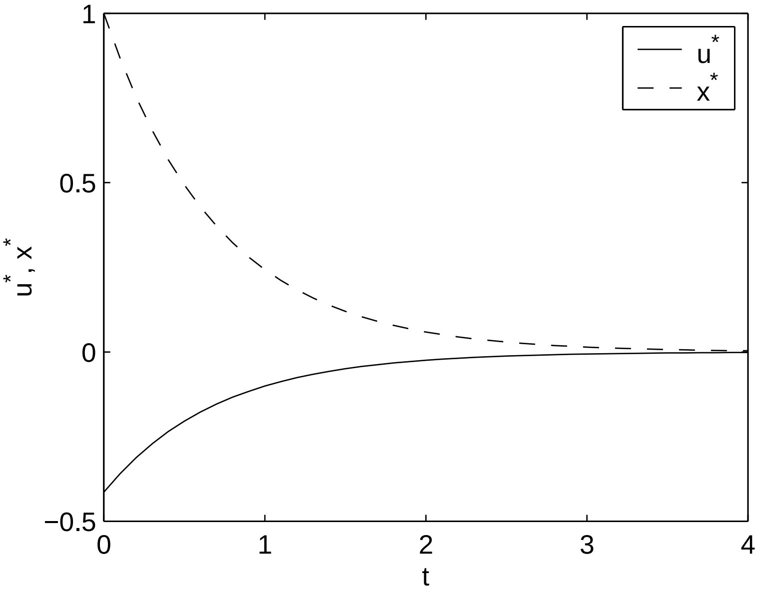
Skúmajme vektorovú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{1.2.1}$$

kde $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{x}$ majú rozmer n, $\boldsymbol{u}$ má rozmer m. Vektor riadiacich veličín $\boldsymbol{u}$ vyhovuje ohraničeniam

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} \tag{1.2.2}$$

kde $\boldsymbol{U}$ je niektorá uzavretá oblasť Euklidovho priestoru E_m.



Obr. 1.1.2: Optimálne priebehy vstupnej a stavovej veličiny výmenníka tepla

Kritérium optimalizácie bude funkcionál

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) \mathrm{d}t \tag{1.2.3}$$

Horná hranica integrálu – koncový čas $t_f > t_0$ môže byť pevný alebo voľný. Majme prípad, v ktorom koncový čas t_f sa rovná nejakej konštante.

Definujme novú stavovú veličinu

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} F\left(\boldsymbol{x}(\tau),\, \boldsymbol{u}(\tau),\, \tau\right) \mathrm{d}\tau \tag{1.2.4}$$

Úloha minimalizácie funkcionálu J je ekvivalentná minimalizácii stavu $x_{n+1}(t_f)$ systému, rovnice ktorého môžeme napísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) \tag{1.2.5}$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}^T &= \left(\boldsymbol{x}^T,\, x_{n+1}\right) \\ \tilde{\boldsymbol{f}}^T &= \left(\boldsymbol{f}^T,\, F\right) \end{aligned}$$

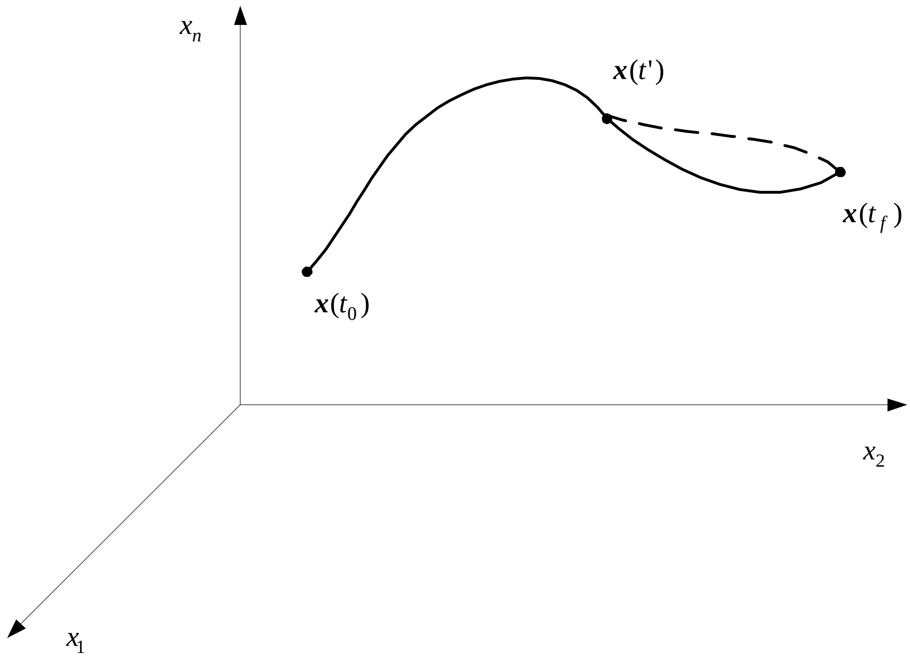
Vektor začiatočných podmienok je daný

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t_0) = \left(\boldsymbol{x}^T(t_0),\, 0\right) \tag{1.2.6}$$

Ak platí $F = 1$ (a voľný koncový čas), potom ide o časovo optimálne riadenie.

Principiálne možno postupovať aj tak, že zavedieme ďalšiu stavovú veličinu $x_0(t) = t$ a ešte jednu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t} = 1 \tag{1.2.7}$$



Obr. 1.2.1: Optimálna trajektória v n-rozmernom stavovom priestore

so začiatočnou podmienkou $x_0(t_0) = 0$. V tomto prípade sa namiesto času skúma stavová veličina x_0 a úloha sa mení na vyšetrovanie systému typu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t)\right) \tag{1.2.8}$$

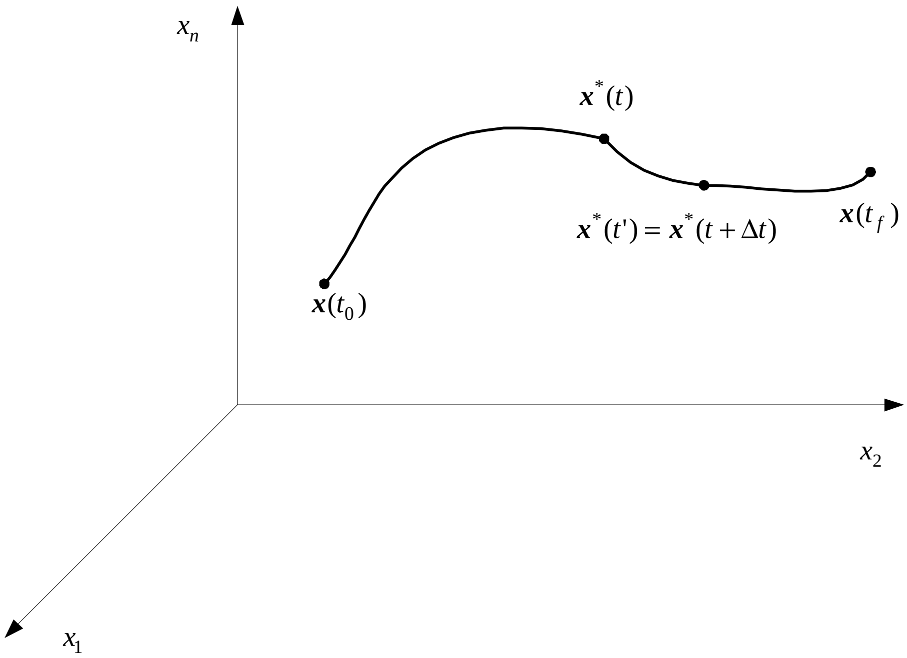
namiesto systému (1.2.1).

Dynamické programovanie je založené na princípe optimálnosti, ktoré ako prvý formuloval Bellman. Skúmajme optimálnu trajektóriu v n-rozmernom stavovom priestore (obr. 1.2.1). Polohu pohybujúceho sa bodu v čase $t = t'(t_0 < t' < t_f)$ označíme $\boldsymbol{x}(t')$. Tento bod rozdeľuje trajektóriu na dve časti.

Princíp optimálnosti hovorí, že úsek optimálnej trajektórie z bodu $\boldsymbol{x}(t')$ do bodu $\boldsymbol{x}(t_f)$ je tiež optimálnou trajektóriou. Z toho vyplýva, že pre počiatočný stav $\boldsymbol{x}(t')$ tá časť trajektórie, ktorá zodpovedá prechodu z bodu $\boldsymbol{x}(t')$ do bodu $\boldsymbol{x}(t_f)$ je optimálna a nezávisí od predhistórie systému, t. j. od toho, akým spôsobom sa systém dostal do bodu $\boldsymbol{x}(t')$. Predpokladajme, že toto neplatí, t. j. nájdeme trajektóriu (na obr. 1.2.1 je označená prerušovanou čiarou), pozdĺž ktorej je hodnota funkcionálu menšia. Hodnota funkcionálu J sa rovná súčtu jeho hodnôt vypočítaných na dvoch častiach trajektórie. Z toho vyplýva, že možno nájsť trajektóriu, ktorá bude lepšia ako východisková. Za účelom toho treba nájsť vektor dovoleného riadenia tak, aby prvá časť trajektórie ostala ako predtým a jej druhá časť aby bola totožná s prerušovanou čiarou. Takýmto spôsobom sme dospeli k protirečeniu s hypotézou optimálnosti pôvodnej trajektórie. Z predchádzajúceho vyplýva, že nemožno zlepšiť druhú časť trajektórie, a že teda druhá časť optimálnej trajektórie je tiež sama o sebe optimálna.

Bellmanov princíp optimálnosti umožňuje získať dostatočne všeobecné podmienky optimalizácie, ktoré možno použiť tak pre spojité, ako aj pre nespojité systémy. Nehľadiac na jednoduchosť tohto princípu, môžeme na jeho základe získať nevyhnutné podmienky pre optimálnu trajektóriu.

Princíp optimálnosti možno formulovať i takto: optimálna stratégia nezávisí od predhistórie a je určená len začiatočnou podmienkou a koncovým cieľom.



Obr. 1.2.2: Optimálna trajektória

Zvláštnosť metódy, ktorá využíva princíp optimálnosti, spočíva v tom, že časti optimálnej trajektórie sa určujú od konca trajektórie, začínajúc z predpísaného koncového stavu $\boldsymbol{x}(t_f)$. Ešte raz zdôrazňujeme, že v súlade s princípom optimálnosti je úsek trajektórie, ktorý končí v koncovom bode optimálnej trajektórie, optimálny. Inak povedané, optimálnosť tohto úseku vždy vyplýva z optimálnosti celej trajektórie.

Pri delení trajektórie na niekoľko úsekov možno, pohybujúc sa od konca trajektórie, presvedčiť sa o optimálnosti posledného úseku trajektórie a potom o optimálnosti všetkých predchádzajúcich úsekov. Optimálnosť jednotlivých úsekov trajektórie závisí od optimálnosti celej trajektórie. Opačné tvrdenie neplatí, t.j. optimálnosť celej trajektórie nevyplýva z optimálnosti jednotlivých úsekov.

Majme vektorovú diferenciálnu rovnicu nelineárneho riadeného objektu v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) \tag{1.2.9}$$

Funkcionál, ktorý má byť minimálny, je

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) \mathrm{d}t \tag{1.2.10}$$

Predpokladajme, že $\boldsymbol{x}^*(t)$ je optimálna trajektória, ktorej začiatočný stav je $\boldsymbol{x}(t_0)$ a koncový stav je $\boldsymbol{x}(t_f)$ (obr. 1.2.2). Označme pomocou $J^*(\boldsymbol{x}^*(t_0),\, t_0)$ minimum funkcionálu J. Z princípu optimálnosti vyplýva, že úsek trajektórie, ktorého začiatočný stav je $\boldsymbol{x}^*(t)$, koncový stav je $\boldsymbol{x}(t_f)$ a ktorý vyhovuje riešeniu rovnice (1.2.9), je tiež optimálny.

Z toho vyplýva, že platí

$$J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right) = \min_{\boldsymbol{u}\in U} \int_{t}^{t_f} F\left(\boldsymbol{x}^*(\tau),\, \boldsymbol{u}(\tau),\, \tau\right) \mathrm{d}\tau \tag{1.2.11}$$

Táto rovnica nazýva *Bellmanova funkcionálna rovnica*. Pre dostatočne malý interval Δt a pre čas $t' = t + \Delta t$ minimálna hodnota funkcionálu, ktorá sa určí na úseku optimálnej trajektórie sa začiatočným stavom $\boldsymbol{x}^*(t') = \boldsymbol{x}^*(t+\Delta t)$ a s koncovým stavom $\boldsymbol{x}(t_f)$, je daná výrazom

$$J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t'),\, t'\right) = \min_{\boldsymbol{u}\in U} \int_{t'}^{t_f} F\left(\boldsymbol{x}^*(\tau),\, \boldsymbol{u}(\tau),\, \tau\right) \mathrm{d}\tau \tag{1.2.12}$$

Na ľavej strane rovnice (1.2.12) argumenty $\boldsymbol{x}^*(t')$ a t' označujú začiatočný stav na vyšetrovanom úseku trajektórie. Z porovnania integrálov (1.2.11) a (1.2.12) dostaneme

$$\begin{aligned} J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right) &= \min_{\boldsymbol{u}\in U} \left\{ \int_{t'}^{t_f} F\left(\boldsymbol{x}^*(\tau),\, \boldsymbol{u}(\tau),\, \tau\right) \mathrm{d}\tau + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t \right\} + o_1\left(\Delta t\right) && (1.2.13)\\ &= \min_{\boldsymbol{u}\in U} \left\{ J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t'),\, t'\right) + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t \right\} + o_1\left(\Delta t\right) && (1.2.14)\end{aligned}$$

kde $o_1(\Delta t)$ je zvyšok, pre ktorý platí

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{o_1\left(\Delta t\right)}{\Delta t} = 0 \tag{1.2.15}$$

pretože interval Δt má konečnú hodnotu v pravých častiach rovníc (1.2.13) a (1.2.14), treba člen $o_1(\Delta t)$ uvažovať.

Rozkladom do Taylorovho radu dostaneme

$$\boldsymbol{x}\left(t'\right) = \boldsymbol{x}\left(t+\Delta t\right) = \boldsymbol{x}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Delta t + o_2\left(\Delta t\right) \tag{1.2.16}$$

$o_2(\Delta t)$ je zvyšok. S uvažovaním rovnice (1.2.9) môžeme písať

$$\boldsymbol{x}(t') = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t + o_2\left(\Delta t\right) \tag{1.2.17}$$

Keď dosadíme $\boldsymbol{x}(t')$ z rovnice (1.2.17) do výrazu $J^*(\boldsymbol{x}(t'),\, t')$ a rozložíme ho do Taylorovho radu za predpokladu, že existujú parciálne derivácie $\partial J^*/\partial x_i$, $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ a $\partial J^*/\partial t$, dostaneme

$$\begin{aligned} J^*\left(\boldsymbol{x}(t'),\, t'\right) &= J^*\left(\boldsymbol{x}\left(t+\Delta t\right),\, t+\Delta t\right) && (1.2.18)\\ &= J^*\left\{\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t + o_2\left(\Delta t\right),\, t+\Delta t\right\} && (1.2.19)\\ &= J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial x_i} f_i\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t \\ &+ \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial t}\Delta t + o_3\left(\Delta t\right) && (1.2.20)\end{aligned}$$

$o_3(\Delta t)$ je zvyšok. Keď zavedieme označenie

$$\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1},\, \frac{\partial J^*}{\partial x_2},\, \cdots,\, \frac{\partial J^*}{\partial x_n}\right)^T \tag{1.2.21}$$

potom rovnicu (1.2.20) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} J^*\left(\boldsymbol{x}(t'),\, t'\right) &= J^*(\boldsymbol{x}(t),\, t) \\ &\quad + \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^T} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\Delta t + \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial t}\Delta t + o_3\left(\Delta t\right) && (1.2.22)\end{aligned}$$

Tento výraz dosadíme do pravej strany rovnice (1.2.14) s uvažovaním $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t)$. Pretože výrazy $J^*(\boldsymbol{x}(t),\, t)$ a $\partial J^*/\partial t$ nie sú závislé od $\boldsymbol{u}(t)$, možno ich vyňať pred operátor min. Keď zjednodušíme získaný výraz a predelíme celú rovnicu Δt, dostaneme vzťah

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial t} = \\ &\qquad \min_{\boldsymbol{u}\in U} \left\{ \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^{*T}} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) \right\} + \frac{o_4\left(\Delta t\right)}{\Delta t} && (1.2.23)\end{aligned}$$

$o_4(\Delta t)$ je zvyšok. Ak $\Delta t \to 0$, môžeme posledný člen na pravej strane rovnice zanedbať a dostaneme *Hamiltonovu-Jacobiho rovnicu* (niekedy sa nazýva aj Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova rovnica)

$$-\frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial t} = \min_{\boldsymbol{u}\in U}\left\{\frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^{*T}}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right) + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}(t),\, t\right)\right\} \tag{1.2.24}$$

Táto parciálna diferenciálna rovnica je *základnou rovnicou dynamického programovania pre spojité systémy*. Prvá časť rovnice je po minimalizácii nezávislá od riadenia $\boldsymbol{u}(t)$. Rovnica platí len pre optimálne riadenia $\boldsymbol{u}^*(t)$. Hamiltonova-Jacobiho rovnica sa často používa v tvare

$$-\frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial t} = \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^{*T}}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}^*(t),\, t\right) + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}^*(t),\, t\right) \tag{1.2.25}$$

Pretože $(\partial J^*/\partial t + (\partial J^*/\partial \boldsymbol{x}^T)\boldsymbol{f})$ sa rovná $\mathrm{d}J^*/\mathrm{d}t$, môžeme túto rovnicu napísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\mathrm{d}t} + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}^*(t),\, t\right) = 0 \tag{1.2.26}$$

Analogicky sa základná rovnica dynamického programovania (1.2.24) môže použiť v tvare

$$\min_{\boldsymbol{u}\in U}\left\{\frac{\mathrm{d}J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, t\right)}{\mathrm{d}t} + F\left(\boldsymbol{x}^*(t),\, \boldsymbol{u}^*(t),\, t\right)\right\} = 0 \tag{1.2.27}$$

Z odvodenia základnej rovnice dynamického programovania vyplýva, že Hamiltonova-Jacobiho rovnica v tvare (1.2.24) alebo (1.2.27) určuje nevyhnutné podmienky optimálnosti. Za určitých predpokladov dostatočnú podmienku optimálnosti možno formulovať analogicky.

1.3 Pontrjaginov princíp minima

V tejto časti odvodíme tretí prístup k optimálnemu riadeniu – Pontrjaginov princíp minima (Pontryagin, 1964). Budeme pritom vychádzať z dynamického programovania.

Uvažujme, že úloha optimálneho riadenia má riešenie a označme vektor adjungovaných premenných

$$\frac{\partial J\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.3.1}$$

takže Hamiltonova funkcie bude v tvare

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{1.3.2}$$

Rovnicu (1.2.25) môžeme potom písať v tvare (vynecháme označenie optimálnych premenných hviezdičkou)

$$-\frac{\partial J}{\partial t} = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \tag{1.3.3}$$

Zderivovaním podľa $\boldsymbol{x}$ dostaneme

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \tag{1.3.4}$$

Podobne, zderivovaním (1.3.1) podľa t získame

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial^2 J}{\partial t \partial x}, \qquad -\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial t} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \tag{1.3.5}$$

Na poradí derivovania nezáleží. Porovnaním ľavých a pravých strán ostatných rovníc dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{1.3.6}$$

Prvá z rovníc reprezentuje diferenciálne rovnice systému, druhá systém diferenciálnych rovníc adjungovaných premenných.

Ak má teda úloha optimálneho riadenia riešenie, potom musí mať Hamiltonova funkcia globálne minimum podľa riadenia, tj.

$$H^* = \min_{\boldsymbol{u}\in U} H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \tag{1.3.7}$$

a musia platiť predošlé diferenciálne rovnice. To je podstata Pontrjaginovho princípu minima.

1.4 Spätnoväzbové optimálne riadenie lineárnych systémov

Optimálne riadenie dynamického systému prezentované v časti 1.1 je možné realizovať aj pomocou spätnej väzby.

Úlohou optimálneho spätnoväzbového riadenia lineárneho časovoinvariantného dynamického systému možno formulovať nasledovne (Mikleš a Hutla, 1986).

Majme úplne riaditeľný systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.4.1}$$

so začiatočnou podmienkou v čase $t_0 = 0$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.4.2}$$

a voľnou koncovou podmienkou $\boldsymbol{x}(t_f)$, pričom t_f je známe. Ďalej majme funkcionál

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right) \mathrm{d}t \tag{1.4.3}$$

kde $\boldsymbol{Q}_{t_f}$ a $\boldsymbol{Q}$ sú reálne symetrické kladne semidefinitné váhové matice a $\boldsymbol{R}$ je reálna symetrická kladne definitná váhová matica.

Úlohou je nájsť spätnoväzbový zákon riadenia

$$\boldsymbol{u} = \text{funkcia}(\boldsymbol{x}) \tag{1.4.4}$$

tak, aby J bolo minimálne pre každé $\boldsymbol{x}_0$.

Optimálne spätnoväzbové riadenie zabezpečí prechod systému v čase od nuly do času t_f zo stavu $\boldsymbol{x}_0$ do okolia stavu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Hamiltonova funkcia pre náš prípad bude

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + u^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}) \tag{1.4.5}$$

kde adjungovaný vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{1.4.6}$$

s koncovou podmienkou

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{x}(t_f) \tag{1.4.7}$$

Pre neohraničené $\boldsymbol{u}(t)$ podmienka optimálneho riadenia je

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \tag{1.4.8}$$

Optimálne riadenie $\boldsymbol{u}$ je dané vzťahom

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.4.9}$$

$\boldsymbol{R}^{-1}$ vždy existuje, pretože $\boldsymbol{R}$ je štvorcová symetrická kladne definitná matica.

Optimálne riadenie musí minimalizovať hamiltonián. Nevyhnutná podmienka $\partial H/\partial \boldsymbol{u}$ dáva len extrém podľa $\boldsymbol{u}$. Aby extrém bol minimom pre $\boldsymbol{u}$, matica $\partial^2 H/\partial \boldsymbol{u}^2$ rozmeru $m \times m$ musí byť kladne definitná. Z rovnice (1.4.5) vyplýva

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{u}^2} = \boldsymbol{R} \tag{1.4.10}$$

Pretože o matici $\boldsymbol{R}$ sme predpokladali, že je kladne definitná, riadenie $\boldsymbol{u}(t)$, ktoré zodpovedá rovnici (1.4.9), skutočne minimalizuje hamiltonián.

Dosaďme teraz $\boldsymbol{u}(t)$ z rovnice (1.4.9) do rovnice (1.4.1) a dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.4.11}$$

Zavedieme označenie

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T \tag{1.4.12}$$

$\boldsymbol{S}$ je matica rozmeru $n \times n$ a pomocou nej môžeme rovnice (1.4.11) a (1.4.6) písať v tvare

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ -- \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & | & -\boldsymbol{S} \\ -- & -- & -- \\ -\boldsymbol{Q} & | & -\boldsymbol{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ -- \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix} \tag{1.4.13}$$

Posledná rovnica predstavuje $2n$ lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Jediné riešenie tohoto systému dostaneme vtedy, keď poznáme $2n$ začiatočných podmienok; n začiatočných podmienok vyplýva zo začiatočného stavu systému $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$. Zostávajúcich n podmienok je daných vzťahom (1.4.7).

Nech $\boldsymbol{\Phi}(t,\, t_0)$ je fundamentálna matica systému (1.4.13) rozmeru $2n \times 2n$, pričom $t_0 = 0$. Ak označíme $\boldsymbol{\lambda}(0)$ neznámu začiatočnú hodnotu adjungovaného vektora, potom riešenie rovnice (1.4.13) bude mať tvar

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t,\, t_0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{pmatrix} \tag{1.4.14}$$

Pre $t = t_f$ musí platiť

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t_f) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t_f,\, t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

Rozdeľme ďalej maticu $\boldsymbol{\Phi}(t_f,\, t)$, ktorá má rozmer $2n \times 2n$, na štyri matice rozmeru $n \times n$ takto

$$\boldsymbol{\Phi}(t_f,\, t) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Phi}_{11}(t_f,\, t) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t_f,\, t) \\ ------ & ---- \\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_f,\, t) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(t_f,\, t) \end{array} \right) \tag{1.4.16}$$

Rovnicu (1.4.15) môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{\Phi}_{11}(t_f,\, t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\Phi}_{12}(t_f,\, t)\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.4.17}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_f,\, t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\Phi}_{22}(t_f,\, t)\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{t_f}}\boldsymbol{x}(t_f) \tag{1.4.18}$$

Z rovníc (1.4.17) a (1.4.18) po úprave dostaneme

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = [\boldsymbol{\Phi}_{22}(t_f, t) - \boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{\Phi}_{12}(t_f, t)]^{-1}[\boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t_f, t) - \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_f, t)]\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.19}$$

za predpokladu, že inverzná matica v rovnici (1.4.19) existuje. Rovnica (1.4.19) hovorí, že adjungovaný vektor $\boldsymbol{\lambda}(t)$ a stavový vektor $\boldsymbol{x}(t)$ sú vo vzájomnom vzťahu podľa rovnice

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.20}$$

pričom

$$\boldsymbol{P}(t) = [\boldsymbol{\Phi}_{22}(t_f, t) - \boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{\Phi}_{12}(t_f, t)]^{-1}[\boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t_f, t) - \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_f, t)] \tag{1.4.21}$$

Vzťah (1.4.20) determinuje optimálnu spätnú väzbu v tvare

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.22}$$

Odvodením tejto rovnice sme našli spätnoväzbový zákon riadenia (1.4.4), ktorý zabezpečí minimalizáciu J, ktorý je určený vzťahom (1.4.3). Možno dokázať, že $\boldsymbol{P}(t)$ existuje pre ľubovoľný čas t, kde $t_0 \leq t \leq t_f$. Určenie matice $\boldsymbol{P}(t)$ z rovnice (1.4.21) je ťažké. Vzniká otázka, či nejestvuje nejaký iný spôsob určenia $\boldsymbol{P}(t)$. Odpoveď na túto otázku je kladná a spočíva v odvodení diferenciálnej rovnice, ktorej riešenie je $\boldsymbol{P}(t)$. Túto rovnicu odvodíme veľmi jednoducho nasledovne.

Predpokladajme, že riešenia rovnice (1.4.13) sú zviazané rovnicou (1.4.20) pre $t \in \langle t_0,\, t_f \rangle$.

Derivovaním rovnice (1.4.20) podľa času dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{P}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{1.4.23}$$

Keď dosadíme do rovnice (1.4.1) $\boldsymbol{u}(t)$ z rovnice (1.4.9) a potom $\boldsymbol{\lambda}(t)$ z rovnice (1.4.20), dostaneme výraz

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.24}$$

Z rovníc (1.4.23) a (1.4.24) dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.25}$$

Z rovníc (1.4.6) a (1.4.20)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [-\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t)]\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.26}$$

Z rovnosti pravých strán rovníc (1.4.25) a (1.4.26) vyplýva rovnica

$$[\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}, \quad t \in \langle t_0, t_f\rangle \tag{1.4.27}$$

Pretože $\boldsymbol{x}(t)$ je riešením homogénnej rovnice (1.4.24), matica $\boldsymbol{P}(t)$ musí vyhovovať maticovej diferenciálnej rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t) = -\boldsymbol{Q} \tag{1.4.28}$$

Porovnaním vzťahu

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{P}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f) \tag{1.4.29}$$

a vzťahu (1.4.7) dostaneme koncovú podmienku potrebnú na riešenie rovnice (1.4.28) v tvare

$$\boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{Q}_{t_f} \tag{1.4.30}$$

Rovnica (1.4.28) je maticová diferenciálna rovnica Riccatiho typu. Riešenie tejto rovnice existuje a je jediné. Dá sa ukázať, že $\boldsymbol{P}(t)$ je kladne definitná symetrická matica, t.j. platí

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}^T(t) \tag{1.4.31}$$

a ďalej, že pre systém (1.4.1) a funkcionál (1.4.3) optimálne riadenie existuje, je jediné a je určené rovnicou

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.32}$$

pričom

$$\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t) \tag{1.4.33}$$

Dôležité je uvedomiť si, že maticu $\boldsymbol{P}(t)$ možno vypočítať pred začiatkom činnosti spätnoväzbového systému.

Riaditeľnosť systému (1.4.1) nie je nevyhnutnou podmienkou toho, že optimálne riadenie je vyjadrené zákonom riadenia (1.4.32) preto, že pôsobenie neriadených prvkov vo funkcionáli J je vždy konečné, ak je konečný interval riadenia, a preto J je tiež konečný. V prípade $t_f \to \infty$ sa vyžaduje riaditeľnosť systému, aby bola zabezpečená konečná hodnota J.

Príklad 1.4.1: *Optimálne spätnoväzbové riadenie výmenníka tepla*

Majme výmenník tepla z príkladu 1.1.1, ktorý chceme optimálne riadiť pomocou spätnej väzby tak, aby sme minimalizovali funkcionál, ktorý je tiež uvedený v tomto príklade. Pre tento riadený systém $\boldsymbol{A} = -1$, $\boldsymbol{B} = 1$. Pre funkcionál platí $\boldsymbol{Q}_{t_f} = 0$, $\boldsymbol{Q} = 2$, $\boldsymbol{R} = 2r' = r$.

Optimálna spätná väzba je

$$u(t) = -\frac{1}{r}P(t)x(t)$$

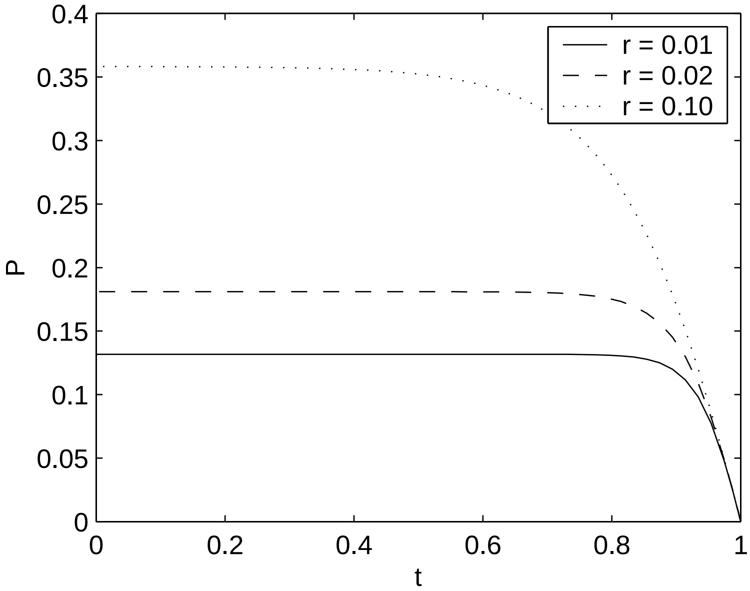
pričom $P(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice v tvare

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} - 2P(t) - \frac{P^2(t)}{r} = -2$$

s koncovou podmienkou

$$P(t_f) = 0$$

Na obr. 1.4.1 sú znázornené riešenia rovnice pre P pre rôzne hodnoty koeficientu r pre $t_f = 1$.



Obr. 1.4.1: Priebeh $P(t)$ pre rôzne hodnoty koeficientu r

Príklad 1.4.1 ilustruje veľmi dôležitú skutočnosť. Ak začíname riešiť Riccatiho maticovú diferenciálnu rovnicu v čase $t_f = \infty$, potom riešenie tejto rovnice dané prvkami matice $\boldsymbol{P}(t)$ sa ustáli na konštantných hodnotách. Takto matica $\boldsymbol{P}$, ktorej prvky sú ustálené hodnoty riešenia diferenciálnej maticovej Riccatiho rovnice, môže byť použitá pri optimálnom riadení pre všetky konečné časy so začiatkom riešenia v čase $t = 0$.

Návrh optimálneho regulátora pre prípad nekonečného koncového času sa zjednodušuje nasledovne.

Majme systém (1.4.1) so začiatočnou podmienkou (1.4.2) a funkcionál

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{1.4.34}$$

kde $\boldsymbol{Q}$ je reálna symetrická kladne semidefinitná váhová matica a $\boldsymbol{R}$ je reálna symetrická kladne definitná váhová matica.

Riešenie optimalizačného problému, t. j. minimalizáciu J pre každé $\boldsymbol{x}_0$ zabezpečí stavová spätná väzba

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.35}$$

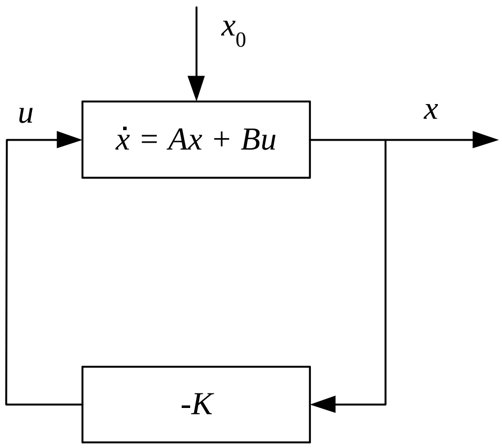
kde

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \tag{1.4.36}$$

pričom $\boldsymbol{P}$ je symetrické kladne semidefinitné riešenie maticovej Riccatiho rovnice

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q} \tag{1.4.37}$$

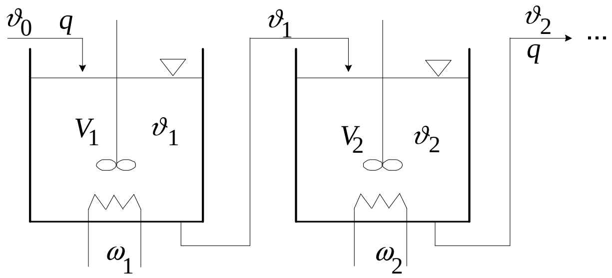
Vzťah (1.4.35) sa veľmi ľahko implementuje. Jedná sa o zákon riadenia, ktorý má spätnoväzbové vlastnosti. Keďže $\boldsymbol{K}$ je matica konštánt, spätnoväzbový optimálny regulátor je proporcionálneho typu. Pri optimálnom spätnoväzbovom riadení lineárneho systému (L) vychádzame z kvadratického kritéria (Q) a stavová spätná väzba zabezpečuje reguláciu (R) v okolí žiadanej



Obr. 1.4.2: Optimálne spätnoväzbové riadenie

veličiny $\boldsymbol{x}_w = \mathbf{0}$. Pre optimálny regulátor sa používa označenie LQR. Bloková schéma spätnoväzbového riadenia s LQR riadiacim členom je na obr. 1.4.2.

Príklad 1.4.2: *Optimálne spätnoväzbové riadenie dvoch výmenníkov tepla zapojených v sérii*
Majme dva výmenníky tepla (obr. 1.4.3), v ktorých ohrievame kvapalinu.



Obr. 1.4.3: Dva výmenníky tepla zapojené v sérii

Predpokladáme, že tepelné toky zo zdrojov do ohrievanej kvapaliny sú nezávislé od teploty kvapaliny. Predpokladáme dokonalé miešanie ohrievanej kvapaliny a nulové straty tepla do okolia. Zanedbáme akumulačnú schopnosť stien výmenníkov. Zádrže vo výmenníkoch, ako aj prietoky na vstupe a výstupe oboch výmenníkov, hustota kvapaliny, špecifická tepelná kapacita kvapaliny sú konštantné. Za týchto predpokladov matematický model výmenníkov má tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1}{q}\frac{\mathrm{d}\vartheta_1}{\mathrm{d}t'} + \vartheta_1 &= \vartheta_0 + \frac{\omega_1}{q\rho c_p} \\
\frac{V_2}{q}\frac{\mathrm{d}\vartheta_2}{\mathrm{d}t'} + \vartheta_2 &= \vartheta_1 + \frac{\omega_2}{q\rho c_p}
\end{aligned}
$$

kde ϑ_1 je teplota kvapaliny v prvom výmenníku, ϑ_2 – teplota v druhom výmenníku, t' – čas, ϑ_0 – teplota kvapaliny na vstupe do prvého výmenníka, ω_1, ω_2 – tepelný príkon, q – objemový prietok kvapaliny, ρ – hustota kvapaliny, V_1, V_2 – objem kvapaliny, c_p – špecifická tepelná kapacita.

Označme

$$
\vartheta_{u1} = \frac{\omega_1}{q\rho c_p}, \quad \vartheta_{u2} = \frac{\omega_2}{q\rho c_p}, \quad T_1 = \frac{V_1}{q}, \quad T_2 = \frac{V_2}{q}
$$

ϑ_{u1}, ϑ_{u2} majú rozmer teploty a T_1 a T_2 sú časové konštanty. Vstupné veličiny procesu sú teploty ϑ_0, ϑ_{u1} a ϑ_{u2}. Stavové veličiny sú ϑ_1 a ϑ_2. Ako akčnú veličinu procesu uvažujme teplotu ϑ_{u1}. Predpokladajme, že dostatočne dlhý čas máme konštantnú akčnú veličinu ϑ_{u10}. Ak teplota na vstupe do prvého výmenníka bude konštantná, teda $\vartheta_0 = \vartheta_{00}$ a tepelný príkon do druhého výmenníka bude tiež konštantný, teda $\vartheta_{u2} = \vartheta_{u20}$, potom dva výmenníky tepla zapojené v sérii znázornené na obr. 1.4.3 v ustálenom stave budú opísané rovnicami

$$\vartheta_{10} = \vartheta_{00} + \vartheta_{u10}, \quad \vartheta_{20} = \vartheta_{10} + \vartheta_{u20}$$

Uvažujme teraz nový ustálený stav určený akčnou veličinou ϑ_{u11}, ktorý je určený rovnicami

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{00} + \vartheta_{u11}, \quad \vartheta_{21} = \vartheta_{11} + \vartheta_{u20}$$

Úlohou optimálneho riadenia bude pomocou spätnej väzby zabezpečiť prechod systému z ustáleného stavu daného akčnou veličinou ϑ_{u10} do nového ustáleného stavu daného akčnou veličinou ϑ_{u11} tak, aby nejaké kritérium kvality prechodového javu (funkcionál) bolo minimálne.

Prv než začneme riešiť formulovaný problém optimálneho riadenia, definujeme si nové stavové veličiny ako odchýlky od koncového ustáleného stavu. Stavové veličiny definujeme v bezrozmernom tvare

$$\begin{aligned} x_1(t') &= \frac{\vartheta_1(t') - \vartheta_{11}}{\vartheta_{u11} - \vartheta_{00}} \\ x_2(t') &= \frac{\vartheta_2(t') - \vartheta_{21}}{\vartheta_{u20} - \vartheta_{11}} \end{aligned}$$

Akčnú veličinu definujeme takto

$$u_1(t') = \frac{\vartheta_{u1}(t') - \vartheta_{u11}}{\vartheta_{u11} - \vartheta_{00}}$$

Ďalej definujeme bezrozmernú časovú premennú

$$t = \frac{q}{V_1} t'$$

Model dvoch výmenníkov zapojených v sérii teraz možno písať

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} + x_1(t) &= u_1(t) \\ k_1 \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} + x_2(t) &= k_2 x_1(t) \end{aligned}$$

pričom $k_1 = V_2/V_1$ a $k_2 = (\vartheta_{u11} - \vartheta_{00})/(\vartheta_{u20} - \vartheta_{11})$.

Začiatočné podmienky sú

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_{10} = \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_{11}}{\vartheta_{u11} - \vartheta_{00}} \\ x_2(0) = x_{20} = \frac{\vartheta_{20} - \vartheta_{21}}{\vartheta_{u20} - \vartheta_{11}} \end{aligned}$$

Za účelom splnenia úlohy optimálneho riadenia navrhneme spätnú väzbu tak, aby sme dosiahli minimum funkcionálu

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}^T(t) \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}(t) + r u_1(t) \right] \mathrm{d}t$$

pričom $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2)^T$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = r$$

Pre riadený systém platí

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{k_2}{k_1} & -\dfrac{1}{k_1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Optimálna spätná väzba je

$$u_1(t) = -\frac{1}{r}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

pričom $\boldsymbol{P}$ je riešením rovnice

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$$

kde

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Na obr. 1.4.5 sú priebehy x_1, x_2 a u_1 pri spätnoväzbovom riadení dvoch v sérii zapojených výmenníkov tepla (obr. 1.4.3) pre $k_1 = 1$, $k_2 = -1/5$, $q_{11} = q_{22} = 1$ a $r = 1$.

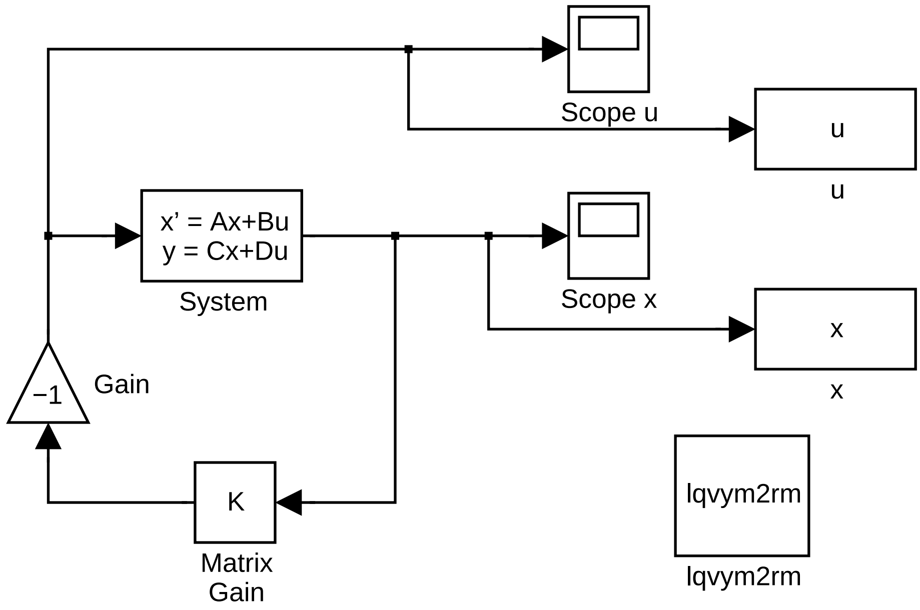
Matica

$$\boldsymbol{K} = (k_{11}\ k_{12}) = \frac{1}{r}(p_{11}\ p_{12})$$

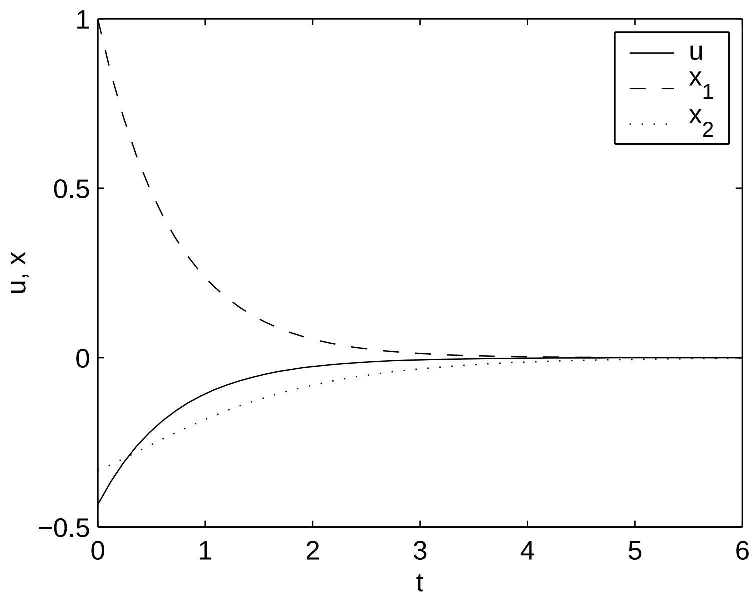
bola vypočítaná v MATLABe (program 1.4.1) a priebehy x_1, x_2 a u_1 na obr. 1.4.5 sú výsledkom SIMULINK programu na obr. 1.4.4 pri začiatočných podmienkach $x_{10} = 1$, $x_{20} = -1/3$.

Program 1.4.1 (Program na výpočet zosilnení LQ regulátora z príkladu 1.4.2)

```
% Vypocet parametrov LQR spatnovazboveho clena pre vymennik tepla
% program: lqvym2rm.m
x0 = [1;-1/3];

A = [-1 0; -0.2 -1];
B = [1; 0];
C=eye(2);
D=zeros(2,1);

Q=eye(2);
R=1;

[K,S,E]=LQR(A,B,Q,R);
```



Obr. 1.4.4: Simulink program na riešenie odozvy spätnoväzbového systému z príkladu 1.4.2



Obr. 1.4.5: Priebehy x_1, x_2, u_1 pri spätnoväzbovom LQ riadení dvoch v sérii zapojených výmenníkov

Skúmajme teraz systém, ktorý je znázornený na obr. 1.4.2. Rovnica dynamiky tohoto systému je

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.38}$$

so začiatočnou podmienkou v čase $t_0 = 0$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.4.39}$$

pričom $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{P}$ je riešením rovnice (1.4.37).

Rovnicu (1.4.38) môžeme upraviť do tvaru

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\,\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.4.40}$$

Jedná sa o voľný systém s maticou uzavretého systému

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \tag{1.4.41}$$

Systém (1.4.40) je výsledkom riešenia optimalizačného problému založeného na minimalizácii funkcionálu (1.4.34). Tento funkcionál môžeme písať v tvare

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Big(\boldsymbol{x}^T(t)\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)\Big)\,\mathrm{d}t \tag{1.4.42}$$

resp.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x}^T(t)\Big(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\Big)\,\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t \tag{1.4.43}$$

a môžeme si ho tiež predstaviť nasledovne

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x}_0^T e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\bar{\boldsymbol{Q}}e^{\bar{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{x}_0\mathrm{d}t \tag{1.4.44}$$

resp.

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0 \tag{1.4.45}$$

kde

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K} \tag{1.4.46}$$

a

$$\boldsymbol{P} = \int_0^\infty e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\bar{\boldsymbol{Q}}e^{\bar{\boldsymbol{A}}t}\mathrm{d}t \tag{1.4.47}$$

Matica $\boldsymbol{P}$ môže byť pomocou metódy integrovania per partes prepísaná do tvaru

$$\boldsymbol{P} = e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{A}}^{-1}e^{\bar{\boldsymbol{A}}t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \bar{\boldsymbol{A}}^T e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{A}}^{-1}e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\mathrm{d}t \tag{1.4.48}$$

Pre stabilnú maticu $\bar{\boldsymbol{A}}$ dostaneme výraz

$$\boldsymbol{P} = -\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{A}}^{-1} - \bar{\boldsymbol{A}}^T\int_0^\infty e^{\bar{\boldsymbol{A}}^T t}\bar{\boldsymbol{Q}}e^{\bar{\boldsymbol{A}}t}\mathrm{d}t\bar{\boldsymbol{A}}^{-1} \tag{1.4.49}$$

a po úprave rovnicu

$$\bar{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}} = -\bar{\boldsymbol{Q}} \tag{1.4.50}$$

ktorá je Ljapunovovou rovnicou. Vieme, že pre ľubovoľnú symetrickú kladne definitnú maticu $\bar{\boldsymbol{Q}}$ existuje vtedy symetrická kladne definitná matica $\boldsymbol{P}$, ktorá je riešením tejto rovnice, ak matica $\bar{\boldsymbol{A}}$ je asymptoticky stabilná.

Keď spätne dosadíme do rovnice (1.4.50) $\bar{\boldsymbol{A}}$ z rovnice (1.4.41) a $\bar{\boldsymbol{Q}}$ z rovnice (1.4.46), potom dostaneme rovnicu

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) = -\boldsymbol{Q} - \left(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\right)^T \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\right) \tag{1.4.51}$$

Túto rovnicu môžeme jednoducho prepísať do tvaru rovnice (1.4.37).

Pri optimálnom spätnoväzbovom riadení znázornenom na obr. 1.4.2 si treba všimnúť ešte jednu dôležitú skutočnosť a to tú, že optimálnou spätnou väzbou vlastne optimálne umiestňujeme póly uzavretého obvodu.

Syntéza uzavretého obvodu založená na umiestnení pólov (Pole-Placement – PP) je taký spôsob návrhu spätnej väzby, ak $\boldsymbol{K}$ v rovnici (1.4.41) volíme na základe požiadavky asymptotickej stability matice $\bar{\boldsymbol{A}}$. LQR riadenie z tohoto hľadiska je špeciálnym prípadom PP riadenia.

Majme teraz systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.4.52}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.53}$$

a funkcionál

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{1.4.54}$$

Dosadením rovnice (1.4.53) do (1.4.54) dostaneme

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{1.4.55}$$

Ak označíme

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{C} \tag{1.4.56}$$

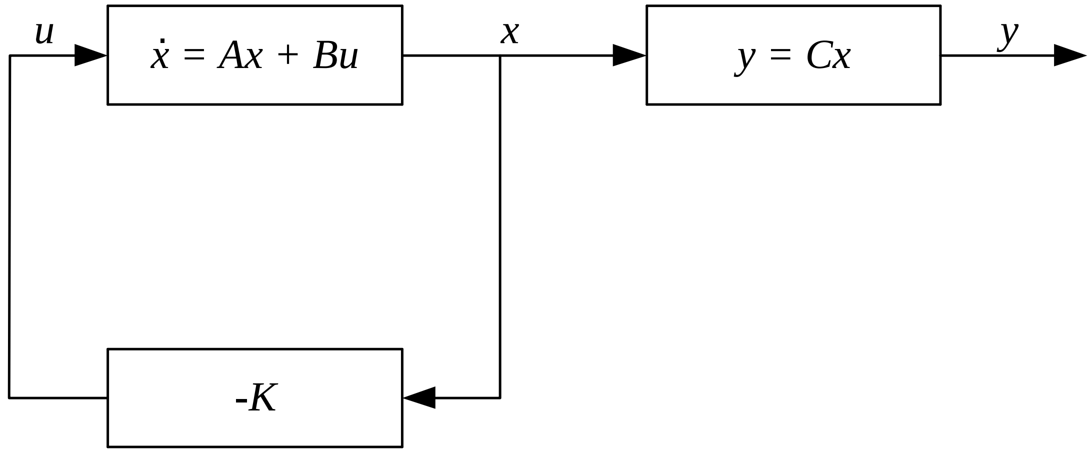
potom funkcionál (1.4.55) má tvar funkcionálu (1.4.34) a problém optimálnej regulácie výstupu sa transformoval na klasický LQR problém. Riešenie optimálneho problému, t. j. minimalizáciu J podľa rovnice (1.4.55) pre každé $\boldsymbol{x}_0$ zabezpečí stavová spätná väzba daná rovnicou (1.4.35). Bloková schéma LQ regulácie výstupu je na obr. 1.4.6.

1.4.1 Dynamické programovanie a lineárne systémy

V ďalšom dokážeme vetu, ktorú možno použiť pri dôkaze existencie optimálneho riadenia a pre vyčíslenie optimálneho $J^*(\boldsymbol{x}^*(t), t)$.

Veta 1.4.1 *Majme daný lineárny systém* (1.4.1) *a funkcionál J podľa rovnice* (1.4.3)*. Označme*

$$J^*(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.57}$$



Obr. 1.4.6: Optimálna LQ regulácia výstupu

kde $\boldsymbol{P}(t)$ *je symetrická matica rozmeru* $n \times n$*, ktorá je riešením Riccatiho rovnice* (1.4.28) *a vyhovuje koncovej podmienke* (1.4.30)*. Ak je optimálne riadenie* $\boldsymbol{u}(t) \neq \boldsymbol{0}$ *pre všetky stavy, potom* $\boldsymbol{P}(t)$ *je kladne definitná matica v ľubovoľnom čase* t*,* $t_0 \le t \le t_f$ *a* $\boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{Q}_{t_f}$ *je kladne semidefinitná. Pretože*

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

je určená pri všetkých $\boldsymbol{x}(t)$ *a* t*, optimálne riadenie existuje a minimálna hodnota funkcionálu sa skutočne rovná* J^**.*

Dôkaz:
Vetu dokážeme takto: Ukážeme, že J^* je riešením Hamiltonovej-Jacobiho parciálnej diferenciálnej rovnice a že vyhovuje príslušným hraničným podmienkam.

Predovšetkým poznamenávame, že pre $t = t_f$ rovnica (1.4.57) môže byť napísaná v tvare

$$J^*\left(\boldsymbol{x}^*(t_f),\, t_f\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{Q}_{t_f}\boldsymbol{x}(t_f) \tag{1.4.58}$$

a teda predstavuje koncový stav.

Hamiltonova-Jacobiho rovnica pre systém (1.4.1) a funkcionál (1.4.3) má tvar

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)\\ &\quad + \min_{\boldsymbol{u}(t)}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + \frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}^T(t)}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\right)\right\} = 0\end{aligned} \tag{1.4.59}$$

Výraz v zátvorkách bude minimalizovaný pre

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\frac{\partial J^*\left(\boldsymbol{x}(t),\, t\right)}{\partial \boldsymbol{x}(t)} \tag{1.4.60}$$

Keď dosadíme vzťah (1.4.60) do rovnice (1.4.59) dostaneme

$$\begin{aligned}&\frac{\partial J^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\right)^T\boldsymbol{B}^T\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\\ &\qquad + \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\right)^T\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)} - \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\right)^T\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)} = 0\end{aligned} \tag{1.4.61}$$

Ďalej platí

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.62}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}(t)} = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.63}$$

Keď dosadíme vzťahy (1.4.62) a (1.4.63) do rovnice (1.4.61), dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t))^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)&\\ -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)\right)^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) = 0&\end{aligned} \tag{1.4.64}$$

Pretože matica $\boldsymbol{P}(t)$ je symetrická, môžeme písať

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t))^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t))^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t))^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.65}$$

alebo

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t))^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.4.66}$$

Keď rovnicu (1.4.66) dosadíme do rovnice (1.4.64) a upravíme ju, môžeme písať

$$\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{x}^T(t)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\right)\boldsymbol{x}(t)\right\} = 0 \tag{1.4.67}$$

Ak $\boldsymbol{P}(t)$ vyhovuje Riccatiho rovnici (1.4.28), potom matica v zátvorkách v rovnici (1.4.67) bude zrejme nulovou maticou, a teda rovnica (1.4.67) je splnená. Platí aj opačné tvrdenie.

Kladnú definitnosť matice $\boldsymbol{P}$ dokážeme takto: Predpokladajme, že pri $t = t' < t_f$ matica $\boldsymbol{P}(t)$ nie je kladne definitná. V tomto prípade existuje také $\boldsymbol{x}(t')$, že $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T(t')\,\boldsymbol{P}(t')\,\boldsymbol{x}(t')\right) \le 0$. Pri tomto by zrejme neplatilo tvrdenie, že $J(\boldsymbol{u})$ má kladnú hodnotu pre $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Z tohto dôvodu $\boldsymbol{P}(t)$ musí byť kladne definitná pre ľubovoľné t, $t_0 \le t \le t_f$. □

Ďalej pre optimálny systém môžeme písať

$$F + \frac{\mathrm{d}J^*}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.4.68}$$

Z tejto rovnice dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}J^*}{\mathrm{d}t} = -F \tag{1.4.69}$$

Nech pre skúmanú úlohu funkcia J^* je Ljapunovova funkcia. Funkcia $-F$ je záporne definitná. Ak funkcia J^* bude kladne definitná, potom optimálny systém je asymptoticky stabilný.

1.5 Optimálne sledovanie, servo problém a odstránenie porúch

V predchádzajúcej časti sa riešil problém regulácie v ktorom je cieľom previesť systém z nejakého začiatočného stavu do nového stavu optimálnym spôsobom. Tento problém je v skutočnosti špeciálny prípad všeobecného problému, v ktorom sa vyžaduje, aby výstupy riadeného systému sledovali určité žiadané priebehy definovaným optimálnym spôsobom.

Problém sledovania určitých žiadaných priebehov môžeme rozdeliť podľa charakteru vyžadovaných trajektórií. Ak vyžadované trajektórie sú predpísané funkcie času, potom hovoríme o *probléme sledovania*. Ak výstupy riadeného objektu majú sledovať určitú triedu vyžadovaných trajektórií, potom hovoríme o *servo probléme*.

LQR riadenie vedie k proporcionálnej stavovej spätnej väzbe. Je všeobecne známe, že použitie proporcionálnych regulátorov v spätnej väzbe spôsobuje pri zmenách žiadaných veličín a pri existencii porúch na ľubovoľnom mieste uzavretého regulačného obvodu vznik trvalej regulačnej odchýlky. Odstránenie trvalej regulačnej odchýlky v týchto prípadoch sa dá zabezpečiť LQ spätnoväzbovým riadením s *integračnou činnosťou*.

1.5.1 Problém sledovania

Majme lineárny riaditeľný a pozorovateľný systém

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.5.1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.5.2}$$

Nech $\boldsymbol{w}(t)$ je žiadaný vektor výstupných veličín, ktorý má rozmer r. Našou úlohou bude riadiť systém tak, aby pre vektor odchýlky

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{y}(t) \tag{1.5.3}$$

platilo, že $\boldsymbol{y}(t)$ má byť „blízky“ k $\boldsymbol{w}(t)$ pri najmenších možných stratách riadiacej energie.

Funkcionál, ktorý budeme minimalizovať, má tvar

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{e}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right) \mathrm{d}t \tag{1.5.4}$$

Predpokladáme, že t_f je zadané, $\boldsymbol{Q}_{yt_f}$ a $\boldsymbol{Q}_y$ sú reálne symetrické kladne semidefinitné matice, $\boldsymbol{R}$ je reálna symetrická kladne definitná matica.

Hamiltonián v úlohe sledovania má tvar

$$H = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\right)^T \boldsymbol{Q}_y \left(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda}^T\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\right) \tag{1.5.5}$$

Z podmienky

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$$

vyplýva

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.5.6}$$

$\boldsymbol{\lambda}(t)$ je riešením rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$$

alebo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\left(\boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\right) - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.5.7}$$

Podobne, ako sme určili rovnicu (1.4.20), teraz platí

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\gamma}(t) \tag{1.5.8}$$

Rovnica (1.5.8) po derivovaní podľa času bude mať tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{P}(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.5.9}$$

Z rovníc (1.5.1) a (1.5.6) vyplýva rovnica

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.5.10}$$

Z rovníc (1.5.10) a (1.5.8) dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\gamma}(t) \tag{1.5.11}$$

Rovnicu (1.5.9) teraz môžeme prepísať

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \left[\dot{\boldsymbol{P}}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)\right]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\gamma}(t) - \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \tag{1.5.12}$$

Z rovníc (1.5.7) a (1.5.8)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \left[-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t)\right]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\gamma}(t) + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{w}(t) \tag{1.5.13}$$

Pretože optimálne riešenie existuje, rovnice (1.5.12) a (1.5.13) musia platiť pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}(t)$ a $\boldsymbol{w}(t)$. Z toho vyplýva, že matica $\boldsymbol{P}(t)$, ktorá má rozmer $n \times n$, musí vyhovovať rovnici

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = -\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{C} \tag{1.5.14}$$

Ďalej, n-rozmerný vektor $\boldsymbol{\gamma}(t)$ musí vyhovovať rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \left[\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{A}^T\right]\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{w}(t) \tag{1.5.15}$$

Koncové podmienky dostaneme takto: z rovnice (1.5.8) platí

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{P}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{\gamma}(t_f) \tag{1.5.16}$$

Z princípu minima vyplýva

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{e}(t_f)\right] && (1.5.17)\\
&= \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{w}(t_f) && (1.5.18)
\end{aligned}$$

Rovnice (1.5.16) a (1.5.18) platia pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}(t_f)$ a $\boldsymbol{w}(t_f)$, a preto platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(t_f) &= \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{C} && (1.5.19)\\
\boldsymbol{\gamma}(t_f) &= \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}_{yt_f}\boldsymbol{w}(t_f) && (1.5.20)
\end{aligned}$$

Vektor stavových veličín optimálneho systému je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice (1.5.11).

Zákon riadenia možno vyjadriť

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\left[\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)\right] \tag{1.5.21}$$

Symetrická, kladne definitná matica $\boldsymbol{P}(t)$ rozmeru $n \times n$ je riešením rovnice (1.5.14) s koncovou podmienkou (1.5.19). Vektor $\boldsymbol{\gamma}(t)$ rozmeru n je riešením rovnice (1.5.15) s koncovou podmienkou (1.5.20).

Aby sme mohli vypočítať priebežné $\boldsymbol{\gamma}(t)$, musíme poznať $\boldsymbol{w}(t)$ v celom intervale riešenia $[0,\, t_f]$. Toto je dôvod, prečo vyššie formulovaný problém sledovania nie je pre väčšinu problémov praktický. Ak však $\boldsymbol{w}(t) = 0$ a $t_f \to \infty$, potom optimálny zákon riadenia bude v tvare (1.4.35), pričom matica $\boldsymbol{P}$ je riešením rovnice (1.4.37) s tým, že $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}$.

1.5.2 Servo problém

Skúmajme teraz problém optimálneho spätnoväzbového riadenia, pri ktorom žiadaný vektor výstupných veličín je výstupom nasledovného systému

$$\dot{\boldsymbol{x}}_w(t) = \boldsymbol{A}_w \boldsymbol{x}_w(t), \quad \boldsymbol{x}_w(0) = \boldsymbol{x}_{w0} \tag{1.5.22}$$

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{C}_w \boldsymbol{x}_w(t) \tag{1.5.23}$$

Úlohou bude zabezpečiť, aby $\boldsymbol{y}(t)$ bolo „blízke“ $\boldsymbol{w}(t)$ pri najmenších možných stratách riadiacej energie. Táto úloha sa dá splniť takým spätnoväzbovým riadením, ktoré je založené na minimalizácii funkcionálu

$$J = \int_0^\infty \left((\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{w}(t))^T \boldsymbol{Q}_y (\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{w}(t)) + \boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}(t) \right) \mathrm{d}t \tag{1.5.24}$$

Dosadením $\boldsymbol{y}(t)$ z rovnice (1.5.2) a $\boldsymbol{w}(t)$ z rovnice (1.5.23) do funkcionálu dostaneme

$$J = \int_0^\infty \left((\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{C}_w \boldsymbol{x}_w(t))^T \boldsymbol{Q}_y (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{C}_w \boldsymbol{x}_w(t)) + \boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}(t) \right) \mathrm{d}t \tag{1.5.25}$$

alebo po úprave

$$J = \int_0^\infty \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^T(t) & \boldsymbol{x}_w^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C}_w \\ -\boldsymbol{C}_w^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}_w^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}_w(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}(t) \right) \mathrm{d}t \tag{1.5.26}$$

Za účelom optimálneho riadenia sa minimalizuje funkcionál (1.5.26) pre rozšírený riadený systém

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}_w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) \tag{1.5.27}$$

Je zrejmé, že riešenie problému optimálneho spätnoväzbového riadenia sa zabezpečí riešením Riccatiho rovnice v tvare

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_w \end{pmatrix} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_w \end{pmatrix} - \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{R}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^T \boldsymbol{P} \\ &\qquad = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C}_w \\ -\boldsymbol{C}_w^T \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}_w \boldsymbol{Q}_y \boldsymbol{C}_w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

Ak maticu $\boldsymbol{P}$ napíšeme v tvare

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{pmatrix} \tag{1.5.29}$$

potom zákon optimálneho riadenia bude

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{B}^T \left[\boldsymbol{P}_{11} \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{x}_w(t) \right] \tag{1.5.30}$$

1.5.3 LQ riadenie s integračnou činnosťou

Výsledkom LQ návrhu riadenia je proporcionálna stavová spätná väzba. Dôsledkom proporcionálnej spätnej väzby vzniká v uzavretom obvode pri zmenách žiadaných veličín a porúch trvalá regulačná odchýlka. Odstránenie trvalej regulačnej odchýlky sa dá zabezpečiť tak, že regulátor bude mať integračnú činnosť.

Jeden zo spôsobov návrhu regulátora s integračnou činnosťou je klasický LQ návrh na základe funkcionálu, v ktorom namiesto vektora $\boldsymbol{u}(t)$ budeme uvažovať $\dot{\boldsymbol{u}}(t)$.

Druhý spôsob návrhu regulátora s integračnou činnosťou je klasický LQ návrh pre prípad rozšíreného vektora stavových veličín a toľko nových stavových veličín, pre ktoré sa vyžaduje mať integračnú činnosť. Vektor derivácií nových stavových veličín je súčinom matice konštánt a vektora pôvodných stavových veličín.

1.6 Ďalšie príklady

V tejto časti si ukážeme použitie analytických metód optimálneho riadenia. Uvidíme, že sú prakticky použiteľné iba na najjednoduchšie prípady lineárnych systémov a špeciálnych účelových funkcií.

Príklad 1.6.1: *Časovo optimálne riadenie auta*

Uvažujme nasledovný klasický príklad z mechaniky: auto, ktoré dokážeme zredukovať na hmotný bod opísaný svojou polohou $y = x_1$, rýchlosťou x_2 a zrýchlením u. Tento proces je opísaný diferenciálnou rovnicou dvojitého integrátora

$$y'' = u \tag{1.6.1}$$

alebo, v stavovom opise, dvojicou diferenciálnych rovníc

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.6.2}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{1.6.3}$$

Úlohou je prejsť vzdialenosť A v čo najmenšom čase, pričom auto je na začiatku aj na konci v pokoji a akcelerácia (brzdenie) sú obmedzené maximálnou hodnotou 1.

Z matematického hľadiska môžeme teda definovať kritérium v tvare

$$J = \int_0^{t_f} 1 \mathrm{d}t = t_f \tag{1.6.4}$$

počiatočné a koncové podmienky

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = A, \quad x_2(t_f) = 0 \tag{1.6.5}$$

a obmedzenie $|u(t)| \leq 1$.

Okrajové hodnoty pre stav x_2 vyplývajú z faktu, že rýchlosť na začiatku aj na konci musí byť nulová.

Pre tento problém zostavíme Hamiltonovu funkciu

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \tag{1.6.6}$$

pre ktorú hľadáme minimum podľa riadenia. Keďže je H afinnou funkciou vzhľadom na u, potom jej minimum bude na obmedzeniach u a bude závisieť iba od znamienka λ_2 –

pre pozitívne hodnoty λ_2 bude u čo najmenšie (-1) a pre negatívne čo najväčšie $(+1)$. Minimum H dostaneme, ak riadenie bude alebo 1 alebo -1 a opačné, ako hodnota λ_2, teda

$$u^* = -\operatorname{sign}\lambda_2 \tag{1.6.7}$$

Diferenciálne rovnice pre adjungovaný vektor sú dané ako

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{1.6.8}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \tag{1.6.9}$$

Riešením diferenciálnych rovníc adjungovaných premenných sú rovnice

$$\lambda_1 = c_1 \tag{1.6.10}$$

$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2 \tag{1.6.11}$$

kde konštanty c_1, c_2 závisia od koncových hodnôt pre $\boldsymbol{x}$. Optimálne riadenie je potom dané ako

$$u^* = -\operatorname{sign}(c_2 - c_1 t) \tag{1.6.12}$$

Od konštánt c_1, c_2 závisí, či bude riadenie $+1$ alebo -1. V každom prípade k prepnutiu môže prísť maximálne raz, keďže sa jedná o rovnicu priamky. Riadenie bude teda ± 1 v intervale $\langle 0, t_s\rangle$ a potom v intervale $(t_s, t_f\rangle$ bude mať opačnú hodnotu ∓ 1. Veličina t_s označuje čas prepnutia.

Fyzikálne riešenie bude mať zmysel iba vtedy, ak bude riadenie na začiatku pozitívne. V opačnom prípade by automobil na začiatku stál na mieste so stlačenou brzdou a jeho rýchlosť by ostávala nulová.

Na prvom intervale získame riešenie diferenciálnych rovníc pre $u = 1$:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 1 \iff \int_{x_2(0)}^{x_2(t)} \mathrm{d}x_2 = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$x_2(t) = t \tag{1.6.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2(t) \iff \int_{x_1(0)}^{x_1(t)} \mathrm{d}x_1 = \int_0^t t\mathrm{d}t$$

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} \tag{1.6.14}$$

V čase prepnutia bude teda platiť $x_1(t_s) = t_s^2/2$, $x_2(t_s) = t_s$.

Na druhom intervale získame riešenie diferenciálnych rovníc pre $u = -1$, pričom počiatočnou podmienkou sú hodnoty stavov v t_s:

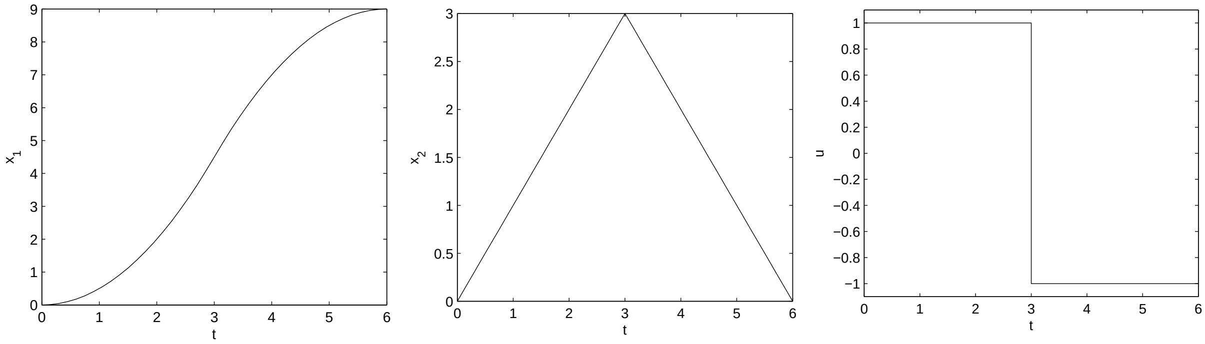
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -1 \iff \int_{x_2(t_s)}^{x_2(t)} \mathrm{d}x_2 = -\int_{t_s}^t \mathrm{d}t$$

$$x_2(t) = x_2(t_s) + t_s - t = 2t_s - t \tag{1.6.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2(t) \iff \int_{x_1(t_s)}^{x_1(t)} \mathrm{d}x_1 = \int_{t_s}^t (2t_s - t)\mathrm{d}t$$

$$x_1(t) = x_1(t_s) + 2t_s(t - t_s) - \frac{1}{2}(t^2 - t_s^2)$$

$$x_1(t) = -t_s^2 + 2t_s t - \frac{1}{2}t^2 \tag{1.6.16}$$



Obr. 1.6.1: Optimálne riadenie auta (x_1 – vzdialenosť, x_2 – rýchlosť, u – akcelerácia)

Zároveň však musia platiť koncové podmienky:

$$x_2(t_f) = 0 = 2t_s - t_f \Longrightarrow t_f = 2t_s \tag{1.6.17}$$

$$x_1(t_f) = A = -t_s^2 + 2t_s t_f - \frac{1}{2}t_f^2 \tag{1.6.18}$$

Z ostatnej rovnice dostaneme vzťah pre výpočet t_s

$$t_s = \sqrt{A} \tag{1.6.19}$$

a z neho aj výsledný vzťah pre t_f

$$t_f = 2\sqrt{A} \tag{1.6.20}$$

Optimálne riadenie je teda prvú polovicu času na maxime – maximálne pridávame plyn, a v druhej polovici času maximálne brzdíme.

Výsledky simulácie pre $A = 9$, a teda $t_f = 6$ a $t_s = 3$ sú zobrazené na obr. 1.6.1.

Príklad 1.6.2: *Časovo optimálne riadenie auta s obmedzením na rýchlosť*
Uvažujme rovnaké zadanie ako v predošlom príklade a naviac predpokladajme, že rýchlosť auta môže byť ohraničená. Z pohľadu stavov to znamená podmienku na veličinu x_2

$$|x_2| \le v \tag{1.6.21}$$

alebo

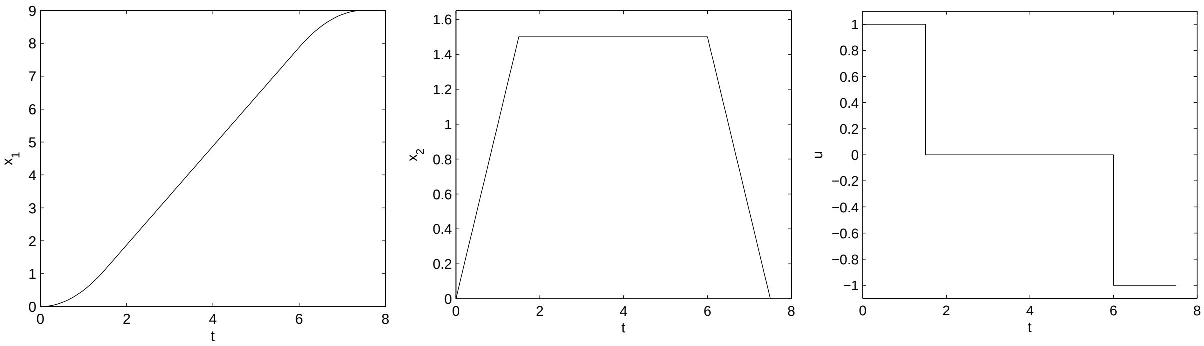
$$x_2^2 - v^2 \le 0 \tag{1.6.22}$$

Pre tento problém zostavíme Hamiltonovu funkciu

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, u, \mu) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \mu(x_2^2 - v^2) \tag{1.6.23}$$

kde μ je ďalšia adjungovaná premenná, ktorú na základe Kuhn-Tuckerových podmienok z optimalizácie zvolíme tak, aby bol v optime posledný člen na pravej strane vždy rovný nule

$$\mu \begin{cases} = 0 & \text{ak } x_2^2 - v^2 < 0 \quad \text{(neaktívne obmedzenie)} \\ \ge 0 & \text{ak } x_2^2 - v^2 = 0 \quad \text{(aktívne obmedzenie)} \end{cases} \tag{1.6.24}$$



Obr. 1.6.2: Optimálne riadenie auta s obmedzením rýchlosti (x_1 – vzdialenosť, x_2 – rýchlosť, u – akcelerácia)

Diferenciálne rovnice pre adjungovaný vektor sú dané ako

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{1.6.25}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 - 2\mu x_2 \tag{1.6.26}$$

V priebehu trajektórie budú teda existovať najviac dva časy prepnutia také, že platí

$$t_{s1} = \frac{v}{|u_0|}, \quad t_{s2} = t_f - t_{s1} \tag{1.6.27}$$

Pre stavové trajektórie potom platí

$$x_1 = \frac{u_0}{2}t^2, \qquad x_2 = u_0 t, \qquad \text{ak } t \in \langle 0, t_{s1}\rangle \tag{1.6.28}$$

$$x_1 = \frac{u_0 t_{s1}}{2}(2t - t_{c1}), \qquad x_2 = u_0 t_{c1}, \qquad \text{ak } t \in (t_{s1}, t_{s2}\rangle \tag{1.6.29}$$

$$x_1 = -\frac{u_0}{2}(t - t_f)^2 + A, \qquad x_2 = -u_0(t - t_f), \qquad \text{ak } t \in (t_{s2}, t_f\rangle \tag{1.6.30}$$

kde v prvom intervale platilo $u = u_0$, v druhom $u = 0$ a v treťom $u = -u_0$.

Podobnou úvahou ako v predošlom príklade získame pre t_f

$$t_f = \frac{|u_0|}{|u_0|v}\left(A + \frac{v^2}{u_0}\right) = \frac{A}{v}\,\mathrm{sign}(u_0) + \frac{v}{|u_0|} \tag{1.6.31}$$

Výsledky simulácie pre $v = 1.5$ sú zobrazené na obr. 1.6.2. Pochopiteľne, výsledný čas je dlhší a je v tomto prípade $t_f = 7.5$.

Príklad 1.6.3: *Časovo optimálne riadenie auta – návrat do počiatku*
Uvažujme teraz problém, ktorý je určitým spôsobom inverzný k príkladu 1.6.3. Opäť sa budeme zaoberať autom, ktoré je v počiatku v stave $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, ktorý je nenulový a potrebujeme ho dostať za najmenší čas do počiatku a do zastavenia. Opäť, riadenie bude obmedzené s $|u| \leq 1$.

Hamiltonián, rovnice adjungovaných premenných a rovnica optimálneho riadenia sú totožné ako predtým. Časové priebehy stavov sa budú líšiť tým, či je riadenie kladné alebo záporné.

Pre $u = 1$ je riešenie stavových rovníc v tvare

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + x_2(0) + x_1(0), \quad x_2(t) = t + x_2(0) \tag{1.6.32}$$

alebo tiež

$$x_1(t) = \frac{x_2^2}{2} + x_1(0) - \frac{x_2(0)^2}{2} \tag{1.6.33}$$

Pre $u = -1$ je riešenie stavových rovníc v tvare

$$x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + x_2(0) + x_1(0), \quad x_2(t) = -t + x_2(0) \tag{1.6.34}$$

alebo tiež

$$x_1(t) = -\frac{x_2^2}{2} + x_1(0) + \frac{x_2(0)^2}{2} \tag{1.6.35}$$

Stavové trajektórie majú tvar časti paraboly a riadenie bude nadobúdať iba hodnoty ± 1. Je zjavné, že k prepnutiu môže dôjsť iba raz, ale budú existovať aj také počiatočné body, kedy nebude treba riadenie prepnúť a bude stačiť alebo hodnota $+1$ alebo -1. Množina týchto bodov udáva tzv. prepínaciu krivku.

Pre všetky počiatočné body $\boldsymbol{x}_0$ prepínacej krivky platí, že z nich bude stačiť použiť iba jedno riadenie a systém dôjde do počiatku stavového priestoru $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, čiže $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$. Z rovníc (1.6.33), (1.6.35) potom dostaneme vzťahy

$$x_1(0) = \frac{x_2(0)^2}{2} \qquad \text{pre } x_2(0) \geq 0 \tag{1.6.36}$$

$$x_1(0) = -\frac{x_2(0)^2}{2} \qquad \text{pre } x_2(0) < 0 \tag{1.6.37}$$

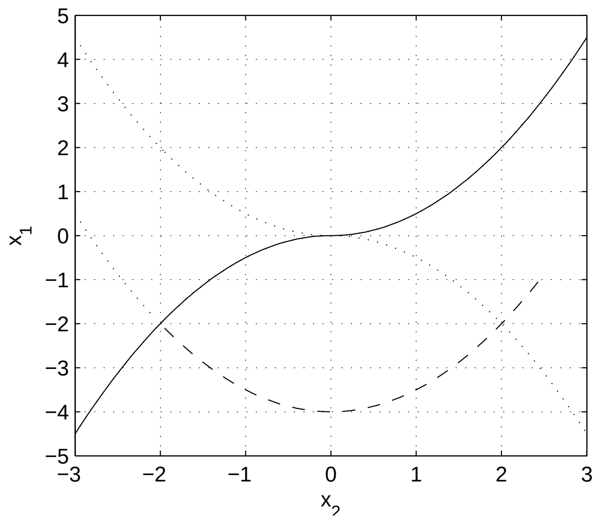
U ostatných počiatočných bodov bude teda použitá iná časť paraboly až dovtedy, kým sa nepretne s prepínacou krivkou, po ktorej budú stavové trajektórie následne pokračovať až do počiatku.

Čas prepnutia je možné zistiť podobne ako v predošlých príkladoch. Keďže sledovať čas na určenie prepnutia nemusí byť vždy spoľahlivé, jednoduchšie je navrhnúť spätnoväzbové riadenie.

Optimálne spätnoväzbové riadenie je určené nasledovnými podmienkami:

$$u(t) = \begin{cases} +1 & x_1 + \frac{x_2}{2} < 0, \; x_2 \geq 0 \quad \text{alebo} \quad x_1 - \frac{x_2}{2} \leq 0, \; x_2 < 0 \\ -1 & x_1 + \frac{x_2}{2} \geq 0, \; x_2 \geq 0 \quad \text{alebo} \quad x_1 - \frac{x_2}{2} > 0, \; x_2 \leq 0 \end{cases} \tag{1.6.38}$$

Stavová rovina je zobrazená na obr. 1.6.3. Plnou čiarou je znázornená prepínacia krivka. Pre bod $\boldsymbol{x} = [-1, 2.5]$, ktorý neleží na prepínacej krivke, je najprv potrebné sa na ňu dostať (čiarkovaná čiara), prepnúť riadenie a potom prísť k počiatku.



Obr. 1.6.3: Stavová rovina a prepínacia krivka

Časť II

Numerické metódy

Kapitola 2

Úvod do numerických metód

2.1 Rozdelenie numerických metód

Vo všeobecnosti problémy dynamickej optimalizácie vyžadujú riešenie systému diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, t), \qquad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{\lambda}_f \tag{2.1.2}$$

kde t_0 je začiatočný a t_f koncový čas optimalizácie. Toto je dvojbodový problém (TPBVP – two point boundary value problem), keďže každá z neznámych veličín je známa v inom bode. Vo všeobecnosti a pre nelineárne systémy je nemožné tieto rovnice riešiť analyticky a je nutné vyriešiť ich numericky s istým stupňom aproximácie pôvodného problému.

Vývoj numerických metód bol v posledných 30tich rokov veľmi intenzívny. Vďaka tomu bolo vyvinuté veľké množstvo algoritmov, často veľmi podobných s rozdielnym názvom. Je preto obtiažne rozdeliť metódy do skupín.

Napríklad je možné určovať, či pri riešení sú použité balíky NLP alebo nie. Inou možnosťou by bolo vybrať si spôsob, akým sa dostaneme k riešeniu. Mohli by sme potom hovoriť o metódach na základe teórie optimálneho riadenia, citlivostný prístup, heuristické, stochastické a podobne.

Zvolili sme si rozdelenie, ktoré berie do úvahy stupeň aproximácie pôvodného problému. Takto môžeme definovať tri skupiny:

1. Aj stavy, aj riadenie sú uvažované ako spojité veličiny, takže neuvažujeme žiadnu aproximáciu. Riešenie obvykle vychádza s Pontrjaginovho princípu a priameho riešenia dvojbodového problému. Získané riešenie je optimálne pre daný problém (Ray a Szekely, 1973; Ray, 1981).

2. Stavy sú spojité, riadenie je aproximované nejakou funkciou alebo lineárnou kombináciou funkcií. Toto je metóda parametrizácie vektora riadenia (Control Vector Parametrization – CVP). Najčastejšie sa predpokladá, že riadenie je po častiach konštantné. Riešenie je optimálne pre danú aproximáciu riadenia a suboptimálne pre pôvodný problém (Goh a Teo, 1988b,a; Chen a Hwang, 1990).

3. Aj stavy aj riadenie sú aproximované postupnosťou funkcií. Takto riešia problém metódy založené na ortogonálnej kolokácii. Riešenie je opäť optimálne iba pre danú aproximáciu, nie pre originálnu formuláciu (Cuthrell a Biegler, 1987, 1989; Logsdon a Biegler, 1989).

2.2 Hľadanie spojitej trajektórie riadenia

V prvom kroku sa snažíme o explicitné vyjadrenie optimálneho riadenia $\boldsymbol{u}(t)$ ako funkciu stavov $\boldsymbol{x}(t)$ a adjungovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}(t)$ z podmienky optimality $\partial H/\partial \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. Ak toto nie je možné, je optimálne riadenie vypočítavané priamo počas integrácie diferenciálnych rovníc (Ray a Szekely, 1973; Hicks a Ray, 1971).

2.2.1 Iterácia hraničnej podmienky

Iterácia hraničnej podmienky (Boundary Condition Iteration – BCI) je metóda, ktorá iteračným spôsobom hľadá počiatočné hodnoty vektora adjungovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}(0)$. Na základe ich voľby je celý systém diferenciálnych rovníc stavov a adjungovaných premenných integrovaný popredu smerom v čase a v koncovom čase sú porovnávané získané hodnoty $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ s hodnotami vyplývajúcimi z podmienok optimality. Na základe tohto rozdielu sú potom aktualizované hodnoty $\boldsymbol{\lambda}(0)$ pre ďalšiu iteráciu. Tento postup sa opakuje, kým nenastane zhoda medzi koncovými hodnotami adjungovaných premenných v koncovom čase.

Táto metóda je vhodná pre problémy malej veľkosti a mierne nelineárne. Jej závažným nedostatkom sú problematické určenie počiatočných hodnôt adjungovaných premenných, ktoré nemajú fyzikálne opodstatnenie, ako aj fakt, že dopredná integrácia rovníc adjungovaných premenných vykazuje nestabilitu.

2.2.2 Iterácia vektora riadenia

Iterácia vektora riadenia (Control Vector Iteration – CVI) je založená na postupnom riešení diferenciálnych rovníc stavov a adjungovaných premenných.

Na začiatku je inicializovaná trajektória riadenia a z nej doprednou integráciou získané hodnoty stavových trajektórií. Na základe ich znalosti sú integrované rovnice adjungovaných premenných spätne v čase, pričom sa zároveň aktualizuje hodnota riadenia

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_{\text{old}}(t) - \alpha \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad \alpha > 0 \tag{2.2.1}$$

kde α môže byť alebo konštantné alebo nájdené pomocou jednorozmerovej optimalizácie.

Kapitola 3

Parametrizácia vektora riadenia

Táto časť uvádza jeden zo spôsobov numerického riešenia problémov dynamickej optimalizácie. Spočíva v parametrizácii vektora riadenia (parameterisation of the control vector, CVP), a tak pôvodne spojitá trajektória riadenia je nahradená takou, ktorá je opísateľná iba niekoľkými parametrami. Takýmto spôsobom môžeme previesť pôvodný problém dynamickej optimalizácie na nelineárne programovanie (nonlinear programming problem, NLP).

3.1 Formulácia problému

3.1.1 Opis systému a funkcionálu

Uvažujme systém obyčajných diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) \tag{3.1.1}$$

kde t označuje čas z intervalu $[t_0, t_P]$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_{n_x}$ je vektor diferenciálnych (stavových) premenných, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_{n_u}$ je vektor riadenia a $\boldsymbol{p} \in \mathcal{R}_{n_p}$ je vektor parametrov. Vektorová funkcia $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}_{n_x}$ opisuje pravé strany diferenciálnych rovníc. Predpokladáme, že počiatočné podmienky procesu môžu byť funkciou parametrov.

Predpokladáme, že pôvodne spojité riadenie môže byť aproximované po častiach konštantným na P časových intervaloch

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_j, \quad t_{j-1} \le t < t_j \tag{3.1.2}$$

a označme dĺžky časových intervalov ako $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$.

Uvažujme účelovú funkciu J_0, ktorá má byť minimalizovaná a obmedzenia J_i v tvare

$$J_0 = G_0(t_j, \boldsymbol{x}(t_1), \ldots, \boldsymbol{x}(t_P), \boldsymbol{u}(t_1), \ldots, \boldsymbol{u}(t_P), \boldsymbol{p}) + \int_{t_0}^{t_P} F_0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \mathrm{d}t \tag{3.1.3}$$

$$J_i = G_i(t_j, \boldsymbol{x}(t_1), \ldots, \boldsymbol{x}(t_P), \boldsymbol{u}(t_1), \ldots, \boldsymbol{u}(t_P), \boldsymbol{p}) + \int_{t_0}^{t_P} F_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \mathrm{d}t \tag{3.1.4}$$

kde obmedzenia sú pre indexy $i = 1, \ldots, m$, (m je počet obmedzení). V ďalšom budeme predpokladať, že obmedzenia sú tak zoradené, že prvých m_e sú obmedzenia v tvare rovnosti $J_i = 0$ a ostatných $m_i = m - m_e$ sú nerovnosti $J_i \geq 0$.

Ďalej budeme tiež uvažovať obmedzenia na spodnú a hornú hranicu optimalizovaných premenných v tvare

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_j &\in [\boldsymbol{u}_j^{\min}, \boldsymbol{u}_j^{\max}] \\ \Delta t_j &\in [\Delta t_j^{\min}, \Delta t_j^{\max}] \\ \boldsymbol{p} &\in [\boldsymbol{p}^{\min}, \boldsymbol{p}^{\max}] \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

3.1.2 Optimalizované premenné

Optimalizované premenné $\boldsymbol{y}$ sú parametre $\boldsymbol{p}$, po častiach konštantné riadenie $\boldsymbol{u}_j$ a dĺžky časových intervalov Δt_j. Nepoužívame absolútne časy t_j ale ich prírastky Δt_j, pretože s nimi je jednoduchšia formulácia spodných a horných ohraničení (spodné je obyčajne malé kladné číslo). NLP balíky obyčajne riešia takto definované problémy jednoduchšie.

Takže je vektor optimalizovaných premenných $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}_q$ daný ako

$$\boldsymbol{y}^T = (\Delta t_1, \ldots, \Delta t_P, \boldsymbol{u}_1^T, \ldots, \boldsymbol{u}_P^T, \boldsymbol{p}^T). \tag{3.1.6}$$

3.1.3 Typy obmedzení

Obmedzenia v Bolzovom tvare (3.1.3) sú dostatočne všeobecné na to, aby pokryli širokú triedu problémov. Uveďme najčastejšie sa vyskytujúce formulácie:

1. Obmedzenia typu rovnosť na intervale – sú pretransformované na rovnosť na konci intervalu

$$g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = 0, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{3.1.7}$$

Platí

$$G_j = 0, \quad F_j = [g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})]^2, \quad J_j = 0 \tag{3.1.8}$$

2. Obmedzenia typu nerovnosť na intervale – sú pretransformované na rovnosť na konci intervalu

$$g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{3.1.9}$$

Platí

$$G_j = 0, \quad F_j = \min[0, g(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})]^2, \quad J_j = 0 \tag{3.1.10}$$

3. Obmedzenia typu rovnosť vo vnútornom (alebo koncovom) bode

$$g(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = 0 \tag{3.1.11}$$

Platí

$$G_j = g(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}), \quad F_j = 0, \quad J_j = 0 \tag{3.1.12}$$

4. Obmedzenia typu nerovnosť vo vnútornom (alebo koncovom) bode

$$g(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \geq 0 \tag{3.1.13}$$

Platí

$$G_j = g(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}), \quad F_j = 0, \quad J_j \geq 0 \tag{3.1.14}$$

3.2 Transformácia na statickú optimalizáciu

Ak predpokladáme, že riadenie je po častiach konštantné, potom je možné transformovať pôvodný problém dynamickej optimalizácie na statickú – nelineárne programovanie.

Formulácia statickej optimalizácie nelineárneho programovania je v tvare

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{y}} J_0(\boldsymbol{y}) && \text{vzhľadom na:} \\ & && J_i(\boldsymbol{y}) = 0 \qquad i = 1 \dots m_e \\ & && J_i(\boldsymbol{y}) \geq 0 \qquad i = m_e + 1 \dots m_i \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Pre získanie hodnoty funkcionálu a obmedzení J_i je potrebné integrovať diferenciálne rovnice procesu od t_0 do t_P. Balíky NLP však okrem hodnôt J_i potrebujú poznať aj parciálne derivácie vzhľadom k optimalizovaným premenným $\boldsymbol{y}$ (gradienty). Ak J_i nezávisia od stavových premenných $\boldsymbol{x}$, sú gradienty získateľné jednoduchými algebraickými operáciami. V opačnom prípade je situácia komplikovanejšia a je možné použiť viacero metód: systém adjungovaných premenných vyplývajúci z teórie optimálneho riadenia, výpočet citlivostí, či numerická aproximácia pomocou konečných diferencií. Ďalšie možnosti zahŕňajú napríklad viacnásobný nastrel (Bock a kol., 2000; Binder a kol., 2001).

3.3 Odvodenie gradientov

Na tomto mieste uvedieme odvodenie výpočtu gradientov pomocou teórie optimálneho riadenia na základe podmienok optimality prvého rádu (Bryson a Ho, 1975). V terminológii optimálneho riadenia sa jedná o určenie podmienok optimálnosti pre spojitý systém minimalizujúci účelovú funkciu obsahujúcu stavové premenné určené vo voľnom konečnom čase a voľných vnútorných časoch.

Uvažujme problém funkcionálu J_i. Rovnica (3.1.1) je obmedzenie v tvare rovnosti a je pripojená k funkcionálu pomocou vektora bližšie neurčených Lagrangeových multiplikátorov – adjungovaných premenných $\boldsymbol{\lambda}_i(t) \in \mathcal{R}_{n_x}$, čím dostaneme

$$J_i = G_i + \int_{t_0}^{t_P} (F_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{x}}))\mathrm{d}t \tag{3.3.1}$$

Pre ľubovoľné J_i môžeme definovať Hamiltonovu funkciu (Hamiltonián) H_i v tvare

$$H_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\lambda}_i) = F_i + \boldsymbol{\lambda}_i^T \boldsymbol{f} \tag{3.3.2}$$

Substitúciou pre F_i v (3.1.3) a rozdelením celého časového úseku na časti zodpovedajúce optimalizovaným časom dostaneme pre J_i

$$J_i = G_i + \sum_{j=1}^{P} \int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-} (H_i - \boldsymbol{\lambda}_i^T \dot{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}t \tag{3.3.3}$$

kde t_j^- určuje čas tesne pred $t = t_j$ a t_j^+ je čas tesne po $t = t_j$. Posledný člen môžeme integrovať po častiach

$$J_i = G_i + \sum_{j=1}^{P} \int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-} (H_i + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T \boldsymbol{x})\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{P} \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_{j-1}^+)\boldsymbol{x}(t_{j-1}^+) - \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^-)\boldsymbol{x}(t_j^-) \tag{3.3.4}$$

Nutné podmienky optimality získame variáciou funkcionálu. Táto je spôsobená (viď Bryson a Ho (1975)) variáciou optimalizovaných premenných $\delta t_j, \delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{p}$ a variáciou premenných, ktoré od optimalizovaných signálov závisia, t.j. $\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{\lambda}_i$. Takto dostaneme

$$\begin{aligned}
\delta J_i &= \sum_{j=1}^{P} \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_j)}\delta\boldsymbol{x}(t_j) + \sum_{j=1}^{P} \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\delta\boldsymbol{u}_j + \sum_{j=1}^{P} \frac{\partial G_i}{\partial t_j}\delta t_j + \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{p}^T}\delta\boldsymbol{p} \\
&\quad - H_i(t_0^+)\delta t_0 + H_i(t_P^-)\delta t_P + \sum_{j=1}^{P-1}\left[H_i(t_j^-) - H_i(t_j^+)\right]\delta t_j \\
&\quad + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_0^+)\delta\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_P^-)\delta\boldsymbol{x}(t_P) + \sum_{j=1}^{P-1}\left[\boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^+) - \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^-)\right]\delta\boldsymbol{x}(t_j) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_P}\left[\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T + \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right)\delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\delta\boldsymbol{u} + \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{p}^T}\delta\boldsymbol{p}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

kde sme použili vzťahy $\delta\boldsymbol{\lambda}_i = \delta\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i\delta t$ a $\delta\boldsymbol{x}(t_j^-) = \delta\boldsymbol{x}(t_j^+)$ (spojitosť stavov na hraniciach intervalov).

Zoskupovaním spoločných výrazov, pričom $\delta t_0 = 0$ (t_0 je pevné) a $\delta\boldsymbol{x}(t_0) = (\partial\boldsymbol{x}_0/\partial\boldsymbol{p}^T)\delta\boldsymbol{p}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\delta J_i &= \left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_P)} - \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_P^-)\right]\delta\boldsymbol{x}(t_P) + \sum_{j=1}^{P-1}\left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_j)} + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^+) - \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^-)\right]\delta\boldsymbol{x}(t_j) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_P}\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T + \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right)\delta\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \left[H_i(t_P^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_P}\right]\delta t_P + \sum_{j=1}^{P-1}\left[H_i(t_j^-) - H_i(t_j^+) + \frac{\partial G_i}{\partial t_j}\right]\delta t_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{P}\left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{u}^T} + \int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-}\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\mathrm{d}t\right]\delta\boldsymbol{u}_j \\
&\quad + \left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_0^+)\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P}\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{p}^T}\mathrm{d}t\right]\delta\boldsymbol{p}
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Teraz si zvolíme vektor $\boldsymbol{\lambda}_i$ tak, aby sa zrušili všetky výrazy obsahujúce variáciu stavového vektora $\delta\boldsymbol{x}$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T = -\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{x}^T} \tag{3.3.7}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^T(t_P) = \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_P)} \tag{3.3.8}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^-) = \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_j^+) + \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_j)}, \quad j = 1, \ldots, P-1 \tag{3.3.9}$$

Potom môžeme vyjadriť variáciu J_i v tvare

$$\begin{aligned}
\delta J_i &= \left[H_i(t_P^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_P}\right]\delta t_P + \sum_{j=1}^{P-1}\left[H_i(t_j^-) - H_i(t_j^+) + \frac{\partial G_i}{\partial t_j}\right]\delta t_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{P}\left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{u}^T} + \int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-}\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\mathrm{d}t\right]\delta\boldsymbol{u}_j \\
&\quad + \left[\frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_0^+)\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} + \int_{t_0}^{t_P}\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{p}^T}\mathrm{d}t\right]\delta\boldsymbol{p}
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Nutné podmienky optimality vyplývajú z ostatnej rovnice. Keďže v optime musí byť variácia funkcionálu J_i rovná nule, všetky členy v zátvorkách musia byť nulové.

Gradienty kritéria vzhľadom na optimalizované veličiny t_j, $\boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{p}$ získame z nutných podmienok a sú to práve členy v hranatých zátvorkách. Napríklad parciálnu deriváciu kritéria podľa koncového času t_P získame tak, že budeme uvažovať všetky variácie okrem δt_P rovné nule

$$\delta J_i = \left[H_i(t_P^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_P}\right]\delta t_P \tag{3.3.11}$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial t_P} = H_i(t_P^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_P} \tag{3.3.12}$$

3.3.1 Postup

Predpokladajme, že poznáme funkcie G_i, F_i a ich parciálne derivácie vzhľadom na $t_j, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$. Ďalej poznáme funkcie $\boldsymbol{f}$ a ich derivácie vzhľadom na $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$.

Algoritmus výpočtov pre NLP je potom nasledovný:

1. Integrujeme systém (3.1.1) a podintegrálne členy F_i dopredne v čase od $t = t_0$ do $t = t_P$. Reštartujeme integráciu na začiatkoch intervalov v prípade nespojitostí v riadení

2. Pre $i = 0, \ldots, m$ opakujeme

   (a) Inicializujeme adjungované premenné $\boldsymbol{\lambda}_i(t_P)$

   $$\boldsymbol{\lambda}_i(t_P) = \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_P)} \tag{3.3.13}$$

   (b) Inicializujeme nové stavové premenné pre výpočet integrálnych členov v podmienkach optimality $\boldsymbol{J}_u$, $\boldsymbol{J}_p$ rovné nule.

   (c) Integrujeme spätne od $t = t_P$ do $t = t_0$ systém adjungovaných rovníc a integrálnych členov. V bodoch nespojitostí adjungovaných premenných (3.3.9) reštartujeme integráciu

   $$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i^T = -\frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{x}^T} \tag{3.3.14}$$

   $$\dot{\boldsymbol{J}}_{u,i}^T = \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T} \tag{3.3.15}$$

   $$\dot{\boldsymbol{J}}_{p,i}^T = \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} \tag{3.3.16}$$

   Integrácia ostatných dvoch diferenciálnych rovníc nových stavových premenných $\boldsymbol{J}_u$, $\boldsymbol{J}_p$ zabezpečí výpočet integrálnych členov.

   (d) Vypočítame gradienty J_i vzhľadom na časy t_j, riadenie $\boldsymbol{u}$ a parametre $\boldsymbol{p}$

   $$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial t_P} &= H_i(t_P^-) + \frac{\partial G_i}{\partial t_P} \\ \frac{\partial J_i}{\partial t_j} &= H_i(t_j^-) - H_i(t_j^+) + \frac{\partial G_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, \ldots, P-1 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

   $$\frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{p}^T} - \boldsymbol{J}_{p,i}(0) + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t_0^+)\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} \tag{3.3.18}$$

   $$\frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{u}_j} = \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{u}_j^T} + \boldsymbol{J}_{u,i}(t_j) - \boldsymbol{J}_{u,i}(t_{j-1}) \tag{3.3.19}$$

Výpočet gradientu podľa $\boldsymbol{u}_j$ v ostatnej rovnici vyplýva z vlastností určitého integrálu, pretože platí

$$\int_{t_{j-1}^+}^{t_j^-} \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\mathrm{d}t = \int_{t_{j-1}^+}^{t_P^-} \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\mathrm{d}t - \int_{t_j^-}^{t_P^-} \frac{\partial H_i}{\partial \boldsymbol{u}^T}\mathrm{d}t \tag{3.3.20}$$

$$= -\boldsymbol{J}_{u,i}(t_{j-1}) + \boldsymbol{J}_{u,i}(t_j) \tag{3.3.21}$$

a záporné znamienko jednotlivých členov je dôsledkom integrácie spätne v čase.

Takto získame hodnoty funkcionálov J_i v kroku 1 a hodnoty gradientov v kroku 2d. Tieto potom môžeme odovzdať algoritmu NLP pre riešenie transformovaného problému dynamickej optimalizácie.

3.3.2 Poznámky

Gradienty vzhľadom na časy

Vzťahy (3.3.17) pre výpočet gradientov funkcionálov vzhľadom na časy nezobrali do úvahy, že optimalizujeme prírastky časov. Absolútne časy a ich prírastky sú vo vzťahu

$$\begin{aligned} t_1 &= \Delta t_1 \\ t_2 &= \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ &\vdots \\ t_P &= \textstyle\sum_{j=1}^{P} \Delta t_j \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Keďže pre derivácie platí

$$\frac{\partial J_i}{\partial \Delta t_j} = \sum_{k=1}^{P} \frac{\partial J_i}{\partial t_k}\frac{\partial t_k}{\partial \Delta t_j} \tag{3.3.23}$$

sú výsledné gradienty dané ako

$$\frac{\partial J_i}{\partial \Delta t_j} = \sum_{k=j}^{P} \frac{\partial J_i}{\partial t_k} \tag{3.3.24}$$

Integrácia adjungovaných rovníc

Keď je systém diferenciálnych rovníc adjungovaných premenných integrovaný spätne v čase, je potrebná znalosť stavov $\boldsymbol{x}(t)$. Je viacero spôsobov, ako si zapamätať z doprednej integrácie tieto informácie. Napríklad, stavové rovnice môžu byť simultánne integrované spolu s adjungovanými rovnicami smerom späť. Hoci je to správny prístup, môže dochádzať k numerickým problémom, pretože spätná integrácia stavov môže byť nestabilná. V Rosen a Luus (1991) je navrhnutý spôsob zapamätania stavov v pravidelných intervaloch, na začiatku ktorých sú počiatočné podmienky pre stavy opäť správne nastavené. My sme použili iný spôsob: v doprednej integrácii sú stavy zapamätané s krokom Δt_j a interpolujeme stavy počas spätnej integrácie. Nevýhodou tohto spôsobu sú značné požiadavky na pamäť. Druhým spôsobom je ukladať počas doprednej integrácie iba stavy na začiatku intervalov. Potom, v spätnej integrácii sa opäť integruje ale iba daný časový interval s opätovným zapamätaním s krokom Δt_j. Požiadavky na pamäť sú výrazne nižšie, ale výpočtový čas sa predĺži. Bolo vyskúšaných viacero typov interpolácií, najlepšie výsledky boli dosiahnuté s aproximáciami, ktoré majú nielen spojité stavy v rámci dvoch susedných intervalov, ale aj prvé derivácie. Takže sa jedná o interpolácie polynómom tretieho rádu. Aj keď čas výpočtu takejto interpolácie je výrazne vyšší, integrácia adjungovaných rovníc je jednoduchšia a celkový čas pre výpočet gradientov je tým znížený.

3.4 Iné spôsoby odvodenia gradientov

Okrem výpočtu gradientov pomocou teórie optimálneho riadenia je možné použiť aj iné spôsoby. Čisto numerický, pomocou aproximovaných gradientov metódou konečných rozdielov a na základe citlivostných rovníc.

3.4.1 Metóda konečných rozdielov

Systém (3.1.1) je integrovaný q-krát a v každom z nich je jedna z veličín y_i zmenená. Potom sú gradienty dané nasledovne

$$\nabla_{y_j} g_i = \frac{g_i(y_1, \dots, \Delta y_j, \dots, y_q) - g_i(\boldsymbol{y})}{\Delta y_j}, \quad i = 0, \dots, m \tag{3.4.1}$$

Výhodou je jednoduchosť implementácie. Nevýhodou je množstvo integrácií, ktoré je nutné opakovať pre každý optimalizovaný parameter. Naviac, gradienty sú vypočítané len s určitou presnosťou a ich použitie pri silne nelineárnych alebo časovo-optimálnych problémoch je diskutabilné, pretože môžu skomplikovať alebo úplne zastaviť konvergenciu NLP.

Použitie doprednej diferencie je uvedené iba pre informáciu. Vhodnejšia by bola zrejme centrálna diferencia alebo vzorce pre výpočet pomocou viacerých bodov. Nevýhodou každej inej aproximácie oproti uvedenej je nutnosť integrovať rovnice systému viackrát, a teda časová náročnosť sa neúmerne zvyšuje.

3.4.2 Citlivostné rovnice

Zároveň s integráciou stavových rovníc je možné aj získať informácie o citlivosti jednotlivých stavov k optimalizovaným parametrom (Caracotsios a Stewart, 1985; Morshedi a kol., 1986).

Malé zmeny v optimalizovaných premenných produkujú zmeny v stavových trajektóriách podľa rovnice

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{s}}_j(t) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \boldsymbol{s}_j(t) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{u}_{k+1}}{\partial y_j} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y_j} \\ & t_{k-1} \le t < t_k, \quad k = 0, \dots, P-1, \quad j = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

kde $\boldsymbol{s}_j(t)$ je vektor citlivostných funkcií

$$\boldsymbol{s}_j(t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(t)}{\partial y_i}, \quad \boldsymbol{s}_j(0) = \boldsymbol{0} \tag{3.4.3}$$

Ak budeme uvažovať, že optimalizované parametre sú nespojité na začiatku intervalov (napríklad riadenie), ale že stavy sú spojité, potom pre celkový diferenciál stavu musí platiť na hranici k-teho intervalu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t_k^+) = \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t_k^-) \tag{3.4.4}$$

$$\delta \boldsymbol{x}(t_k^+) + \dot{\boldsymbol{x}}(t_k^+)\mathrm{d}t = \delta \boldsymbol{x}(t_k^-) + \dot{\boldsymbol{x}}(t_k^-)\mathrm{d}t \tag{3.4.5}$$

Parciálna derivácia tejto rovnice podľa optimalizovanej premennej y_j je potom v tvare

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}(t_k^+)}{\partial y_j} = \frac{\partial \boldsymbol{x}(t_k^-)}{\partial y_j} + \dot{\boldsymbol{x}}(t_k^-)\frac{\partial t_k}{\partial y_j} - \dot{\boldsymbol{x}}(t_k^+)\frac{\partial t_k}{\partial y_j} \tag{3.4.6}$$

$$\boldsymbol{s}_j(t_k^+) = \boldsymbol{s}_j(t_k^-) + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{p}, t) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{p}, t)]_{t_k} \frac{\partial t_k}{\partial y_j}, \; k = 1, \dots, P-1 \tag{3.4.7}$$

Ak získame riešením diferenciálnych rovníc hodnoty citlivostí v čase t_P, potom je výpočet gradientu kritéria vzhľadom na optimalizované premenné jednoduchý a získame ho parciálnou deriváciou kritéria $J_i(t_P, \boldsymbol{x}(t_P), \boldsymbol{u}(t_P), \boldsymbol{p})$ podľa optimalizovaných parametrov nasledovne

$$\frac{\partial J_i}{\partial y_j} = \left(\frac{\partial J_i}{\partial t_P}\right)\frac{\partial t_P}{\partial y_j} + \left(\frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{x}_P}\right)^T \left[\boldsymbol{s}_j(t_P) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_P, \boldsymbol{u}_P, \boldsymbol{p}, t_P)\frac{\partial t_P}{\partial y_j}\right] + \left(\frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y_j} \tag{3.4.8}$$

V tomto prípade je potrebné integrovať rovnice optimalizovaného systému len raz a spolu s nimi pre každý parameter rovnaký počet diferenciálnych rovníc citlivostných premenných. Vidíme, že počet integrácií je zhodný s výpočtom na základe konečných rozdielov. Výhodou tejto metódy je presnosť gradientov, vo všeobecnosti minimálne taká, ako pri výpočte z adjungovaných rovníc.

Pomocou citlivostných rovníc je výhodné riešiť problémy, v ktorých je malé množstvo optimalizovaných premenných, ale väčšie množstvo obmedzení. Počet integrovaných rovníc v tomto prípade nezávisí od počtu obmedzení a je teda možné, že celkový počet diferenciálnych rovníc bude nižší, ako v prístupe pomocou adjungovaných premenných.

Príklad 3.4.1: *Použitie systému citlivostných rovníc pri výpočte gradientov v chemickom reaktore*

Uvažujme jednoduchý vsádzkový reaktor s následnými reakciami $A \to B \to C$ a problém jeho optimalizácie podľa článku Crescitelli a Nicoletti (1973).

Diferenciálne rovnice opisujúce proces prebiehajúci v reaktore sú nasledovné

$$\dot{x}_1 = -u x_1 \tag{3.4.9}$$
$$\dot{x}_2 = u x_1 - c u^\alpha x_2 \tag{3.4.10}$$

s počiatočnými podmienkami

$$x_1(0) = \beta_1, \quad x_2(0) = \beta_2 \tag{3.4.11}$$

Úlohou optimalizácie je maximalizovať výťažok produktu B v čase t_f: $x_2(t_f)$, pričom riadenie má byť po častiach konštantné. Budeme uvažovať 2 intervaly riadenia.

Uvažovaný problém obsahuje jedno riadenie u, ktoré bude mať dve zložky u_1, u_2. Keďže existujú dva stavy, budú celkovo štyri citlivosti

$$s_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \qquad s_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \tag{3.4.12}$$
$$s_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, \qquad s_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \tag{3.4.13}$$

Ich diferenciálne rovnice získame vo všeobecnosti derivovaním diferenciálnych rovníc stavov podľa u:

$$\dot{s}_{1i} = -u_i s_{1i} - x_1, \qquad s_{1i}(0) = 0 \tag{3.4.14}$$
$$\dot{s}_{2i} = u_i s_{1i} - c u_i^\alpha s_{2i} + x_1 - \alpha c u_i^{\alpha-1}, \qquad s_{2i}(0) = 0 \tag{3.4.15}$$

Konkrétny systém diferenciálnych rovníc citlivostných funkcií bude závisieť od konkrétneho intervalu. Pre prvý interval bude v tvare

$$\dot{s}_{11} = -u_1 s_{11} - x_1, \qquad \dot{s}_{12} = -u_1 s_{12} \tag{3.4.16}$$
$$\dot{s}_{21} = u_1 s_{11} - c u_1^\alpha s_{21} + x_1 - \alpha c u_1^{\alpha-1}, \qquad \dot{s}_{22} = -u_1 s_{12} - c u_1^\alpha s_{22} \tag{3.4.17}$$

Pre druhý interval bude v tvare

$$\dot{s}_{11} = -u_2 s_{11}, \qquad \dot{s}_{12} = -u_2 s_{12} - x_1 \tag{3.4.18}$$

$$\dot{s}_{21} = -u_2 s_{11} - c u_2^{\alpha} s_{21}, \qquad \dot{s}_{22} = u_2 s_{12} - c u_2^{\alpha} s_{22} + x_1 - \alpha c u_2^{\alpha-1} \tag{3.4.19}$$

Keďže kritérium je $J = x_2(t_f)$, jeho gradient vzhľadom na u_1 a u_2 nebude nič iné ako hodnota citlivostí v koncovom čase

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} = s_{21}(t_f), \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} = s_{22}(t_f) \tag{3.4.20}$$

Kapitola 4

Kompletná parametrizácia

Problémy dynamickej optimalizácie je možné numericky riešiť pomocou ortogonálnej kolokácie na konečných prvkoch – jedná sa o kompletnú parametrizáciu stavov a riadenia. Takýmto spôsobom je problém pretransformovaný na statickú optimalizáciu (NLP), pričom nie je nutné riešiť diferenciálne rovnice explicitne (Cuthrell a Biegler, 1987, 1989; Logsdon a Biegler, 1989; Lauw-Bieng a Biegler, 1991; Biegler a kol., 2002).

4.1 Definícia optimalizačného problému

Optimalizačný problém je definovaný svojou účelovou funkciou, obmedzením vyplývajúcim z opisu optimalizovaného procesu a systémom ďalších obmedzení.

4.1.1 Účelová funkcia

Účelová funkcia je v balíku dynopt definovaná v Mayerovom tvare, t.j. závisí iba od hodnôt v koncovom čase

$$J(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}) = G(\boldsymbol{x}(t_f), \boldsymbol{p}, t_f) \tag{4.1.1}$$

kde J označuje účelovú funkciu, ktorú budeme minimalizovať vzhľadom na trajektóriu riadenia $\boldsymbol{u}(t)$ a parametre $\boldsymbol{p}$, od ktorých závisia stavy procesu $\boldsymbol{x}$ v koncovom čase t_f spôsobom definovaným pomocou funkcie G.

Kritérium v Mayerovom tvare dostaneme z kritéria v Bolzovom tvare (1.1.2) tak, že si vytvoríme novú stavovú veličinu, ktorej derivácia je rovná podintegrálnej časti kritéria F. Tento postup je napríklad použitý v kapitole 8.1.3 na strane 102.

4.1.2 Optimalizovaný proces

Uvažujme procesy, ktoré môžeme opísať alebo obyčajnými diferenciálnymi rovnicami (ODE) alebo kombináciou diferenciálnych a algebraických rovníc (DAE) v semiexplicitnom tvare

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}, t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) \quad \text{over} \quad t_0 \le t \le t_f \tag{4.1.2}$$

kde $\boldsymbol{M}$ je konštantná matica určujúca, ktoré rovnice sú diferenciálne a ktoré algebraické. Aj počiatočné podmienky aj pravé strany rovníc môžu byť funkciou optimalizovaných parametrov.

Takto daný ODE/DAE systém určuje potom dvojicu obmedzení v tvare rovnosti – jedno v počiatočnom čase a jedno pozdĺž trajektórie.

4.1.3 Obmedzenia

Obmedzenia môžeme rozdeliť na jednoduché ohraničenia optimalizovaných premenných a na ich funkcie v počiatočnom čase, pozdĺž trajektórie a v koncovom čase. Dostávame tak systém rovníc a nerovníc v tvare

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}, t) = \boldsymbol{0} \tag{4.1.3}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}, t) \leq \boldsymbol{0} \tag{4.1.4}$$

$$\boldsymbol{x}(t)^L \leq \boldsymbol{x}(t) \leq \boldsymbol{x}(t)^U \tag{4.1.5}$$

$$\boldsymbol{u}(t)^L \leq \boldsymbol{u}(t) \leq \boldsymbol{u}(t)^U \tag{4.1.6}$$

$$\boldsymbol{p}^L \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{p}^U \tag{4.1.7}$$

kde veličiny s indexmi L, U reprezentujú dolné a horné ohraničenia.

4.1.4 Transformácia do NLP tvaru

Na to, aby sme mohli daný problém vyriešiť, použijeme ortogonálnu kolokáciu na konečných prvkoch. Nahradíme pôvodne spojité stavy a riadenie po častiach polynomickými aproximáciami. Potom je možné prepísať aj diferenciálne rovnice aj obmedzenia na celú trajektóriu na systém algebraických rovníc, ktorý má platiť už nie na celej trajektórii, ale iba vo vybraných bodoch.

Uvažujme teda interval i s časmi $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Na ňom definujeme aproximácie stavov a riadenia pomocou Lagrangeových polynómov v tvare

$$\boldsymbol{x}_{K_x}(t) = \sum_{j=0}^{K_x} \boldsymbol{x}_{ij}\phi_j(t); \quad \phi_j(t) = \prod_{k=0,j}^{K_x} \frac{(t - t_{ik})}{(t_{ij} - t_{ik})} \tag{4.1.8}$$

pre i $\quad i = 1, \ldots, \mathrm{NE}$

$$\boldsymbol{u}_{K_u}(t) = \sum_{j=1}^{K_u} \boldsymbol{u}_{ij}\theta_j(t); \quad \theta_j(t) = \prod_{k=1,j}^{K_u} \frac{(t - t_{ik})}{(t_{ij} - t_{ik})} \tag{4.1.9}$$

pre i $\quad i = 1, \ldots, \mathrm{NE}$

Zápis $k = 0, j$ značí, že k začína od nuly a $k \neq j$ a NE označuje počet intervalov. Takto máme definovaný polynóm $\boldsymbol{x}_{K_x}(t)$ rádu $(K_x + 1)$ a polynóm $\boldsymbol{u}_{K_u}(t)$ rádu K_u. Pre polynóm $\boldsymbol{x}_{K_x}(t)$ pridávame jeden bol s ohľadom na počiatočné podmienky na každom intervale.

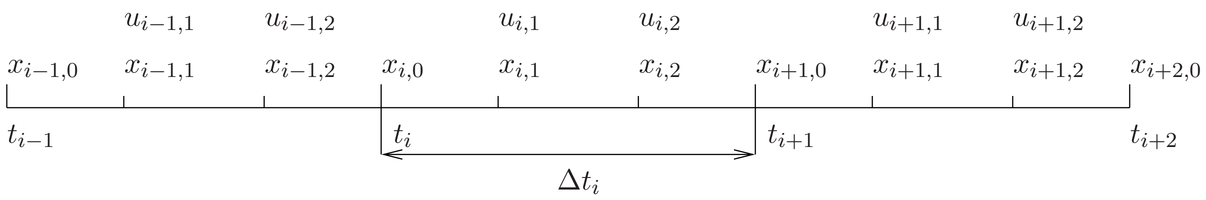
Výber počtu kolokačných bodov závisí od viacerých faktorov. Vyšší rád polynómov znamená lepšiu aproximáciu ale aj nebezpečenstvo kmitavosti polynómu medzi jednotlivými kolokačnými bodmi. Preto býva často vhodnejšie radšej použiť väčší počet intervalov s nižšími stupňami polynómov. Na druhej strane príliš nízky stupeň polynómov môže spôsobiť nedostatočne presnú aproximáciu pôvodnej trajektórie.

Ak budeme uvažovať $K = K_x = K_u$, potom je rozloženie kolokačných bodov znázornené na obr. 4.1.1.

Lagrangeove polynómy majú výhodnú vlastnosť ortogonality, pretože platí

$$\boldsymbol{x}_{K_x}(t_{ij}) = \boldsymbol{x}_{ij} \tag{4.1.10}$$

keďže $\phi_k(t_j) = \delta_{kj}$ kde δ_{kj} je rovná jednej iba vtedy, ak $k = j$, inak je nulová. To znamená, že môžeme jednoducho inicializovať neznáme koeficienty a prepísať obmedzenia trajektórie.



Obr. 4.1.1: Vyznačenie intervalov a bodov kolokácie pre stavové a riadiace profily

Rovnice systému môžu potom byť v kolokačných bodoch prepísané nasledovne (uvažujeme normalizovaný interval $\Delta t_i(\tau \in [0,1])$, takže $t = \tau\Delta t$ a $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\Delta t\mathrm{d}\tau$)

$$\Delta t_i \boldsymbol{r}(t_{ik}) = \boldsymbol{M}\sum_{j=0}^{K_x} \boldsymbol{x}_{ij}\dot{\phi}_j(\tau_k) - \Delta t_i \boldsymbol{f}(t_{ik}, \boldsymbol{x}_{ik}, \boldsymbol{u}_{ik}, \boldsymbol{p}) \tag{4.1.11}$$
$$i = 1,\dots,\mathrm{NE}, \quad j = 0,\dots,K_x, \quad k = 1,\dots,K_x$$

kde členy $\dot{\phi}_j(\tau_k) = \mathrm{d}t\phi_j/\mathrm{d}t\tau$ a $\phi_j(\tau),\ \theta_j(\tau)$ môžu byť vypočítané vopred, pretože nezávisia od skutočnej veľkosti intervalu, ale iba na rozložení bodov v rámci normalizovaného času. V literatúre sa najčastejšie uvádza pre ich výber voľba koreňov Legendrových polynómov. Členy $\boldsymbol{r}$ označujú tzv. rezídiá, ktoré majú byť rovné nule.

Vzťah medzi kolokačnými bodmi t_{ik}, skutočným časom na začiatku intervalu t_i a normovaným časom $\tau \in [0,1]$ je potom

$$t_{ik} = t_i + \Delta t_i \tau_k \tag{4.1.12}$$

Dĺžky intervalov Δt_i potom môžeme tiež zahrnúť medzi optimalizované premenné.

Okrem prepísania rovníc systému do diskretizovaného tvaru je tiež potrebné pridať obmedzenia, aby stavy na začiatku každého elementu boli zhodné so stavmi na konci predošlého elementu, aby bola zabezpečená ich kontinuita. Platí teda

$$\boldsymbol{x}^i_{K_x}(t_i) = \boldsymbol{x}^{i-1}_{K_x}(t_i), \quad i = 2,\dots,\mathrm{NE} \tag{4.1.13}$$

alebo

$$\boldsymbol{x}_{i0} = \sum_{j=0}^{K_x} \boldsymbol{x}_{i-1,j}\phi_j(\tau = 1), \quad i = 2,\dots,\mathrm{NE}, \quad j = 0,\dots,K_x \tag{4.1.14}$$

Na rozdiel od stavov obyčajne nepožadujeme spojitosť riadenia, a teda podobné rovnice v prípade optimalizovanej trajektórie $\boldsymbol{u}(t)$ nepožadujeme.

Konštrukcia Lagrangeových polynómov pre riadenie so stupňom K_u znamená, že prípadné ohraničenia riadenia budú splnené iba v kolokačných bodoch (ktoré sú vo vnútri každého intervalu), ale nie na jeho hraniciach. Takže k normálnym ohraničeniam v každom kolokačnom bode v tvare

$$\boldsymbol{u}^L_i \le \boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_i) \le \boldsymbol{u}^U_i \quad i = 1,\dots,\mathrm{NE} \tag{4.1.15}$$
$$\boldsymbol{u}^L_i \le \boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_{i+1}) \le \boldsymbol{u}^U_i \quad i = 1,\dots,\mathrm{NE} \tag{4.1.16}$$

pridáme ešte dve v bodoch t_i a t_{i+1} nasledovne

$$\boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_i) = \sum_{j=1}^{K_u} \boldsymbol{u}_{ij}\theta_j(\tau = 0), \quad i = 1,\dots,\mathrm{NE} \tag{4.1.17}$$

a

$$\boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_{i+1}) = \sum_{j=1}^{K_u} \boldsymbol{u}_{ij}\theta_j(\tau = 1), \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \tag{4.1.18}$$

Výsledná formulácia NLP problému je potom nasledovná

$$\min_{\boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{u}_{ij}, \Delta t_i, \boldsymbol{p}} \Big[G(\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{p}, t_f) \Big] \tag{4.1.19}$$

vzhľadom na

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{10} - \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{r}(t_{ik}) = \boldsymbol{0} \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \quad k = 1, \dots, K_x \\
&\boldsymbol{x}_{i0} - \boldsymbol{x}^{i-1}_{K_x}(t_i) = \boldsymbol{0} \quad i = 2, \dots, \mathrm{NE} \\
&\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}^{NE}_{K_x}(t_{NE+1}) = \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{u}^L_i \leq \boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_i) \leq \boldsymbol{u}^U_i \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \\
&\boldsymbol{u}^L_i \leq \boldsymbol{u}^i_{K_u}(t_{i+1}) \leq \boldsymbol{u}^U_i \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \\
&\boldsymbol{u}^L_{ij} \leq \boldsymbol{u}_{K_u}(\tau_j) \leq \boldsymbol{u}^U_{ij} \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \quad j = 1, \dots, K_u \\
&\boldsymbol{x}^L_{ij} \leq \boldsymbol{x}_{K_x}(\tau_j) \leq \boldsymbol{x}^U_{ij} \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \quad j = 0, \dots, K_x \\
&\Delta t^L_i \leq \Delta t_i \leq \Delta t^U_i \quad i = 1, \dots, \mathrm{NE} \\
&\boldsymbol{p}^L \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{p}^U \\
&\sum_{i=1}^{NE} \Delta t_i = t_{\text{total}} \\
&\boldsymbol{h}(t_{ij}, \boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{u}_{ij}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{g}(t_{ij}\boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{u}_{ij}, \boldsymbol{p}) \leq \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

kde index i reprezentuje interval, j, k kolokačné body.

Pre riešenie problému využívame optimalizačný toolbox MATLABu, konkrétne funkciu *fmincon*.

Kapitola 5

Problémy optimálneho riadenia

5.1 Parametrizácia riadenia

Na prvý pohľad sa môže zdať, že požiadavka na riadenie, aby bolo po častiach konštantné, je príliš obmedzujúca a že nebudeme schopní aproximovať pôvodne spojitú trajektóriu dostatočne presne.

Samozrejme, je možné použiť veľký počet časových intervalov P taký, aby sme pracovali s lepšou presnosťou. Toto ale nie je vhodný postup, pretože to zväčší zložitosť NLP problému, zvýši pravdepodobnosť lokálnych miním či konvergenčných problémov.

Našťastie je možné preformulovať aj iné spôsoby parametrizácie pomocou riadenia po častiach konštantného. Uvažujme napríklad po častiach lineárnu aproximáciu v tvare

$$u(t) = a + bt \tag{5.1.1}$$

V tomto prípade môžeme uvažovať koeficienty a, b ako nové riadenie. Takže u_1, u_2 vo vzorci

$$\boldsymbol{u}(t) = u_1 + u_2 t \tag{5.1.2}$$

sú nové riadiace veličiny.

Ďalším vhodným kandidátom na parametrizáciu sú Lagrangeove polynómy. Tieto sú definované nasledovne

$$P_j(t) = \prod_{i=0,j}^{N} \frac{t - t_i}{t_j - t_i} \tag{5.1.3}$$

kde N je stupeň polynómu $P_j(t)$ a označenie $i = 0, j$ znamená i idúce od nuly a zároveň $i \neq j$.

Časy t_i sú obvykle vypočítané ako korene Legendrových polynómov (Villadsen a Michelsen, 1978; Cuthrell a Biegler, 1989).

Parametrizáciu riadenia potom môžeme vyjadriť ako

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} \bar{u}_j \psi_j(t), \quad \psi_j(t) = \prod_{i=1,j}^{N} \frac{t - t_i}{t_j - t_i} \tag{5.1.4}$$

a prvky $\bar{u}_i$ budú po častiach konštantné riadenie v optimalizácii. Výhodou Lagrangeových polynómov je fakt, že platí

$$u(t_i) = \bar{u}_i \tag{5.1.5}$$

Koeficienty $\bar{u}_j$ majú fyzikálny zmysel, čo je výhodné najmä pre definovanie intervalových obmedzení na ne.

5.1.1 Po častiach spojité riadenie

Štandardne sú riadiace premenné v jednotlivých časových intervaloch nezávislé. Ak však potrebujeme, aby bola celková trajektória riadenia spojitá, môžeme použiť dva spôsoby:

1. Pridáme obmedzenia na riadenie medzi intervalmi v tvare

$$\boldsymbol{u}(t_i^-) = \boldsymbol{u}(t_i^+) \tag{5.1.6}$$

Takto pridáme $P-1$ podmienok rovnosti (každú rozmeru rovného počtu riadení). Keďže tieto obmedzenia neobsahujú stavy, sú jednoducho vyjadriteľné (aj ich gradienty). Avšak NLP algoritmus môže mať problémy s konvergenciou z dôvodu veľkého počtu obmedzení v tvare rovnosti.

2. Definujeme nové riadenie, ktoré bude deriváciou pôvodného a budeme optimalizovať jeho počiatočnú hodnotu a rýchlosť rastu (smernicu). Napríklad, pre lineárnu parametrizáciu riadenie v tvare $u_j = a_j + b_j t$ bude existovať nová diferenciálna rovnica

$$\dot{x}^u = b_j, \quad x(t_0) = a_1 \tag{5.1.7}$$

a x^u nahradí v rovniciach u. Optimalizované premenné potom budú $b_1, \ldots, b_P, a_1$ – sklony riadenia a počiatočná hodnota.

5.2 Obmedzenia na stavy pozdĺž trajektórie

Obmedzenia, ktoré zahŕňajú stavy a musia byť dodržané pozdĺž celej optimálnej trajektórie, môžeme vo všeobecnosti vyjadriť v nasledovnom tvare

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_P] \tag{5.2.1}$$

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t) = 0, \quad t \in [t_0, t_P] \tag{5.2.2}$$

Takéto obmedzenia predstavujú zložitý problém a pomocou techniky parametrizácie vektora riadenia sú riešiteľné len obtiažne. Existuje viacero spôsobov, ako takéto obmedzenia odstrániť alebo transformovať do tvaru (3.1.3). Pri transformáciách je dôležité zabezpečiť, aby nazaviedlo nespojité (nediferencovateľné) správanie.

Problematika obmedzení v tvare rovnosti je objasnená nižšie, obmedzenia v tvare nerovností sú preberané v kapitole 6.

5.2.1 Obmedzenia v tvare rovnosti

Tieto obmedzenia predpisujú vzťahy medzi stavmi a riadením. Z toho vyplýva, že niektoré riadiace premenné nemôžu byť uvažované ako optimalizované, a teda klesá počet stupňov voľnosti optimalizácie.

Najjednoduchšou metódou pre obmedzenia v tvare rovnosti, ktoré závisia priamo na riadiacich veličinách, je nájsť priamu závislosť riadenia od stavov a nahradiť zodpovedajúce riadenia v diferenciálnych rovniciach a vo funkcionáli a obmedzeniach.

Ak obmedzenia nezávisia priamo na riadení, alebo je táto závislosť obtiažne získateľná, je možné použiť všeobecný postup transformácie obmedzení do integrálneho tvaru. Definujeme novú stavovú premennú

$$\dot{x}^g = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t), \quad x^g(0) = 0 \tag{5.2.3}$$

a táto diferenciálna rovnica je pripojená k ostatným. Ak je obmedzenie splnené, je derivácia príslušného stavu rovná po celý čas nule a môžeme definovať integrálne obmedzenie v tvare

$$J^g = \int_{t_0}^{t_P} (\dot{x}^g)^2 \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_P} (g)^2 \, \mathrm{d}t = 0 \tag{5.2.4}$$

Ak je teda integrálne obmedzenie nula, potom je tiež splnené pôvodné stavové obmedzenie.

Z dôvodov zlepšenia konvergencie NLP často nahradzujeme rovnosť nerovnosťou

$$J^g = \int_{t_0}^{t_P} g^2 \mathrm{d}t < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.2.5}$$

To teda znamená, že povoľujeme malé porušenie obmedzenia počas celej trajektórie.

5.3 Minimalizácia času

Veľa problémov v dynamickej optimalizácii vedie k formuláciám, ktoré minimalizujú koncový čas. Na transformáciu do všeobecného tvaru (3.1.3) je možné použiť dva spôsoby.

Najjednoduchšie je definovať účelovú funkciu nasledovne

$$J_0 = G_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_P = \sum_{j=1}^{P} \Delta t_j \tag{5.3.1}$$

takže jej gradient podľa času je daný ako

$$\frac{\partial J_0}{\partial \Delta t_j} = 1 \tag{5.3.2}$$

Inou možnosťou je definovať parameter $p_t = t_P$ a normalizovať diferenciálne rovnice procesu vzhľadom na čas $\tau = t/p_t$, $\tau \in [0, 1]$ (pre jednoduchosť predpokladáme $t_0 = 0$). Z toho vyplýva

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} = p_t \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \tag{5.3.3}$$

Táto normalizácia tiež ovplyvní účelovú funkciu, ktorá je teraz v tvare

$$J_i = G_i(\tau_j, \boldsymbol{x}(1/P), \ldots, \boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{u}(1/P), \ldots, \boldsymbol{u}(1), \boldsymbol{p}, p_t) + \int_0^1 F_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, p_t) \mathrm{d}t \tag{5.3.4}$$

Takže problém minimalizácie času je potom

$$J_0 = G_0 = p_t \tag{5.3.5}$$

5.4 Periodické problémy

V niektorých prípadoch je potrebné pomocou dynamickej optimalizácii určiť periodický režim operácie, t.j. proces je v dynamickom režime, ktorý sa ale stále opakuje, takže sa jedná o kvázi stacionárny prípad. Uvažujme napríklad dvojpolohové riadenie. V takomto prípade proces nikdy nedosiahne ustálený stav. Avšak, môžeme definovať ustálený stav určitou množinou stavov, medzi ktorými sa proces bude stále nachádzať a v takomto prípade bude možné použiť aj dvojpolohové riadenie.

Z čisto matematického pohľadu môžeme periodický režim definovať nasledovne. Je potrebné nájsť také riadenie a také počiatočné stavy $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}$, aby bolo dodržané obmedzenie

$$\boldsymbol{x}(t_P) = \boldsymbol{p} \tag{5.4.1}$$

Aj keď je možné prepísať toto obmedzenie do n_x podmienok rovnosti, takáto formulácia nie je vhodná, ak majú byť gradienty vypočítavané pomocou adjungovaných rovníc (ako napr. v balíku `DYNO`). V takomto prípade je vhodnejšie preformulovať obmedzenie do tvaru

$$||\boldsymbol{x}(t_P) - \boldsymbol{p}||_2^2 = \sum_i (x_i(t_P) - p_i)^2 < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.4.2}$$

Kapitola 6

Obmedzenia na stavy v dynamickej optimalizácii

Táto časť skúma rozličné spôsoby pre zahrnutie obmedzení v tvare nerovnosti obsahujúce stavy, ktoré musia byť dodržané pozdĺž celej optimálnej trajektórie. Pri každej z metód budú diskutované jej výhody a nevýhody.

V závere sú jednotlivé metódy porovnané na jednoduchom príklade pomocou balíka DYNO.

6.1 Úvod a definícia problému

Budeme uvažovať problém dynamickej optimalizácie v tvare

$$\min_{\boldsymbol{u},t_j} J \quad = \quad G(t_j, \boldsymbol{x}(t_f), \boldsymbol{p}) + \int_0^{t_f} F(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})\mathrm{d}t, \quad j = 1, \ldots, P \tag{6.1.1}$$

vzhľadom na obmedzenia na optimalizovaný systém opísaný diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.1.2}$$

a vzhľadom na nerovnosti, ktoré musia byť splnené pozdĺž celej trajektórie

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \tag{6.1.3}$$

kde t označuje čas, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_{n_x}$ je vektor stavových premenných, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_{n_u}$ je vektor riadenia a $\boldsymbol{p} \in \mathcal{R}_{n_p}$ je vektor parametrov. Vektorové funkcie $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}_{n_x}, \boldsymbol{g} \in \mathcal{R}_m$ opisujú pravé strany diferenciálnych rovníc a obmedzenia v tvare nerovností.

Optimalizované premenné sú trajektória riadenia $\boldsymbol{u}$, ktorá je parametrizovaná ako po častiach konštantná, dĺžky intervalov t_j $(j = 1, \ldots, P)$, na ktorých je riadenie konštantné, kde P je počet intervalov času.

6.2 Metódy pre obmedzenia v tvare nerovnosti pozdĺž trajektórie

Existuje viacero prístupov k riešeniu problematiky obmedzení v tvare nerovnosti pozdĺž trajektórie (Vassiliadis a kol., 1994; Feehery a Barton, 1998).

V tomto prehľade nebudeme uvádzať použitie stochastických prístupov, pretože ich výkonnosť v blízkosti optima je veľmi nízka a pre nájdenie optima potrebujú veľké množstvo výpočtov.

6.2.1 Celková diskretizácia

Ortogonálna kolokácia na konečných prvkoch parametrizuje všetky stavy ako polynómy na každom optimalizovanom intervale. Najčastejšie použité aproximácie sú Lagrangeove polynómy.

Originálny problém je tak transformovaný na systém obmedzení v určitých bodoch, ktoré sú priamo riešené pomocou NLP algoritmu. Nevýhodou tohto prístupu je veľký počet optimalizovaných premenných.

6.2.2 Koncové obmedzenia

Originálny problém môže byť transformovaný na koncové obmedzenie v tvare rovnosti v tvare

$$J_1 = \int_0^{t_f} h(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})\mathrm{d}t = 0 \tag{6.2.1}$$

kde h je stupňom prekročenia obmedzenia. Aby NLP algoritmus nemal problémy s konvergenciou, nahrádzame často rovnosť nerovnosťou

$$J_1 = \int_0^{t_f} h(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})\mathrm{d}t < \varepsilon \tag{6.2.2}$$

čo spôsobí, že malé prekročenie obmedzenia je povolené.

Pre výber vhodnej penalizácie h bolo navrhnutých viacero funkcií:

Max Najjednoduchší spôsob je použiť $h = \min(g, 0)$. Avšak, gradient je v tomto prípade nespojitý, môže spôsobiť problémy pri integrácii a vo všeobecnosti sa neodporúča používať.

Max2 Zlepšením predošlého riešenia pre odstránenie nespojitosti je napríklad kvadratický tvar $h = [\min(g, 0)]^2$.

Vyhladzovanie V Teo a kol. (1991) je navrhnutá náhrada nespojitosti pomocou spojitej aproximácie. V oblasti, kde platí $|g| < \delta$, je použité kvadratické vyhladzovanie:

$$h = \begin{cases} g & \text{ak } g < -\delta \\ -\dfrac{(g-\delta)^2}{4\delta} & \text{ak } |g| \leq \delta \\ 0 & \text{ak } g > \delta \end{cases} \tag{6.2.3}$$

Výhodou oproti Max2 metóde je odstránenie umocňovania, takže malé porušenia obmedzenia sú penalizované viac. Na druhej strane dáva tento postup menšiu oblasť riešiteľnosti.

Nevýhodou týchto metód môže byť fakt, že nerozlišujú, či je stavové obmedzenie neaktívne počas celej trajektórie, alebo či je práve splnené. V oboch prípadoch je integrál rovný nule.

6.2.3 Systém bodových obmedzení

V predošlých metódach bolo obmedzenie v tvare nerovnosti počas celej trajektórie transformované na koncové pomocou integrálu. Iným riešením je diskretizovať toto ohraničenie a vyžadovať, aby bolo splnené v niektorých bodoch pozdĺž trajektórie – obyčajne na konci každého časového intervalu t_j

$$g(t_j) \geq 0 \tag{6.2.4}$$

Hoci takáto formulácia je pre NLP algoritmus vhodnejšia ako integrálny prístup, môže dôjsť k prípadom, kedy je síce obmedzenie dodržané v koncových bodoch časov, ale nie medzi nimi. Ak sú časy t_j pevné a dostatočne blízko pri sebe, nemusí byť porušenie pôvodného obmedzenia výrazné. Ak však optimalizujeme aj časy, obyčajne nájdeme riešenie s jedným veľkým časovým intervalom t_k, v rámci ktorého bude obmedzenie výrazne porušené.

6.2.4 Kombinácia koncových a vnútorných obmedzení

Výrazné zlepšenie môžeme očakávať, ak spojíme oba prístupy k riešeniu obmedzení – aj integrálna transformácia aj bodové ohraničenia na konci každého intervalu. Takto dostane NLP viac informácií aj v prípade, že je integrál rovný nule. Avšak, ak sú počítané gradienty pomocou adjungovaných premenných, ako je to napríklad v `DYNO`, každé obmedzenie implikuje riešenie nového systému adjungovaných diferenciálnych rovníc, čo výrazne predĺži čas riešenia.

6.2.5 Prídavné premenné

Metóda prídavných premenných (Jacobson a Lele, 1969; Bryson a Ho, 1975; Feehery a Barton, 1998) vychádza z postupov optimálneho riadenia a v porovnaní s ostatnými metódami poskytuje najsprávnejší postup riešenia. Avšak má viacero nedostatkov a nie je použiteľná vo všeobecnosti.

Princípom tejto metódy je zmena pôvodnej nerovnice na rovnosť pridaním novej prídavnej premennej $a(t)$:

$$g(x) - \frac{1}{2}a^2 = 0 \tag{6.2.5}$$

Uvažuje sa štvorec prídavnej premennej, aby mohla nadobúdať aj záporné hodnoty.

Táto rovnica je potom derivovaná toľkokrát, kým nenájdeme explicitné riešenie pre riadenie u. Toto je potom vyjadrené a dosadené do ostatných rovníc. Takže princípom tejto metódy je vyjadriť riadenie ako novú stavovú premennú pre dané obmedzenie. Pridáme teda stavové obmedzenie k ostatným diferenciálnym rovniciam, vypočítame riadenie ako novú stavovú premennú a optimalizujeme prídavnú premennú $a(t)$ – túto parametrizujeme zvyčajným spôsobom.

Pôvodný prístup uvedený v Jacobson a Lele (1969) umožňoval riešenie iba pre diferenciálne rovnice. Zovšeobecnenie pre všeobecný systém algebraicko-diferenciálnych rovníc bolo publikované v Feehery a Barton (1998).

Hoci je metóda atraktívna a poskytuje veľmi dobré výsledky, má aj niekoľko slabých miest:

- Celkový počet stavových obmedzení nemôže byť väčší ako je počet riadení. V iných prístupoch môžeme nájsť riešenie, keď je počet *aktívnych* obmedzení menší ako počet riadení. Jedno z možných riešení tohto problému bolo navrhnuté v Feehery a Barton (1998) pomocou detekcie stavových udalostí.
- Keďže sa riadenie stáva stavom, sú obmedzenia na riadenie obtiažne riešiteľné, pretože sa stávajú stavovými.
- Ak existuje viacero možností, ktoré riadenie použijeme ako stavovú premennú, nie je jednoznačný jeho výber. V takomto prípade je zrejme riešením použiť kombináciu riadení ako stavovú veličinu. navrhovaný postup však nedáva odpoveď na otázku, ako takúto kombináciu nájsť.
- Transformáciou riadenia na stav automaticky predpokladáme, že riadenie je spojitá veličina. Existujú prípady, kedy je požadované, aby bolo riadenie po častiach konštantné – napríklad v dvojpolohovom riadení, kde potrebujeme iba optimalizovať dĺžky časových intervalov, nie hodnotu riadenia.

Na druhej strane sú výhody metódy nasledovné:

- Počas integrovania diferenciálnych rovníc automaticky generujeme riadenie, ktoré spĺňa stavové obmedzenia. Toto je obzvlášť dôležité v prípadoch, kde riešenie nespĺňajúce stavové obmedzenie by mohlo spôsobiť nestabilitu riešenia diferenciálnych rovníc.

- Obmedzenia sú splnené na základe presnosti danej integráciou a nie je potrebné ich riešiť pomocou NLP.

6.3 Porovnanie vybraných metód na príklade

Uvažujme problém dynamickej optimalizácie, v ktorom minimalizujeme LQ kritérium a lineárny systém (Jacobson a Lele, 1969; Logsdon a Biegler, 1989; Feehery, 1998):

$$\min_{u(t)} J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2)\mathrm{d}t \tag{6.3.1}$$

vzhľadom na:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad x_1(0) = 0 && (6.3.2)\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u, \quad x_2(0) = -1 && (6.3.3)\\ 0 &\geq x_2 - 8(t-0.5)^2 + 0.5 && (6.3.4) \end{aligned}$$

Predpokladajme rozdelenie času $[0, 1]$ na 10 intervalov s optimalizovanou dĺžkou a parametrizáciu riadenia s jedným alebo dvomi parametrami na každý interval.

Tento problém môže byť prepísaný nasledovne ($g = x_2 - 8(t-0.5)^2 + 0.5$):

Max2 obmedzenie:

$$\varepsilon - \int_0^1 (\max(g, 0))^2 \mathrm{d}t \geq 0 \tag{6.3.5}$$

Vyhladzovanie obmedzenie:

$$\varepsilon - \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \geq 0 \tag{6.3.6}$$

kde

$$h = \begin{cases} g & \text{ak } g_i < -\delta \\ -\dfrac{(g-\delta)^2}{4\delta} & \text{ak } |g| \leq \delta \\ 0 & \text{ak } g > \delta \end{cases} \tag{6.3.7}$$

Body obmedzenie:

$$x_2(t_i) - 8(t_i - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0, \quad i = 1 \dots 10 \tag{6.3.8}$$

kde t_i sú konce intervalov.

Prídavné premenné Keďže obmedzenie nie je funkciou u, derivujeme ho vzhľadom na čas a dostaneme

$$\begin{aligned} x_2 - 8(t-0.5)^2 + 0.5 + \frac{1}{2}a^2 &= 0 && (6.3.9)\\ \dot{x}_2 - 16(t-0.5) + a\dot{a} &= 0, \quad a(0) = \sqrt{5} && (6.3.10) \end{aligned}$$

Počiatočná podmienka pre $a(0)$ vyplýva z podmienok v čase $t = 0$, kedy sú oba stavy známe.

Porovnaním (6.3.4) a (6.3.10) dostaneme vzťah pre u

$$u = x_2 + 16(t - 0.5) - a\dot{a} \tag{6.3.11}$$

Ak zvolíme $a_1 = \dot{a}$ ako optimalizovanú premennú (a obmedzíme a tak, aby bolo spojité), dostaneme nasledovný optimalizačný problém:

$$\min_{a_1(t)} J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005(x_2 + 16(t - 0.5) - aa_1)^2)\mathrm{d}t \tag{6.3.12}$$

vzhľadom na:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad x_1(0) = 0 && (6.3.13)\\ \dot{x}_2 &= 16(t - 0.5) - aa_1, \quad x_2(0) = -1 && (6.3.14)\\ \dot{a} &= a_1, \quad a(0) = \sqrt{5} && (6.3.15) \end{aligned}$$

a a_1 je parametrizované ako optimalizovaná premenná.

6.3.1 Výsledky

Na riešenie problému sme použili parametrizáciu riadenia v tvare $u(t) = u_1 + u_2 t$ (po častiach lineárne s možnými nespojitosťami) a s presnosťami integrácie a optimalizácie alebo $10^{-7}/10^{-5}$ alebo $10^{-9}/10^{-7}$. Presnosť integrácie udáva maximálnu relatívnu chybu, s ktorou sú integrované diferenciálne rovnice procesu a adjungovaných veličín pri výpočte účelovje funkcie a gradientov. Presnosť optimalizácie určuje toleranciu pri výpočte ukončenia NLP iterácií – presnosť tolerancie obmedzení a tiež kritérium ukončenia optimalizácie na základe Kuhn-Tuckerových podmienok. Na riešenie bol použitý balík DYNO (Fikar a Latifi, 2001). Výsledky udáva tab. 6.3.1 pre metódu prídavných premenných (pričom bola použitá aj konštantná a kvadratická parametrizácia riadenia) a v tab. 6.3.2 pre ostatné metódy.

Ako naznačujú výsledky z tab. 6.3.1, metóda prídavných premenných je relatívne necitlivá na voľbu presností. Počet integrácií a dosiahnuté minimum funkcionálu ostávajú približne konštantné. Typ parametrizácie je ale dôležitý, hodnota kritéria sa výrazne mení.

Obr. 6.3.1 porovnáva jednotlivé aproximácie riadenia vypočítaného z (6.3.11) ako aj priebeh obmedzenia (6.3.4). Vidíme, že obmedzenie nebolo nikdy porušené.

Ako bolo poznamenané vyššie, s touto metódou je obtiažne zvoliť obmedzenie na riadiacu veličinu – napr. horné ohraničenie $u < 10$.

Metódy (Max2, Max2+body, vyhladzovanie) zdieľajú niektoré spoločné črty (viď tab. 6.3.2):

- Nájdené optimum je lokálne a závisí od nastavenej presnosti.
- Výpočtový čas potrebný na zlepšenie výsledku o ďalšie platné číslice rastie geometrickým radom.
- Medzi metódami nie sú výrazné rozdiely, čo sa týka presnosti, či počtu iterácií. Rýchlosť konvergencie je približne rovnaká.

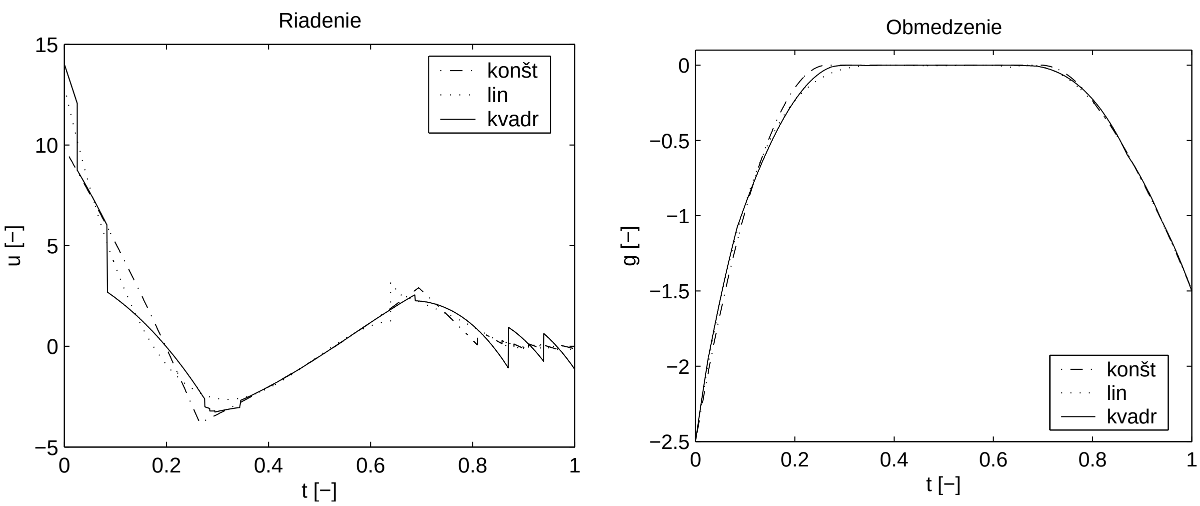
  Zdá sa, že najjednoduchší prístup (Max2) má dostatočne dobré vlastnosti, čo sa riešenia tohto problému týka, aj keď v literatúre je možné nájsť opačné tvrdenia (Teo a kol., 1991; Vassiliadis a kol., 1994).

Tabuľka 6.3.1: Štatistika pre metódu prídavných premenných

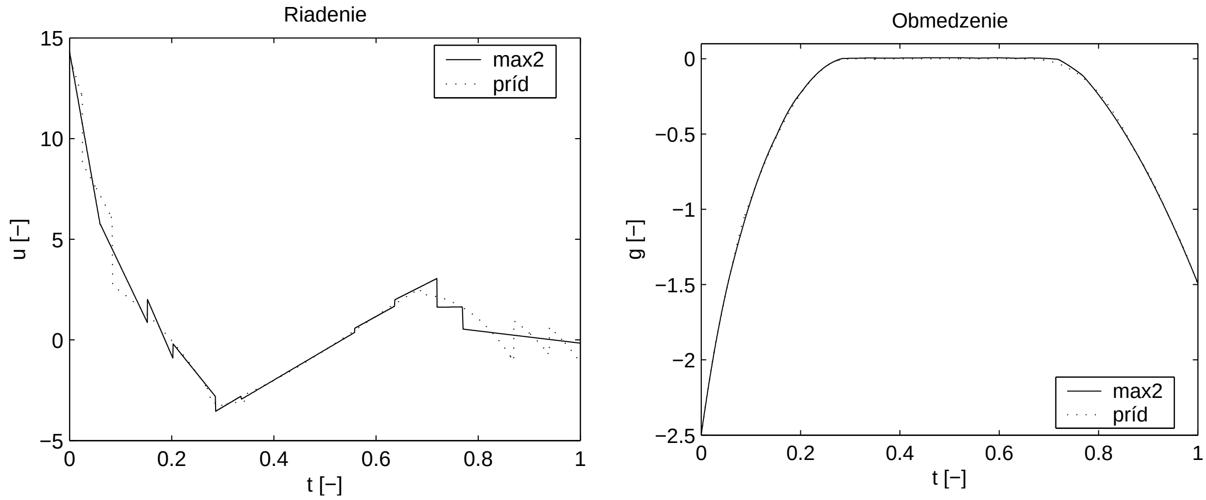
	J	Presnosti	Iterácie (integ, optim)
Konštantná	0.1744	$10^{-7}/10^{-5}$	75/59
Konštantná	0.1740	$10^{-9}/10^{-7}$	123/105
Lineárna	0.1729	$10^{-7}/10^{-5}$	53/48
Lineárna	0.1729	$10^{-9}/10^{-7}$	73/68
Kvadratická	0.1714	$10^{-9}/10^{-7}$	193/174

Tabuľka 6.3.2: Štatistika pre ostatné metódy

	J	Presnosti	Iterácie (integ, optim)
Max2	0.1743	$10^{-7}/10^{-5}$	72/59
Max2	0.1677	$10^{-9}/10^{-7}$	1381/627
Max2+body	0.1737	$10^{-7}/10^{-5}$	107/84
Max2+body	0.1680	$10^{-9}/10^{-7}$	1306/656
Vyhladzovanie	0.1758	$10^{-7}/10^{-5}$	187/142
Vyhladzovanie	0.1703	$10^{-9}/10^{-7}$	680/490
Body (voľné t_i)	0.0690	$10^{-7}/10^{-5}$	132/130
Body (pevné t_i)	0.2991	$10^{-7}/10^{-5}$	62/62



Obr. 6.3.1: Porovnanie rozličných parametrizácií (konštantná, lineárna, kvadratická) v prístupe s prídavnými premennými. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie



Obr. 6.3.2: Porovnanie prístupov Max2 a prídavných premenných. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie

Obr. 6.3.2 ukazuje rozdiely medzi metódou prídavných premenných s kvadratickou aproximáciou a Max2 (presnosti $10^{-9}/10^{-7}$). V časti trajektórie, kde je aktívne stavové obmedzenie, môžeme vidieť určité kmity v prípade Max2. Toto je charakteristické pre integrálne metódy, keďže obmedzenie má na starosti NLP algoritmus. Trajektórie riadenia pomocou prídavných premenných nezdieľajú tento nedostatok, keďže obmedzenie je riešené na úrovni integrácie. Hodnota účelovej funkcie je v tomto prípade nižšia, čo je dané aj faktom, že v Max2 prípade je povolené porušenie integrálneho obmedzenia o hodnotu $\varepsilon = 10^{-5}$.

V ďalšom ukážeme nebezpečenstvo pri použití vnútorných bodových obmedzení na obr. 6.3.3 a v posledných dvoch riadkoch v tab. 6.3.2. V prvom prípade uvažujeme intervaly časov s premenlivou dĺžkou a vidíme, že účelová funkcia dosiahla veľmi malú hodnotu. V tomto prípade vidíme na obr. 6.3.3 (plná čiara vpravo), že jeden z intervalov je veľmi veľký. Hoci sú bodové obmedzenia splnené na konci každého intervalu (časy $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.75$), dĺžka intervalu spôsobí, že obmedzenie je výrazne porušené v strede intervalu.

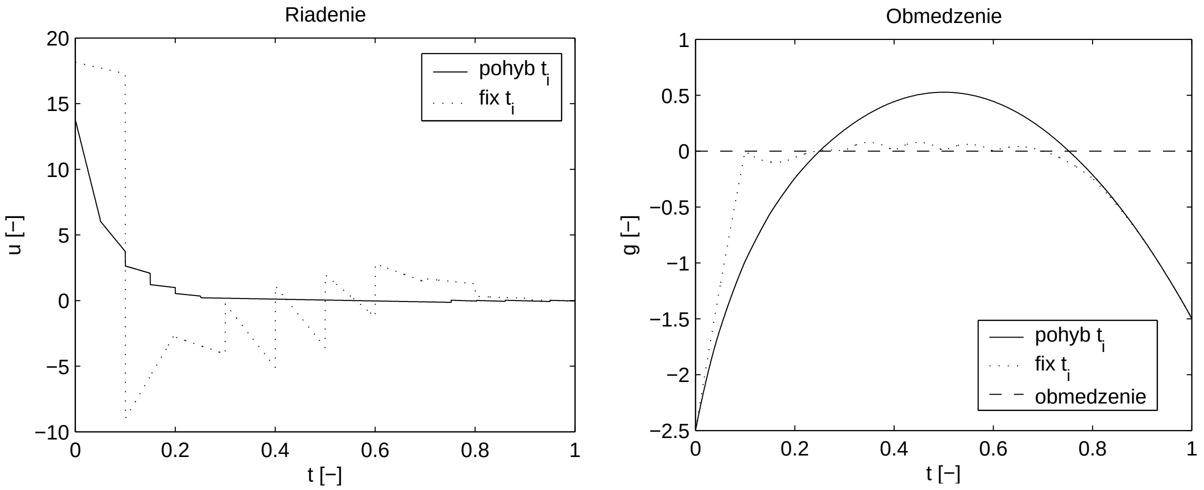
Avšak, práve takýto spôsob pre prácu so stavovými obmedzeniami je obvyklý v prediktívnom riadení. Vtedy však uvažujeme dĺžky intervalov rovnaké (perióda vzorkovania). Vidíme potom, že tieto praktiky sú vhodné, ako ukazuje bodkovaná čiara na obr. 6.3.3 (vpravo). Maximálna hodnota porušenia obmedzenia je asi 0.07, čo môže ešte byť akceptovateľné. Nevýhodou môže byť hodnota účelovej funkcie (tab. 6.3.2, posledný riadok), ktorá je skoro dvakrát väčšia v porovnaní s minimálnou.

6.4 Záver

V tejto časti boli skúmané viaceré prístupy pri riešení obmedzení v tvare nerovností, ktoré musia byť splnené počas celej trajektórie a v ktorých vystupujú stavové veličiny. Prvá časť sa zaoberala všeobecným prehľadom metód.

Druhá časť bola zamerané na porovnanie jednotlivých metód. Dá sa vyhodnotiť, že ako najvhodnejšia sa javí metóda prídavných premenných. Jej nevýhodou je ale, že nie je dostatočne všeobecná a nemôže byť použitá pre všetky typy problémov.

Z kategórie metód vhodných pre každé použitie sa javí najvhodnejším transformácia pôvodného obmedzenia na integrálne v koncovom čase použitím štvorca operátora max.



Obr. 6.3.3: Bodové obmedzenia s pevnou alebo premenlivou dĺžkou časových intervalov. Vľavo: riadiaca veličina, vpravo: stavové obmedzenie

Kapitola 7

Optimálne riadenie systémov s hybridnou dynamikou

Táto časť sa zaoberá dynamickou optimalizáciou hybridných systémov. Je založená na metóde CVP (Hirmajer a Fikar, 2006a).

Podrobne odvodíme podmienky optimality pre hybridné systémy. Tieto výsledky budú použité pri metóde CVP na výpočet gradientov pre NLP problém.

Na príklade spojených zásobníkov kvapaliny s hybridnou dynamikou ukážeme viacero simulačných príkladov, ktoré zahŕňajú časovú minimalizáciu a LQ problémy.

7.1 Úvod

Veľká množina procesov v chemickom priemysle, ale aj v praktickom živote je opísaná hybridným správaním, kedy matematický opis systému sa v určitých časových okamihoch mení. Za všetky môžeme spomenúť napríklad termodynamický proces zrážania a rozpúšťania, zmena prietoku kvapaliny z laminárneho toku na turbulentný tok, zmena priebehu procesu (miešanie, usadzovanie) v chemickom reaktore (Srinivasan a kol., 2003; Bonvin, 1998; Dostál a kol., 2004; Barton a kol., 2000a; Schlegel a Marquardt, 2006), procesy biologického spracovania odpadových vôd (Lin a Cheng, 2001; Zhao a kol., 1995, 1994b; Coelho a kol., 2000; Isaacs, 1997) a mnoho ďalších procesov.

Pre optimalizáciu takýchto procesov môžeme použiť viacero prístupov. Ak je možné proces s dostatočnou presnosťou opísať ako po častiach lineárny, môžeme použiť algoritmy explicitného prediktívneho riadenia Bemporad a Morari (1999).

V prípade plne nelineárnych procesov musíme použiť zjednodušujúce metódy a formulácie. Najčastejšie sa používa úplná diskretizácia stavových a riadiacich premenných – ortogonálna kolokácia Avraam a kol. (1998). Iným spôsobom je nechať stavové veličiny spojité a aproximovať iba riadiace veličiny. Tento prístup je známy ako parametrizácia vektora riadenia (CVP). V tejto oblasti existuje viacero prístupov podľa toho, ako sa vypočítajú gradienty výsledného nelineárneho programovania (NLP). V Vassiliadis a kol. (1994) sa skonštruuje systém citlivostných rovníc. Tento spôsob má výhodu v jednoduchej formulácii problému a doprednej integrácii stavov a citlivostných rovníc. Nevýhodou je veľký počet riešených diferenciálnych rovníc, pretože každý optimalizovaný parameter vytvára systém diferenciálnych rovníc s rovnakým rozmerom ako je počet stavov.

Inou možnosťou, ktorá je použitá v tejto časti, je vypočítavať gradienty na základe teórie optimálneho riadenia použitím systému adjungovaných rovníc (Ruban, 1997). Výhodou je nízky počet diferenciálnych rovníc, ktorý nezávisí od počtu optimalizovaných parametrov, ale od počtu obmedzení. Na druhej strane, nevýhodou je, že rovnice adjungovaných premenných treba integrovať spätne, z čoho vyplýva obtiažnejšia implementovateľnosť. Ak ale uvažujeme procesy s veľkým počtom stavových rovníc a iba malým počtom obmedzení, ktoré závisia od stavov, tento prístup je vhodnejší, ako výpočet citlivostí.

Hlavným cieľom tejto časti je ukázať podrobné odvodenie postupu dynamickej optimalizácie pre hybridné systémy pomocou teórie optimálneho riadenia. Výsledky budú objasnené na príklade systému dvoch zásobníkov s hybridnou dynamikou.

7.2 Formulácia problému

Uvažujme systém, ktorý je opísaný nasledovnými diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, t), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{7.2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_{n+1}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, t), \quad t_n \leq t \leq t_P \tag{7.2.2}$$

s počiatočnými a koncovými podmienkami ($t_0 = t_0(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{x}^+(t_0) = \boldsymbol{x}_0(t_0, \boldsymbol{u})$ a $t_P = t_P(\boldsymbol{u})$). Uvažujeme n – rozmerný vektor stavov $\boldsymbol{x}(t)$ a konštantný m – rozmerný vektor optimalizovaných parametrov $\boldsymbol{u}$. Predpokladáme, že stavy systému sú sú zviazané s rozličnými stavovými rovnicami $\boldsymbol{f}_i(\cdot)$, ktoré sú spojito diferencovateľné.

Čas prepnutia t_i, v ktorom je jeden systém rovníc nahradený iným, je určený prepínacou podmienkou

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^-, t_i, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \qquad i = \overline{1, n} \tag{7.2.3}$$

Predpokladáme, že funkcie $\boldsymbol{g}_i(\cdot)$ sú spojito diferencovateľné vzhľadom k všetkým premenným. Stavový vektor $\boldsymbol{x}$ môže mať v prepínacích časoch nespojitosti dané rovnicami

$$\boldsymbol{x}_i^+ = \boldsymbol{x}_i^- + \boldsymbol{\Delta}_i(\boldsymbol{x}_i^-, t_i, \boldsymbol{u}), \qquad i = \overline{1, n} \tag{7.2.4}$$

kde $\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)$ sú spojito diferencovateľné vektorové funkcie a $\boldsymbol{x}_i^- = \boldsymbol{x}(t_i^-)$, $\boldsymbol{x}_i^+ = \boldsymbol{x}(t_i^+)$ sú hodnoty stavového vektora $\boldsymbol{x}$ pred a po prepínacom čase. V (7.2.4) uvažujeme aditívne skoky na pôvodne spojitej trajektórii v časoch t_i (t.j. ak $\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{0}$, potom $\boldsymbol{x}(t)$ je spojitý v čase t_i).

Ďalej predpokladajme rovnicu výstupu v tvare

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, t), \qquad t \in [t_0, t_P] \tag{7.2.5}$$

kde $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ je tiež spojitá, spojito diferencovateľná a ohraničená (spolu s prvými deriváciami) vektorová funkcia. Rozmery stavového a výstupného vektora $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{\eta}$ môžu byť rozličné.

V ďalšom kroku definujme účelovú funkciu J, ktorá bude optimalizovaná (alebo obmedzenie, ktoré má byť splnené) vo všeobecnom Bolzovom tvare (Bryson a Ho, 1975).

$$J(\boldsymbol{u}) = G(\boldsymbol{\eta}(t_P), \boldsymbol{u}, t_P) + \int_{t_0}^{t_P} F(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{u}, t)\mathrm{d}t \tag{7.2.6}$$

kde J je skalárnu účelová funkcia, ktorá má byť minimalizovaná, G definuje koncové podmienky a F požiadavky pozdĺž časovej osi.

7.3 Odvodenie podmienok optimality

Podmienky optimality odvodíme na základe variačného počtu.

K funkcionálu (7.2.6) pripojíme obmedzenia vzhľadom na dynamiku systému (7.2.1), (7.2.2) a k počiatočným podmienkam

$$J = J(\boldsymbol{u}) + \int_{t_0}^{t_P} \boldsymbol{\lambda}^T(t)[\boldsymbol{f}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t)]\mathrm{d}t + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)[\boldsymbol{x}_0(t_0, \boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{x}^+(t_0)] \tag{7.3.1}$$

kde sme zaviedli nasledovné zjednodušenia:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad F(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{u}, t) = F(t), \tag{7.3.2}$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(t_P), \boldsymbol{u}, t_P) = \boldsymbol{\eta}(t_P), \qquad \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{\eta}(t), \tag{7.3.3}$$

$$G(\boldsymbol{\eta}(t_P), \boldsymbol{u}, t_P) = G(\cdot) \tag{7.3.4}$$

Ak uvažujeme časy prepnutia, môžeme rozdeliť podintegrálnu funkciu na dve časti

$$-\int_{t_0}^{t_P} \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t = -\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t - \int_{t_n}^{t_P} \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.5}$$

Po integrácii per partes dostaneme

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t_P} \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}t = &\int_{t_0}^{t_P} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T(t_0^+)\boldsymbol{x}(t_0^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_P^-)\boldsymbol{x}(t_P^-) + \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)] \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Účelová funkcia (7.3.1) je teda v tvare

$$\begin{aligned} J =& G(\cdot) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\boldsymbol{x}_0(t_0, \boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\boldsymbol{x}(t_P) \\ &+ \int_{t_0}^{t_P} [F(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)] \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Ak uvažujeme zmenu pravých strán rovníc dynamiky (7.2.1)–(7.2.2), môžeme rozdeliť integrál v (7.3.7) počas časových intervalov

$$\begin{aligned} J =& G(\cdot) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\boldsymbol{x}_0(t_0, \boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\boldsymbol{x}(t_P) \\ &+ \int_{t_n}^{t_P} [F(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}_{n+1}(t) + \boldsymbol{x}^T(t)\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)]\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} [F(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}_i(t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)] \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Urobíme teraz prvú variáciu J pričom zoberieme do úvahy vzťahy (7.2.5) medzi $\boldsymbol{\eta}(t)$ a $\boldsymbol{x}(t)$ a závislosti t_0 a t_P od $\boldsymbol{u}$

$$
\begin{aligned}
\delta J =& \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}}\Big)^T \delta\boldsymbol{\eta}(t_P) + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^T \delta\boldsymbol{u} + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial t_P}\Big)^T \delta t_P \\
&+\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\delta\boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u}_0) \\
&-\delta\boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\boldsymbol{x}_P(t_P,\boldsymbol{u}_P) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\delta\boldsymbol{x}_P(t_P,\boldsymbol{u}_P) \\
&+\delta\Big\{\int\limits_{t_n}^{t_P}[F(t)+\boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}_{n+1}(t)+\boldsymbol{x}^T(t)\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)]\mathrm{d}t \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}[F(t)+\boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}_i(t)+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t\Big\} \\
&+\delta\Big\{\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)]\Big\}
\end{aligned}
\tag{7.3.9}
$$

Prvá variácia posledného člena v rovnici (7.3.9) dá variáciu dodatočného člena vzhľadom na $\boldsymbol{x}$ a t_i, $i=\overline{1,n}$ s ohľadom na čas prepnutia

$$
\begin{aligned}
&\delta\Big\{\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)]\Big\} \\
&=\sum_{i=1}^{n}\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\boldsymbol{I}+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i^-}\Big)\Big)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\Big]\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)+\sum_{i=1}^{n}\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\delta t_i\Big] \\
&+\sum_{i=1}^{n}\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{u}}\Big)\Big]\delta\boldsymbol{u}+\sum_{i=1}^{n}[\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+)-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-)]\delta t_i
\end{aligned}
\tag{7.3.10}
$$

kde I je jednotková matica. Vzťah medzi $\delta\boldsymbol{x}(t_i^+)$ a $\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)$ vzhľadom na čas prepnutia, ktorý bol použitý v (7.3.10) je získaný z (7.2.4)

$$
\delta\boldsymbol{x}(t_i^+)=\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i^-}\Big)\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\delta t_i+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{u}}\Big)\delta\boldsymbol{u}
\tag{7.3.11}
$$

Variácia integrálov v (7.3.9) vzhľadom na čas prepnutia t_i, $i=\overline{1,n}$ dáva nasledovný výsledok

$$
\begin{aligned}
&\delta\Big\{\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\{\cdot\}dt+\int\limits_{t_n}^{t_P}\{\cdot\}dt\Big\} \\
&=\sum_{i=1}^{n}\big[F(t_i^-)+\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-)+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t_i^-)\boldsymbol{x}(t_i^-) \\
&-F(t_i^+)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t_i^+)\boldsymbol{x}(t_i^+)]\delta t_i
\end{aligned}
\tag{7.3.12}
$$

Nespojitosti vzhľadom na stavové premenné vyriešime pomocou nasledovných členov (spôsobených časmi prepnutia)

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\boldsymbol{I}+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i^-}\Big)\Big)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\Big]\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[F(t_i^-)+\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-)-F(t_i^+)$$
$$-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)+\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{u}}\Big)\Big]\delta\boldsymbol{u} \tag{7.3.13}$$

Závislosť variácie času prepnutia δt_i na variácii stavových premenných $\delta\boldsymbol{x}(t_i^-)$ a na variácii parametrov $\delta\boldsymbol{u}$ získame z prepínacích podmienok (7.2.3)

$$\Delta\boldsymbol{g}_i(\cdot)=\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i(t_i^-)}\Big)\delta\boldsymbol{x}_i(t_i^-)+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\delta t_i+\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{u}}\Big)\delta\boldsymbol{u}, \tag{7.3.14}$$

$$\delta t_i=-\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i(t_i^-)}\Big)\delta\boldsymbol{x}_i(t_i^-)-\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{u}}\Big)\delta\boldsymbol{u}, \tag{7.3.15}$$

$$\delta t_i=a_i\delta\boldsymbol{x}_i(t_i^-)+b_i\delta\boldsymbol{u}, \tag{7.3.16}$$

$$a_i=-\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^-,t_i,\boldsymbol{u})}{\partial t_i}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^-,t_i,\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{x}_i(t_i^-)}\Big), \tag{7.3.17}$$

$$b_i=-\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^-,t_i,\boldsymbol{u})}{\partial t_i}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^-,t_i,\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\Big) \tag{7.3.18}$$

V rovniciach (7.3.17)–(7.3.18) nie je derivácia $\frac{\delta\boldsymbol{g}_i(\cdot)}{\delta t_i}$ rovná nule, pretože rovnica (7.2.3) musí byť vyriešená vzhľadom na časy δt_i. Spojením výsledkov získaných vyššie dostaneme

$$\delta J=\delta J_1+\delta J_2 \tag{7.3.19}$$

kde

$$\delta J_1=\Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial\boldsymbol{\eta}(t_P)}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial\boldsymbol{x}(t_P)}-\boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\Big)\delta\boldsymbol{x}(t_P)$$
$$+\int_{t_0}^{t_P}\Big[\frac{\partial F(t)}{\partial\boldsymbol{\eta}(t)}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}(t)}{\partial\boldsymbol{x}(t)}+\boldsymbol{\lambda}^T(t)\frac{\partial\boldsymbol{f}(t)}{\partial\boldsymbol{x}(t)}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\Big]\delta\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\boldsymbol{I}+\Big(\frac{\partial\Delta_i(\cdot)}{\partial\boldsymbol{x}_i^-}\Big)\Big)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\Big]$$
$$+\Big[F(t_i^-)+\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-)-\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)-F(t_i^+)+\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\Big]a_i\Big\}\delta\boldsymbol{x}(t_i^-) \tag{7.3.20}$$

a

$$
\begin{aligned}
&\delta J_2 = \\
&\Big\{\Big[-F(t_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u})}{\partial t_0} - \boldsymbol{f}(t_0)\Big)\Big]\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}} \\
&+\int_{t_0}^{t_P}\Big[\frac{\partial F(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \frac{\partial F(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)}\Big)\Big]\mathrm{d}t \\
&+\Big[\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial t_P} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\boldsymbol{f}(t_P) + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial t_P}\Big)^T + F(t_P)\Big]\frac{\mathrm{d}t_P}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}} \\
&+\boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{u}} + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial \boldsymbol{u}(t_P)} + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^T \\
&+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)\Big] \\
&+\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-) + F(t_i^-) - F(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\Big]b_i\Bigg]\Big\}\delta\boldsymbol{u}
\end{aligned}
\tag{7.3.21}
$$

Teraz je možné položiť členy $\delta\boldsymbol{x}(t)$ v rovnici (7.3.19) rovné nule a získame adjungované rovnice

$$
\boldsymbol{\lambda}^T(t_P) = \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)}, \tag{7.3.22}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = -\boldsymbol{\lambda}^T(t)\frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)} - \frac{\partial F(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}, \qquad t_0 \le t < t_P \tag{7.3.23}
$$

s koncovými podmienkami v čase t_P a podmienky pre adjungované premenné v časoch prepnutia

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-) = \\
&\Big\{\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big[\boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i^-} + \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial t_i} - \boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)\Big)a_i\Big] \\
&\quad +(F(t_i^-) - F(t_i^+))a_i\Big\}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{f}_i(t_i^-)a_i)^{-1}
\end{aligned}
\tag{7.3.24}
$$

kde $i = \overline{1,n}$ a časy závisia explicitne na parametroch. Ak $a_i = 0$, potom sú prepínacia podmienky výrazne zjednodušené (ak hodnota skoku stavových premenných $\boldsymbol{\Delta}_i$ nezávisí od $\boldsymbol{x}_i^-$, potom sú adjungované premenné spojité):

$$
\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big[\boldsymbol{I} + \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i^-}\Big)\Big], \quad i = \overline{1,n} \tag{7.3.25}
$$

Vidíme, že koeficienty variácie parametrov $\delta\boldsymbol{u}$ vo funkcionáli (7.3.19) sú potom dané

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}} = \Bigg\{ & \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial \boldsymbol{u}(t_P)} + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^T \\
& + \Big[-F(t_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u})}{\partial t_0} - \boldsymbol{f}(t_0)\Big)\Big]\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}} \\
& + \int_{t_0}^{t_P}\Big[\frac{\partial F(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \frac{\partial F(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)}\Big)\Big]\mathrm{d}t \\
& + \Big[\frac{\partial G(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial t_P} + \boldsymbol{\lambda}^T(t_P)\boldsymbol{f}(t_P) + \Big(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial t_P}\Big)^T + F(t_P)\Big]\frac{\mathrm{d}t_P}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}} \\
& + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\frac{\partial \boldsymbol{x}_0(t_0,\boldsymbol{u}_0)}{\partial \boldsymbol{u}} + \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)\Big] + \Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-) \\
& + F(t_i^-) - F(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\Big]b_i\Bigg]\Bigg\}\delta\boldsymbol{u}
\end{aligned}
\tag{7.3.26}
$$

Ďalšie členy obsahujú informácie o prepnutiach

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\Big\{ & \Big[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)\Big] \\
& + \Big[F(t_i^-) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+) - F(t_i^+) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_i(\cdot)}{\partial t_i}\Big)\Big]b_i\Big\}
\end{aligned}
\tag{7.3.27}
$$

Ak sú stavové premenné spojité v prepínacích časoch ($\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{0}$), potom je podintegrálna funkcia F vo funkcionáli spojitá, ale adjungované premenné obsahujú nespojitosť v časoch prepnutia

$$
\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-) = \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)a_i]\mathrm{x}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{f}_i(t_i^-)a_i)^{-1}, \quad i = \overline{1,n}
\tag{7.3.28}
$$

a ďalšie členy (7.3.27) z výsledného vzorca (7.3.26) sa zjednodušia na

$$
\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}^T(t_i^-)\boldsymbol{f}_i(t_i^-) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_i^+)\boldsymbol{f}_{i+1}(t_i^+)]b_i
\tag{7.3.29}
$$

Ak čas prepnutia závisí priamo na parametroch ($t_i = t_i(\boldsymbol{u})$, $a_i = 0$ a $b_i = \frac{\mathrm{d}t_i}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}$), potom sú adjungované premenné spojité.

7.4 Postup optimalizácie

7.4.1 Algoritmus

Predpokladáme, že pôvodná spojitá trajektória riadenia je aproximovaná po častiach konštantnou na N intervaloch. Týmto spôsobom transformujeme pôvodný problém dynamickej optimalizácie na nelineárne programovanie (Fikar a Latifi, 2001). V tomto algoritme predpokladáme, že problém obsahuje funkcionál J_0 a k obmedzení J_j, kde $j = \overline{1,k}$. Potom môžeme napísať nasledovný algoritmus:

1. Integrujeme systém diferenciálnych rovníc (7.2.1)–(7.2.2) a podintegrálnych členov F_j od času $t = t_0$ po $t = t_P$. Reštartujeme integráciu v prepínacích časoch (7.2.3), stavy môžu byť nespojité podľa rovnice (7.2.4).

2. Pre $j = \overline{0, k}$ opakujeme

   (a) Inicializujeme adjungované premenné $\boldsymbol{\lambda}_j^T(t_P)$, podľa rovníc (7.3.22)

$$\boldsymbol{\lambda}_j{}^T(t_P) = \frac{\partial G_j(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t_P)}{\partial \boldsymbol{x}(t_P)} \tag{7.4.1}$$

   (b) Inicializujeme pomocné premenné $\boldsymbol{J}_{D,j}$ rovné nule.

   (c) Integrujeme spätne od času $t = t_P$ do $t = t_0$ systém adjungovaných rovníc (7.3.23) a dočasných premenných, pričom berieme do úvahy nespojitosti adjungovaných premenných podľa (7.3.25), reštartujeme integráciu v týchto bodoch a v časoch zmeny dynamiky

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j^T = -\,\boldsymbol{\lambda}_j{}^T(t) \frac{\partial \boldsymbol{f}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{x}(t)} - \frac{\partial F_j(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)} = -\frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{x}^T}, \tag{7.4.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{D,j}^T = \boldsymbol{\lambda}_j{}^T(t) \frac{\partial \boldsymbol{f}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \frac{\partial F_j(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \frac{\partial F_j(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} = \frac{\partial H_j}{\partial \boldsymbol{u}^T} \tag{7.4.3}$$

   Rovnice (7.4.2), (7.4.3) sú vypočítane z (7.3.19) a $\dot{\boldsymbol{J}}_{D,j}$ reprezentujú podintegrálne časti gradientov.

   (d) Vypočítame gradienty J_j vzhľadom na časy t_i a riadenie $\boldsymbol{u}$ na základe (7.3.19).

$$\frac{\partial J_j}{\partial t_P} = H_j(t_P^-) + \frac{\partial G_j(\cdot)}{\partial t_P}, \tag{7.4.4}$$

$$\frac{\partial J_j}{\partial t_i} = H_j(t_i^-) - H_j(t_i^+) + \frac{\partial G_j(\cdot)}{\partial t_i}, \quad i = \overline{1, (N-1)}, \tag{7.4.5}$$

$$\frac{\partial J_j}{\partial \boldsymbol{u}_i} = \boldsymbol{J}_{D,j}(t_{i-1}) - \boldsymbol{J}_{D,j}(t_i), \quad i = \overline{1, N} \tag{7.4.6}$$

Týmto spôsobom získame hodnoty kritéria a obmedzení J_j v kroku 1 a hodnoty ich gradientov v kroku 2d. Tieto údaje potrebuje algoritmus NLP.

Z numerických dôvodov je vhodnejšie optimalizovať rozdiely časov Δt_i a nie časy t_i. V tomto prípade je potrebné prepočítať aj gradienty vzhľadom na časy. Vzťah medzi prírastkami a absolútnymi časmi je nasledovný

$$t_P = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i \tag{7.4.7}$$

Z toho vyplývajú vzťahy pre derivácie

$$\frac{\partial J_j}{\partial \Delta t_i} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial J_j}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial \Delta t_i} \tag{7.4.8}$$

7.4.2 Implementácia algoritmu

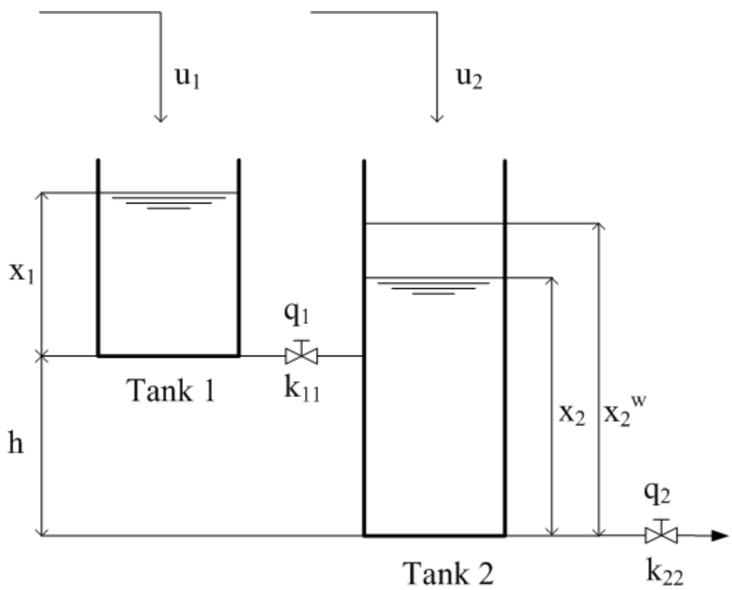
Tento algoritmus bol naprogramovaný v jazyku FORTRAN 77. Pre riešenie diferenciálnych rovníc bol použitý balík LSODAR (Petzold a Hindmarsh, 1997), ktorý dokáže riešiť aj problémy s nespojitosťami a udalosťami vyvolanými stavmi. Pre riešenie NLP bol využitý balík NLPQL (Schittkowski, 1981).

7.4.3 Integrácia adjungovaných rovníc

Počas spätnej integrácie systému adjungovaných rovníc sú potrebné aj znalosti o stavoch $\boldsymbol{x}(t)$. V našom prípade boli stavy zapamätané počas doprednej integrácie a interpolované v spätnej integrácii.

Naprogramovali sme dva spôsoby interpolácie stavových rovníc: lineárnu a kubickú so spojitými prvými deriváciami na hraniciach intervalov. Všetky simulačné výsledky využívajú kubickú interpoláciu.

7.5 Príklady



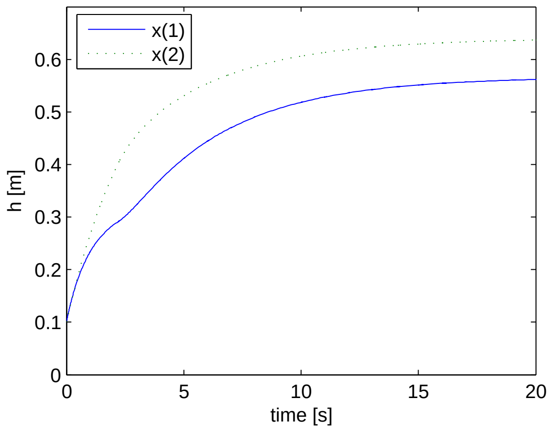
Obr. 7.5.1: Systém dvoch zásobníkov

7.5.1 Proces

Uvažujeme nelineárny systém dvoch zásobníkov zobrazených na obr. 7.5.1, ktorý je možné opísať dvomi systémami diferenciálnych rovníc

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_{11}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{F_1} - \frac{k_{11}\sqrt{x_1}}{F_1} \\ \frac{u_2}{F_2} + \frac{k_{11}\sqrt{x_1}}{F_2} - \frac{k_{22}\sqrt{x_2}}{F_2} \end{pmatrix}, \tag{7.5.1}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_{21}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_{22}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{F_1} - \frac{k_{11}\sqrt{x_1-(x_2-h)}}{F_1} \\ \frac{u_2}{F_2} + \frac{k_{11}\sqrt{x_1-(x_2-h)}}{F_2} - \frac{k_{22}\sqrt{x_2}}{F_2} \end{pmatrix} \tag{7.5.2}$$



Obr. 7.5.2: Odozva hybridného systému na skokovú zmenu vstupného prietoku

kde F_1, F_2 [m^2] sú prierezy zásobníkov, k_{11}, k_{22} [l$^{2.5}$ s^{-1}] – konštanty; x_1, x_2 – stavové premenné – výšky hladín v prvom a druhom zásobníku, u_1, u_2 [l s^{-1}] – riadiace premenné – prietoky a h [m] je vertikálna vzdialenosť medzi zásobníkmi.

Rovnice opisujúce prvú dynamiku charakterizujú prípad bez interakcie, kedy výška h_2 v druhom zásobníku je menšia ako h. V opačnom prípade sú zásobníky s interakciou a sú opísané rovnicami dynamiky $\boldsymbol{f}_2$.

Výška h určuje podmienku prepnutia medzi dvomi dynamikami $\boldsymbol{f}_1$ a $\boldsymbol{f}_2$ podľa rovnice

$$g_1 = h - x_2 \tag{7.5.3}$$

Parciálne derivácie diferenciálnych rovníc vzhľadom na stavy a riadenie sú v tvare

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{F_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_2} \end{pmatrix}, \tag{7.5.4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_{11}}{2F_1\sqrt{x_1}} & 0 \\ \frac{k_{11}}{2F_2\sqrt{x_1}} & -\frac{k_{22}}{2F_2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}, \tag{7.5.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_{11}}{2F_1\sqrt{x_1-(x_2-h)}} & \frac{k_{11}}{2F_1\sqrt{x_1-(x_2-h)}} \\ \frac{k_{11}}{2F_2\sqrt{x_1-(x_2-h)}} & -\frac{k_{11}}{2F_2\sqrt{x_1-(x_2-h)}} - \frac{k_{22}}{2F_2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix} \tag{7.5.6}$$

Uvažujeme nasledovné hodnoty parametrov zásobníkov: odpory $k_{11} = 1.75\,\mathrm{l}^{2.5}\,\mathrm{s}^{-1}$, $k_{22} = 1.50\,\mathrm{l}^{2.5}\,\mathrm{s}^{-1}$, prierezy $F_1 = 2.00\,\mathrm{m}^2$, $F_2 = 4.00\,\mathrm{m}^2$, vzdialenosť $h = 0.40\,\mathrm{m}$, počiatočné podmienky $x_1(0) = x_2(0) = 0.10\,\mathrm{m}$, žiadaná hodnota $x_2^w = 1.00\,\mathrm{m}$.

Počiatočné podmienky optimalizovaných parametrov boli zvolené $u_i = 1\,\mathrm{l\,s}^{-1}$, $\Delta t_i = 1\,\mathrm{s}$ s ohraničeniami $u_i \in [0, 3]$ a $\Delta t_i \in [0.01, 10.00]$.

Obr. 7.5.2 ukazuje odozvu procesu na takto nastavené počiatočné podmienky optimalizovaných parametrov s celkovým časom simulácie $t_P = 20.00\,\mathrm{s}$. V čase $t = 2.19\,\mathrm{s}$ môžeme pozorovať vplyv zmeny dynamiky na proces.

7.5.2 Problém časovej optimalizácie

Uvažujme problém dosiahnutia požadovanej hodnoty a dosiahnutia nového ustáleného stavu v minimálnom čase, pričom budeme predpokladať, že žiadaný stav sa nachádza v opačnom regióne dynamiky ako počiatočný. V tomto prípade môžeme definovať účelovú funkciu v tvare

$$\min_{t_p,u} J_0 = t_P, \tag{7.5.7}$$

vzhľadom na obmedzenia:

$$J_1 = x_2(t_P) - x_2^w = 0, \tag{7.5.8}$$

$$J_2 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{7.5.9}$$

$$J_3 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7.5.10}$$

kde x_2^w je žiadaná hodnota výšky hladiny v druhom zásobníku. Obmedzenia J_2, J_3 charakterizujú požiadavky na dosiahnutie ustáleného stavu v koncovom čase.

Uvažujeme, že optimalizovaný vektor riadenia $\boldsymbol{u}$ obsahuje oba prítoky u_1, u_2 a že tieto sú po častiach konštantné. V tom prípade budeme optimalizovať dĺžku trvania a hodnotu riadenia $\boldsymbol{u}$ na vopred danom počte časových intervaloch.

Keďže J_0 nezávisí od stavových premenných, jeho gradienty vzhľadom na optimalizované parametre získame ako

$$\frac{\partial J_0}{\partial t_P} = 1, \quad \frac{\partial J_0}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.5.11}$$

Pri ostatných obmedzeniach J_1, J_2 a J_3 musíme použiť odvodenie uvedené v predošlej kapitole. Najprv určíme koncové podmienky pre adjungované premenné a nastavíme podintegrálne členy $\boldsymbol{J}_{D,1}$, $\boldsymbol{J}_{D,2}$, $\boldsymbol{J}_{D,3}$ rovné nule

$$\boldsymbol{\lambda}_1(t_P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_2 - x_2^w)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_1(t_P)} \\ \frac{\partial(x_2 - x_2^w)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_2(t_P)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.5.12}$$

Potom integruje spätne v čase od $t = t_P$ do $t = t_0$ nasledovné rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1^T(t) = -\boldsymbol{\lambda}_1^T(t) \frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}, \tag{7.5.13}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{D,1}^T = \boldsymbol{\lambda}_1^T \frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} \tag{7.5.14}$$

Požadované gradienty potom vypočítame z nasledovných vzťahov

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_P} = H_1(t_P^-) + \frac{\partial G_1}{\partial t_P} = \boldsymbol{\lambda}_1^T(t_P^-) \boldsymbol{f}_2(t_P^-), \tag{7.5.15}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_i} = H_1(t_i^-) - H_1(t_i^+) + \frac{\partial G_1}{\partial t_i} = \boldsymbol{\lambda}_1^T(t_i^-) \boldsymbol{f}(t_i^-) - \boldsymbol{\lambda}_1^T(t_i^+) \boldsymbol{f}(t_i^+), \tag{7.5.16}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{u}_i} = \boldsymbol{J}_{D,1}(t_{i-1}) - \boldsymbol{J}_{D,1}(t_i) \tag{7.5.17}$$

Rovnako postupujeme aj pri ostatných obmedzeniach.

7.5.3 Minimalizácia LQ kritéria

Uvažujme scenár, keď je koncový čas t_P známy a úlohou je minimalizovať LQ kritérium v tvare

$$\min_u J_0 = \int_{t_0}^{t_P} ((x_2 - x_2^s)^2 + r(u_1 - u_1^s)^2)\mathrm{d}t \tag{7.5.18}$$

kde x_2^s, u_1^s sú ustálené hodnoty premenných a r je kladný váhový koeficient.

Algoritmus a výpočet gradientov obmedzení je rovnaký ako v predošlom prípade daný rovnicami (7.5.12)–(7.4.8).

Účelovú funkciu J_0 získame v doprednej integrácii. V prípade gradientov vzhľadom na J_0 postupujeme nasledovne. Integrujeme spätne diferenciálne rovnice adjungovaných premenných a podintegrálnych členov

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_0^T(t) = -\boldsymbol{\lambda}_0^T(t)\frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)} - \frac{\partial F_0(t)}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}\frac{\partial \boldsymbol{\eta}(t)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}, \tag{7.5.19}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{D,0}^T = \boldsymbol{\lambda}_0^T\frac{\partial \boldsymbol{f}(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} + \frac{\partial F_0(t)}{\partial \boldsymbol{u}(t)} \tag{7.5.20}$$

Výsledné gradienty potom získame z vzťahov

$$\frac{\partial J_0}{\partial t_P} = ((x_2(t_P^-) - x_2^s)^2 + r(u_1(t_P^-) - u_1^s)^2) + \boldsymbol{\lambda}_0^T(t_P^-)\boldsymbol{f}_2(t_P^-), \tag{7.5.21}$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial t_i} = r((u_1(t_P^-) - u_1^s)^2 - (u_1(t_P^+) - u_1^s)^2) + \boldsymbol{\lambda}_0^T(t_i^-)\boldsymbol{f}(t_i^-) - \boldsymbol{\lambda}_0^T(t_i^+)\boldsymbol{f}(t_i^+), \tag{7.5.22}$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \boldsymbol{u}_i} = \boldsymbol{J}_{D,0}(t_{i-1}) - \boldsymbol{J}_{D,0}(t_i) \tag{7.5.23}$$

7.6 Výsledky

7.6.1 Minimalizácia času

Mnohorozmerový problém

V prvom prípade uvažujeme oba vstupné prietoky ako optimalizované veličiny a zvolíme počet optimalizovaných úsekov času rovných dvom.

Optimalizačné a integračné presnosti boli zvolené 10^{-6} a 10^{-10}. Po ôsmych NLP iteráciách bolo získané optimum s hodnotou $t_P = 1.47\,\mathrm{s}$. Priebeh optimálnych výšok hladín je zobrazený na obr. 7.6.1 a zodpovedajúce riadenie na obr. 7.6.2. Riadiace veličiny vykazujú typické dvojhodnotové (bang-bang) správanie, ktoré vyplýva zo zvoleného cieľa.

Jednorozmerový problém

V praxi viac reálnejší prípad je s iba jednou optimalizovanou veličinou – prítokom do prvého zásobníka, Zvolili sme osem optimalizovaných intervalov riadenia s optimalizačnými a integračnými presnosťami 10^{-4} a 10^{-12}.

Optimálny čas v tomto prípade bol vyšší ako pri mnohorozmerovom probléme a rovný $t_P = 8.623\,\mathrm{s}$. Priebeh optimálnych stavových a riadiacich premenných je zobrazený na obr. 7.6.3 a 7.6.4. Riadiace veličiny opäť vykazujú typické dvojhodnotové správanie. Hoci sme zvolili 8 optimalizovaných intervalov, simulácie ukazujú, že 3 by stačili – dva pre optimálne riadenie systému druhého rádu a jeden na dosiahnutie požadovaného ustáleného stavu.

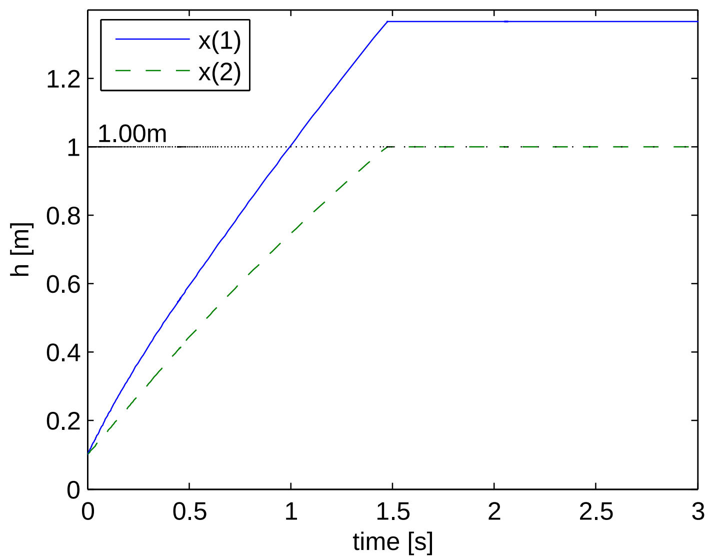
7.6.2 LQ riadenie

V tomto prípade si pevne zvolíme 15 optimalizovaných intervalov a periódu vzorkovania 1 s, pričom optimalizujeme iba jeden prietok. Optimalizačné a integračné presnosti boli 10^{-5} a 10^{-12}. Na základe analýz ustálených stavov boli zvolené $x_2^s = 1.00\,\mathrm{m}$, $u_1^s = 2.50\,\mathrm{l\,s^{-1}}$.

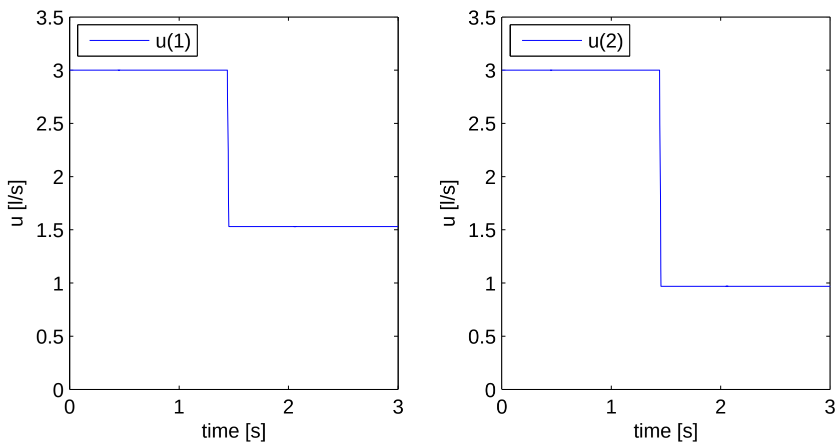
Uvažovali sme rozličné hodnoty váhového koeficienta r. Na obr. 7.6.5 a 7.6.6 stavy a riadenie pre tri voľby r.

Ak znižujeme hodnotu r, blížime sa k správaniu porovnateľnému s časovo optimálnym riadením. Na druhej strane jeho zvyšovanie značne vyhladí trajektóriu riadenia s iba malou stratou výkonnosti.

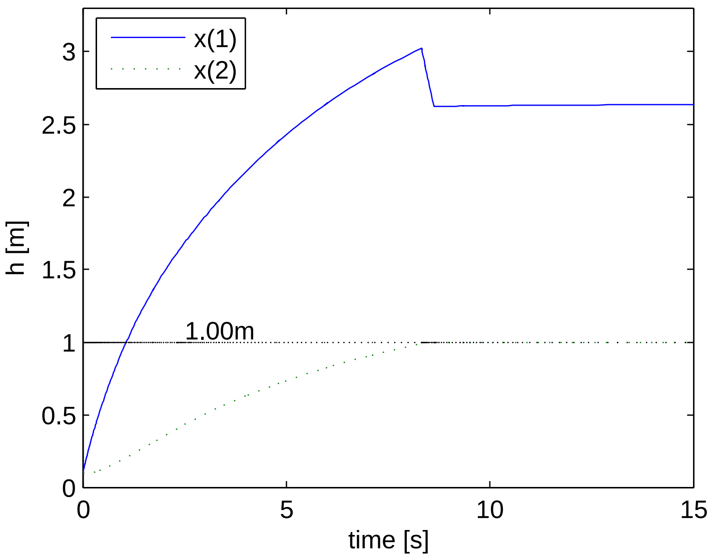
Ak sme uvažovali $r = 1$, bola získaná hodnota účelovej funkcie 2.7517 so 7 NLP iteráciami.



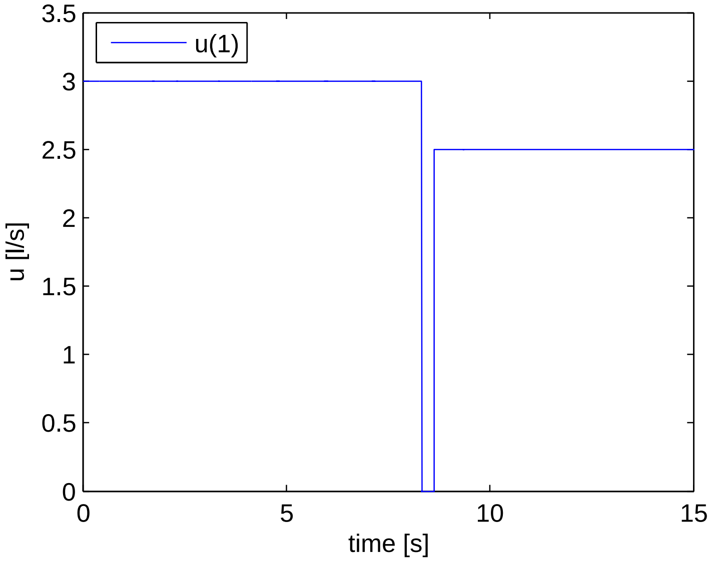
Obr. 7.6.1: Optimálne stavové trajektórie s mnohorozmerovým časovo optimálnym riadením



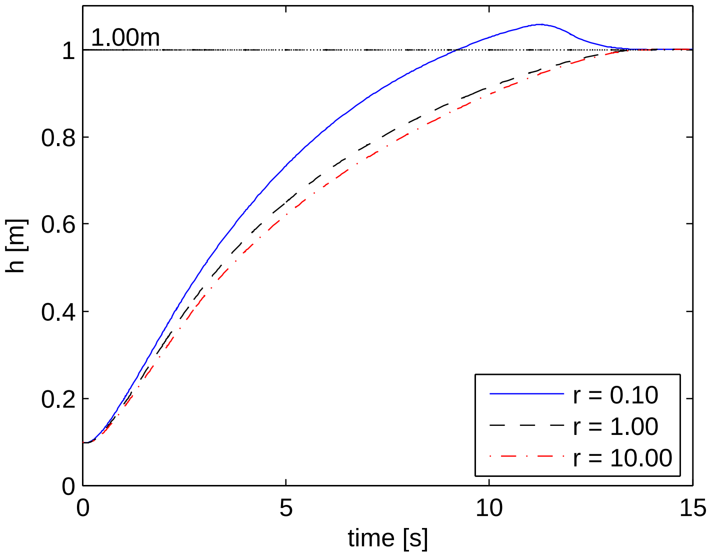
Obr. 7.6.2: Optimálne riadiace trajektórie s mnohorozmerovým časovo optimálnym riadením



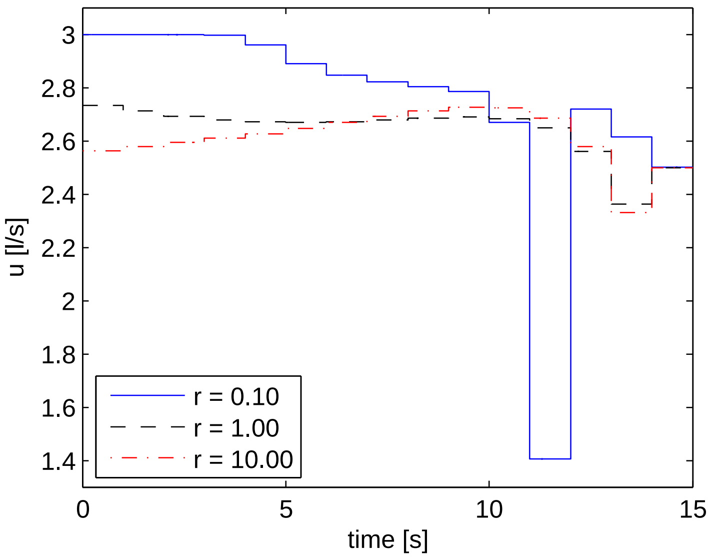
Obr. 7.6.3: Optimálne stavové trajektórie s jednorozmerovým časovo optimálnym riadením



Obr. 7.6.4: Optimálna riadiaca trajektória s jednorozmerovým časovo optimálnym riadením



Obr. 7.6.5: Výška hladiny kvapaliny v druhom zásobníku pre rozličné hodnoty koeficienta r



Obr. 7.6.6: Optimálna riadiaca trajektória s LQ riadením

7.7 Záver

V tejto časti sme študovali problém dynamickej optimalizácie systémov opísaných viacerými množinami diferenciálnych rovníc, medzi ktorými môže byť prepínanie založené na stavových podmienkach. Pre numerické riešenie sme zvolili parametrizáciu vektora riadenia, pričom gradienty pre NLP boli počítané na základe teórie optimálneho riadenia.

Aj keď najčastejší spôsob výpočtu gradientov v literatúre sa udáva pomocou citlivostných rovníc z dôvodov jednoduchosti implementácie, tu použitý prístup s adjungovanými rovnicami je vhodný najmä pre systémy s väčším počtom stavov.

Simulácie s jednoduchým príkladom z prostredia procesného priemyslu potvrdili aktraktívnosť uvedeného prístupu.

Časť III

Programové balíky

Kapitola 8

Balík dynopt

Vývoj programového balíka dynopt začal v rámci diplomových prác (Čižniar, 2005; Ševčík, 2006) a pokračuje v ďalšom rozširovaní svojej funkcionality (Čižniar a kol., 2005, 2006a). V súčasnosti podporuje riešenie ODE a DAE problémov, rôzne typy účelových funkcií a obmedzení (Čižniar a kol., 2006b). Optimalizovanými premennými môžu byť trajektória riadenia, časy a parametre modelu či stavov.

Problémy dynamickej optimalizácie rieši pomocou ortogonálnej kolokácie na konečných prvkoch – jedná sa teda o kompletnú parametrizáciu stavov a riadenia. Takýmto spôsobom je problém pretransformovaný na statickú optimalizáciu (NLP), pričom nie je nutné riešiť diferenciálne rovnice explicitne.

Dynopt je naprogramovaný čisto v MATLABe a v súčasnosti využíva NLP implementáciu `fmincon` z balíka Optimisation Toolbox.

8.1 Tutoriál

Použitie balíka *dynopt* si ukážeme na viacerých príkladoch. V každom z nich je potrebné definovať ODE/DAE rovnice procesu, účelovú funkciu a prípadné obmedzenia.

8.1.1 Problém bez obmedzení

Uvažujme proces opísaný jednoduchým integrátorom a účelovú funkciu v tvare LQ kritéria (Luus, 1991; Rajesh a kol., 2001):

$$\dot{x}_1 = u, \quad x_1(0) = 1 \tag{8.1.1}$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + u^2, \quad x_2(0) = 0 \tag{8.1.2}$$

LQ kritérium je reprezentované druhou stavovou veličinou, takže platí

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} \; J = x_2(t_f) \tag{8.1.3}$$

kde $t_f = 1$

Definície funkcií

Začneme funkciou *process*, v ktorej je potrebné definovať diferenciálne rovnice procesu a jeho počiatočné podmienky. Funkcia môže mať viacero výstupov riadených vstupom *flag*. V našom prípade sú zaujímavé prípady 1 a 5.

```
function sys = process(t,x,flag,u,p)

switch flag,
    case 0 % f(x,u,p,t)
        sys = [u;x(1)^2+u^2];
    case 1 % df/dx
        sys = [];
    case 2 % df/du
        sys = [];
    case 3 % df/dp
        sys = [];
    case 4 % df/dt
        sys = [];
    case 5 % x0
        sys = [1;0];
    case 6 % dx0/dp
        sys = [];
    case 7 % M
        sys = [];
    case 8 % unused flag
        sys = [];
    otherwise
        error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
```

Druhým krokom je definovanie účelovej funkcie, ktorá môže závisieť od hodnôt signálov v koncovom čase

```
function f = objfun(t,x,u,p)

f = [x(2)];
```

V hlavnom programe najprv nastavíme vlastnosti pre funkciu *fmincon* z optimalizačného toolboxu. Potom určíme, že máme optimalizované riadenia a časy (`optvar` je 3) s počtami kolokačných bodov $K_x = 3$ a $K_u = 2$ a inicializujeme dĺžky intervalov na 1/3 a riadenia na nulu. Poslednými nastaveniami určíme, v akej funkcii sa nachádzajú informácie o procese a účelovej funkcii.

Všetky nastavenia vkladáme do vstupnej štruktúry, ktorá je jediným parametrom pre funkciu *dynopt*. Jej výstupom je jednak aktualizovaná vstupná štruktúra ako aj výstupná štruktúra obsahujúca informácie o optimálnom riešení problému.

```
options = optimset('LargeScale','off','Display','iter');
options = optimset(options,'MaxFunEvals',1e6);
options = optimset(options,'TolFun',1e-7);
options = optimset(options,'TolCon',1e-7);
options = optimset(options,'TolX',1e-7);
options = optimset(options,'MaxIter',4000);
options = optimset(options,'Algorithm','sqp'); %2010a
```

```
%options = optimset(options,'Algorithm','active-set'); %2008b

optimparam.optvar = 3;
optimparam.objtype = [];
optimparam.ncolx = 3;
optimparam.ncolu = 2;
optimparam.li = ones(3,1)*(1/3);
optimparam.tf = 1;
optimparam.ui = zeros(1,3);
optimparam.par = [];
optimparam.bdu = [];
optimparam.bdx = [];
optimparam.bdp =[];
optimparam.objfun = @objfun;
optimparam.confun = [];
optimparam.process = @process;
optimparam.options = options;

[optimout,optimparam]=dynopt(optimparam)
save optimresults optimout optimparam
[tplot,uplot,xplot] = profiles(optimout,optimparam,50);
save optimprofiles tplot uplot xplot

graph
```

Vo výstupnej štruktúre je v tomto prípade zaujímavý vektor t a vektor u, ktoré si môžeme napríklad nechať vykresliť do grafu.

Okrem toho zistíme optimálnu hodnotu účelovej funkcie `fval`:

```
optimout.fval = 0.7615959
```

a parameter `exitflag`, ktorý určuje, či bolo nájdené optimálne riešenie, ak `exitflag` > 0

```
optimout.exitflag = 1
```

Viac informácií o nastavení ostatných parametrov, presností a význame výstupov možno nájsť v Podmajerský a kol. (2007).

Na to, aby sme získali priebehy stavových veličín podľa aproximácií s Lagrangeovými polynómami, použijeme funkciu *profiles*

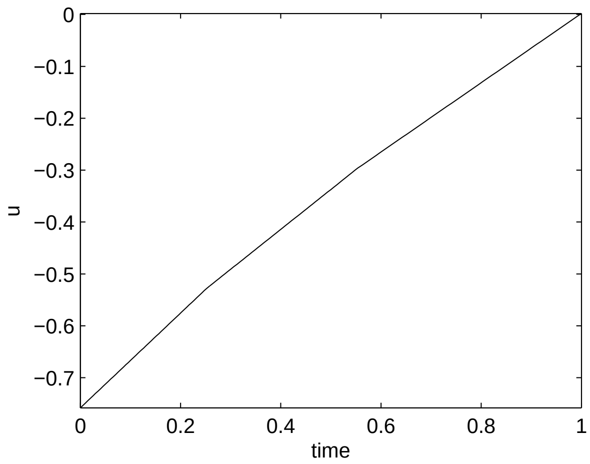
```
[tplot,uplot,xplot] = profiles(optimout,optimparam,ntimes);
```

kde parameter `ntimes` určuje počet vypočítaných bodov v rámci jedného intervalu.

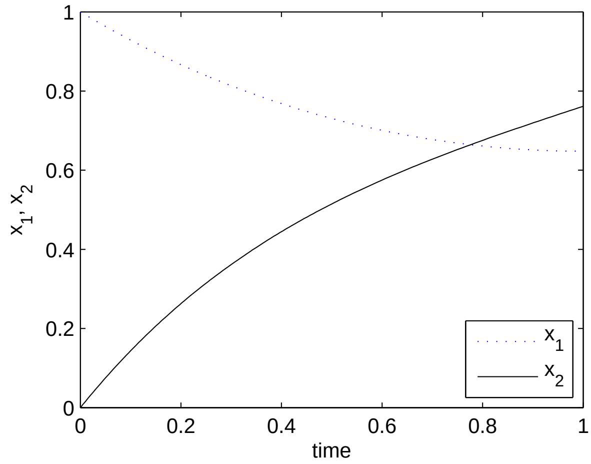
Grafické zobrazenie optimálnych priebehov problému (8.1.3) je znázornené na obr. 8.1.1 a obr. 8.1.2.

8.1.2 Problém s obmedzeniami a gradientmi

V predošlom prípade boli vypočítané gradienty účelovej funkcie vzhľadom na optimalizované parametre numericky (pomocou konečných rozdielov), čo môže v komplikovanejších prípadoch mať vplyv na konvergenciu algoritmu a na množstvo iterácií.



Obr. 8.1.1: Optimálne riadenie pre problém bez obmedzení



Obr. 8.1.2: Optimálne stavové trajektórie pre problém bez obmedzení

V tomto príklade ukážeme, ako definovať optimalizačný problém tak, aby boli gradienty počítané analyticky.

Uvažujme rovnaký problém ako v predošlom príklade, ku ktorému pridáme koncové obmedzenie v tvare

$$x_1(1) = 0 \tag{8.1.4}$$

Definície funkcií

V definíciách funkcií je v tomto prípade potrebné okrem nového obmedzenia dodať aj hodnoty parciálnych derivácií (Jakobiho matíc) podľa viacerých premenných.

V prípade funkcie *process.m* je potrebné dodať Jakobiho matice pre pravé strany diferenciálnych rovníc vzhľadom na vektor $\boldsymbol{x}$ a riadenie u.

V prípade premennej `flag` rovnej 1 derivujeme rovnice podľa `x`:

$$\texttt{sys} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V prípade premennej `flag` rovnej 2 derivujeme rovnice podľa `u`:

$$\texttt{sys} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2u \end{bmatrix}$$

Podobne je potrebné dodať aj ostatné parciálne derivácie, v našom prípade sú to prázdne matice. Výsledný súbor*process.m* je potom nasledovný:

```
function sys = process(t,x,flag,u,p)

switch flag,
    case 0 % f(x,u,p,t)
        sys = [u;x(1)^2+u^2];
    case 1 % df/dx
        sys = [0 2*x(1);0 0];
```

```
    case 2 % df/du
        sys = [1 2*u];
    case 3 % df/dp
        sys = [];
    case 4 % df/dt
        sys = [];
    case 5 % x0
        sys = [1;0];
    case 6 % dx0/dp
        sys = [];
    case 7 % M
        sys = [];
    case 8 % unused flag
        sys = [];
    otherwise
        error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
```

U účelovej funkcie postupujeme podobne. Opäť potrebujeme dodať matice s parciálnymi deriváciami podľa štvorice $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, t_f$. Z tých neprázdnych sa jedná o derivácie podľa `x`.

```
function [f,Df] = objfun(t,x,u,p)

% objective function
f = [x(2)]; % J

% gradients of the objective function
Df.t = [];    % dJ/dt
Df.x = [0;1]; % dJ/dx
Df.u = [];    % dJ/du
Df.p = [];    % dJ/dp
```

Posledné definície sa týkajú obmedzení a funkcie *confun*. U týchto sa jedná o obmedzenia v počiatočnom čase ($t = t_0$, `flag` $= 0$), počas celej trajektórie ($t \in [t_0, t_f]$, `flag` $= 1$) a v koncovom čase ($t = t_f$, `flag` $= 2$). Inak, rovnako ako pre predošlé funkcie je potrebné dodať nielen hodnoty obmedzení, ale aj príslušné Jakobiho matice pre každý z príslušných prípadov premennej `flag`. Okrem toho je potrebné definovať, ktoré obmedzenia sú typu rovnosti (`ceq`) a nerovnosti (`c`)

```
function [c,ceq,Dc,Dceq] = confun(t,x,flag,u,p)

switch flag
    case 0 % constraints in t0
        c = [];
        ceq = [];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [];
```

```
            Dc.x = [];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
        end
    case 1 % constraints over interval [t0,tf]
        c = [];
        ceq = [];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [];
            Dc.x = [];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
        end
    case 2 % constraints in tf
        c = [];
        ceq = [x(1)-1];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [];
            Dc.x = [];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [1;0];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
        end
end
```

Pri samotnom volaní dynamickej optimalizácie je potom potrebné zapnúť príznak ohľadom počítania gradientov

```
options = optimset(options,'GradObj','on','GradConstr','on');
```

V opačnom prípade aj napriek definovaným Jakobiho maticiam budú použité numerické gradienty.

Celkovo bude volanie *dynopt* nasledovné. Oproti predošlému príkladu je zapnuté aj meno funkcie pre obmedzenia, zmenené počty kolokačných bodov a počtu intervalov a nastavené dolné a horné obmedzenia pre stavový vektor.

```
options = optimset('LargeScale','off','Display','iter');
options = optimset(options,'GradObj','on','GradConstr','on');
options = optimset(options,'MaxFunEvals',1e4);
options = optimset(options,'MaxIter',1e3);
options = optimset(options,'TolFun',1e-7);
options = optimset(options,'TolCon',1e-7);
options = optimset(options,'TolX',1e-7);
options = optimset(options,'Algorithm','sqp'); %2010a
%options = optimset(options,'Algorithm','active-set'); %2008b

optimparam.optvar = 3;
optimparam.objtype = [];
optimparam.ncolx = 6;
optimparam.ncolu = 2;
optimparam.li = ones(4,1)*(1/4);
optimparam.tf = 1;
optimparam.ui = zeros(1,4);
optimparam.par = [];
optimparam.bdu = [];
optimparam.bdx = [0 1;0 1];
optimparam.bdp =[];
optimparam.objfun = @objfun;
optimparam.confun = @confun;
optimparam.process = @process;
optimparam.options = options;

[optimout,optimparam]=dynopt(optimparam)
save optimresults optimout optimparam
[tplot,uplot,xplot] = profiles(optimout,optimparam,50);
save optimprofiles tplot uplot xplot

graph
```

Optimálne riešenie je ukázané na obr. 8.1.3 a 8.1.4. Vypočítaná hodnota účelovej funkcie je vyššia ako v predošlom prípade (0.9242346) a vidíme, že stavová veličina x_1 na konci naozaj nadobúda hodnotu 1.

8.1.3 Problém so stavovým obmedzením

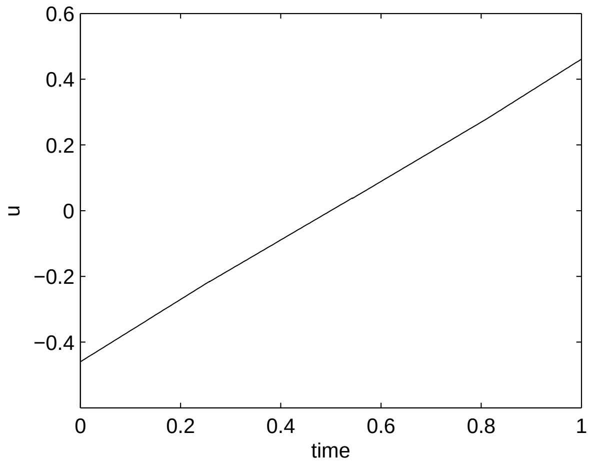
Uvažujme proces opísaný systémom dvoch diferenciálnych rovníc (Jacobson a Lele, 1969; Feehery a Barton, 1998)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 0 \tag{8.1.5}$$

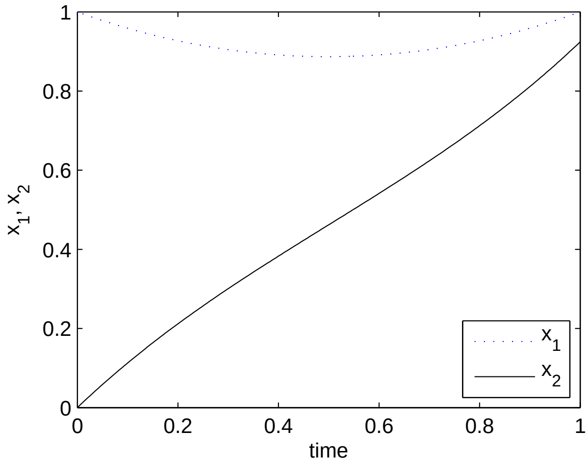
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad x_2(0) = -1 \tag{8.1.6}$$

a účelovú funkciu pre $t_f = 1$

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2)\mathrm{d}tt \tag{8.1.7}$$



Obr. 8.1.3: Optimálne riadenie pre problém s obmedzením



Obr. 8.1.4: Optimálne stavové trajektórie s obmedzením

vzhľadom na stavové obmedzenie

$$x_2 - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0, \quad t \in [0, 1] \tag{8.1.8}$$

Prepíšeme účelovú funkciu do Mayerovho tvaru použitím prídavnej stavovej premennej

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2, \quad x_3(0) = 0 \tag{8.1.9}$$

čím dostaneme

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J = x_3(t_f) \tag{8.1.10}$$

Oproti predošlým prípadom je zaujímavá najmä funkcia definujúca obmedzenia v tvare nerovníc a pre `flag` s hodnotou 1.

```
function [c,ceq,Dc,Dceq] = confun(t,x,flag,u,p)

switch flag
    case 0 % constraints in t0
        c = [];
        ceq = [];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [];
            Dc.x = [];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
```

```
        end
    case 1 % constraints over interval [t0,tf]
        c = [x(2)-8*(t-0.5)^2+0.5];
        ceq = [];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [-16*t+8];
            Dc.x = [0;1;0];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
        end
    case 2 % constraints in tf
        c = [];
        ceq = [];

        % gradient calculus
        if nargout == 4
            Dc.t = [];
            Dc.x = [];
            Dc.u = [];
            Dc.p = [];
            Dceq.t = [];
            Dceq.x = [];
            Dceq.u = [];
            Dceq.p = [];
        end
end
```

Nájdená hodnota optima účelovej funkcie bola $J = 0.1702$. Priebehy riadenia, stavov a obmedzenia sú znázornené na obr. 8.1.5, 8.1.6 a 8.1.7.

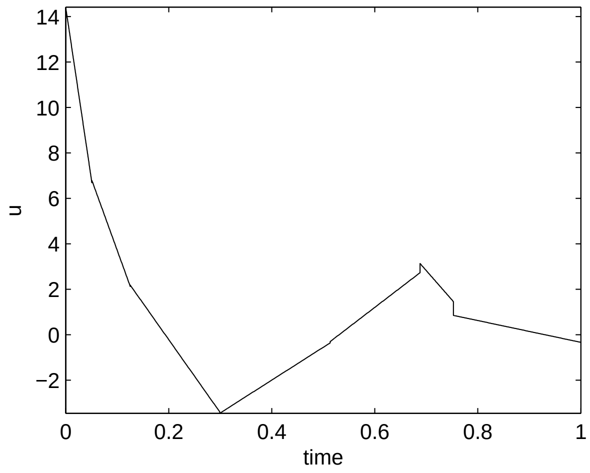
8.1.4 DAE problém

Uvažujme vsádzkový reaktor (Rajesh a kol., 2001; Dadebo a Mcauley, 1995) s následnými reakciami $A \to B \to C$ a budeme maximalizovať výťažok látky B v koncovom čase

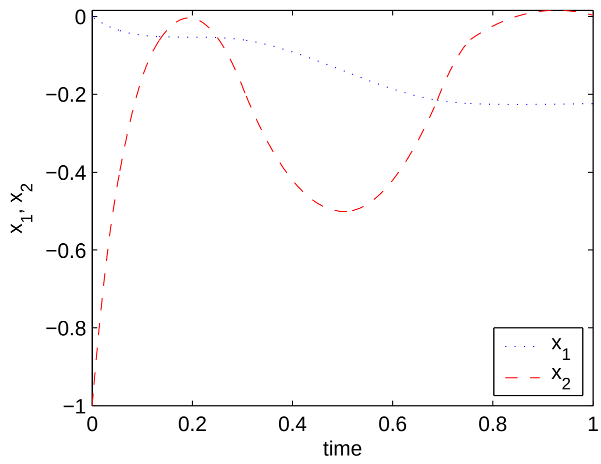
$$\max_{\boldsymbol{u}(t)} J = x_2(t_f) \tag{8.1.11}$$

kde dynamika procesu môže byť opísaná systémom algebraických a diferenciálnych rovníc

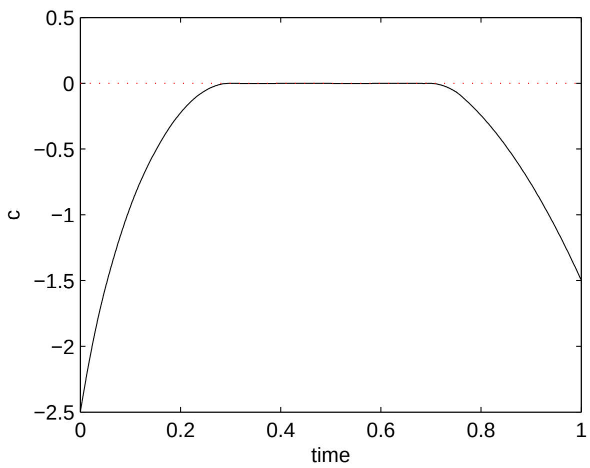
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -k_1 x_1^2 & x_1(0) &= 1 \\
\dot{x}_2 &= k_1 x_1^2 - k_2 x_2 & x_2(0) &= 0 \\
0 &= k_1 - 4000 e^{(-\frac{2500}{T})} & 0 &= k_2 - 620000 e^{(-\frac{5000}{T})} \\
T &\in [298, 398] & t_f &= 1
\end{aligned}$$



Obr. 8.1.5: Optimálne riadenie pre problém so stavovým obmedzením



Obr. 8.1.6: Optimálne stavové trajektórie pre problém so stavovým obmedzením



Obr. 8.1.7: Trajektória stavového obmedzenia

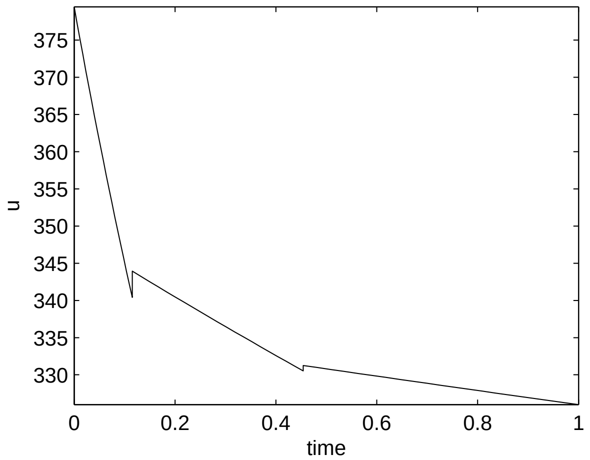
V tomto prípade, keďže sa jedná o DAE systém, definujeme maticu $\boldsymbol{M}$ vo funkcii *process* a s hodnotou `flag` rovnou 7.

```
function sys = process(t,x,flag,u,p)

switch flag
    case 0 % f(x,u,p,t)
        sys = [-x(3)*(x(1)^2);
                x(3)*(x(1)^2)-x(4)*x(2);
                x(3)-4000*exp(-u);
                x(4)-620000*exp(-2*u)];
    case 1 % df/dx
        sys = [-2*x(3)*x(1),2*x(3)*x(1),0,0;
                0,-x(4),0,0;
                -(x(1)^2),x(1)^2,1,0;
                0,-x(2),0,1];
    case 2 % df/du
```

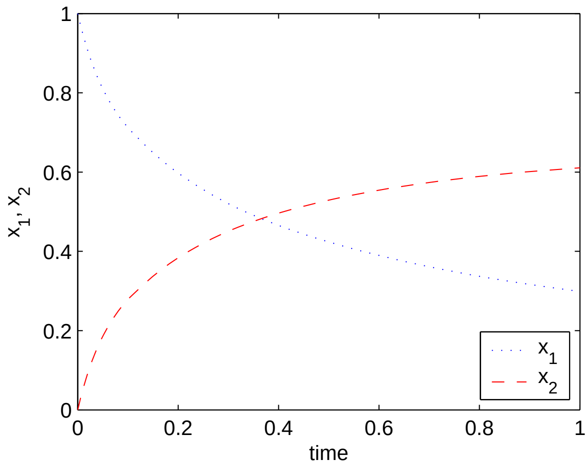
```
        sys = [0,0,4000*exp(-u),2*620000*exp(-2*u)];
    case 3 % df/dp
        sys = [];
    case 4 % df/dt
        sys = [];
    case 5 % x0
        sys = [1;0;5.0736;0.9975];
    case 6 % dx0/dp
        sys = [];
    case 7 % M
        sys = [1,0,0,0;
               0,1,0,0;
               0,0,0,0;
               0,0,0,0];
    case 8 % unused flag
        sys = [];
    otherwise
        error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]);
end
```

Ostatné parametre a funkcie sú nastavené podobne ako v predošlých prípadoch.

Po 295 iteráciách bolo nájdené optimálne riešenie $x_2(t_f) = 0.61066$. Vysoký počet iterácií bol daný zvýšenou presnosťou riešenia problému oproti štandardným nastaveniam. Optimálne trajektórie sú znázornené na obr. 8.1.8 a 8.1.9.



Obr. 8.1.8: Optimálne riadenie pre DAE problém



Obr. 8.1.9: Optimálne stavové trajektórie pre DAE problém

8.2 Príklady

V tejto časti uvedieme niektoré príklady z literatúry zaoberajúcej sa chemickými reaktormi.

8.2.1 Rúrkový reaktor

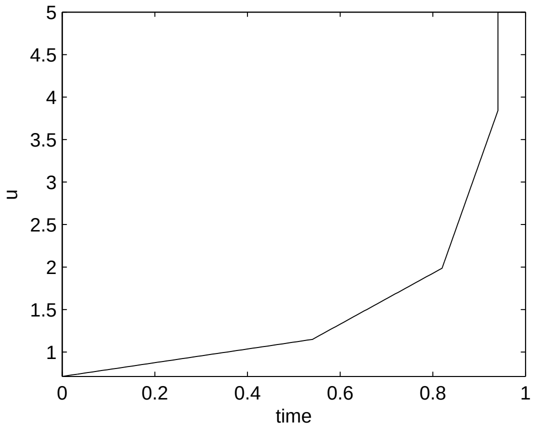
Uvažujme rúrkový reaktor s paralelnými reakciami $A \to B$, $A \to C$ (Rajesh a kol., 2001; Dadebo a Mcauley, 1995; Logsdon a Biegler, 1989). Úlohou je maximalizovať koncentráciu látky B v koncovom čase

$$\max_{\boldsymbol{u}(t)} J = x_2(t_f) \tag{8.2.1}$$

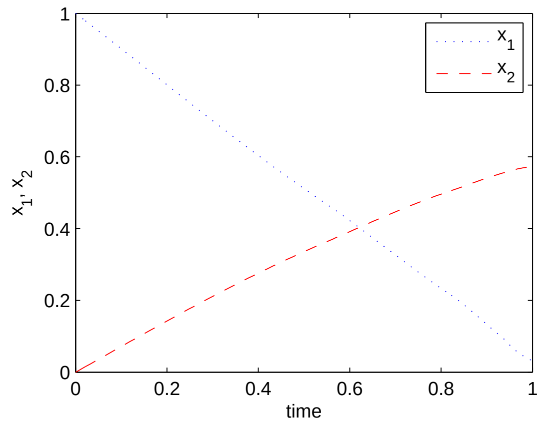
kde rovnice dynamiky sú v tvare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(u + 0.5u^2)x_1 & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= ux_1 & x_2(0) &= 0 \\ u &\in [0, 5] & t_f &= 1 \end{aligned}$$

Ako globálne optimum bola v Dadebo a Mcauley (1995) nájdená hodnota 0.57353 a v Rajesh a kol. (2001) hodnota 0.57284. Použitím 6 kolokačných bodov pre stavy a 2 pre riadenie a rovnakého počtu intervalov riadenia sme získali hodnotu 0.5734171. Profily optimálneho riadenia a stavov sú na obr. 8.2.1 a 8.2.2.



Obr. 8.2.1: Optimálne riadenie rúrkového reaktora



Obr. 8.2.2: Optimálne stavové profily rúrkového reaktora

8.2.2 Reaktor s piestovým tokom

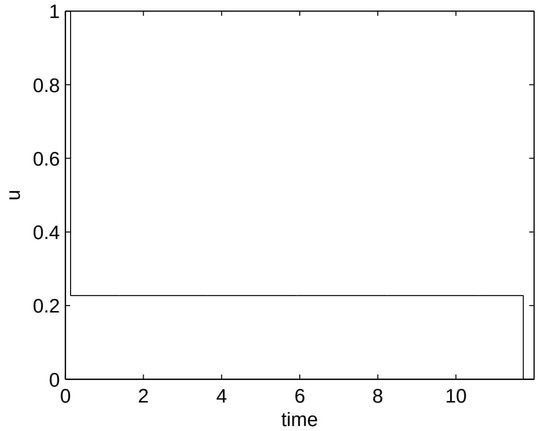
Uvažujme reaktor s piestovým tokom a s katalyzátorom (Rajesh a kol., 2001; Dadebo a Mcauley, 1995), v ktorom prebiehajú reakcie $A \leftrightarrow B \to C$. Úlohou je maximalizovať účelovú funkciu

$$\max_{\boldsymbol{u}(t)} J = 1 - x_1(t_f) - x_2(t_f) \tag{8.2.2}$$

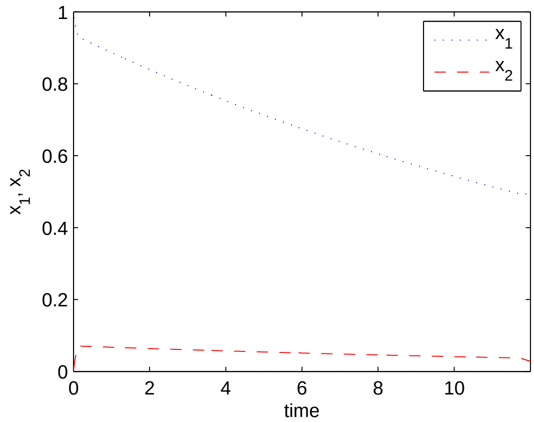
vzhľadom na rovnice dynamiky

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(10x_2 - x_1) & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -u(10x_2 - x_1) - (1-u)x_2 & x_2(0) &= 0 \\ u &\in [0, 1] & t_f &= 12 \end{aligned}$$

V prácach Logsdon a Biegler (1989); Rajesh a kol. (2001) boli dosiahnuté optimá o hodnotách 0.476946, 0.47615. V našom prípade bola dosiahnutá hodnota 0.477712. Jednalo sa o 5 stavových a 2 riadiace kolokačné body a 12 optimalizovaných intervalov riadenia. Optimálne riadiace a stavové trajektórie sú znázornené na obr. 8.2.3 a 8.2.4.



Obr. 8.2.3: Optimálne riadenie reaktora s piestovým tokom



Obr. 8.2.4: Optimálne stavové profily pre reaktor s piestovým tokom

8.2.3 Nelineárny prietokový reaktor

Uvažujme problém publikovaný v (Luus, 1990; Balsa-Canto a kol., 2001). Spočíva v určení štyroch optimálnych riadení v prietokovom chemickom reaktore (CSTR) tak, aby bol maximalizovaný ekonomický zisk. Dynamika procesu je opísaná štyrmi simultánnymi chemickými reakciami prebiehajúcimi pri izotermických podmienkach v prietokovom reaktore. Riadenia sú prietoky troch vstupov a elektrická energia potrebná pre fotochemickú reakciu.

Formulácia problému: Je potrebné nájsť vektor $\boldsymbol{u}(t) = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ v čase $t \in [t_0, t_f]$ tak, aby sa maximalizovala účelová funkcia

$$J_0 = x_8(t_f) \tag{8.2.3}$$

vzhľadom na:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_4 - qx_1 - 17.6x_1x_2 - 23x_1x_6u_3 && (8.2.4)\\
\dot{x}_2 &= u_1 - qx_2 - 17.6x_1x_2 - 146x_2x_3 && (8.2.5)\\
\dot{x}_3 &= u_2 - qx_3 - 73x_2x_3 && (8.2.6)\\
\dot{x}_4 &= -qx_4 + 35.20x_1x_2 - 51.30x_4x_5 && (8.2.7)\\
\dot{x}_5 &= -qx_5 + 219x_2x_3 - 51.30x_4x_5 && (8.2.8)\\
\dot{x}_6 &= -qx_6 + 102.60x_4x_5 - 23x_1x_6u_3 && (8.2.9)\\
\dot{x}_7 &= -qx_7 + 46x_1x_6u_3 && (8.2.10)\\
\dot{x}_8 &= 5.80((qx_1) - u_4) - 3.70u_1 - 4.10u_2 + q(23x_4 + 11x_5 + 28x_6 + 35x_7)\\
&\quad - 5.0u_3^2 - 0.099 && (8.2.11)
\end{aligned}$$

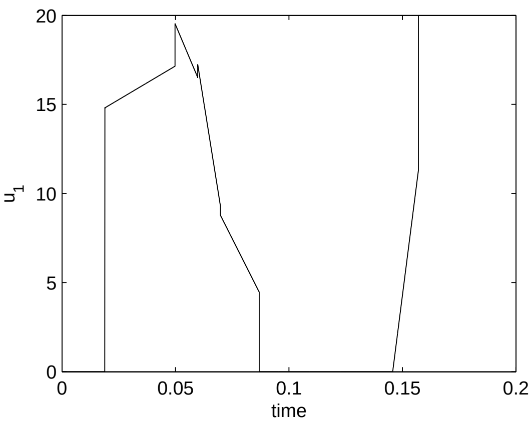
kde $q = u_1 + u_2 + u_4$. Počiatočné podmienky procesu sú

$$\boldsymbol{x}(0)^T = [0.1883\ 0.2507\ 0.0467\ 0.0899\ 0.1804\ 0.1394\ 0.1046\ 0.000] \tag{8.2.12}$$

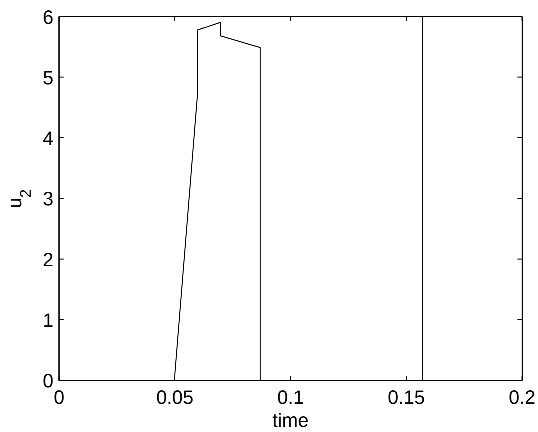
a ohraničenia na riadiace veličiny sú $u_1 \in [0, 20]$, $u_2 \in [0, 6]$, $u_3 \in [0, 4]$, $u_4 \in [0, 20]$. Uvažujeme pevný koncový čas $t_f = 0.2$.

Optimálne riešenie pre $P = 11$ ekvidištančných intervalov časov bolo v literatúre nájdené s hodnotou $J_0 = 21.757$.

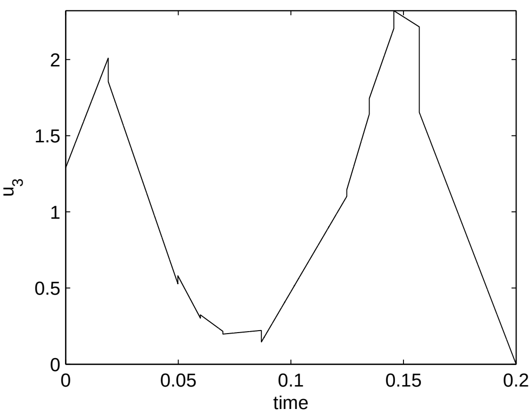
Použili sme 4 stavové a 2 riadiace kolokačné body a získali optimum pre $P = 10$ s hodnotou 21.8003. Vyššia hodnota účelovej funkcie oproti literatúre je spôsobená kvalitnejšou parametrizáciou riadenia – namiesto po častiach konštantnej bola použitá po častiach lineárna. Výsledky sú znázornené na obr. 8.2.5 – 8.2.9.



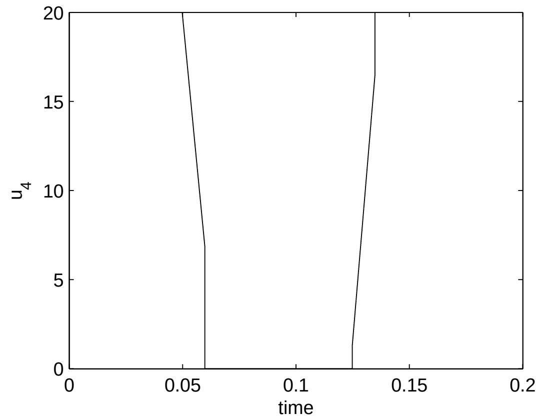
Obr. 8.2.5: Riadenie u_1 pre CSTR



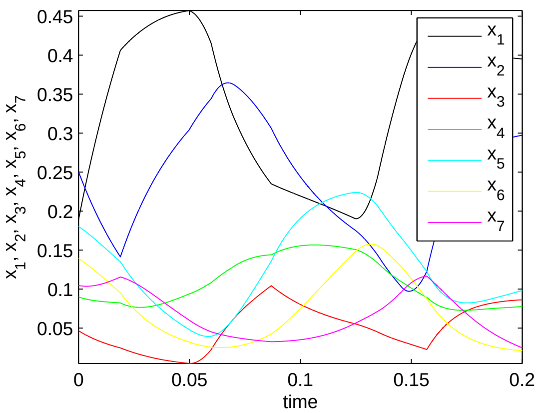
Obr. 8.2.6: Riadenie u_2 pre CSTR



Obr. 8.2.7: Riadenie u_3 pre CSTR



Obr. 8.2.8: Riadenie u_4 pre CSTR



Obr. 8.2.9: Optimálne stavové profily pre pre CSTR

Kapitola 9

Balík DYNO

Balík DYNO je založený na parametrizácii vektora riadenia a je implementovaný v programovacom jazyku Fortran (Fikar a Latifi, 2001).

Pozostáva z viacerých modulov, ktoré je možné spolu kombinovať podľa riešeného problému:

`dyno.f` – hlavná časť balíka.

IVP balíky – na riešenie systému diferenciálnych rovníc je možné použiť viacero štandardných balíkov, pričom je potrebné pripojiť k projektu vždy jeden z nich. V súčasnosti sú podporované:

`vodedo.f` – balík VODE (Brown a kol., 1989), ktorý bol modifikovaný, aby mohol prenášať pracovné premenné z `DYNO`. Ďalej má nahradené funkcie z balíka LINPACK funkciami z LAPACK-u.

`ddassldo.f` – balík DDASSL (Brenan a kol., 1989), podobne modifikovaný na prenos pracovných premenných `DYNO`.

Každý z modifikovaných súborov naviac v sebe zahŕňa interface k `DYNO`.

NLP balíky – opäť je podporovaných viacero z nich, pričom je potrebné pripojiť do projektu jeden:

`slsqp.f` – Voľne dostupný NLP balík (Kraft, 1988).

`nlpql.f` – Balík NLPQL (Schittkowski, 1985), ktorý je potrebné zakúpiť od jeho autora.

Automatické derivácie – v súčasnosti je podporovaný balík ADIFOR (Bischof a kol., 1998).

LAPACK Balík využíva dostupné funkcie z knižníc BLAS a LAPACK, ktoré sú dostupné z netlib.org. Keďže tieto je možné považovať za štandardné nástroje v numerickej matematike, často bývajú predpripravené pre konkrétnu architektúru počítačov. Ak užívateľ tieto nemá k dispozícii, môže pripojiť ich neoptimalizované verzie v súbore `blalap.f`.

9.1 Tutoriál

Pri použití balíka je potrebné jednak zavolať funkciu `dyno` a jednak špecifikovať užívateľské funkcie definujúce diferenciálne rovnice, účelovú funkciu a obmedzenia. Uveďme si použitie balíka na jednoduchom príklade.

Uvažujme systém opísaný diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientmi v tvare

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t), \quad y'(0) = 0, y(0) = 0 \tag{9.1.1}$$

pričom úlohou je minimalizovať čas t_f, v ktorom je dosiahnutý nový ustálený stav definovaný ako $y'(t_f) = 0$, $y(t_f) = 1$. Ďalej uvažujeme ohraničenia na riadenia $u \in [-0.5, 1.5]$.

Pre účely numerického riešenia rozdeľme celkový optimalizovaný čas t_f na 3 intervaly, v ktorých budeme uvažovať riadenie konštantné. Potom získame optimalizačný problém s nasledovnými neznámymi veličinami: u_1, u_2, u_3, $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$.

Prepíšeme pôvodnú diferenciálnu rovnicu na systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu. Problém optimálneho riadenia môže byť potom definovaný nasledovne

$$\begin{array}{rcll}
x_1' & = & x_2, & x_1(0) = 0 \\
x_2' & = & u - x_1 - 2x_2, & x_2(0) = 0 \\
J_0 & = & \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 & \\
J_1 & = & x_1(t_3) - 1 & \\
J_2 & = & x_2(t_3) & \\
u_i & \in & [-0.5, 1.5], \quad i = 1, 2, 3 & \\
\Delta t_i & \geq & 0, \quad i = 1, 2, 3 &
\end{array} \tag{9.1.2}$$

9.1.1 Hlavný program

Pre náš prípad máme problém nasledovných rozmerov: počet stavov: 2, počet riadení: 1, počet optimalizovaných parametrov: 0, počet intervalov riadenia: 3, počet obmedzení: 2, z čoho 2 obmedzenia sú rovnosti.

Účelová funkcia nezávisí od stavov, iba od optimalizovaných premenných, obmedzenia závisia od stavov.

Hlavný program dimenzuje príslušné polia, nastaví, aké premenné sú optimalizované, ich obmedzenia a zavolá funkciu `dyno`. Po návrate z nej vypíše celkovú optimálnu trajektóriu stavov a riadenia.

```
      PROGRAM EXM1
      implicit none
      integer nmcont, nmpar
      integer nsta, ncont, npar, ntime, ncst, ncste
      parameter (nsta = 2, ncont = 1, npar = 0, ntime = 3,
     &      ncst = 2, ncste = 2)
      parameter (nmcont = ncont, nmpar = 1)
      integer ista, nrwork, iwork, niwork, nlwork, ipar, ifail, info
      double precision ul, u, uu, pl, p, pu, tl, t, tu, rwork, rpar
      logical lwork

      dimension ul(nmcont, ntime), u(nmcont, ntime), uu(nmcont, ntime)
      dimension pl(nmpar), p(nmpar), pu(nmpar)
      dimension tl(ntime), t(ntime), tu(ntime)
      dimension ista(ncst+1)

      parameter (niwork=400, nrwork=60000, nlwork = 50)
      dimension iwork(niwork), rwork(nrwork), lwork(nlwork)
```

```
      dimension ipar(10), rpar(50), info(16)

      integer i
      ista(1) = 0
      ista(2) = 1
      ista(3) = 1

      do i = 1, 5
         rwork(i) = 0.0d0
      end do

      do i = 1, 16
         info(i) = 0
      end do

c     optimise what: 0/1-ti, 0/2-ui, 0/4-p
      info(7) = 3

c     initial values of the optimised parameters
c     upper, lower bounds
c     control and time
      do i=1,  ntime
         u(1,i) = 1.0d0
         ul(1,i) = -0.50d0
         uu(1,i) = 1.50d0
         t(i)  = 1.0d0
         tl(i) = 0.01d0
         tu(i) = 10.0d0
      end do

      ifail = 0
      call DYNO(nsta, ncont, nmcont, npar, nmpar, ntime, ncst, ncste, ul
     &      , u, uu, pl, p,pu, tl, t, tu, ista, rwork, nrwork, iwork,
     &      niwork, lwork, nlwork, rpar, ipar, ifail, info)
      call trawri(rwork, iwork, rpar, ipar)
      END
```

9.1.2 Funkcia process

Účelom tejto funkcie je definovať diferenciálne rovnice optimalizovaného procesu a počiatočné podmienky. Okrem toho (ak nie je použitý balík ADIFOR pre automatické derivovanie) je potrebné definovať parciálne derivácie diferenciálnych rovníc a počiatočných podmienok.

V našom prípade sú tieto veličiny definované nasledovne:

diferenciálne rovnice

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u - x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \tag{9.1.3}$$

Parciálne derivácie podľa $\boldsymbol{x}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{9.1.4}$$

Parciálne derivácie podľa u

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}^T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9.1.5}$$

Parciálne derivácie podľa $\boldsymbol{p}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}^T} = \boldsymbol{0} \tag{9.1.6}$$

Počiatočné podmienky

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9.1.7}$$

Parciálne derivácie počiatočných podmienok podľa $\boldsymbol{p}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_0}{\partial \boldsymbol{p}^T} = \boldsymbol{0} \tag{9.1.8}$$

Zodpovedajúca funkcie je uvedená nižšie. Poznamenávame, že v prípade parciálnych derivácií je potrebné definovať iba nenulové prvky.

```
      subroutine process(t, x, nsta, u, ncont, nmcont, p, npar, nmpar,
     &      sys, nsys, dsys, ndsys1, ndsys2, ipar, rpar, flag, iout)
      implicit none
      integer nsta, ncont, nmcont, npar, nmpar, nsys, ndsys1, ndsys2,
     &      ipar, flag, iout
      double precision t, x, u, p, sys, dsys, rpar
      dimension x(nsta), u(nmcont), p(nmpar),
     &      sys(nsys), dsys(ndsys1, ndsys2), rpar(*), ipar(*)

      if (flag .eq. 0) then
         sys(1) = x(2)
         sys(2) = u(1)-2*x(2)-x(1)
         return
      end if

      if (flag .eq. 1) then
         dsys(1,2) = 1.0d0
         dsys(2,1) = -1.0d0
         dsys(2,2) = -2.0d0
         return
      end if
      if (flag .eq. 2) then
```

```
            dsys(2,1) = 1.0d0
            return
         end if
         if (flag .eq. -1) then
            sys(1) = 0.0d0
            sys(2) = 0.0d0
            return
         end if
         if (flag .eq. -2) then
            return
         end if
         if (flag .eq. -3) then
            write(iout,100) t, u(1), x(1), x(2)
 100        format(f8.5,3X,3f20.15)
            return
         end if
         end
```

9.1.3 Účelová funkcia a obmedzenia – integrálna časť `costi`

Účelová funkcia a obmedzenia sú definované v kanonickom Bolza tvare. Keďže integrálna časť je potrebná počas doprednej integrácie systému a koncová časť až na konci integrácie, sú tieto rozdelené do dvoch rôznych funkcií. V každej z nich je potrebné najprv definovať účelovú funkciu, potom obmedzenia v tvare rovnosti, po ktorých nasledujú obmedzenia v tvare nerovností.

Pre náš prípad nie sú definované integrálne funkcie F_j, a teda sú nulové. Zodpovedajúca funkcia `costi` je definovaná nižšie.

```
         subroutine costi(t, x, u, p, ntime, nsta, ncont, nmcont, npar,
       &      nmpar, ncst, ncste, ipar,rpar, flag, xupt, nti, sys, nsys)
         implicit none
         integer ntime, nsta, ncont, nmcont, npar, nmpar, ncst, ncste, ipar
       &      , flag, xupt,nti, nsys
         double precision t, x, u, p, rpar, sys
         dimension x(nsta), u(nmcont), p(nmpar), ipar(*), rpar(*), sys(nsys
       &      )

         if (flag .eq. -1) then
            sys(1) = 0.0d0
            sys(2) = 0.0d0
            sys(3) = 0.0d0
            return
         end if
         end
```

9.1.4 Účelová funkcia a obmedzenia – neintegrálna časť `costni`

Druhá časť účelovej funkcie obsahuje časti, ktoré nezahrňujú integrály – členy G_j. Tieto môžu obsahovať dĺžky intervalov, ľubovoľnú časť optimalizovanej riadiacej trajektórie či stavov a parametre.

Poradie jednotlivých členov zodpovedá poradiu v integrálnej funkcii `costi`.

V našom prípade sú neintegrálne časti definované nasledovne.

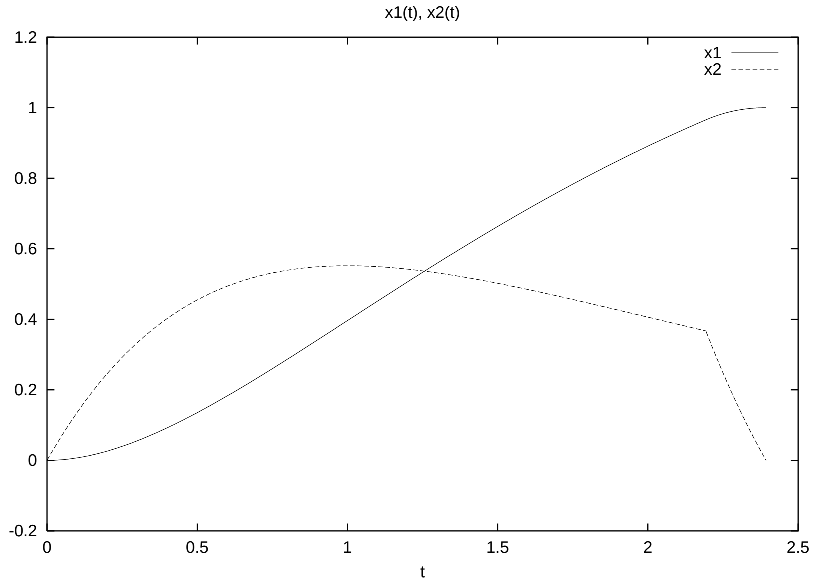
$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 \\ x_1(t_3) - 1 \\ x_2(t_3) \end{pmatrix} \tag{9.1.9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_1)} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_2)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}^T(t_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.1.10}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \Delta \boldsymbol{t}^T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.1.11}$$

Zodpovedajúca funkcia `costni` je definovaná nižšie.

```
      subroutine costni(ti, xi, ui, p, ntime, nsta, ncont, nmcont, npar,
     &      nmpar, ncst,ncste,ipar, rpar, flag, sys, n1, n2, n3)
      implicit none
      integer ntime, nsta, ncont, nmcont, npar, nmpar, ncst, ncste, ipar
     &      , flag, n1, n2,n3
      double precision ti, xi, ui, p, rpar, sys
      dimension ti(ntime), xi(nsta, ntime), ui(nmcont, ntime), p(nmpar),
     &      ipar(*), rpar(*), sys(n1,n2,n3)

      if (flag .eq. 0 ) then
         sys(1,1,1) = ti(1)+ti(2)+ti(3)
         sys(2,1,1)= xi(1,ntime)-1.0d0
         sys(3,1,1)= xi(2,ntime)
         return
      end if
      if (flag .eq. 1 ) then
         sys(1,ntime,2) = 1.0d0
         sys(2,ntime,3) = 1.0d0
         return
      end if
      if (flag .eq. 2 ) then
         return
      end if
      if (flag .eq. 3 ) then
         return
      end if
      if (flag .eq. 4 ) then
            sys(1,1,1) = 1.0d0
            sys(2,1,1) = 1.0d0
            sys(3,1,1) = 1.0d0
         return
      end if
```



Obr. 9.1.1: Optimálna stavová trajektória

```
end
```

Riešenie problému bolo získané na PC s operačným systémom GNU/Linux. Optimálne hodnoty veličín sú nasledovné:

$$\Delta t_j^T = (1.0965, 1.0965, 0.200) \tag{9.1.12}$$

$$u_j^T = (1.500, 1.500, -0.500) \tag{9.1.13}$$

$$J_i^T = (2.393, -8.055\,10^{-11}, -3.014\,10^{-15}) \tag{9.1.14}$$

Riadenie je po celý čas na ohraničeniach a koncové obmedzenia sú dosiahnuté v minimálnom čase $t_f = 2.393$. Optimálna trajektória stavov je znázornená na obr. 9.1.1.

9.1.5 Automatické derivovanie

V prípade, že bude použitý balík ADIFOR, nie je nutné špecifikovať vo funkciách `process`, `costi`, `costni` hodnoty parciálnych derivácií. Zadanie problému je tak výrazne zjednodušené. Balík ADIFOR pred samotnou kompiláciou zdrojových súborov vygeneruje zodpovedajúci kód v jazyku FORTRAN, ktorý je potom pripojený k projektu.

9.2 Príklady

V tejto časti uvedieme príklady problémov dynamickej optimalizácie, ktoré boli riešené pomocou balíka `DYNO`. Ku každému z príkladov je voľne dostupný zdrojový kód vo FORTRANe.

Príklady boli testované v operačnom systéme GNU/Linux s kompilátorom Absoft Linux Compiler, GNU g77, ako aj na platforme Sparc Solaris s kompilátorom Sun f77.

9.2.1 Problém s koncovým obmedzením

Dynamický systém

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1 \tag{9.2.1}$$

s ohraničeniami $u(t) \in [-1, 1]$ a účelovou funkciou

$$\min_u J_0 = \int_0^1 (x^2 + u^2)\mathrm{d}t \tag{9.2.2}$$

má byť optimalizovaný vzhľadom na obmedzenia

$$J_1 = x(1) = 0.5 \tag{9.2.3}$$
$$J_2 = x(0.6) = 0.8 \tag{9.2.4}$$

Zvolíme si počet optimalizovaných intervalov rovný 10 a optimalizujme iba riadenie u parametrizované ako po častiach konštantné. Z hľadiska balíka `DYNO` je formulácia problému nasledovná ($t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $m = 2$, $m_e = 2$)

Proces:

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad x(0) = 1 \tag{9.2.5}$$

Účelová funkcia:

$$G_0 = 0, \qquad F_0 = x^2 + u^2 \tag{9.2.6}$$

Obmedzenia:

$$G_1 = x(t_{10}) - 0.5, \quad F_1 = 0 \tag{9.2.7}$$
$$G_2 = x(t_6) - 0.8, \quad F_2 = 0 \tag{9.2.8}$$

Ohraničenia:

$$u_i \in [-1, 1] \qquad i = 1 \ \ldots \ 10 \tag{9.2.9}$$

Optimum bolo nájdené v troch iteráciách. Súbory a výsledky sú v adresári `problem1`. Optimálne riadiace a stavové priebehy sú tiež znázornené na obr. 9.2.1.

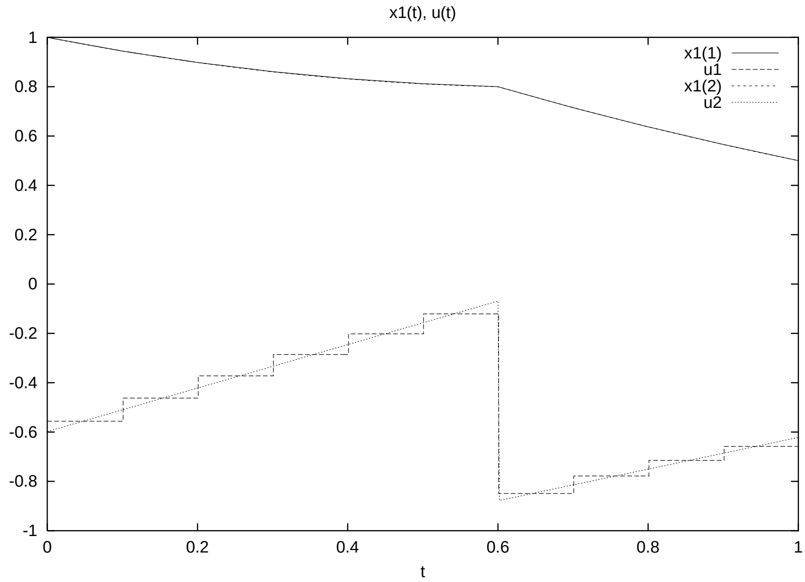
9.2.2 Problém s koncovým obmedzením 2

Výrazne lepšia aproximácia optimálneho riadenia môže byť získaná s po častiach lineárnym riadením a s iba dvomi časovými intervalmi.

Nová formulácia je tak:

Proces:

$$\dot{x}(t) = u_1(t) + tu_2(t), \quad x(0) = 1 \tag{9.2.10}$$



Obr. 9.2.1: Porovnanie optimálnych trajektórií pre problémy 9.2.1 a 9.2.2

Účelová funkcia:

$$G_0 = 0, \qquad F_0 = x^2 + (u_1 + tu_2)^2 \tag{9.2.11}$$

Obmedzenia:

$$G_1 = x(t_2) - 0.5, \qquad F_1 = 0 \tag{9.2.12}$$

$$G_2 = x(t_1) - 0.8, \qquad F_2 = 0 \tag{9.2.13}$$

Ohraničenia na riadenie neboli zahrnuté, pretože v predošlom probléme neboli aktívne.

Optimum bolo nájdené v 10 iteráciách (Obr. 9.2.1). Vidíme, že napriek lepšej aproximácii optimálneho riadenia sú stavové trajektórie prakticky totožné. Súbory a výsledky sú v adresári `problem2`.

9.2.3 Vsádzkový reaktor

Uvažujme jednoduchý vsádzkový reaktor s následnými reakciami $A \to B \to C$ a problém jeho optimalizácie podľa článku Crescitelli a Nicoletti (1973). Parametre reaktora sú $k_{10} = 0.535e11$, $k_{20} = 0.461e18$, $e_1 = 18000$, $e_2 = 30000$, $r = 2.0$, koncový čas $t_f = 8.0$, $\beta_1 = 0.53$, $\beta_2 = 0.43$, $\alpha = e_2/e_1$, $c = k_{20}/k_{10}^{\alpha}$. Pre detailnejšie vysvetlenie problému viď Crescitelli a Nicoletti (1973).

Diferenciálne rovnice opisujúce proces prebiehajúci v reaktore sú nasledovné

$$\dot{x}_1 = -ux_1 \tag{9.2.14}$$

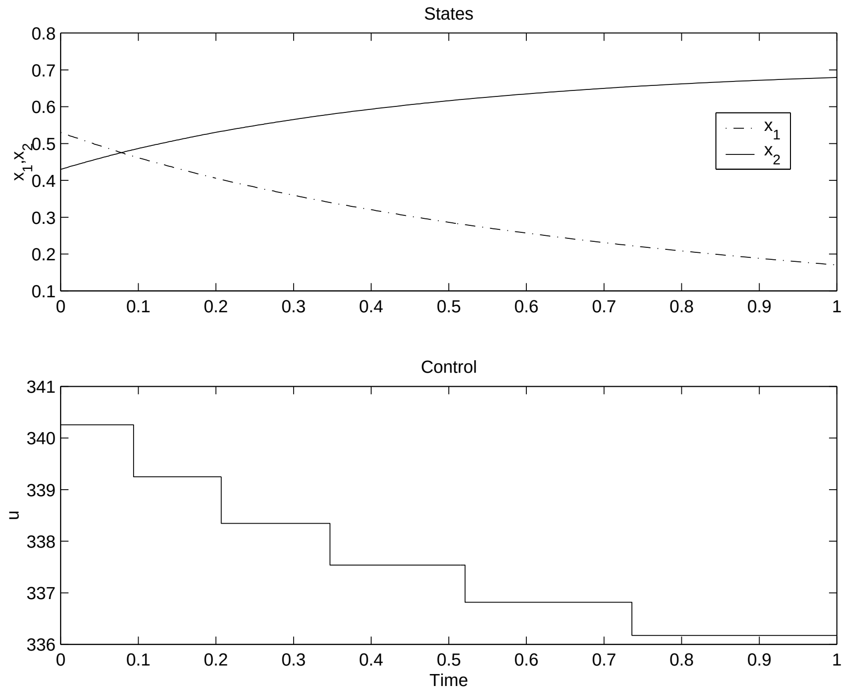
$$\dot{x}_2 = ux_1 - cu^{\alpha}x_2 \tag{9.2.15}$$

s počiatočnými podmienkami

$$x_1(0) = \beta_1, \quad x_2(0) = \beta_2 \tag{9.2.16}$$

Riadiaca premenná u je zviazaná s teplotou v reaktore T podľa nasledovného vzťahu

$$T = -\frac{e_1}{r \ln \frac{u}{k_{10}}} \tag{9.2.17}$$



Obr. 9.2.2: Optimálne trajektórie nájdené pre problém 9.2.3

Úlohou optimalizácie je maximalizovať výťažok produktu B v čase t_f: $x_2(t_f)$, pričom riadenie má byť po častiach konštantné. V pôvodnom článku sú uvažované 3 intervaly riadenia, pričom aj dĺžky intervalov sú optimalizované. V našom prípade uvažujeme 6 intervalov.

Formulácia problému pre DYNO je nasledovná ($t_0 = 0$, $t_1 = t_f$, $m = 1$, $m_e = 1$):

Proces:

$$\dot{x}_1 = -ux_1, \qquad x_1(0) = \beta_1 \tag{9.2.18}$$

$$\dot{x}_2 = ux_1 - cu^\alpha x_2, \qquad x_2(0) = \beta_2 \tag{9.2.19}$$

Účelová funkcia:

$$G_0 = -x_2(t_3), \qquad F_0 = 0 \tag{9.2.20}$$

Obmedzenia:

$$G_1 = -t_f + \sum_{j=1}^{3} \Delta t_j, \quad F_1 = 0 \tag{9.2.21}$$

Súbory a výsledky sú v adresári `problem4` a na obr. 9.2.2.

9.2.4 Nelineárny prietokový reaktor

Uvažujme problém publikovaný v (Luus, 1990; Balsa-Canto a kol., 2001). Spočíva v určení štyroch optimálnych riadení v chemickom reaktore tak, aby bol maximalizovaný ekonomický zisk. Dynamika procesu je opísaná štyrmi simultánnymi chemickými reakciami prebiehajúcimi pri izotermických podmienkach v prietokovom reaktore. Riadenia sú prietoky troch vstupov a elektrická energia potrebná pre fotochemickú reakciu.

Formulácia problému: Je potrebné nájsť vektor $\boldsymbol{u}(t) = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ v čase $t \in [t_0, t_f]$ tak, aby sa maximalizovala účelová funkcia

$$J_0 = x_8(t_f) \tag{9.2.22}$$

vzhľadom na:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_4 - qx_1 - 17.6x_1x_2 - 23x_1x_6u_3 && (9.2.23)\\
\dot{x}_2 &= u_1 - qx_2 - 17.6x_1x_2 - 146x_2x_3 && (9.2.24)\\
\dot{x}_3 &= u_2 - qx_3 - 73x_2x_3 && (9.2.25)\\
\dot{x}_4 &= -qx_4 + 35.20x_1x_2 - 51.30x_4x_5 && (9.2.26)\\
\dot{x}_5 &= -qx_5 + 219x_2x_3 - 51.30x_4x_5 && (9.2.27)\\
\dot{x}_6 &= -qx_6 + 102.60x_4x_5 - 23x_1x_6u_3 && (9.2.28)\\
\dot{x}_7 &= -qx_7 + 46x_1x_6u_3 && (9.2.29)\\
\dot{x}_8 &= 5.80((qx_1) - u_4) - 3.70u_1 - 4.10u_2 + q(23x_4 + 11x_5 + 28x_6 + 35x_7)\\
&\quad - 5.0u_3^2 - 0.099 && (9.2.30)
\end{aligned}$$

kde $q = u_1 + u_2 + u_4$. Počiatočné podmienky procesu sú

$$\boldsymbol{x}(0)^T = [0.1883\ 0.2507\ 0.0467\ 0.0899\ 0.1804\ 0.1394\ 0.1046\ 0.000] \tag{9.2.31}$$

a ohraničenia na riadiace veličiny sú $u_1 \in [0, 20]$, $u_2 \in [0, 6]$, $u_3 \in [0, 4]$, $u_4 \in [0, 20]$. Uvažujeme pevný koncový čas $t_f = 0.2$.

Optimálne riešenie nájdené ($J_0 = 21.757$) pre $P = 11$ ekvidištančných intervalov časov je zhodné s údajmi uvedenými v literatúre.

Súbory a výsledky sú v adresári `problem5`.

9.2.5 Odhad parametrov

Optimalizovaný systém je opísaný diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = p_1 && (9.2.32)\\
\dot{x}_2(t) &= 1 - 2x_2(t) - x_1(t) \quad x_2(0) = p_2 && (9.2.33)
\end{aligned}$$

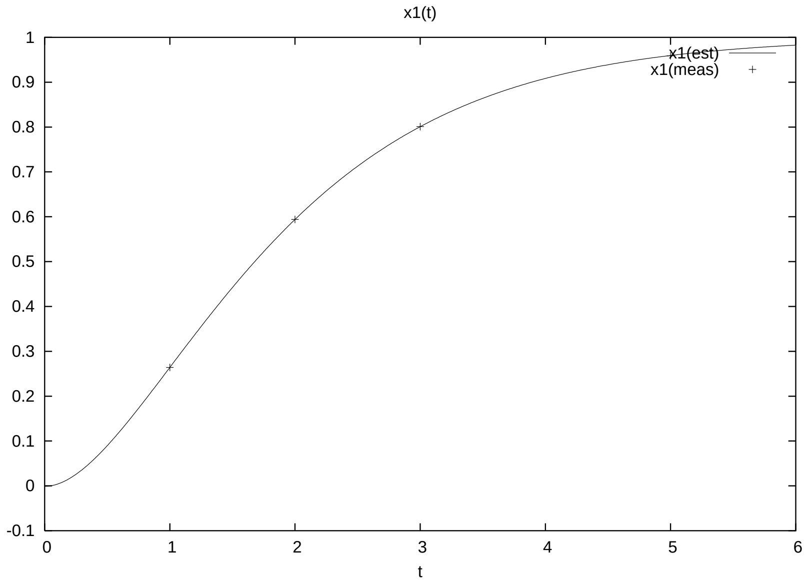
a reprezentuje systém druhého rádu so zosilnením a časovou konštantou rovnými jednej. Vstupom do procesu je riadenie rovné 1 a úlohou je nájsť počiatočné podmienky, ktoré zodpovedajú nameraným bodom

t	1	2	3	5
x_1^m	0.264	0.594	0.801	0.959

Účelová funkcia je definovaná ako súčet štvorcov odchýliek

$$\min_p J_0 = \sum_{i=1,2,3,5} (x_1(i) - x_1^m(i))^2 \tag{9.2.34}$$

Počet intervalov je pevný a rovný 6 s krokom jedna a optimalizujeme parametre p_1, p_2. Formulácie pre `DYNO` je ($t_0 = 0$, $t_1 = 6$, $m = 0$, $m_e = 0$)



Obr. 9.2.3: Porovnanie odhadovanej a nameranej trajektórie stavu x_1 v probléme 9.2.5

Proces:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \qquad x_1(0) = p_1 \tag{9.2.35}$$

$$\dot{x}_2(t) = 1 - 2x_2(t) - x_1(t), \quad x_2(0) = p_2 \tag{9.2.36}$$

Účelová funkcia:

$$F_0 = 0, \qquad G_0 = (x(t_1) - .264)^2 + (x(t_2) - .594)^2 \tag{9.2.37}$$

$$+ (x(t_3) - .801)^2 + (x(t_5) - .959)^2 \tag{9.2.38}$$

Ohraničenia:

$$p_i \in [-1.5, 1.5] \qquad i = 1 \ \ldots \ 2 \tag{9.2.39}$$

Optimum bolo nájdené v siedmych iteráciách. Súbory a výsledky sú v adresári `problem6`. Optimálne hodnoty parametrov sú -0.00112, 0.00163. Namerané a vypočítané trajektórie sú zobrazené na obr. 9.2.3.

Časť IV

Aplikácie

Kapitola 10

Optimálne riadenie systému reaktorov

V tejto časti sa zameriame na aplikáciu problematiky dynamickej optimalizácie pre dvojicu reaktorov zapojených v sérii, ktorý môže byť charakterizovaný ako hybridný systém (Hirmajer a Fikar, 2006b).

Každý reaktor je opísaný sústavou diferenciálnych rovníc. Po prebehnutí prvej fáze reakcie s riadenou teplotou sú produkty zmiešané s jedným z reaktantov a v druhom reaktore prebieha pri konštantnej teplote druhá fáza reakcie. Úlohou je nájsť dynamické operačné podmienky, za ktorých dochádza k maximálnej výťažnosti jedného z produktov.

Na riešenie úlohy bola použitá metóda parametrizácie vektora riadenia.

10.1 Proces

Uvažujme systém reaktorov znázornený na obr. 10.1.1. Prvý reaktor je naplnený reaktantom A s koncentráciou $c_\mathrm{A}(t_0)$ a katalyzátorom v celkovom objeme V_1. Na reguláciu teploty reakcie sa používa vyhrievanie plášťa reaktora, ktoré je riadiacou veličinou. Keď sa v čase t_s ukončí prvá reakcia

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C} \tag{10.1.1}$$

výsledný produkt sa zmieša s vodným roztokom reaktantu B o koncentrácii c_B^s, objeme S a spracuje v druhom reaktore, kde pri konštantnej teplote prebiehajú paralelné reakcie

$$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{D} \tag{10.1.2}$$

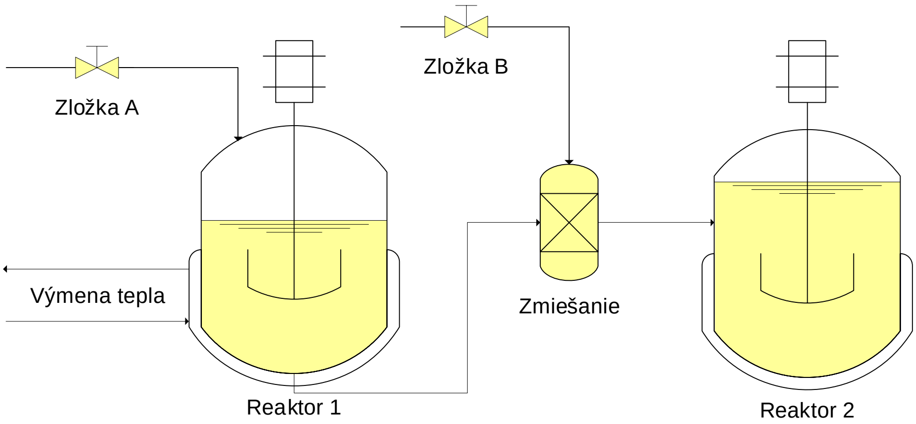
$$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{E} \tag{10.1.3}$$

$$2\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{F} \tag{10.1.4}$$

Podrobný opis procesu je možno nájsť v Vassiliadis a kol. (1994).

10.1.1 Model reaktorov

Pri modelovaní procesu budeme uvažovať dokonalé miešanie a ideálne správanie kvapalín. Reaktory potom môžeme opísať dvomi množinami diferenciálnych rovníc. V prvej fáze platí systém



Obr. 10.1.1: Systém reaktorov

diferenciálnych rovníc $\boldsymbol{f}_1$

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dot{c}_\mathrm{A} = -2k_1(T)c_\mathrm{A}^2 \\ \dot{c}_\mathrm{B} = k_1(T)c_\mathrm{A}^2 - k_2(T)c_\mathrm{B} \\ \dot{c}_\mathrm{C} = k_2(T)c_\mathrm{B} \end{cases} \tag{10.1.5}$$

a v druhej fáze systém diferenciálnych rovníc $\boldsymbol{f}_2$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dot{c}_\mathrm{B} = -0.02c_\mathrm{B} - 0.05c_\mathrm{B} - 0.00008c_\mathrm{B}^2 \\ \dot{c}_\mathrm{D} = 0.02c_\mathrm{B} \\ \dot{c}_\mathrm{E} = 0.05c_\mathrm{B} \\ \dot{c}_\mathrm{F} = 0.00004c_\mathrm{B}^2 \end{cases} \tag{10.1.6}$$

a rýchlostné konštanty sú funkciou teploty

$$k_1(T) = 0.0444e^{\frac{-2500}{T}} \tag{10.1.7}$$

$$k_2(T) = 6889.0e^{\frac{-5000}{T}} \tag{10.1.8}$$

Stavovým vektorom $\boldsymbol{x}$ sú koncentrácie všetkých šiestich komponentov A—F. Profil teploty T v prvom reaktore je riadiacou veličinou u.

Operáciu zmiešavania v čase t_s môžeme opísať bilančnými rovnicami

$$V_2 c_\mathrm{A}(t_\mathrm{s}^+) = V_1 c_\mathrm{A}(t_\mathrm{s}^-) \tag{10.1.9}$$

$$V_2 c_\mathrm{B}(t_\mathrm{s}^+) = V_1 c_\mathrm{B}(t_\mathrm{s}^-) + S c_\mathrm{B}^\mathrm{s} \tag{10.1.10}$$

$$V_2 c_\mathrm{C}(t_\mathrm{s}^+) = V_1 c_\mathrm{C}(t_\mathrm{s}^-) \tag{10.1.11}$$

kde platí

$$V_2 = V_1 + S \tag{10.1.12}$$

Objem V_1 určuje množstvo materiálu v prvom reaktore, S množstvo roztoku látky B s koncentráciou c_B^s, ktoré bolo pridané po ukončení prvej reakcie a V_2 je objem reakčnej zmesi v druhom reaktore.

Tabuľka 10.3.1: Vplyv počtu intervalov P na hodnotu účelovej funkcie J_0

P	n	t_s /min	S/m^3	J_0/mol
6	39	106.04	0.0702	25.5365
10	51	104.98	0.0705	25.5681
20	64	106.82	0.0705	25.5755

10.2 Definícia optimalizačného problému

Úlohou optimálneho riadenia je získať maximálne množstvo látky D najneskôr v čase t_P, pričom musí byť zobrané do úvahy ďalšie obmedzenie na koncentráciu látky D – táto musí byť vyššia alebo rovná požadovanej hodnote $c_{\mathrm{D}}^{\mathrm{w}}$.

Veličiny, ktoré je možné optimalizovať, sú: teplotný profil v prvej fáze reakcie, dĺžka trvania oboch fáz a množstvo S látky B pridané v čase t_{s}.

Účelovú funkciu môžeme teda definovať nasledovne

$$\max_{S,\Delta t_i,T[0,t_{\mathrm{s}}]} J_0 = V_2 c_{\mathrm{D}}(t_P) \tag{10.2.1}$$

vzhľadom na obmedzenia

$$J_1 = c_{\mathrm{D}}(t_P) - c_{\mathrm{D}}^{\mathrm{w}} \geq 0 \tag{10.2.2}$$

$$J_2 = t_P - \sum_{i=1}^{P} \Delta t_i \geq 0 \tag{10.2.3}$$

kde $c_{\mathrm{D}}^{\mathrm{w}}$ je požadovaná minimálna koncentrácia látky D v koncovom čase t_P, ktorý je daný súčtom časov oboch fáz reakcie.

Konkrétne hodnoty optimalizovaných parametrov sú nasledovné:: $V_1 = 0.1\,\mathrm{m}^3$, $c_{\mathrm{A}}(t_0) = 2000\,\mathrm{mol\,m}^{-3}$, $c_{\mathrm{B-F}}(t_0) = 0\,\mathrm{mol\,m}^{-3}$, $c_{\mathrm{B}}^{\mathrm{s}} = 600\,\mathrm{mol\,m}^{-3}$, $c_{\mathrm{D}}^{\mathrm{w}} = 150\,\mathrm{mol\,m}^{-3}$ a $t_P = 180\,\mathrm{min}$.

10.3 Výsledky a diskusia

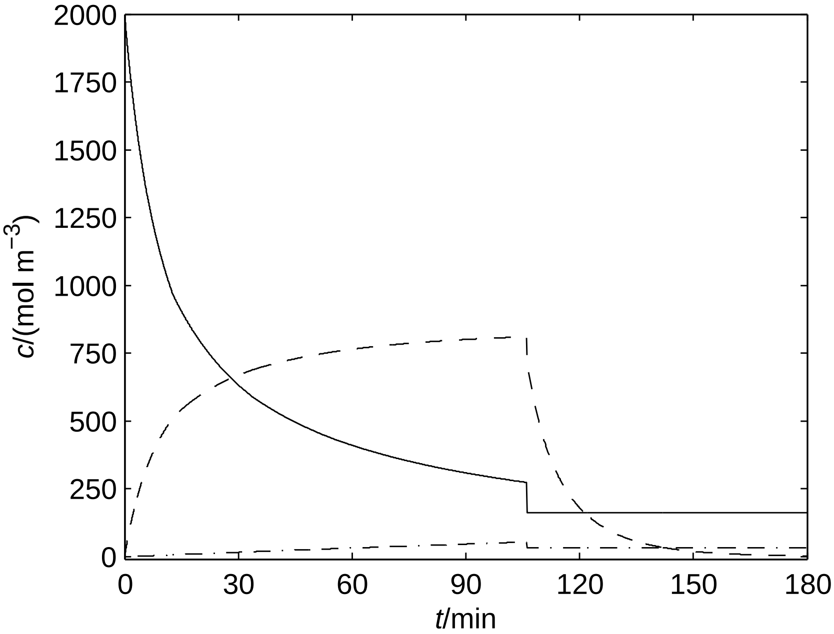
Pre účely optimalizácie sme rozdelili prvú fázu reakcie na $P - 1 = 5$ intervalov a druhú fázu ponechali s jedným optimalizovaným intervalom. Počiatočné odhady optimalizovaných parametrov boli nasledovné:: $\Delta t_i = 15\,\mathrm{min}$, $u_i = 350\,\mathrm{K}$ a $S = 0.1\,\mathrm{m}^3$, pričom ohraničenie a na premenné boli $u_i \in \langle 298, 398\rangle$ pre $t \in \langle t_0, t_{\mathrm{s}}\rangle$, $S \in \langle 0, 0.1\rangle$ a $\Delta t_i \in \langle 10, 100\rangle$ pre $P = 6$, inak $\Delta t_i \in \langle 1, 100\rangle$. Presnosti optimalizácie a integrácie boli 10^{-4} a 10^{-10}.

Optimálne priebehy všetkých koncentrácií sú na obr. 10.3.1 a 10.3.2. Riadiaca veličina – optimálna trajektória teploty – je zobrazená na obr. 10.3.3.

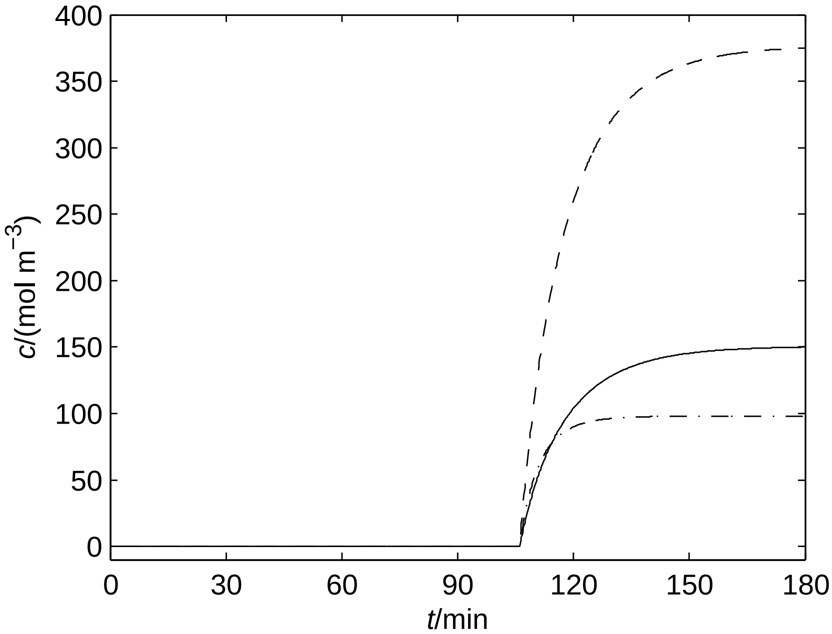
Obe obmedzenia sú aktívne – koncentrácia látky D v koncovom čase je $150\,\mathrm{mol\,m}^{-3}$ a čas trvania rekcií je $180\,\mathrm{min}$.

Hodnota účelovej funkcie v optime bola 25.54 mol, čo je vo veľmi dobrej zhode s literatúrou (Vassiliadis a kol., 1994), kde bola publikovaná hodnota 25.55 mol. Tomu zodpovedá aj optimálna trajektória teploty.

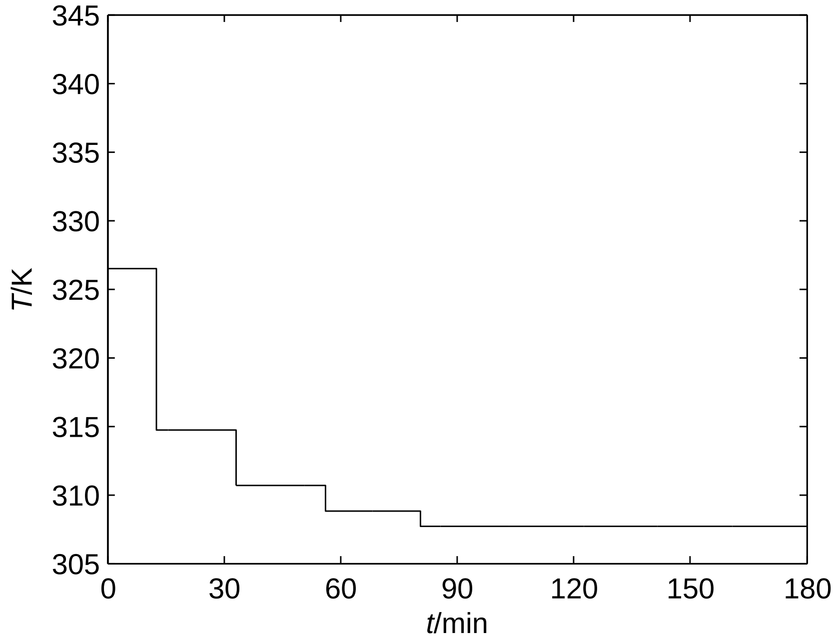
Tabuľka 10.3.1 uvádza prehľad vlastností riešenia v závislosti od počtu uvažovaných intervalov P. Hodnota účelovej funkcie sa mení iba málo, ale profily riadenia na obr. 10.3.3—10.3.5 konvergujú k optimálnej spojitej trajektórii. Hoci je zlepšenie z hľadiska účelovej funkcie malé,



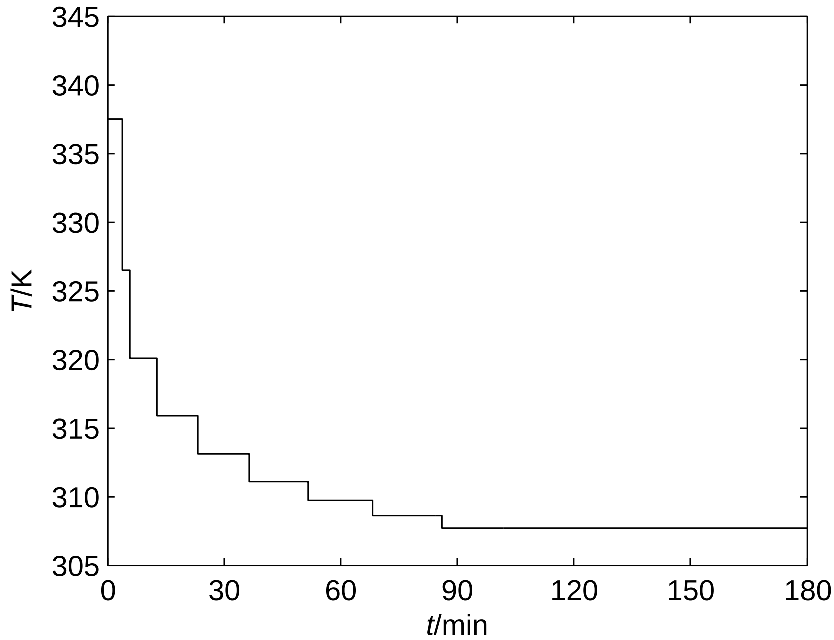
Obr. 10.3.1: Priebehy optimálnych koncentračných profilov zložiek A (plná čiara), B (čiarkovaná čiara) a C (bodkočiarkovaná čiara)



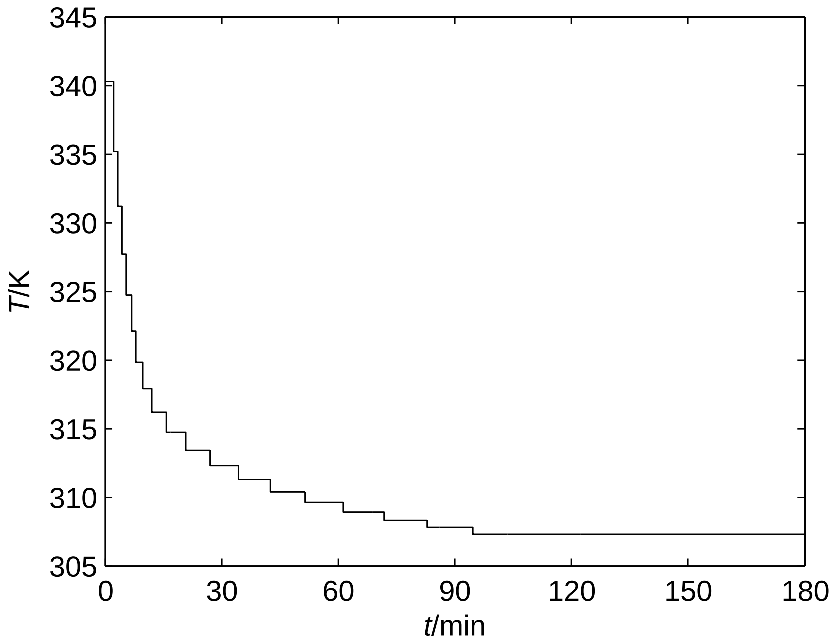
Obr. 10.3.2: Priebehy optimálnych koncentračných profilov zložiek D (plná čiara), E (čiarkovaná čiara) a F (bodkočiarkovaná čiara)



Obr. 10.3.3: Priebeh optimálnej teploty pre $P = 6$



Obr. 10.3.4: Priebeh optimálnej teploty pre $P = 10$



Obr. 10.3.5: Priebeh optimálnej teploty pre $P = 20$

aj tak to môže mať veľký vplyv na celkový zisk, najmä ak by bol produkt D veľmi drahý, či produkovaný vo veľkých množstvách.

Výsledky z tab. 10.3.1 tiež ukazujú, že počet optimalizovaných úsekov P nemá významný vplyv na optimalizované premenné t_s a S. Toto pravdepodobne dôsledkom aktívnych obmedzení: čas prepnutia t_s je závislý od obmedzenia na celkový čas t_P a obmedzenie na koncentráciu súvisí s množstvom S látky B pridanej pred druhou fázou reakcie.

Porovnajme teraz prístup k CVP pomocou systému adjungovaných rovníc a pomocou výpočtu citlivostí. V prípade adjungovaných premenných obsahuje problém 6 diferenciálnych rovníc a optimalizácia obsahuje účelovú funkciu J_0, stavovo závislé obmedzenie J_1 a obmedzenie nezávislé od stavov J_2. Ak je počet optimalizovaných úsekov $P = 6$, je potom celkový počet diferenciálnych rovníc, ktoré je nutné integrovať, rovný 20 v rámci jednej iterácie NLP. V tomto počte je zahrnutých 6 rovnice stavov a dvakrát 7 rovníc adjungovaných premenných (6 adjungovaných rovníc a jedna podintegrálna čas Hamiltoniánu).

V prípade prístupu pomocou citlivostných rovníc je potrebných 72 diferenciálnych rovníc (počet stavov násobený počtom optimalizovaných premenných). Aj keď niektoré z týchto rovníc sú rovné nule, aj tak je možné očakávať, že prístup pomocou adjungovaných rovníc bude rýchlejší.

Ak sa počet optimalizovaných intervalov zvýši, počet diferenciálnych rovníc pomocou prístupu s adjungovanými rovnicami ostane konštantný. V prípade citlivostných rovníc sa ich počet zvyšuje násobne. V tom prípade bude celkový čas výpočtov pomocou adjungovaných premenných výrazne nižší, pretože analýzy ukazujú, že asi 80 % celkového času je potrebné na integráciu diferenciálnych rovníc.

Kapitola 11

Optimálna prevádzka v čističke odpadových vôd

Táto časť predstavuje štúdiu dynamickej optimalizácie malej čističky odpadových vôd (ČOV) s jednou nádržou. Účelom je navrhnúť optimálny priebeh zapínania okysličovania pre typický denný priebeh porúch tak, aby boli splnené obmedzenia na odpadovú vodu, proces ostal v periodickom stacionárnom režime a minimalizovala sa spotrebovaná energia.

Zo získaných optimálnych trajektórií navrhneme jednoduché spätnoväzbové pravidlá, pomocou ktorých zabezpečíme sledovanie optimálnych priebehov (Fikar a kol., 2005).

11.1 Úvod

Pre spracovanie odpadových vôd sa v súčasnosti najčastejšie používa aktivovaný kalový proces (activated sludge process ASP). Odstránenie dusíkových zlúčenín (N) vyžaduje priebeh dvoch biologických procesov: nitrifikáciu a denitrifikáciu. Kým prvý z nich prebieha pri aeróbnych podmienkach, v druhom je potrebné zabezpečiť anoxické prostredie. Pre malé prevádzky s ekvivalentným počtom populácie menším ako 20 000 sú najčastejšie tieto dva procesy realizované v jedinej nádrži. Procesy nitrifikácie a denitrifikácie sú tak realizované zapínaním a vypínaním vzduchových turbín.

Jednou z najdôležitejších požiadaviek na zlepšenie prevádzkových parametrov ČOV je kvalita spracovanej vody a zníženie celkových nákladov. Je pochopiteľné, že tieto dve požiadavky nie sú nezávislé, pretože zníženie znečistenia vo všeobecnosti zahŕňa dodatočné investičné a prevádzkové náklady.

Dôvodov na zlepšovanie kvality odpadových vôd je viacero, najmä:

- Kvalita vôd: V posledných rokov je v platnosti prísnejšia smernica Európskej únie (91/271 "Mestská odpadová voda"), ktorá nastavila maximálne koncentrácie znečisťujúcich látok. Napríklad jedným z najdôležitejších obmedzujúcich opatrení je definovaná maximálna koncentrácia na celkový dusík (TN) hodnotou 10 mg/l.

- Prevádzkové náklady: Hlavným príspevkom k nákladom na prevádzku ČOV je spotreba elektrickej energie potrebnej na pohon prevzdušňovacích turbín (Vasel, 1988). Preto je optimalizácia a riadenie množstva kyslíka veľmi dôležitá, pretože umožňuje znížiť energetickú náročnosť.

Hlavnou výzvou pri riadení procesov aktivovaného kalu je odstraňovanie porúch. Úlohou je vyvarovať sa prílišného prekysličovania a maximalizovať rýchlosti biologických procesov. Najväčším zdrojom porúch je vstup. Jeho charakteristikou sú významné zmeny počas dňa v množstve ako aj v koncentrácii – z dôvodu typických pre život v domácnostiach. Aj keď veľký objem nádrže v ČOV tlmí tieto poruchy, úloha riadenia je veľmi dôležitá. Ďalšími zdrojmi porúch sú počasie – zrážky, alebo aj ročné obdobia, kedy napríklad v zime je rast biomasy výrazne obmedzený nízkou teplotou.

Riadenie ČOV je centrom záujmu veľkého počtu výskumných štúdií. V oblasti riadenia je vhodné spomenúť napríklad prácu Kim a kol. (2000), kde sa využíva linearizovaný model s časom prekysličovania ako riadiacou veličinou, Qin a kol. (1997) využili interpolované prediktívne riadenie a Lindberg (1998) aplikovali mnohorozmerové LQ riadenie.

Práce, ktoré skúmajú problém z procesného hľadiska, sú študované napríklad Isaacsom a spolupracovníkmi (Isaacs, 1997, 1996; Zhao a kol., 1995, 1994b). Porovnanie rozličných riadiacich stratégií je možné nájsť v Lukasse a kol. (1999); Potter a kol. (1996); Debusscher a kol. (1999).

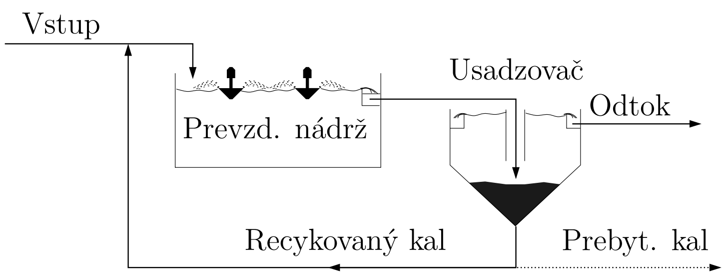
Cieľom tejto časti je určiť optimálne trvanie postupnosti s a bez prítomnosti kyslíka tak, aby boli minimalizované prevádzkové náklady a dodržané obmedzenia zo smerníc EU. Výsledky optimálneho riadenia potom budú použité na návrh jednoduchých spätnoväzbových pravidiel.

Zvyšok tejto časti je organizovaný nasledovne. V časti 11.2 je uvedený dynamický model procesu. Kapitola 11.3 definuje optimalizačný problém, riadiace veličiny a obmedzenia. Hlavné výsledky sú v kapitole 11.4, kde je nájdený periodický stacionárny stav. Kapitola 11.5 uzatvára túto časť.

11.2 Model ČOV

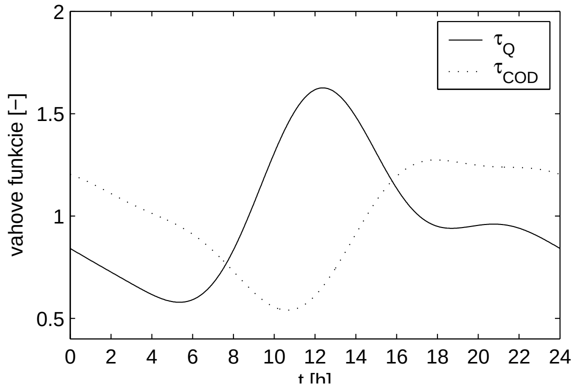
11.2.1 Process

Uvažujme čističku odpadovej vody, ktorej kapacita je navrhnutá na spracovanie odpadu vzťahujúceho sa na 15 000 obyvateľov. Proces pozostáva z prevzdušňovacej nádrže ($V^{\text{br}} = 2,050\,\text{m}^3$) vybavenej mechanickými prevzdušňovačmi (turbínami), ktoré produkujú kyslík ($\mathcal{P} = 30\,\text{kW}$, $k_La = 4.5\,\text{h}^{-1}$) a zmiešavajú ho s odpadovou vodou a s recirkulovanou biomasou (obr. 11.2.1). Ďalej nasleduje usadzovač cylindrického tvaru, v ktorom sa sušina rozdelí na dve časti. Jedna časť je recirkulovaná naspäť do prevzdušňovacieho zásobníka ($Q^{\text{rs}} = 7,600\,\text{m}^3\,\text{deň}^{-1}$) a druhá extrahovaná zo systému ($Q^{\text{w}} = 75\,\text{m}^3\,\text{deň}^{-1}$).



Obr. 11.2.1: Typická ČOV

Priemerný vstupný prítok Q^{in} je približne $3,050\,\text{m}^3\,\text{deň}^{-1}$. Priemerné množstvo potrebného chemického kyslíka COD^{in} a celkové množstvo dusíka TN^{in} sú $343\,\text{mg}\,\text{l}^{-1}$ a $33\,\text{mg}\,\text{l}^{-1}$ (po primárnom spracovaní). Denné variácie v nedaždivých podmienkach sú založené na meraných údajoch zo skutočnej prevádzky. Tieto odchýlky sú definované uvažovaním váhových funkcií pre vstupný prietok $\tau_Q(t)$ a chemickú potrebu kyslíka $\tau_{\text{COD}}(t)$, tak ako môžeme vidieť na obrázku 11.2.2. Následne môžeme zadefinovať trajektórie



Obr. 11.2.2: Denné variácie vstupného prietoku a koncentrácie organických zložiek

Priemerné zloženie vstupnej odpadovej vody je v tabuľke 11.2.1. Zlomky f sa vzťahujú k stavovým premenným z tabuľky 11.2.2 a sú definované ako pomer medzi zodpovedajúcou koncentráciou a $\mathrm{COD^{in}}$ alebo $\mathrm{TN^{in}}$.

Tabuľka 11.2.1: Priemerné zloženie vstupnej koncentrácie

$\mathrm{COD^{in}}$ zlomky	
f_{SI}	5%
f_{SS}	35%
f_{XI}	10%
f_{XS}	35%
f_{XBH}	15%
f_{XBA}	0%

$\mathrm{TN^{in}}$ zlomky	
f_{SNH}	66%
f_{SNO}	0%
f_{SND}	2%
f_{XND}	32%

11.2.2 Model

Základ modelu použitého v tejto práci je známy ako ASM 1 (Henze a kol., 1987). Tento model charakterizuje veľmi populárny matematický opis biochemických procesov v reaktoroch, v ktorých dochádza k odstráneniu dusíka a organických zlúčenín (chemical oxygen demand, COD). Bol prevzaný s dvomi úpravami: stavová veličina opisujúca celkovú zásaditosť nie je uvažovaná; inertný pevný materiál zo vstupu a biomasy sú skombinované do jedinej premennej (X_{I}), pretože ich účinok je minimálny. Celkový model biologickej degradácie tak pozostáva z 11 stavových premenných (Tabuľka 11.2.2) a 20 parametrov. Kinetické a stechiometrické parametre boli prevzané z Alex a kol. (1999). Kompletné rovnice, hodnoty parametrov a vstupné podmienky sa nachádzajú na webstránke programu COST, akcie 624 (`http://www.ensic.u-nancy.fr/COSTWWTP`).

Pri danom modeli boli uvažované nasledujúce predpoklady

- reaktor je dokonale miešaný
- ideálna separácia kvapalného a tuhého skupenstva
- v usadzovači neprebiehajú žiadne vedľajšie chemické reakcie

Tabuľka 11.2.2: Stavové premenné modelu

1.	Inertne rozpustná organická látka, S_{I} $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
2.	Priamo biologicky degradovateľný substrát, S_{S} $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
3.	Inertné častice organickej látky a produktov, X_{I} $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
4.	Pomaly biologicky degradovateľný substrát, X_{S} $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
5.	Aktívna heterotrofná biomasa, $X_{\mathrm{B,H}}$ $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
6.	Aktívna autotrofná biomasa, $X_{\mathrm{B,A}}$ $\left[\mathrm{gCOD\,m^{-3}}\right]$
7.	Dusitanové a dusičnanové zlúčeniny, S_{NO} $\left[\mathrm{gN\,m^{-3}}\right]$
8.	Amónny dusík, S_{NH} $\left[\mathrm{gN\,m^{-3}}\right]$
9.	Rozpustný biologicky degradovateľný dusík, S_{ND} $\left[\mathrm{gN\,m^{-3}}\right]$
10.	Pevný biologicky degradovateľný dusík, X_{ND} $\left[\mathrm{gN\,m^{-3}}\right]$
11.	Rozpustený kyslík, S_{O} $\left[\mathrm{gO_2\,m^{-3}}\right]$

- bezzádržový usadzovač

Model systému zahŕňa 11 stavových veličín $(S_{\mathrm{I}}\ S_{\mathrm{S}}\ X_{\mathrm{I}}\ X_{\mathrm{S}}\ X_{\mathrm{B,H}}\ X_{\mathrm{B,A}}\ S_{\mathrm{NO}}\ S_{\mathrm{NH}}\ S_{\mathrm{ND}}\ X_{\mathrm{ND}}\ S_{\mathrm{O}})^T$ s príslušnými počiatočnými podmienkami zadefinovanými v tabuľke 11.2.3.

Tabuľka 11.2.3: Počiatočná koncentrácia zložiek v prevzdušňovači

	S_{I}	S_{S}	X_{I}	X_{S}	$X_{\mathrm{B,H}}$	$X_{\mathrm{B,A}}$	S_{NO}	S_{NH}	S_{ND}	X_{ND}	S_{O}
Konc. (mg/l)	17.98	2.27	2120.15	79.55	2238.65	115.18	0.02	9.70	0.14	6.29	0.00

Diferenciálne rovnice modelu sú potom nasledovné

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{11.2.1}$$

kde $\boldsymbol{f}$ sú pravé strany diferenciálnych rovníc daných v tvare

- pre rozpustné zložky ($i = 1, 2, 7, 8, 9$):

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{Q^{\mathrm{in}}}{V^{\mathrm{br}}}\left(x_i^{\mathrm{in}} - x_i\right) + r_i(\boldsymbol{x}) \tag{11.2.2}$$

- pre pevné zložky ($i = 3, 4, 5, 6, 10$):

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{V^{\mathrm{br}}}\left[Q^{\mathrm{in}}\left(x_i^{\mathrm{in}} - x_i\right) + Q^{\mathrm{rs}}\frac{Q^{\mathrm{in}} - Q^{\mathrm{w}}}{Q^{\mathrm{rs}} + Q^{\mathrm{w}}}x_i\right] + r_i(\boldsymbol{x}) \tag{11.2.3}$$

- pre koncentráciu rozpusteného kyslíka ($i = 11$):

$$f_{11}(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \frac{Q^{\mathrm{in}}}{V^{\mathrm{br}}}\left(x_{11}^{\mathrm{in}} - x_{11}\right) + r_{11}(\boldsymbol{x}) + u_b k_L a\left(S_{\mathrm{O}}^{\max} - S_{\mathrm{O}}\right) \tag{11.2.4}$$

kde $r_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \ldots, 11$ reprezentujú reakčné rýchlosti závisiace od kinetických koeficientov degradácie jednotlivých komponentov, k_La je koeficient prestupu kyslíka a $S_{\mathrm{O}}^{\max}$ je maximálna (saturačná) koncentrácia rozpusteného kyslíka ($S_{\mathrm{O}}^{\max} = 10\,\mathrm{mg/l}$).

Vstupom u_b je binárna postupnosť majúca hodnoty 1 a 0, ktoré určujú stav turbín (zapnuté/vypnuté), ktoré prekysličujú prevádzku. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že v čase $t = 0$ sú turbíny zapnuté

Riadiace premenné

V procese vystupuje viacero možných signálov, ktoré by mohli byť použité pre účely riadenia.: prietok recyklu, prietok odoberaného aktívneho kalu, príkon turbín v aeróbnom móde a podobne. V odôvodnených prípadoch sa tiež používa prietok vstupného média – najmä počas búrok v prípade, že potrubný systém môže slúžiť na dočasné úložisko odpadovej vody. Skutočnými riadiacimi veličinami, ktoré výrazne ovplyvňujú režim ČOV ale najčastejšie bývajú časy, kedy sa turbíny zapínajú a vypínajú.

Táto riadiaca veličina ale priamo nevystupuje v rovniciach dynamiky. Je ale možné ich normalizovať vzhľadom na čas a tak získať iný opis, kde riadiace veličiny v diferenciálnych rovniciach vystupujú. Predpokladajme, že počas jedného dňa bude N_c cyklov pozostávajúcich z intervalu zapnutých turbín (okysličovania) a vypnutých turbín. Označme dĺžky týchto časov $\Delta t_1, \ldots, \Delta t_{2N_c}$. Celkový čas simulácie/optimalizácie T je potom daný ako

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_{2N_c} \tag{11.2.5}$$

Normalizujme pôvodný čas t, ktorý začína v nule a sa rovná na koncoch intervalov hodnotám Δt_1, $\Delta t_1 + \Delta t_2$, …, T. Nový spojitý a po častiach lineárny čas τ je na začiatku rovný nule a má na koncoch intervalov hodnoty $1, 2, \ldots, 2N_c$. Jednoduchými algebraickými operáciami sa dá ukázať, že takto definovaná normalizácie je v tvare

$$\tau = a_i + b_i t, \quad i = 1, 2, \ldots, 2N_c \tag{11.2.6}$$

kde konštanty a_i, b_i vypočítame z rovníc

$$a_i = i - 1 + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \Delta t_k}{\Delta t_i}, \quad b_i = \frac{1}{\Delta t_i} \tag{11.2.7}$$

Výsledný modifikovaný systém diferenciálnych rovníc je v tvare

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\tau} = u(\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u_b), \quad 0 \le \tau \le 2N_c \tag{11.2.8}$$

a $u(\tau)$

$$u(\tau) = u_i = \Delta t_i, \quad i - 1 \le \tau < i, \quad i = 1, 2, \ldots, 2N_c \tag{11.2.9}$$

je po častiach konštantná postupnosť dĺžky $2N_c$ obsahujúca prepínacie časy Δt_1, Δt_2, …, Δt_{2N_c}.

11.3 Definícia optimalizačného problému

Hlavným cieľom čističky odpadových vôd je udržať prijateľné koncentrácie organických, dusíkatých, fosforečných a iných znečistení. Podľa predpisov z Európskej Únie je maximálna koncentrácia povolených látok, t.j. chemickej spotreby kyslíka (COD), biochemickej spotreby kyslíka

(BOD), sušín (SS) a tiež celkového množstva dusíka ($\mathrm{TN} = S_{\mathrm{NO}} + S_{\mathrm{NH}} + S_{\mathrm{ND}}$) na výstupe z čističky je nasledovná

$$\mathrm{COD}^{\max} = 125\,\mathrm{mg/l} \tag{11.3.1}$$
$$\mathrm{BOD}^{\max} = 25\,\mathrm{mg/l} \tag{11.3.2}$$
$$\mathrm{SS}^{\max} = 35\,\mathrm{mg/l} \tag{11.3.3}$$
$$\mathrm{TN}^{\max} = 10\,\mathrm{mg/l} \tag{11.3.4}$$

Ako bolo ukázané napríklad v práci Chachuat a kol. (2001), najviac kritické obmedzenie je požiadavka na splnenie celkového množstva dusíka pod určitou hranicou počas celkového času operácie. Ostatné obmedzenia sú u tohto typu ČOV splnené počas normálnych pracovných podmienok.

Koncentrácia dusíka môže byť ovplyvnená celkovým množstvom kyslíka, ktorý je rozptýlený turbínami počas fázy prevzdušňovania. Vo väčšine prípadov platí, že väčší čas prevzdušňovania zabezpečí na výstupe z čističky menšie množstvo dusíkatých zlúčenín. Avšak snaha o zníženie ekonomického zaťaženia čističky hovorí o znižovaní času prevzdušňovania, pretože energia vynaložená na prevzdušňovanie tvorí najväčšiu časť výdajov pri riadení čističky.

V praxi sa väčšinou reguluje koncentrácia dusíkatých zlúčenín pomocou nepriamych žiadaných veličín, akými sú napríklad koncentrácia amoniaku, rozpustený kyslík, redoxný potenciál, ako môžeme vidieť napríklad v prácach Caulet a kol. (1998); Debusscher a kol. (1999); Lukasse a kol. (1999); Spanjers a kol. (1996). Výber žiadanej veličiny je väčšinou podmienený prítomnosťou určitého typu senzora alebo riaditeľnosťou procesu. Hodnota nastavenia žiadanej veličiny je tiež často podmienená poznaním procesu alebo na základe určitých skúseností operátora.

V našom prípade sa namiesto bežného výberu vhodnej regulovanej veličiny a jej žiadanej veličiny zameriame na priamu optimalizáciu ekonomického kritéria s cieľom minimalizovať prevádzkové náklady.

11.3.1 Účelová funkcia

Existuje niekoľko prístupov, ako je možné zadefinovať účelovú funkciu. Jeden z najjednoduchších by bolo minimalizovať celkovú koncentráciu dusíka priamo počas dňa a to nasledovne

$$\min_u J = \int_0^{2N_c} \mathrm{TN}(t)\,\mathrm{d}t \tag{11.3.5}$$

S takto definovanou účelovou funkciou sú obmedzenia na dusík automaticky splnené, kedykoľvek to konštrukcia zariadenia a operačné podmienky dovolia.

V našom prípade sme vybrali účelovú funkciu, ktorá minimalizuje náklady na prevzdušňovanie, pretože ako bolo ukázané v práci (Vasel, 1988), až 3/4 celkových nákladov je vynaložených na energiu, ktorá sa spotrebuje pri zapnutých turbínach (čas prevzdušňovania). Preto snaha minimalizovať čas prevzdušňovania zníži celkové náklady na prevádzku. Bezrozmerná účelová funkcia má potom tvar

$$\min_u J = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} u_{2i-1}}{T} \tag{11.3.6}$$

11.3.2 Obmedzenia

Okrem obmedzení na kvality daných rovnicami (11.3.1)–(11.3.4) existujú aj ďalšie podmienky, ktoré musia byť splnené, aby bola zabezpečená realizovateľnosť vypočítaných optimálnych trajektórií a zabránilo sa predčasnému opotrebovaniu turbín.

Minimálne časy, kedy musia byť turbíny zapnuté/vypnuté, boli zvolené 15 minút, aby sa zabránilo príliš častému prepínaniu turbín a tiež aj preto, aby sa zabezpečilo, aby aktívny kal po anoxických periódach bude dostatočne prekysličený a miešaný.

Aj maximálne časy v hodnote 120 minút sú uvažované, aby sa zabránilo jednak sedimentácii v aktivačnej nádrži ako aj príliš dlhým anaeróbnym podmienkam. V prípade dlhších časov bez miešania by tiež mohol byť neplatný predpoklad o dobre miešanom reaktore.

Pre nájdenie periodického stacionárneho režimu sa ukazuje najjednoduchším predpokladať, že počiatočné podmienky sú neznáme. V tom prípade nám pribudne koncová podmienka, aby stavy na konci dňa boli rovnaké, ako na začiatku.

Celkový čas optimalizácie bol zvolený 1 deň, pretože taká je periodickosť porúch. Z toho vyplýva ďalšie obmedzenie, že súčet všetkých časov musí byť rovný T.

11.3.3 Optimalizačný problém

Celkový optimalizačný problém môže byť zadefinovaný nasledovne

$$\min_{u,\boldsymbol{p}} J = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} u_{2i-1}}{T} \tag{11.3.7}$$

vzhľadom na

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\tau} &= u\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}, u_b\right), \quad 0 \le \tau < 2N_c, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p} && (11.3.8)\\
0 &= ||\boldsymbol{x}(2N_c) - \boldsymbol{p}|| && (11.3.9)\\
T &= \sum_{i=1}^{2N_c} u_i && (11.3.10)\\
10 &\ge \mathrm{TN}(\tau) = S_{NO}(\tau) + S_{NH}(\tau) + S_{ND}(\tau) && (11.3.11)\\
u_i &\ge 15\,\mathrm{min}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2N_c && (11.3.12)\\
u_i &\le 120\,\mathrm{min}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2N_c && (11.3.13)
\end{aligned}$$

Existuje viacero dynamických optimalizačných metód, ktoré tento problém môžu vyriešiť. Keďže optimalizované veličiny sú nezávislé na čase, najvhodnejšie sa javí transformácia pôvodného problému dynamickej optimalizácie na statickú. Problém ale predstavuje celočíselná premenná – počet cyklov N_c. V tomto prípade sme preto uvažovali, že je konštantný a úlohu môžeme prepísať na problém nelineárneho programovania.

Dva populárne transformačné prístupy sú ortogonálna kolokácia (OC) (Logsdon a Biegler, 1989; Cuthrell a Biegler, 1989) a parametrizácia vektora riadenia (CVP) (Teo a kol., 1991; Fikar a kol., 2000). Prvá vytvára veľký NLP problém, pretože dynamické stavové premenné sú aproximované ortogonálnymi polynómami. Na druhej strane, táto metóda je vhodná v prítomnosti obmedzení v tvare nerovností so stavovými premennými (ako (11.3.11)). Druhá skupina je vhodná, keď v probléme vystupuje veľké množstvo stavových premenných. Keďže ale je potrebné diferenciálne rovnice opakovane integrovať, čas výpočtu tým narastá.

Vybrali sme CVP prístup. Na optimalizáciu bol použitý balík DYNO (Fikar a Latifi, 2001), v ktorom je použitý NLP program NLPQL (Schittkowski, 1985), program na riešenie diferenciálnych rovníc VODE (Brown a kol., 1989) alebo DASSL (Brenan a kol., 1989) a gradienty sú počítané spätnou integráciou adjungovaných rovníc.

11.3.4 Stavové obmedzenia

Na riešenie problému stavových obmedzení je možné v CVP použiť viacero postupov (Teo a kol., 1991; Vassiliadis a kol., 1994; Feehery a Barton, 1998). V tomto prípade sme transformovali (11.3.11) do koncového obmedzenia pomocou novej stavovej premennej

$$x_{12}(\tau) = \int_0^\tau \max(\mathrm{TN}(t) - \mathrm{TN}^{\max}, 0)^2 \mathrm{d}t \tag{11.3.14}$$

$$x_{12}(2N_c) = 0 \tag{11.3.15}$$

Takže, podmienka (11.3.15) bude splnená iba vtedy, ak $\mathrm{TN}(\tau) < \mathrm{TN}^{\max}$, v opačnom prípade bude $x_{12}(2N_c) > 0$. Poznamenávame, že umocnenie operátora max operátor zabezpečí podmienky spojitosti prvého rádu (hladkosti) a zrýchli integráciu. Druhá rovnica je často nahradená nerovnicou

$$x_{12}(2N_c) \leq \varepsilon \tag{11.3.16}$$

kde ε je malé kladné číslo.

11.4 Výsledky a diskusia

Na základe predbežných výpočtov bol určený počet cyklov $N_c = 29$ a ďalej už nebol optimalizovaný, pretože by to viedlo k zmiešaným celočíselným problémom (Barton a kol., 2000b; Branicky a kol., 1998).

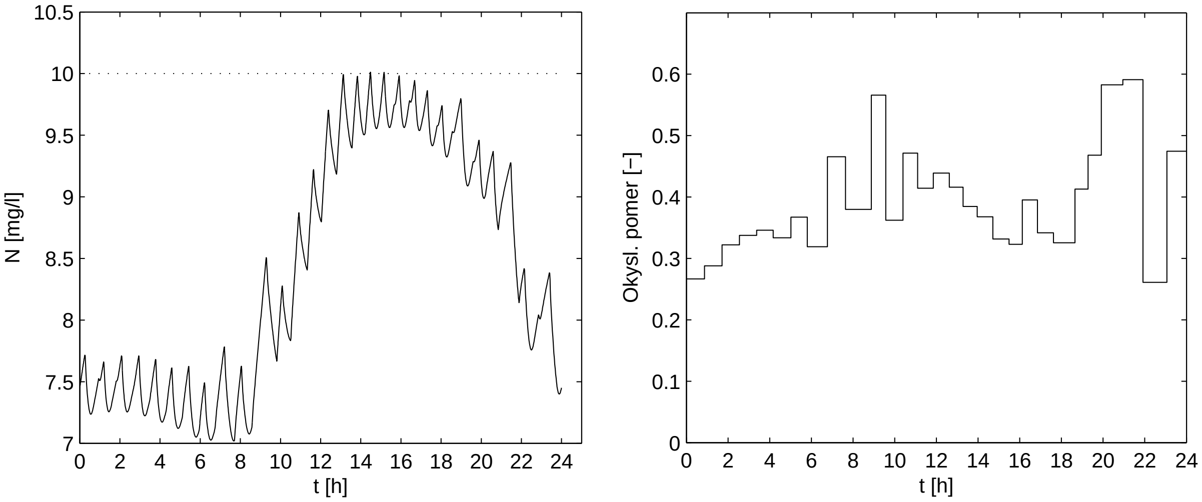
Optimalizácia skonvergovala v optimálnemu profilu okysličovacieho pomeru 39.51% zobrazeného na Obr. 11.4.1. Okysličovací pomer je definovaný ako pomer medzi časom okysličovania a celkovým časom jedného cyklu , t.j. $u_{2i-1}/(u_{2i-1} + u_{2i})$. Ako vidíme, obmedzenie na maximálny dusík bolo dodržané. Rovnaká hodnota bola získaná v Chachuat (2001) použitím známych počiatočných podmienok a celkovou optimalizáciou počas $T = 60$ dní.

Poznamenávame, že CVP prístup konverguje iba k lokálnemu minimu a nie k globálnemu. Z toho dôvodu sme vypočítali viacero optimalizácií s rozličnými počiatočnými podmienkami a presnosťami integrácie a optimalizácie. Hoci bolo získaných viacero optím, minimálny priemerný okysličovací pomer bol približne rovnaký.

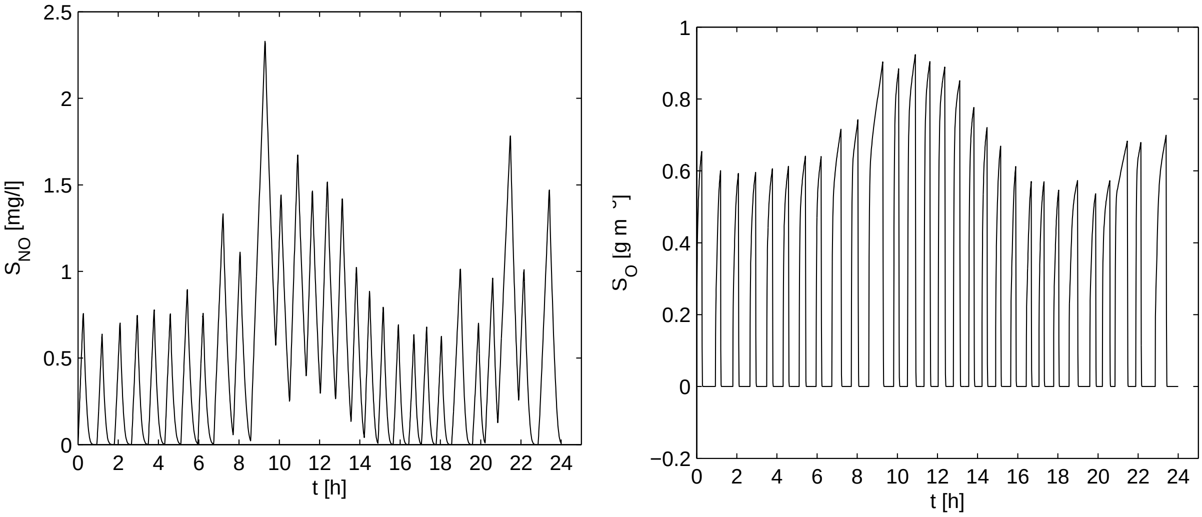
Zo všetkým 11 stavov sú obzvlášť zaujímavé koncentrácia S_{NO} a rozpusteného kyslíka S_{O} a sú znázornené na obr. 11.4.2. V protiklade k ostatným stavom vykazujú iba minimálnu citlivosť vzhľadom na poruchy (vstupný prietok a vstupné koncentrácie). Ak to vyjadríme explicitnejšie, prepínanie turbín v optimálnom stacionárnom režime sa často vyskytuje alebo ak je koncentrácia S_{NO} blízka nule alebo ak je koncentrácia kyslíka S_{O} dostatočne vysoká. Naviac, tieto dva stavy môžu byť merané. Preto sa javí byť vhodné navrhnúť nasledovné spätnoväzbové pravidlá:

1. Spustiť turbíny ak S_{NO} dostatočne poklesne k nule,
2. Zastaviť turbíny keď S_{O} dosiahne určitú hodnotu.

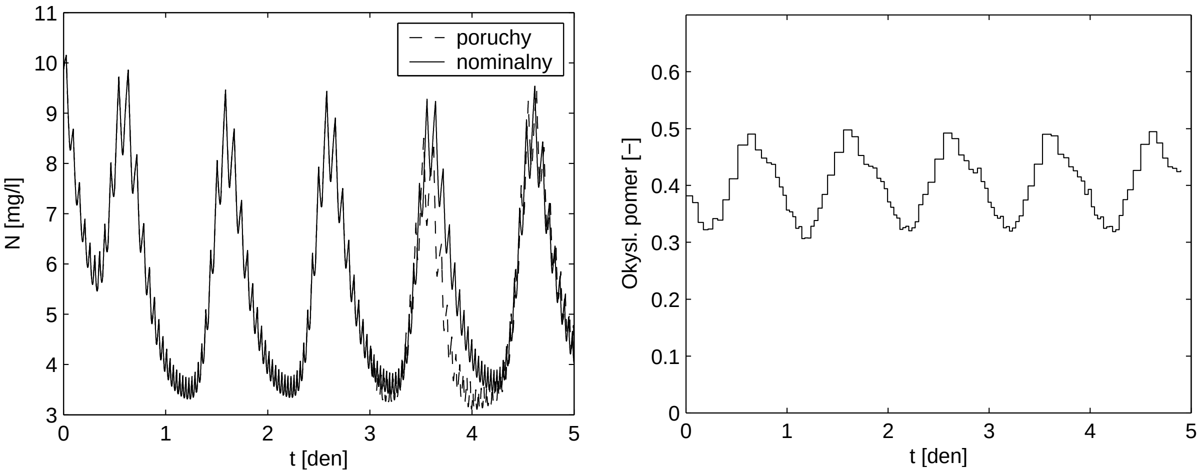
Poznamenávame, že prvé pravidlo bolo navrhnuté v Zhao a kol. (1994a) pre rozdielnu konfiguráciu ČOV (BIO-DENITRO) a bolo založené na analýze zjednodušeného ASM1 modelu. Toto



Obr. 11.4.1: Optimálne stavové trajektórie pre $J = 39.51\%$. Vľavo: obmedzenie na celkový dusík, vpravo: priebeh okysličovania



Obr. 11.4.2: Optimálne stavové trajektórie pre $J = 39.51\%$. Vľavo: koncentrácia S_{NO}, vpravo: rozpustený kyslík, S_{O}



Obr. 11.4.3: Trajektórie založené na spätnoväzbových pravidlách. Vľavo: Obmedzenie na dusík v nominálnom a poruchovom prípade, vpravo: nominálna trajektória okysličovania

pravidlo vyplýva z faktu, že interval denitrifikácie by bal byť dostatočne veľký, aby sa spotrebovalo čo najviac S_{NO}. Na druhej strane, ak by bol tento interval dlhší, koncentrácia S_{NO} už je blízka nule, a teda v reaktore už neprebiehajú vhodné biochemické reakcie.

Aj druhé pravidlo funguje v praxi veľmi dobre. Avšak, nie je jasné, aká by mala byť žiadaná hodnota pre S_{O}. Ďalším problémom je, že poruchy spôsobujú, že táto žiadaná hodnota je časovo premenná. Jej tvar sa ale javí byť v korelácii so vstupným prietokom.

Použitie týchto dvoch spätnoväzbových pravidiel je ukázané na obr. 11.4.3, ktoré zobrazujú koncentráciu celkového dusíka v dvoch prípadoch. Prvý (označený ako nominálny) aplikuje pravidlá s $S_{\mathrm{NO}}(\mathrm{min}) = 0.01\,\mathrm{mg/l}$ a $S_{\mathrm{O}}(\mathrm{max}) = 0.7\,\mathrm{mg/l}$. V prípade s poruchami uvažujeme, že tretí deň je daždivý s 300% prírastkom vstupného prítoku a s 50% poklesom vstupnej koncentrácie počas celého dňa.

Jednoduché spätnoväzbové pravidlá dokážu uspokojivo odstrániť denný priebeh porúch, pričom v prvých piatich dňoch ostáva celkový dusík v norme.

Pokračovanie simulácie pre ďalších 200 dní (neukázané), pre získanie stacionárneho správania ukazuje, že priemerný okysličovací pomer je porovnateľný s optimálnym (39.60%) a maximálna koncentrácia celkového dusíka je iba o málo vyššia (10.74 mg/l).

Aj simulácia počas daždivého dňa ukazuje na uspokojivé regulačné výsledky. Avšak, daždivé podmienky majú najväčší vplyv na dosadzovaciu nádrž, ktorej správanie nebolo modelované, a teda detailnejší model by sa mohol správať rozdielne.

11.5 Záver

Táto časť sa zaoberala určením optimálnej okysličovacej stratégie pre malé ČOV pomocou dynamickej optimalizácie. Bol pritom použitý štandardný ASM1 model. Z pohľadu riadenia je to proces s jedným vstupom (postupnosťou zapnutia a vypnutia turbín) a jedným výstupom (celkovým dusíkom v odtoku). Pre výstup nie je známa žiadaná veličina, iba jej horné ohraničenie.

Na základe predpokladov a špecifikácie problému bol definovaný optimalizačný problém riešený softvérom DYNO. Časový interval pre optimalizáciu bol určený ako 1 deň v závislosti od charakteru pôsobiacich porúch – zloženia a prietoku vstupu.

Na to, aby sa zabezpečila stacionárna prevádzka procesu, boli počiatočné stavy uvažované ako neznáme a bolo pridané koncové ohraničenie na zhodnosť počiatočných a koncových stavov.

Na základe optimálnych stavových profilov bolo navrhnuté jednoduché spätnoväzbové riadenie v závislosti od koncentrácie kyslíka a dusíka, ktoré boli vztiahnuté na zapnutie a vypnutie turbín. Použitím týchto jednoduchých pravidiel bolo pozorované iba malé zhoršenie oproti skutočne optimálnemu režimu získanému dynamickou optimalizáciou.

Výsledky, ktoré boli získané, môžu slúžiť na viaceré účely. Riešenie dynamickej optimalizácie môže byť porovnané so skutočným používaným na prevádzke a ukázať, či existuje možnosť výrazného zníženia prevádzkových nákladov. Ďalej, získaný stacionárny profil môže byť použitý ako žiadaná hodnota v prevádzke alebo jednoduché spätnoväzbové vzťahy môžu zlepšiť existujúce riadenie.

Kapitola 12

Optimálna zmena prevádzkového režimu v rektifikačnej kolóne

V tejto časti predstavíme štúdiu dynamickej optimalizácie rektifikačnej kolóny – depropanizéra, ktorý tvorí jednu zo základných spracovateľských jednotiek v rafinériách. Študovaný bude problém optimalizácie času prechodu z jedného operačného stavu do druhého (Fikar a kol., 1999).

Problém bol riešený metódou CVP upravenou pre riešenie systémov veľkých rozmerov a opísaných systémom diferenciálnych a algebraických rovníc.

V prvej časti opíšeme model kolóny prevzaný z práce Creff (1992), pričom ho analyzujeme. Na základe štúdií jeho Jakobiho matice bolo zistené, že takýto model nemôže byť použitý v dynamickej optimalizácii a boli navrhnuté jeho príslušné zmeny. Venujeme sa tiež statickým a dynamickým vlastnostiam kolóny.

V druhej časti sú prezentované výsledky dynamickej optimalizácie, pričom sa zaoberáme kritériami vo forme LQ a minima času.

12.1 Modelovanie kolóny

12.1.1 Opis modelu

Nelineárny model depropanizéra používaný v tejto práci opisuje s dostatočnou presnosťou skutočnú kolónu v rafinérii Solaize (Lyon) firmy Elf. Predpokladáme, že nástrek je zložený z piatich zložiek – etán, propán, n-bután, izobután a n-pentán. Kolóna pozostáva zo 40tich etáží (číslovaných zhora dole), kondenzátora a varáku, pričom kondenzátor má číslo 1. Nástrek vstupuje do kolóny na etáži 21. Celkový model obsahuje 255 diferenciálnych a 589 algebraických rovníc.

Pre integráciu systému DAE rovníc bola použitá metóda DASSL Brenan a kol. (1989), modifikovaná firmou Elf pre možnosť práce s riedkymi (sparse) systémami využitím knižnice Harwell a funkcie MA28 pre riešenie riedkeho systému lineárnych rovníc.

Pôvodný model počítal riedku Jakobiho maticu numericky. V prvej etape boli získané indexy nenulových prvkov a v druhej etape vypočítavané hodnoty týchto prvkov. Dôvodom bolo zníženie výpočtovej náročnosti výpočtu Jakobiho matice, ktorá by v plnom stave obsahovala skoro milión prvkov.

Hlavné predpoklady, za ktorých bol model vyvinutý, boli nasledovné:

- rovnováha medzi kvapalinou a parou na etáži,
- homogénnosť kvapaliny a pary,
- adiabatické podmienky na etáži.

Model bol vyvinutý v práci Creff (1992). Diferenciálne rovnice opisujú materiálové a entalpické bilancie. Algebraické rovnice zahŕňajú výpočet akumulácií, termodynamické a hydrodynamické modely.

Pre všeobecnú etáž je model daný nasledovne

materiálové bilancie

$$\frac{dN_j^i}{dt} = L_{j-1}^i + V_{j+1}^i - L_j^i - V_j^i \ , \quad (\text{i=1},\dots,c) \tag{12.1.1}$$

entalpické bilancie

$$\begin{aligned}\frac{dU_j}{dt} =& h^l(\vec{L}_{j-1}, P_{j-1}, T_{j-1})L_{j-1} + h^v(\vec{V}_{j+1}, P_{j+1}, T_{j+1})V_{j+1}\\ &- h^l(\vec{L}_j, P_j, T_j)L_j - h^v(\vec{V}_j, P_j, T_j)V_j\end{aligned} \tag{12.1.2}$$

akumulácia

$$N_j^i = \frac{\nu_j^{liq}}{v^l(\vec{L}_j, P_j, T_j)}\frac{L_j^i}{L_j} + \frac{\nu_j^{tot} - \nu_j^{liq}}{v^v(\vec{V}_j, P_j, T_j)}\frac{V_j^i}{V_j} \ , \quad (\text{i=1},\dots,c) \tag{12.1.3}$$

$$U_j = \frac{\nu_j^{liq}}{v^l(\vec{L}_j, P_j, T_j)}u^l(\vec{L}_j, P_j, T_j) + \frac{\nu_j^{tot} - \nu_j^{liq}}{v^v(\vec{V}_j, P_j, T_j)}u^v(\vec{V}_j, P_j, T_j) \tag{12.1.4}$$

termodynamická rovnováha

$$0 = \mu^{l,i}(\vec{L}_j, P_j, T_j) - \mu^{v,i}(\vec{V}_j, P_j, T_j) \ , \quad (\text{i=1},\dots,c) \tag{12.1.5}$$

hydrodynamický model

$$P_{j+1} - P_j = \Delta_j^{liq}(z_j, \vec{L}_j, P_j, T_j, \vec{L}_{j+1}, \vec{V}_{j+1}, P_{j+1}, T_{j+1}) \tag{12.1.6}$$

$$P_{j+1} - P_j = \Delta_j^{vap}(\vec{L}_j, \vec{V}_j, P_j, T_j, \vec{V}_{j+1}, P_{j+1}, T_{j+1}) \tag{12.1.7}$$

$$\nu_j^{liq} = \Upsilon_j^{liq}(z_j, \vec{L}_j, P_j, T_j, \vec{V}_{j+1}, P_{j+1}, T_{j+1}) \tag{12.1.8}$$

Termodynamické vlastnosti sú dané rovnicou stavu podľa modelu SRK (Soave-Redlich-Kwong, Soave (1971)). Hydrodynamický model bol použitý podľa Gallunda a Hollanda (Gallun a Holland, 1982).

Pre kondenzátor naviac platia nasledovné rovnice:

konštantný hmotnostný tok pary

$$V_1 = \epsilon(\vec{V}_1) \tag{12.1.9}$$

konštantný pokles tlaku

$$P_2 - P_1 = \Delta^{cond} \tag{12.1.10}$$

PI regulácia tlaku

$$Q^{cond} = K^{cond}\left(P_2 - P_2^c + \frac{I^{cond}}{\tau^{cond}}\right) \tag{12.1.11}$$

$$\frac{dI^{cond}}{dt} = P_2 - P_2^c \tag{12.1.12}$$

PI regulácia výšky hladiny

$$D = K^D \left(\nu_1^{liq} - \nu_1^{liq,c} + \frac{I^D}{\tau^D} \right) \tag{12.1.13}$$

$$\frac{dI^D}{dt} = \nu_1^{liq} - \nu_1^{liq,c} \tag{12.1.14}$$

suma mólových zlomkov pary

$$1 = \sum_{i=1}^{c} V_1^i \tag{12.1.15}$$

refluxný prietok je riadiaca veličina

$$R = L_1 \tag{12.1.16}$$

Nasledovné rovnice boli pridané vo varáku:

entalpická bilancia – externý ohrev

$$\frac{dU_n}{dt} = h^l(\vec{L}_{n-1}, P_{n-1}, T_{n-1})L_{n-1} - h^l(\vec{L}_n, P_n, T_n)L_n - h^v(\vec{V}_n, P_n, T_n)V_n + Q^{rebo} \tag{12.1.17}$$

PI regulácia výšky hladiny

$$L_n = K^R \left(\nu_n^{liq} - \nu_n^{liq,c} + \frac{I^R}{\tau^R} \right) \tag{12.1.18}$$

$$\frac{dI^R}{dt} = \nu_n^{liq} - \nu_n^{liq,c} \tag{12.1.19}$$

Na druhej strane vo varáku neplatia rovnice hydrodynamického modelu. Premenná Q^{rebo} reprezentuje druhú riadiacu veličinu – teplo dodané do varáka.

12.1.2 Nominálny pracovný bod

Model procesu má riadené výšky hladinu vo varáku a v kondenzátore, ako aj tlak na hlave kolóny. Okrem toho sú ešte dve voľné riadiace veličiny: refluxný tok R a ohrev varáka Q^{rebo}. Týmto je určený ľubovoľný ustálený stav.

V nominálnom pracovnom bode boli zvolené nasledovné hodnoty vstupov

$$R = 18.2 \text{ t/h} \qquad Q^{rebo} = 0.0946 \text{ J/min } 10^{-9} = 1358 \text{ th} \tag{12.1.20}$$

pričom zloženie nástreku bolo nasledovné

Premenná	Hodnota	Jednotka
Teplota	106.28	^oC
Tlak	27.3	bar
(1) etán	1.68	hmotnostné %
(2) propán	30.02	hmotnostné %
(3) isobután	17.42	hmotnostné %
(4) n-bután	50.61	hmotnostné %
(5) pentán	0.27	hmotnostné %

Výstupné premenné sú špecifikované ako nečistoty v molárnom prietoku destilátu a zvyšku

$$X_t = \frac{L_1^3 + L_1^4}{L_1} 100\% \quad [\text{mólové } \%]$$
$$X_b = \frac{L_{42}^2}{L_{42}} 100\% \quad [\text{mólové } \%]$$

s počiatočnými hodnotami $X_t(0) = 1.86077, X_b(0) = 0.29243$.

12.1.3 Jakobiho matica

Z dôvodov použitia v dynamickej optimalizácii ako aj pre určenie diferenciálneho indexu systému bolo potrebné vyjadriť Jakobiho maticu analyticky.

Ako bolo spomenuté vyššie, originálne bola Jakobiho matica vypočítavaná na základe konečných diferencií. Pre účely simulácie bol tento spôsob vyhovujúci. Avšak, Jakobiho matica je priamo obsiahnutá v DAE rovniciach adjungovaných premenných a jej numerický výpočet by bol nielen príliš výpočtovo náročný, ale aj nepresný. Preto boli analyticky odvodené všetky parciálne derivácie – ich výsledný počet bol približne 10500.

Výsledok bol porovnaný s numerickými hodnotami. Boli zistené nasledovné pozorovania:

- Poloha nenulových prvkov bola na základe numerického postupu zistená správne.
- Najmenej správne boli hodnoty Jakobiho matice vo varáku a v kondenzátore, smerom do stredu sa postupne zlepšovali.
- Najväčší rozdiely boli pozorované u zložiek, ktoré boli klasifikované ako nečistoty – vo veľmi malých koncentráciách. V týchto prípadoch boli numericky vypočítané hodnoty úplne nesprávne.

Štruktúra Jakobiho matice (poloha nenulových prvkov) je znázornená na obr. 12.1.1. Vidíme, že je to blokovo diagonálna matica.

12.1.4 Diferenciálny index modelu

Jednou z dôležitých vlastností diferenciálno-algebraických systémov (DAS) je tzv. diferenciálny index Brenan a kol. (1989). Zjednodušene povedané sa jedná o počet derivovaní, ktoré je potrebné urobiť, aby bol model redukovaný na čisto diferenciálny systém.

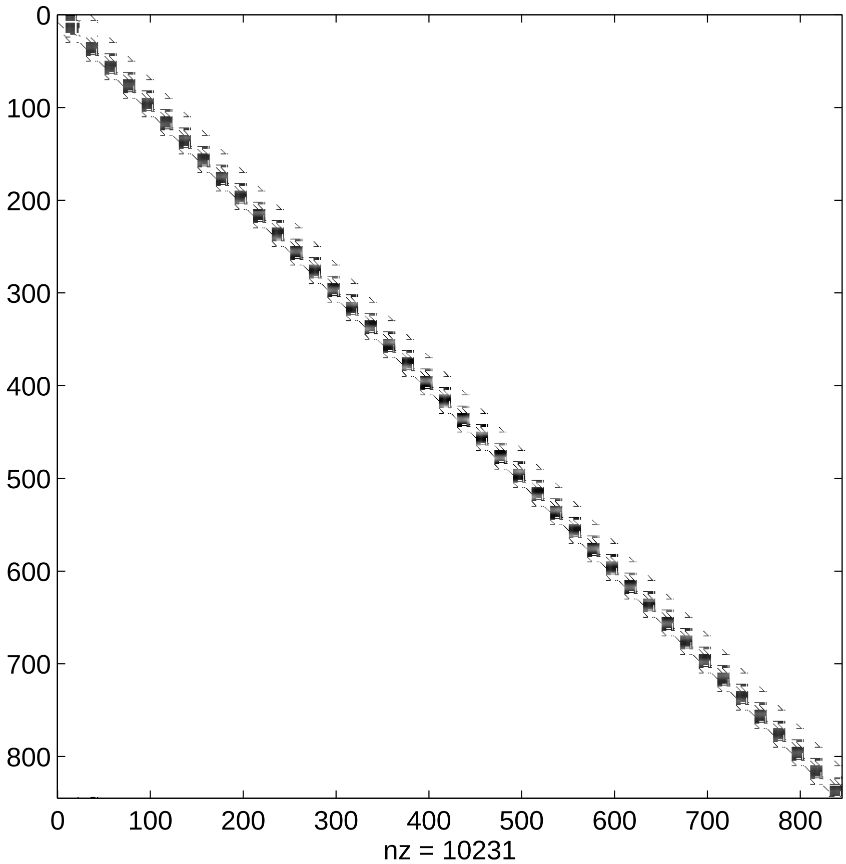
Podľa pôvodnej práce Creffa Creff (1992) má náš model index rovný jednej. Avšak, simulácie naznačovali, že by mohol byť aj vyššieho rádu. Napríklad nebolo možné simulovať model s riadením po častiach spojitým – jednou z podmienok bolo zabezpečiť aby bolo riadenie nielen spojité, ale malo aj spojitú prvú deriváciu. Ako bolo ukázané v Kröner a kol. (1997), toto je indikátorom systémov s indexom minimálne rovným dvom.

Jednou z možných metód určenia rádu systému je vyhodnotiť hodnosť algebraickej časti Jakobiho matice. Ak táto matica nemá plnú hodnosť, index je väčší ako jeden.

Určenie hodnosti Jakobiho matice pomocou metódy konečných rozdielov občas ukázalo plnú hodnosť. Avšak, vo väčšine prípadov nebola hodnosť plná a podmienené číslo bolo okolo 10^{17}.

Tento istý výsledok bol zistený pri Jakobiho matici vypočítanej analyticky – jeden riadok v modeli bolo možné vypočítať ako lineárnu kombináciu iných. Podobný výsledok bol získaný analýzou singulárnych čísel.

V Pantelides (1988) bol vyvinutý algoritmus na základe teórie grafov, ktorý je schopný určiť konkrétne rovnice, ktoré je nutné derivovať, na zníženie indexu systému. Avšak, v našom



Obr. 12.1.1: Štruktúra Jakobiho matice

prípade bola táto metóda neúspešná, čo bolo možno spôsobené faktom, že je štrukturálneho typu – používa iba indexy, nie samotné hodnoty.

Pre nájdenie riešenia problému sme použili analýzu nulového priestoru pomocou funkcie MATLABu `null`. V princípe, pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A}$ s hodnosťou nižšou ako maximálnou, existuje ortonormálna matica $\boldsymbol{Z}$ taká, že $\boldsymbol{AZ}$ má iba nulové prvky. Počet stĺpcov matice $\boldsymbol{Z}$ určuje nulovú hodnosť $\boldsymbol{A}$ a koeficienty $\boldsymbol{Z}$ premenné, ktoré spôsobujú lineárnu závislosť rovníc.

Analýza opäť ukázala, že jedna rovnica je nadbytočná a že zodpovedajúce premenné sú molárne prietoky pary na vrchu kolóny $\vec{V}_2$.

Tento jav bol tiež skúmaný v literatúre, viď Gani a Cameron (1992); Pantelides a kol. (1988); Unger a kol. (1995). Vo všetkých prípadoch spôsobuje problém prietok pár a na jeho odstránenie sa vytvorí algebraický vzťah, ktorý je funkciou prietoku pár. Avšak v citovanej literatúre je kolóna modelovaná rozdielne, s molárnymi zlomkami ako diferenciálnymi vzťahmi, pričom na rozdiel od nami skúmaného modelu existuje iba jedna rovnica tlakovej diferencie na etáž.

V našom prípade bolo najjednoduchším riešením pre zníženie hodnoty indexu zmeniť predpoklad konštantného tlakového rozdielu v kondenzátore na vzťah

$$P_2 - P_1 = k\Delta^{cond} V_2.$$

kde k je nejaká konštanta. Napríklad vhodnou voľbou pre k je

$$k = \frac{1}{V_2(0)}$$

kde $V_2(0)$ je hodnota ustáleného molárneho prietoku pár.

Potom, čo bola táto zmena implementovaná, boli pozorované nasledovné zmeny pri modelovaní procesu

- Podmienené číslo algebraickej časti Jakobiho matice bolo výrazne znížené na hodnotu 10^6. Táto stále dosť vysoká hodnota vyplýva z použitia fyzikálnych a nie normalizovaných premenných v modeli.
- Výrazne zlepšená robustnosť pri simulácii modelu. V novom modeli je možné používať aj nespojité riadenie (po častiach konštantné riadenie).
- Zníženie času simulácie v rozmedzí 10-25%.
- Zanedbateľné rozdiely v správaní sa pôvodného a modifikovaného modelu.

12.1.5 Ustálené stavy

Analýza ustálených stavov bola zameraná na odpovede na nasledovné otázky:

1. Zistenie ustáleného stavu pre dané riadenie $\boldsymbol{u}$,
2. Pre zadané nečistoty (výstupy) nájsť zodpovedajúce ustálené riadenie,
3. Nájdenie približnej oblasti dosiahnuteľnosti pomocou obmedzeného riadenia.

Riešenie prvého problému je dôležité pre štart simulácie. Ustálené riešenie bolo nájdené Newtonovou optimalizačnou metódou, kde boli stavy optimalizovanými veličinami a všetky derivácie položené rovné nule.

Aj druhý problém bol riešený Newtonovou optimalizačnou metódou. Riadiace veličiny boli pridané medzi stavové a pridali sa dve algebraické rovnice pre definíciu zvolených nečistôt.

Problém dosiahnuteľnosti bol vyriešený iba približne opakovaným riešením prvého problému.

Výsledky sú zobrazené na obr. 12.1.2, 12.1.3 pre nečistoty a oblasti riadenia. Vidíme, že nečistoty sa koncentrujú najmä pri osiach, t.j. ak je jedna z nečistôt malá, druhá je veľká. Pre dané zloženie nástreku je oblasť nečistôt väčšia pre destilát ako pre zvyšok, čo naznačuje, že riadenie X_b nebude také náročné, ako pre X_t.

Oblasť riadenia označuje riadenia, pre ktoré je nástrek F väčší ako súčet výstupných prietokov ako 3 t/h. Aj keď sa takáto hodnota zdá byť konzervatívna, jej ďalšie znižovanie občas spôsobovalo v dynamickom režime zrútenie simulácií.

Obmedzenia na riadenia boli zadané v návrhu riadenia na

$$R \in (6, 20) \text{ t/h} \qquad Q^{rebo} \in (6, 22) \text{ th} \tag{12.1.21}$$

Obr. 12.1.3 ukazuje implicitný vzťah medzi oboma riadiacimi veličinami. Preto bolo rozhodnuté použiť nové riadiace veličiny, u ktorých by takýto vzťah nebol. Boli zvolené nasledovné normalizované veličiny

$$u_1 = 0.1R \tag{12.1.22}$$

$$u_2 = (Q^{rebo} - 80R)/100 \tag{12.1.23}$$

kde sa predpokladalo, že Q^{rebo} je v [th]. Pomocou týchto veličín dostaneme nasledovné ohraničenia

$$u_1 \in (0.6, 2) \tag{12.1.24}$$

$$u_2 \in (-2, 3.5) \tag{12.1.25}$$

Nami navrhované riešenia oblasti riadenia nie je veľmi presné a jeho najväčšie nevýhody sú:

- Iba ustálené hodnoty sú uvažované. V dynamickom režime však môžu existovať iné premenné, ktoré sú viac obmedzujúce. Napríklad výšky hladín v kondenzátore a vo varáku bola občas negatívna. V tomto prípade sme nastavili PI regulátory na rýchlejšiu reakciu.

- V prípade zmeny prietoku nástreku by bol opis ohraničení na riadenie nesprávny. Vtedy by bolo vhodnejšie použiť ako riadenie pomery R/F, Q^{rebo}/F.

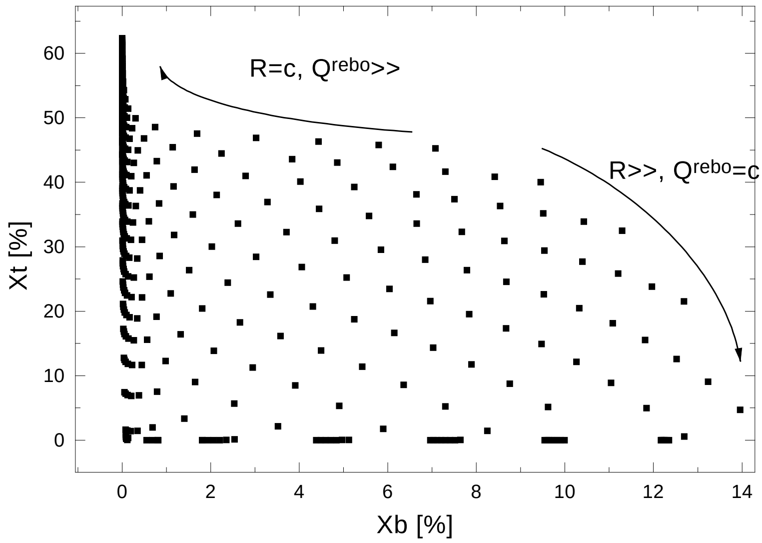
12.1.6 Dynamické charakteristiky

V tejto časti sú znázornené dynamické odozvy kolóny vzhľadom na skokové zmeny na vstupe. Simulovali sme rozličné skokové zmeny v refluxe R a v ohreve varáka Q^{rebo} znázornené na obr. 12.1.4 a 12.1.5.

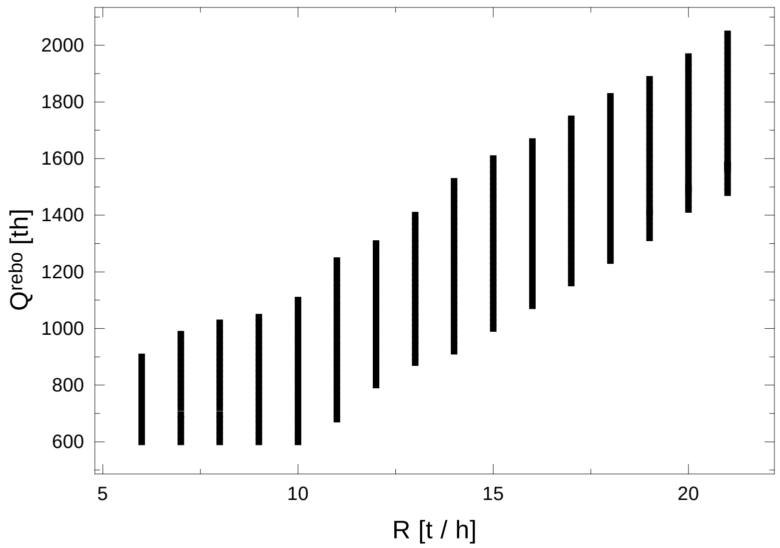
Odozvy ukazujú, že zvyčajný čas potrebný na dosiahnutia nové ustáleného stavu v čase 200 - 250 min, a tak indikujú približný minimálny čas pri použití riadenia. Jedno z pravidiel pozorovaných v praxi naznačuje, že spätnoväzbové riadenie umožňuje dosiahnuť nový ustálený stav asi desaťkrát menší ako v otvorenej slučke. Takže najlepšie časy prechodu by mohli byť okolo 25 min.

Odozvy modelu pri zmenách koncentrácie nástreku sú znázornené na obr. 12.1.6. Ukazujú vysokú citlivosť výstupov na vstupoch.

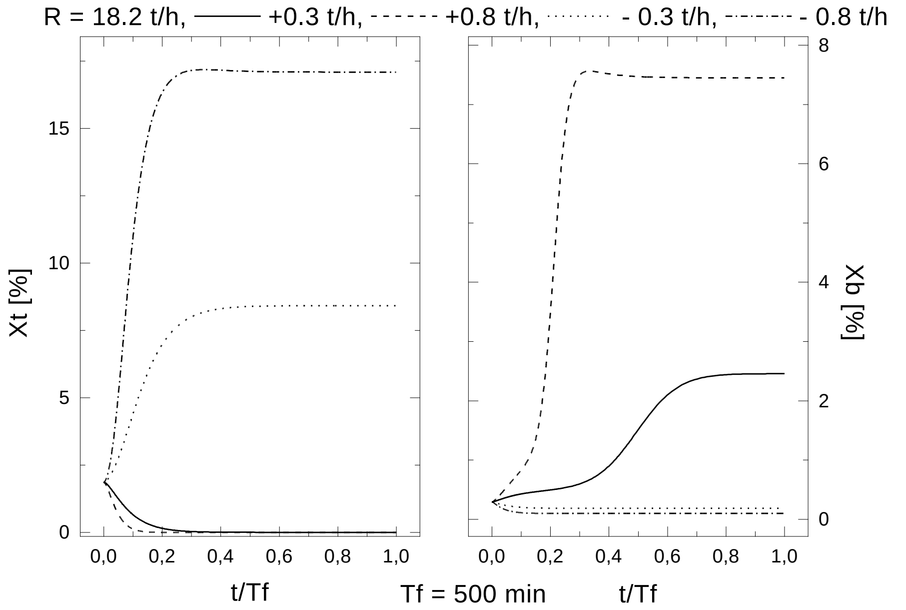
Ako bolo spomenuté v časti o ustálených stavoch, výšky hladín vo varáku a v kondenzátore občas spôsobujú problémy. Toto je ukázané na obr. 12.1.7, kde bol nástrek zmenený nasledovne:



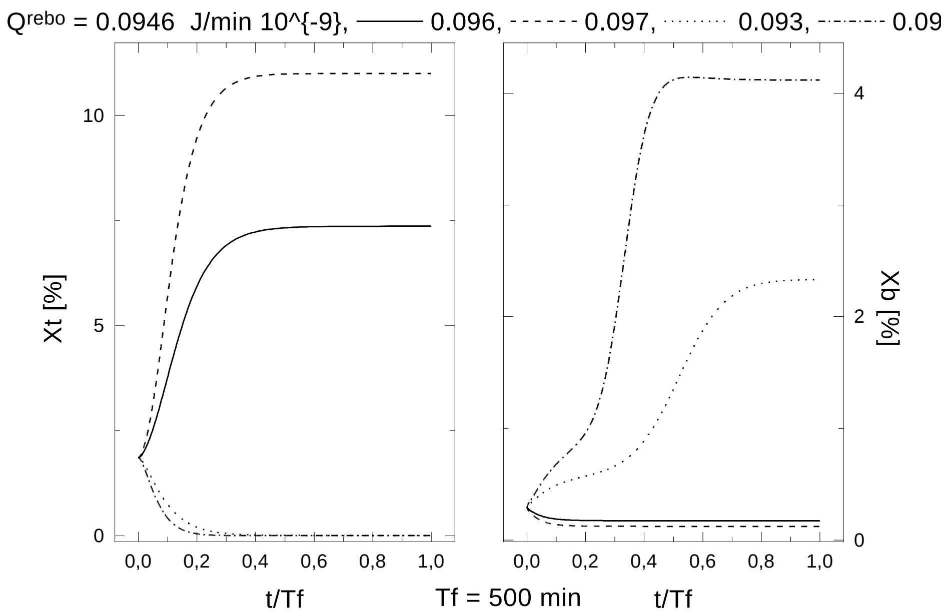
Obr. 12.1.2: Nečistoty v ustálenom stave



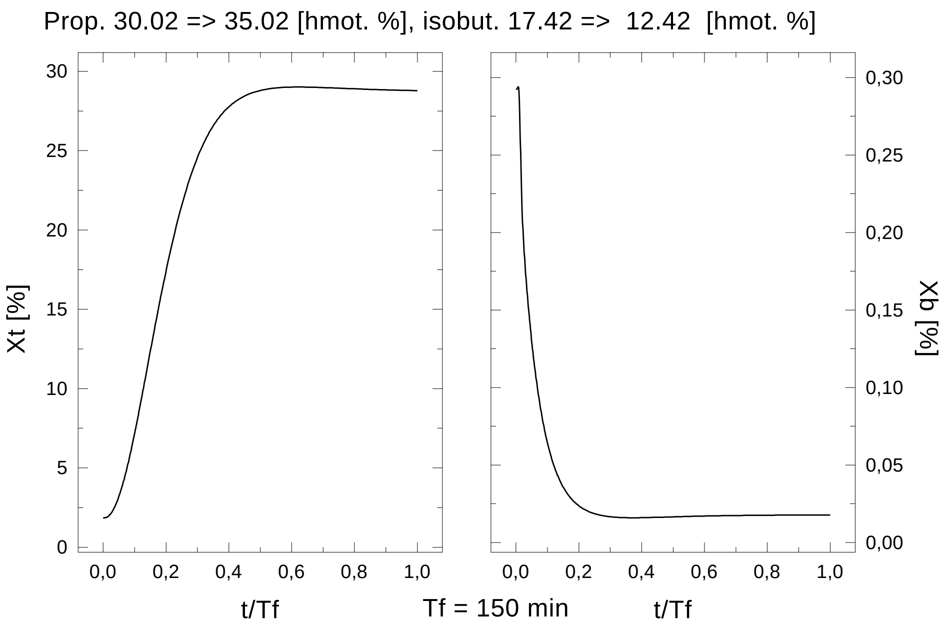
Obr. 12.1.3: Ustálené riadenia



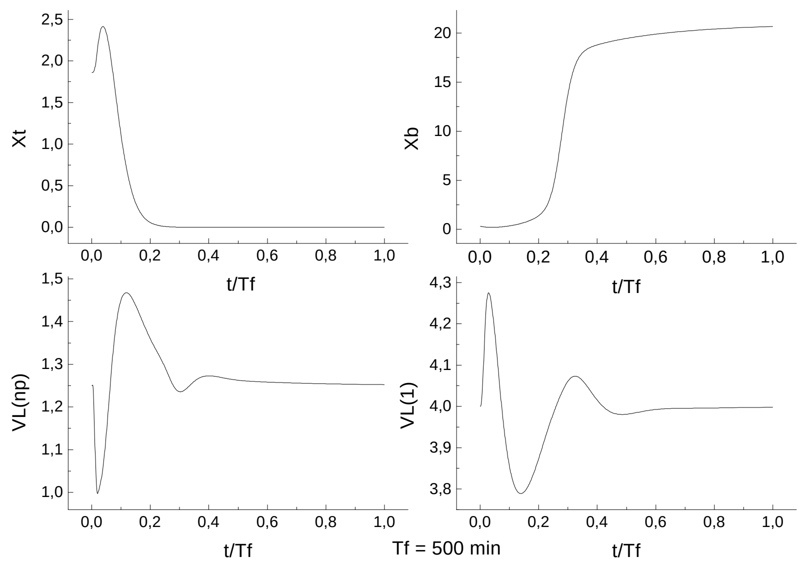
Obr. 12.1.4: Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene R



Obr. 12.1.5: Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene Q^{rebo}



Obr. 12.1.6: Prechodové charakteristiky pri skokovej zmene koncentrácie nástreku



Obr. 12.1.7: Odozvy pri zmene nástreku. $VL(np)$ - výška hladiny vo varáku, $VL(1)$ - výška hladiny v kondenzátore

Premenná	Stará hodnota	Nová hodnota	Jednotka
Teplota	106.28	94.28	^oC
Tlak	27.3	27.3	bar
(1) etán	1.68	11.68	hmotnostné %
(2) propán	30.02	30.02	hmotnostné %
(3) izobután	17.42	17.42	hmotnostné %
(4) n-bután	50.61	40.61	hmotnostné %
(5) pentán	0.27	0.27	hmotnostné %

Keďže výška varáka je 2.5m, často sa môže stať, že je alebo úplne plný alebo prázdny. Situácia v kondenzátore je lepšia, pretože je väčší. Keďže ale kmitavé správanie môže spôsobovať problémy, vhodnejšie by bolo navrhnúť lepšie nastavenie PI regulátorov alebo zmeniť riadenie na kaskádne, dopredné, atď.

12.2 Simulačné výsledky

Skúmali sme dva optimalizačné problémy: minimalizácia kvadrátov odchýliek (Integral Squared Error – ISE) a minimalizácia času. Vo všetkých prípadoch boli riadiace veličiny parametrizované ako po častiach spojité. V každej perióde vzorkovania bolo riadenie v prvej polovici aproximované polynómom tretieho rádu, ktorý bol počítaný tak, aby začínal na hodnote riadenia v predošlej perióde vzorkovania a v druhej polovici konštantné riadenie. Takáto parametrizácia riadenia je považovaná za realistickú, pretože odozvy ventilov sú zriedkakedy okamžité. Zároveň to znamenalo, že riadenie je v podstate spojité, čo znamená, že integrátor mohol pri danej presnosti postupovať vo väčších krokoch.

Presnosť integrácie bola nastavená na 10^{-6}. Ak integrátor skončil s chybou, integrácia bola reštartovaná s dočasne nižšou presnosťou. Toto bolo potrebné najmä pri adjungovaných premenných a občas vo varáku.

Presnosť optimalizácie bola nastavená na 10^{-4}. Ak by bola vyššia ako presnosť integrácie, SQP algoritmus by mal problém so smerom vyhľadávania a s korektným ukončením v optime.

Problémy, ktoré sme študovali, môžu byť rozdelené do viacerých kategórií. Najčastejšie sme uvažovali prechod z jedného stacionárneho stavu do druhého. Takéto zmeny sú relatívne časté v petrochemickom priemysle a bývajú spôsobené napríklad

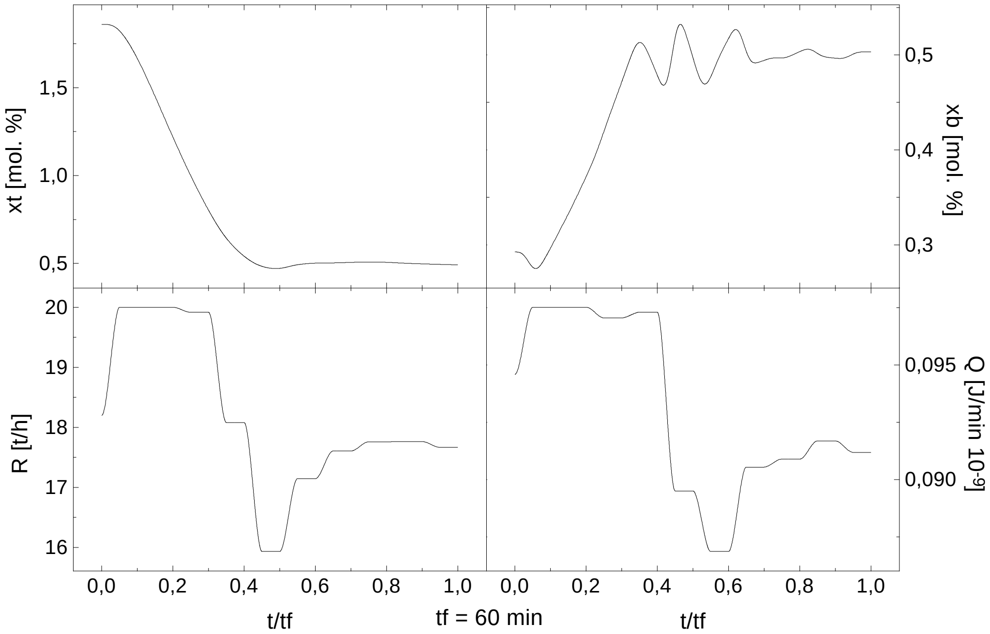
- zmenou špecifikácie produktu - pri rovnakom nástreku je potrebné zmeniť kvalitu výstupov - nečistôt,
- zmena nástreku - vonkajšie vplyvy – zmena typu ropy, pričom je požadovaná rovnaká kvalita produktov,
- kombinácia oboch faktorov.

Každý z týchto problémov je možné riešiť pomocou dynamickej optimalizácie. Študovali sme ich pomocou minimalizácie ISE kritéria a minimalizáciou celkového času (Minimum Final Time – MFT).

12.2.1 ISE problémy

ISE kritérium môžeme definovať nasledovne:

$$\min_u \int_0^1 (X_t(t) - X_t^d)^2 + (X_b(t) - X_b^d)^2 \mathrm{d}t \tag{12.2.1}$$



Obr. 12.2.1: ISE - zmena žiadanej veličiny

Poznamenávame, že sme nepridávali v koncovom čase obmedzenia na nový ustálený stav. Budeme predpokladať, že koncový čas je dostatočne veľký, takže ISE kritérium zabezpečí nový ustálený stav. Simulácie ukázali, že tento predpoklad je v princípe správny, a tak počet adjungovaných premenných je rovný počtu stavov.

Na to, aby sme dosiahli nový ustálený stav, bolo zároveň pridané obmedzenie na posledný úsek riadenia, ktorý bol rovný ustálenému riadeniu v novom operačnom režime.

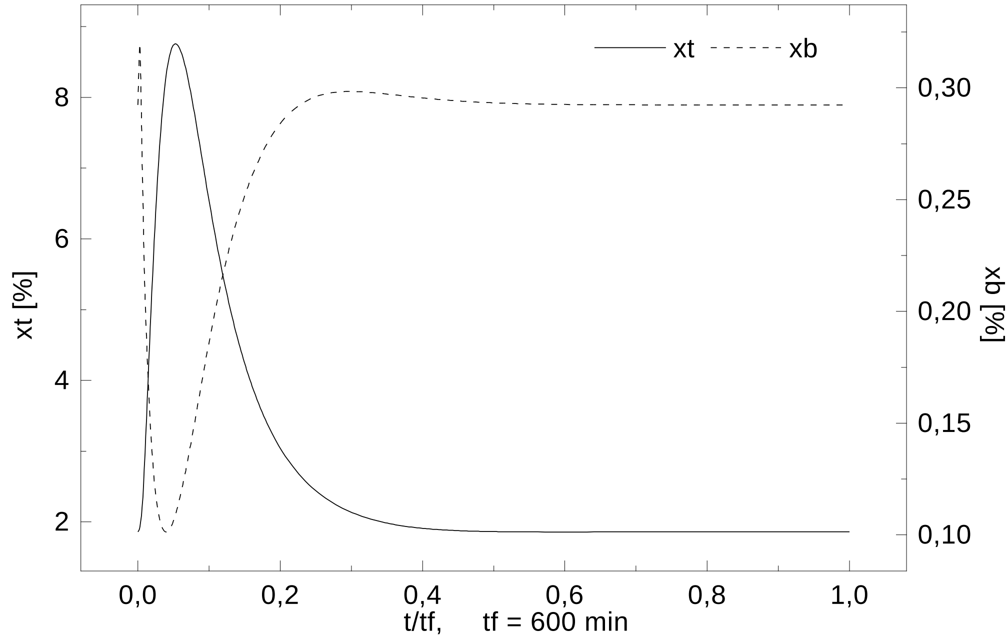
Keďže predbežné odhady na strane 147 indikovali pravdepodobný minimálny čas na 25 min, zvolili sme celkový čas 60 min. Počet intervalov riadenia bol 10.

V prvej simulácii sme sa zaoberali zmenou žiadanej hodnoty, pričom nové úrovne množstva nečistôt boli stanovené na (0.5, 0.5)%. Výsledky sú znázornené na obr. 12.2.1. Potvrdilo sa, že na konci simulácie je dosiahnutý ustálený režim, keďže riadiace trajektórie sú na konci v podstate konštantné. Nový ustálený stav bol dosiahnutý približne po $t = 24$ min (regulačné odchýlky sú potom menšie ako 10%), čo potvrdilo správnosť predbežných záverov. Optimálna trajektória riadenia je najprv na maximálnej hodnote, až kým nedosiahnu nečistotu požadovanú hodnotu. Potom v ďalších 2-3 periódach vzorkovania je riadenie zamerané na stabilizáciu dosiahnutého stavu. Posledná časť trajektórie je aplikovaná na dosiahnutie ustáleného stavu.

Druhým študovaným problémom bolo odstraňovanie porúch. Predpokladali sme, že nástrek sa plynulo zmení medzi časmi $t = 0$ a $t = 5$ min, pričom nové zloženie nástreku je dané v tabuľke na strane 151. ďalej bolo požadované, aby špecifikácia výstupov ostala totožná.

V prvej simulácii sme aplikovali konštantné riadenie, ktoré dokáže vrátiť systém späť na rovnaké hodnoty výstupov. Výsledné trajektórie riadenia sú znázornené na obr. 12.2.2. Približný čas odstránenia poruchy je asi 250 min.

Preto sme aplikovali rovnaké podmienky ako v predošlej simulácii. Výsledné optimálne trajektórie sú znázornené na obr. 12.2.3. Vidíme opäť, že optimálne riadenie na rozdiel od konštantného dokáže dostať systém naspäť do ustáleného stavu za približne 25 min. Na druhej strane



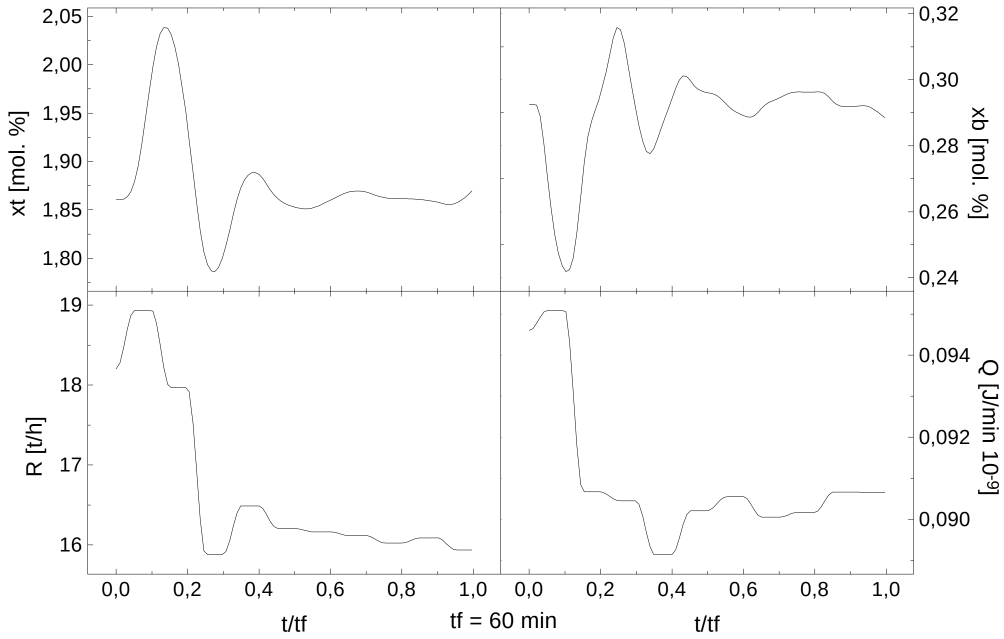
Obr. 12.2.2: Regulácia s konštantným riadením

riadenie v koncovom čase nie je konštantné, čo je vidieť na obr. 12.2.3, kde je množstvo refluxu klesajúce. To znamená, že sa prejavuje vplyv pomalej dynamiky kolóny a ustálený stav ešte nebol dosiahnutý. Skutočne, množstvo nečistôt v destiláte stále stúpa a maximálne preregulovanie potom dosiahne okolo 20%. Vplyv poruchy je nakoniec odstránený asi v čase $t = 120$ min.

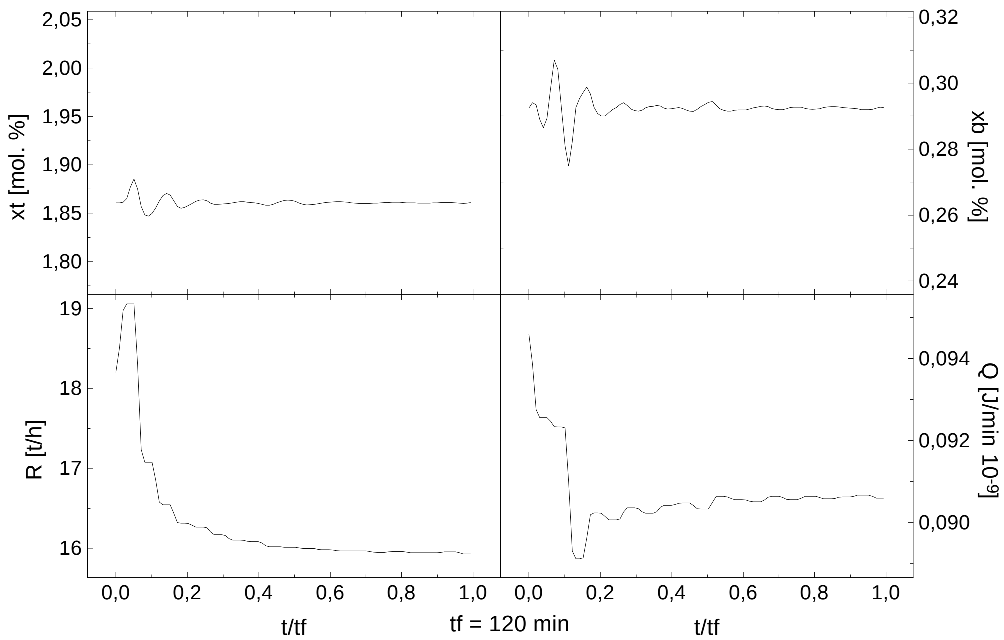
Preto sme zväčšili výsledný čas optimalizácie na $t = 120$ min s periódou vzorkovania 6 min. Pre inicializáciu bolo použité predošlé optimálne riadenie z predošlého pokusu s konštantným riadením v druhej polovici simulácie. Optimálne trajektórie sú znázornené na obr. 12.2.4. V tomto prípade sú výsledky správne. Ako predtým, poruchy boli odstránené asi po 25 min. Potom oba vstupy pomaly konvergujú k ustáleným hodnotám. Zaujímavosťou je fakt, že obmedzenia na vstupy nie sú aktívne. Toto je časté zistenie v prípade problémov regulácie – odstraňovania porúch, keďže vplyvy porúch nie sú okamžité.

Zaujímavé sú aj rozdiely medzi výstupnými trajektóriami na obr. 12.2.3 a 12.2.4. V druhom prípade je maximálne preregulovanie výrazne nižšie ako v prvom a výsledky pripomínajú činnosť dopredného riadenia.

Niekoľko údajov o simuláciách je uvedených v tab. 12.2.1. Uvedené sú údaje, či bolo dosiahnuté optimum, jeho hodnotu, počet volaní kritéria a gradientov, čas výpočtu a počet optimalizovaných premenných. Celkový čas výpočtu je pomerne vysoký, pričom jeho značná časť bola strávená pri integrácii adjungovaných premenných. Často bolo treba integrácie reštartovať a integrovať v malých krokoch. Na druhej strane, približné optimum bolo dosiahnuté veľmi rýchlo – po niekoľkých iteráciách. Potom bola hodnota kritéria ďalej zlepšovaná po malých krokoch.



Obr. 12.2.3: ISE - regulácia s riadením s 10 úsekmi



Obr. 12.2.4: ISE - regulácia s riadením s 20 úsekmi

Tabuľka 12.2.1: Štatistika pre ISE problémy

Simulácia	Dosiahnutie optima	ISE hodnota	Počet funkcií	Počet gradientov	Čas výpočtu [h]	Počet opt. premenných
žiad. veličina	−	1.79591e-2	65	28	11.7	20
porucha1	+	0.37189e-2	37	27	3.2	20
porucha2	+	0.38047e-2	63	35	6.6	40

12.2.2 Problémy minimalizácie času

Skutočný problém minimalizácie času môže byť definovaný nasledovne:

$$\min_{u,p} \quad t_f \quad \text{vzhľadom na :} \tag{12.2.2}$$

$$0 \geq X_t(1) - X_t^d \tag{12.2.3}$$

$$0 \geq X_b(1) - X_b^d \tag{12.2.4}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n_x} \dot{x}_i^2 \Big|_{t=1} \tag{12.2.5}$$

Neuvádzame tu obmedzenia na proces v DAE tvare, pretože tie sú riešené integrátorom.

Poznamenávame, že členy (12.2.3), (12.2.4) sú definované ako nerovnice, pretože nám nezáleží na konkrétnych hodnotách nečistôt, ale na ich maximálnych hodnotách. Takže, ľubovoľná hodnota nečistôt v čase $t = t_f$, ktorá je nižšia, ako požadovaná, je vhodná. Takto definovaný problém môže viesť k nižším hodnotám kritéria v optime. Tento fakt je spôsobený tým, že nie všetky kombinácie žiadaných hodnôt môžu byť rovnako obtiažne dosiahnuteľné. V procesoch destilácie je známe, že zmeny žiadaných veličín sú jednoduchšie realizovateľné, ak sa koncentrácie ľahších a ťažších produktov zmenia v rovnakom smere. Naopak, zníženie stupňa nečistôt v destiláte a aj zvyšku je výrazne obtiažnejšie dosiahnuteľné.

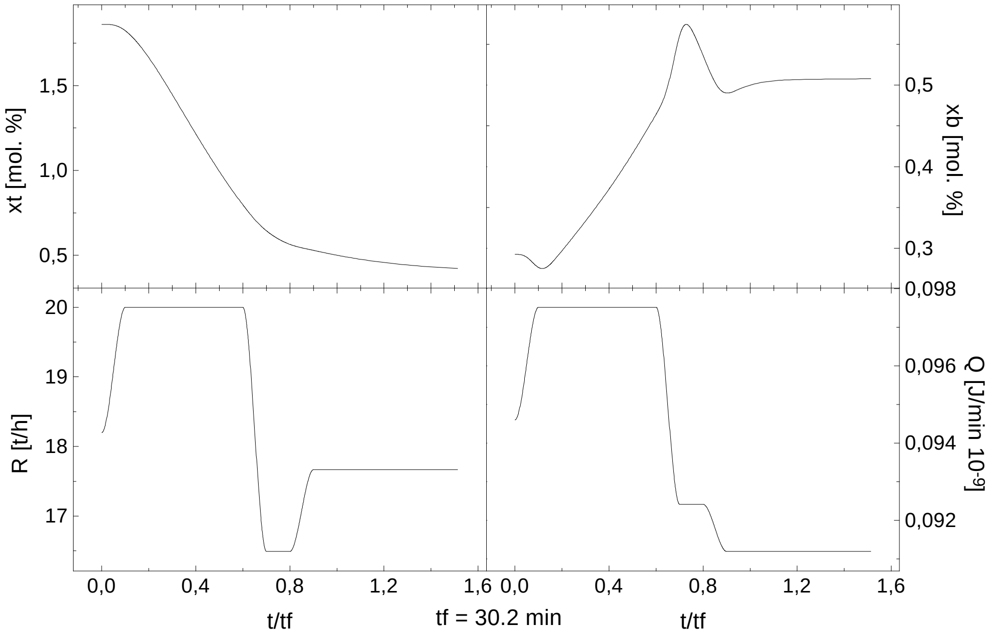
Ďalšia diskusia je potrebná ohľadom koncového ustáleného stavu. Rovnica (12.2.5) zodpovedá jeho matematickej formulácii. Avšak, dosiahnuť ustálený stav je veľmi obtiažne. To je vidieť aj z prechodových charakteristík, ktorých čas ustálenia je okolo 250 min, kým očakávané optimum je asi 10 ráz kratšie. Okrem toho, v ustálenom stave by malo byť n_x derivácií byť rovných nule (n_x je počet stavov), pričom je k dispozícii iba niekoľko hodnôt optimalizovaných riadení. Hoci je tento problém teoreticky riešiteľný, v praxi je nájdenie optima a splnení všetkých koncových obmedzení prakticky nemožné, keďže počet optimalizovaných premenných by bol menší, ako počet obmedzení a požiadaviek.

Preto sme zvolili praktickejší prístup a určili iba niektoré najdôležitejšie derivácie stavov, ktoré majú byť nulové a ktoré majú najväčší vplyv na ustálený stav. Výber stavov bol zúžený na varák a kondenzátor, kde sú definované nečistoty.

Iba jeden zo stavov bol zvolený v každej časti. Najlepším kandidátom sú derivácie nečistôt, ale tieto by museli byť počítané inverziou niektorých prvkov Jakobiho matice, čo nie je vhodné vzhľadom na možné problémy s podmienenosťou.

Vhodnými kandidátmi sú tak derivácie na zádrže a energie. Zádrže sú viac dôležité a otázkou potom ostáva, ktorý komponent bude z nich ten najdôležitejší. Vybrali sme tú zložku, čo mala najväčšiu hodnotu. V praxi sme si overili, že takto zvolená reprezentácia ustáleného stavu je spoľahlivá. V kondenzátore bol zvolený propán a vo varáku n-bután.

Aj s takouto reprezentáciou sme zistili, že dosiahnutie nulových derivácií je veľmi obtiažne. Jednou z pravdepodobných príčin boli regulátory hladiny. Ako vidíme na obr. 12.1.7, hladiny pri zmne nástreku reagujú približne rovnaký čas ako výstupy, kým sa opäť ustália. To protirečí



Obr. 12.2.5: MFT1 – zmena žiadanej veličiny

štadardným nastaveniam pri destilácii, kedy majú byť slučky PI regulátorov lokálnych výsupov nastavené výrazne rýchlejšie, ako u hlavných koncentračných slučiek, aby ich dynamika nevplývala na hlavné ciele riadenia.

Keďže bola formulácia požiadavky ustálenia kolóny nevhodná, hľadali sme ďalšie spôsoby dosiahnutia ustálených stavov. V prvom rade sme zmenili obmedzenia v tvare rovností na nerovnosti – derivácie musia byť v optime menšie ako zvolená presnosť. Ďalej, posledná časť optimalizovanej trajektórie bola zvolená ako konštantná s hodnotami, ktoré zodpovedajú nových ustálených stavom. Aj keď výsledný čas určite nie je minimálny, tento predpoklad výrazne zlepšil konvergenciu algoritmu.

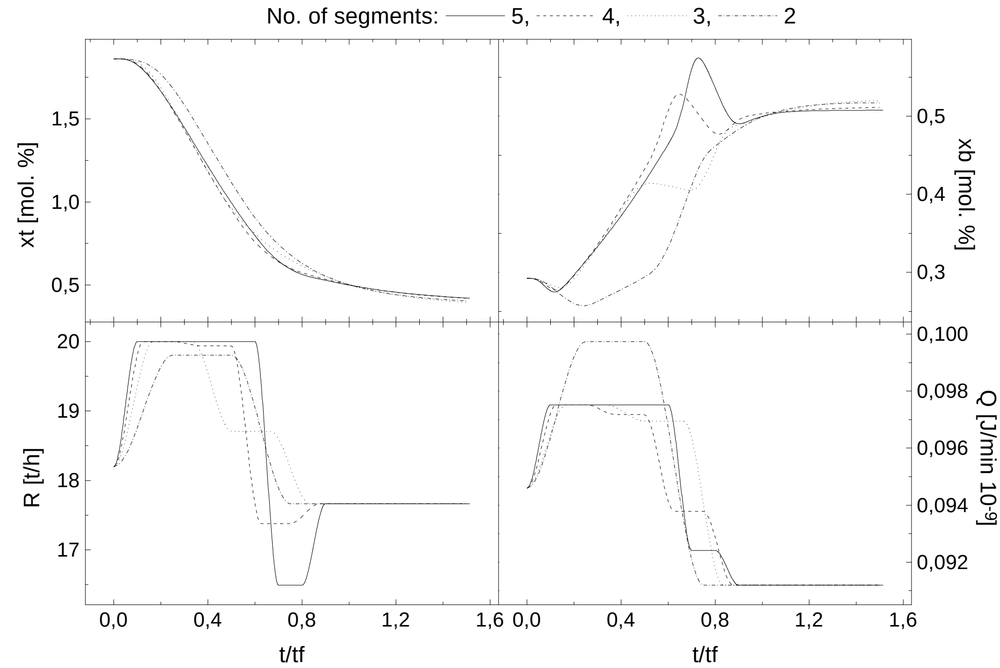
Takže, realistický problém minimalizácie času je možné formulovať nasledovne

$$
\begin{aligned}
\min_{u,p} \quad & t_f \quad \text{subject to :} \\
0 \ \geq \ & X_t(1) - X_t^d \\
0 \ \geq \ & X_b(1) - X_b^d \\
\epsilon \ \geq \ & \left[\left(\frac{dN_1^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dN_{42}^4}{dt} \right)^2 \right]_{t=1}
\end{aligned}
$$

Prvé simulácie sú zamerané na zmeny žiadanej veličiny, kde sú žiadané nečistoty rovnaké ako v ISE prípade. V tomto prípade sme tiež študovali vplyvy rozličných nastavení optimalizácie.

Koncový čas t_f bol optimalizovaný v ohraničeniach (15, 50) min s počiatočnou hodnotou 35 min. Počiatočná hodnota riadenia bola konštantná a rovná novej ustálenej hodnote.

V prvej simulácii (MFT1) je počet segmentov riadenia rovný 5. Výsledné trajektórie sú znázornené na obr. 12.2.5, kde bolo dosiahnuté optimum $t_f = 30.2$ min. Hoci optimalizácia neskonvergovala, výsledky sú uspokojivé. Obmedzenia na derivácie nečistôt s-u takmer dosiahnuté (s chybou 10^{-4} pre X_t). Hoci obmedzenie na deriváciách nie je splnené (súčet rovný 0.3),



Obr. 12.2.6: MFT1-4 : zmena žiadanej veličiny

výsledky simulácie sú akceptovateľné.

Optimálna trajektória riadenia opäť pozostáva z troch úsekov. V prvej fáze je riadenie na obmedzeniach. Druhá časť pozostávajúca z jedného úseku je aplikovaná, ak sú výstupy blízko požadovaných hodnôt. posledným úsekom je konštantné riadenie

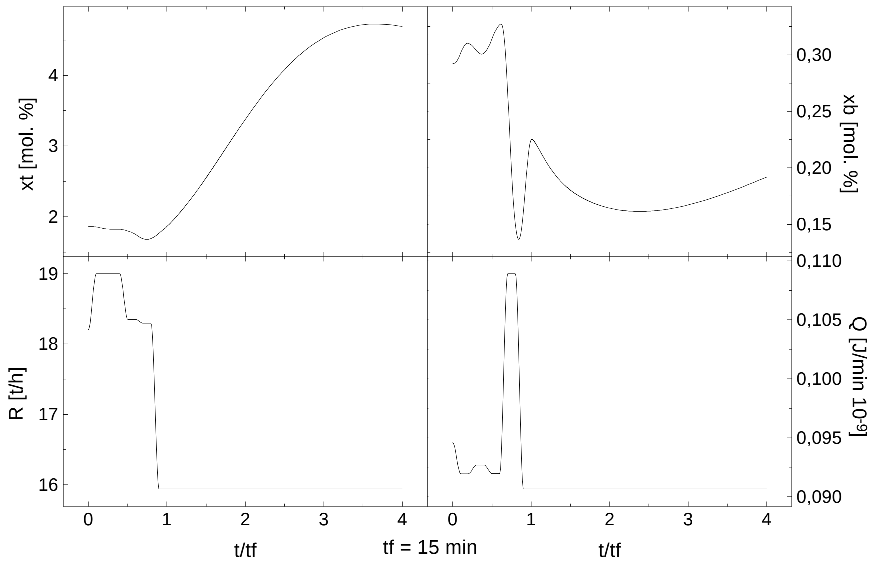
Pretože posledný úsek riadenia nebol optimalizovaný, získaný minimálny čas by mohol byť ešte nižší. Na druhej strane, ak uvažujeme presnosť približne 5% ako dostatočnú, minimálny čas je okolo 27 min. Štatistika tejto a ďalších simulácií je uvedená v tab. 12.2.2. Vidíme, že čas potrebný na výpočty je výraz nižší, ako pre ISE problémy. Toto môže byť vysvetlené nižším počtom stupňov voľnosti ohľadom počtu optimalizovaných premenných, ako aj faktom, že riadenie je vo veľkej časti optimálnej trajektórie na ohraničeniach.

Keďže riadenie na jednom intervale bolo aproximované ako po častiach polynomické, skúsmali sme aj prípad po častiach konštantné riadenie. Výsledky sú znázornené v tab. 12.2.2 ako MFT1a. Výsledný optimálny čas je iba veľmi málo lepší, ale čas simulácie vzrástol o 50%.

Ďalšie simulácie sa týkali vplyvu počtu segmentov riadenia na výsledný optimálny čas. Výsledky sú znázornené na obr. 12.2.6. Počet úsekov sa mení medzi 2-4 (simulácie MTF2-4) a pre porovnanie je zobrazená aj simulácia MFT1. Výsledky naznačujú je hlavným cieľom optimalizácie je zníženie nečistôt v destiláte, pretože všetky normalizované odozvy sú približne rovnaké.

Porovnanie v tab. 12.2.2 ukazuje relatívnu necitlivosť optimalizácie na počet segmentov riadenia. Iba v prípade 2 segmentov je výsledný optimálny čas väčší – 43 min. Čas výpočtov a počet iterácií rastú lineárne s rastúcim počtom stupňov voľnosti optimalizácie. Preto môžeme zhodnotiť, že 3 segmenty riadenia sú vhodným kompromisom medzi rýchlosťou výpočtov a hodnotou minimálneho času.

Najvýznamnejšie zníženie minimálneho času bolo dosiahnuté, keď boli zmenené obmedzenia na vstupy. Pripomíname, že ohraničenia na reflux R sa meniť nedajú – sú dané požiadavkami z prevádzky. Na druhej strane, obmedzenia na Q^{rebo} boli zistené ako príliš veľké a skutočné



Obr. 12.2.7: Problém regulácie a minimálny čas $t_f = 15$ min

Tabuľka 12.2.2: Štatistika pre MFT problémy

Simulácia	Dosiahnutie optima	t_f [min]	Počet funkcií	Počet gradientov	Čas výpočtu [h]	Počet opt. premenných
MFT1	–	30.2	22	10	0.857	11 (-2)
MFT1a	+	29.4	29	12	1.50	11 (-2)
MFT2	–	43.3	21	6	0.44	5 (-2)
MFT3	–	34.7	25	7	0.68	7 (-2)
MFT4	–	32.4	21	8	0.83	9 (-2)
MFT5	–	29.0	14	4	0.56	11 (-2)
DIST	–	15.2	26	10	1.48	11 (-2)

obmedzenia závisia od konkrétnej hodnoty refluxu. V časti 12.1.5 bola preto vytvorená nová riadiaca premenná u_2.

V simuláciách bolo zistené, že prvá časť optimálnej riadiacej stratégie je na maxime u_1 a minime u_2. Skúsili sme preto zmeniť u_{2min} tak, aby ešte bola možná integrádia DAE rovníc systému. Keď u_{2min} bolo zmenené z -2 na -2.5, optimum bolo zlepšené o 20-25%. Napríklad optimalizácia MFT1 dosiahla minimálny čas $t_f = 25.4$ min. Ďalšie znižovanie obmedzenia spôsobilo pri simuláciách záporné hodnoty výšok hladín vo varáku a nebolo ďalej skúmané.

V prípade odstránenia porúch sme skúmali rovnaký prípad ako v ISE kritériu. Počet segmentov riadenia bol 5 s posledným riadením neoptimalizovaným na novej ustálenej hodnote. Výsledky sú znázornené na obr. 12.2.7 a poukazujú na typické problémy s takýmto scenárom. Optimalizácia obyčajne dosiahne minimálny čas, ktorý je na dolnom ohraničení a potom nedokáže dostatočne znížiť hodnoty derivácií. Efekt zmien porúch tak nemôže byť dokonale odstránený.

Literatúra

J. Alex, J.-F. Beteau, J. Copp, C. Hellinga, U. Jeppsson, S. Marsili-Libelli, M.-N. Pons, H. Spanjers a H. Vanhooren. Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants. V *Proc. ECC'99*. Karlsruhe, Germany, 1999. 132

M. P. Avraam, N. Shah a C. C. Pantelides. Modelling and optimisation of general hybrid systems in the continuous time domain. *Computers chem. Engng.*, 22(Suppl.):S221–S228, 1998. 79

E. Balsa-Canto, J. R. Banga, A. A. Alonso a V. S. Vassiliadis. Dynamic optimization of chemical and biochemical processes using restricted second-order information. *Computers chem. Engng.*, 25(4–6):539–546, 2001. 108, 120

P. Barton, S. Galán a J. Banga. Optimization of Hybrid Discrete/Continuous Dynamic Systems. *Computers and Chemical Engineering*, 24(4):851–864, 2000a. 79

P. I. Barton, S. Galán a J. R. Banga. Optimization of hybrid discrete/continuous dynamic systems. *Computers chem. Engng.*, 24(4):851–864, 2000b. 137

R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New York, 1957. 23

A. Bemporad a M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35(3):407 – 427, 1999. 79

L. T. Biegler, A. M. Cervantes a A. Wächter. Advances in simultaneous strategies for dynamic process optimization. *Chem. Eng. Sci.*, 57(4):575–593, 2002. 63

T. Binder, L. Blank, H. G. Bock, R. Bulirsch, W. Dahmen, M. Diehl, T. Kronseder, W. Marquardt, J. P. Schlöder a O. v. Stryk. Introduction to model based optimization of chemical processes on moving horizons. V M. Grötschel, S. O. Krumke a J. Rambau, redaktori, *Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art*, 295–340. Springer Verlag, 2001. Download at: http://www.zib.de/dfg-echtzeit/Publikationen/Preprints/Preprint-01-15.html. 56

C. Bischof, A. Carle, P. Hovland, P. Khademi a A. Mauer. *ADIFOR 2.0 User's Guide (Revision D)*. Mathematics and Computer Science Division (MCS-TM-192), Center for Research on Parallel Computation (CRPC-TR95516-S), 1998. Http://www.cs.rice.edu/~adifor. 111

H. G. Bock, M. Diehl, D. Leineweber a J. Schlöder. *Nonlinear Model Predictive Control*, diel 26, kapitola A Direct Multiple Shooting Method for Real-time Optimization of Nonlinear DAE Processes, 245–267. Birkhauser, Basel, 2000. 56

D. Bonvin. Optimal operation of batch reactors - a personal view. *Journal of Process Control*, 8(5-6):355–368, 1998. 79

M. S. Branicky, V. S. Borkar a S. K. Mitter. A unified framework for hybrid control: Model and optimal theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(1):31–45, 1998. 137

K. E. Brenan, S. E. Campbell a L. R. Petzold. *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. North-Holland, New York, 1989. 111, 137, 141, 144

P. N. Brown, G. D. Byrne a A. C. Hindmarsh. VODE: A variable coefficient ODE solver. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10:1038 – 1051, 1989. 111, 137

A. E. Bryson, Jr. a Y. C. Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corporation, 1975. 16, 56, 57, 73, 80

M. Caracotsios a W. E. Stewart. Sensitivity analysis of initial value problems with mixed ODEs and algebraic equations. *Computers chem. Engng.*, 9:359–365, 1985. 60

P. Caulet, F. Lefevre, B. Bujon, P. Réau, J. P. Philippe a J. M. Audic. Automated aeration management in wastewater treatment: Interest of the application to serial basins configuration. *Wat. Sci. Tech.*, 37(12):35–42, 1998. 135

B. Chachuat. *Méthodologie d'optimisation dynamique et de commande optimale des petites stations d'épuration à boues activées*. Doktorská práca, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2001. 137

B. Chachuat, N. Roche a M. A. Latifi. Dynamic optimisation of small size wastewater treatment plants including nitrification and denitrification processes. *Computers chem. Engng.*, 25(4–6):585–593, 2001. 135

C. T. Chen a C. Hwang. Optimal control computation for differential-algebraic process systems with general constraints. *Chem. Eng. Comm.*, 97:9–26, 1990. 52

M. Čižniar. *Dynamic Optimisation of Processes*. Diplomová práca, Faculty of Chemical and Food Technology, Radlinskeho 9, 812 37 Bratislava, Slovak Republic, 2005. 96

M. Čižniar, M. Fikar a M. Latifi. A MATLAB package for dynamic optimisation code of processes. V I. Taufer, redaktor, *Preprint of the 7th Int. Scientific-Technical Conference Process Control 2006*, R118. Kouty nad Děsnou, 2006a. 96

M. Čižniar, M. Fikar a M. A. Latifi. Matlab dynamic optimisation code dynopt. user's guide. Technical report, KIRP FCHPT STU Bratislava, Slovak Republic, 2006b. 96

M. Čižniar, D. Salhi, M. Fikar a M. Latifi. Dynopt - dynamic optimisation code for MATLAB. V *Technical Computing Prague 2005*. 2005. Cizniar.pdf. 96

M. A. Z. Coelho, C. Russo a O. Q. F. Araújo. Optimization of a sequencing batch reactor for biological nitrogen removal. *Water Research*, 34(10):2809–2817, 2000. 79

J.-P. Corriou. *Process Control. Theory and Applications*. Springer Verlag, 2004. 16

Y. Creff. *Sur la dynamique et la commande des colonnes multicomposées*. Doktorská práca, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. 141, 142, 144

S. Crescitelli a S. Nicoletti. Near optimal control of batch reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 28:463–471, 1973. 61, 119

J. E. Cuthrell a L. T. Biegler. On the optimization of differential-algebraic process systems. *AIChE J.*, 33(8):1257–1270, 1987. 52, 63

J. E. Cuthrell a L. T. Biegler. Simultaneous optimization and solution methods for batch reactor control profiles. *Computers chem. Engng.*, 13(1/2):49–62, 1989. 52, 63, 67, 136

S. A. Dadebo a K. B. Mcauley. Dynamic optimization of constrained chemical engineering problems using dynamic programming. *Computers chem. Engng.*, 19(5):513–525, 1995. 104, 107

D. Debusscher, H. Vanhooren a P. Vanrolleghem. Benchmarking two biomass loading control strategies for activated sludge WWTPs. V *Proceedings 13th Forum Applied Biotechnology*, 127–132. Med. Fac. Landbouww. Univ. Gent, 64/5a, 1999. 131, 135

P. Dostál, M. Bakošová a V. Bobál. An approach to adaptive control of a cstr. *Chemical Papers*, 58(3):184–190, 2004. 79

W. F. Feehery. *Dynamic Optimization with Path Constraints*. Doktorská práca, MIT, 1998. 74

W. F. Feehery a P. I. Barton. Dynamic optimization with state variable path constraints. *Computers chem. Engng.*, 22(9):1241–1256, 1998. 71, 73, 102, 137

M. Fikar, B. Chachuat a M. A. Latifi. Optimal operation of alternating activated sludge processes. *Control Engineering Practice*, 13(7):853–861, 2005. 130

M. Fikar a M. A. Latifi. User's guide for FORTRAN dynamic optimisation code DYNO. Výskumná správa mf0201, LSGC CNRS, Nancy, France; STU Bratislava, Slovak Republic, 2001. 75, 85, 111, 137

M. Fikar, M. A. Latifi, J. P. Corriou a Y. Creff. CVP-based optimal control of an industrial depropanizer column. *Computers chem. Engng.*, 24(2–7):909 – 915, 2000. 136

M. Fikar, M. A. Latifi a Y. Creff. Optimal changeover profiles for an industrial depropanizer. *Chem. Eng. Sci.*, 54(13-14):2715 – 2720, 1999. 141

S. E. Gallun a C. D. Holland. Gear's procedure for the simultaneous solution of differential and algebraic equations with application to unsteady state distillation problems. *Computers chem. Engng.*, 6:231–244, 1982. 142

R. Gani a I. T. Cameron. Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem. *Chem. Eng. Sci.*, 47(5):1311–1315, 1992. 146

C. J. Goh a K. L. Teo. Control parameterization: a unified approach to optimal control problems with general constraints. *Automatica*, 24(1):3–18, 1988a. 52

C. J. Goh a K. L. Teo. MISER: a FORTRAN program for solving optimal control problems. *Adv. Eng. Software*, 10(2):90–95, 1988b. 52

P. Grieder, M. Kvasnica, M. Baotić a M. Morari. Stabilizing low complexity feedback control of constrained piecewise affine systems. *Automatica*, 41(10):1683–1694, 2005.

M. Henze, C. P. L. Grady, W. Gujer, G. v. R. Marais a T. Matsuo. Activated Sludge Model No. 1. Výskumná správa 1, IAWQ, London, 1987. 132

G. A. Hicks a W. H. Ray. Approximation methods for optimal control design. *Can. J. Chem. Eng.*, 49:522–528, 1971. 53

T. Hirmajer a M. Fikar. Dynamic optimization of a hybrid coupled tanks system. *Journal of Electrical Engineering*, 57(3):166–171, 2006a. 79

T. Hirmajer a M. Fikar. Optimal control of a two-stage reactor system. *Chemical Papers*, 60(5):381–387, 2006b. 124

M. Huba. Constrained pole assignment control. V L. Menini, L. Zaccarian a C. T. Abdallah, redaktori, *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*, 395 – 398. Birkhäuser, Boston, 2006.

M. Huba, P. Hubinský a K. Žáková. *Teória systémov*. STU Bratislava, 2006.

S. Isaacs. Short horizon control strategies for an alternating activated sludge process. *Wat. Sci. Tech.*, 34(1–2):203–212, 1996. 131

S. Isaacs. Automatic adjustment of cycle length and aeration time for improved nitrogen removal in an alternating activated sludge process. *Wat. Sci. Tech.*, 35(1):225–232, 1997. 79, 131

D. Jacobson a M. Lele. A transformation technique for optimal control problems with a state variable inequality constraint. *IEEE Trans. Automatic Control*, 5:457–464, 1969. 73, 74, 102

H. Kim, T. J. McAvoy, J. S. Anderson a O. J. Hao. Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system – Part 2: Optimization using a linearized model. *Control Engineering Practice*, 8(3):279–289, 2000. 131

D. E. Kirk. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice-Hall, London, 1970. 16

D. Kraft. A software package for sequential quadratic programming. Výskumná správa, DFVLR Oberpfaffenhofen, 1988. Available from `www.netlib.org`. 111

A. Kröner, W. Marquardt a E. D. Gilles. Getting around consistent initialization of DAE systems? *Computers chem. Engng.*, 21(2):145–158, 1997. 144

M. Kvasnica, P. Grieder a M. Baotić. Multi-Parametric Toolbox (MPT). 2004. Available from `http://control.ee.ethz.ch/~mpt/`.

T. Lauw-Bieng a L. T. Biegler. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential-algebraic equation systems. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 30:376–385, 1991. 63

E. B. Lee a L. Markus. *Foundations of Optimal Control*. Wiley, 1967. 16

S. H. Lin a K. W. Cheng. A new sequencing batch reactor for treatment of municipal sewage wastewater for agricultural reuse. *Desalination*, 133(41-51), 2001. 79

C.-F. Lindberg. Multivariable modeling and control of an activated sludge process. *Wat. Sci. Tech.*, 37(12):149–156, 1998. 131

J. S. Logsdon a L. T. Biegler. Accurate solution of differential-algebraic optimization problem. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 28:1628–1639, 1989. 52, 63, 74, 107, 136

L. J. S. Lukasse, K. J. Keesman, A. Klapwijk a G. van Straten. A comparison of NH4/NO3 control strategies for alternating activated sludge processes. *Wat. Sci. Tech.*, 39(4):93–102, 1999. 131, 135

R. Luus. Application of dynamic programming to high-dimensional non-linear optimal control problems. *Int. J. Control*, 52(1):239–250, 1990. 108, 120

R. Luus. Effect of the choise of final time in optimal control of nonlinear systems. *Can. J. Chem. Eng.*, 69:144–151, 1991. 96

J. Mikleš a V. Hutla. *Teória automatického riadenia*. ALFA, SNTL, Bratislava, 1986. 29

A. M. Morshedi, H. Y. Lin a R. H. Luecke. Rapid computation of the Jacobian matrix for optimization of nonlinear dynamic processes. *Computers chem. Engng.*, 10:367–376, 1986. 60

C. C. Pantelides. The consistent initialization of differential algebraic systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 9(2):213–231, 1988. 144

C. C. Pantelides, D. Gritsis, K. R. Morison a R. W. H. Sargent. The mathematical modelling of transient systems using differential-algebraic equations. *Computers chem. Engng.*, 12(5):449–454, 1988. 146

L. Petzold a A. Hindmarsh. LSODAR. Výskumná správa, Computing and mathematics research division, lawrence livermore national laboratory livermore, ca 94550, 1997. 87

M. Podmajerský, M. Čižniar, T. Hirmajer, M. Fikar a M. A. Latifi. Recent developments in dynopt package. V J. Mikleš, M. Fikar a M. Kvasnica, redaktori, *Proc. 16. Int. Conference Process Control '07, Štrbské Pleso, High Tatras, Slovakia*, 032f.pdf. 2007. 98

L. S. Pontryagin. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon Press, New York, 1964. 16, 28

T. G. Potter, B. Koopman a S. A. Svoronos. Optimization of a periodic biological process for nitrogen removal from wastewater. *Wat. Res.*, 30(1):142–152, 1996. 131

S. J. Qin, V. M. Martínez a B. A. Foss. An interpolating model predictive control strategy with application to a waste treatment plant. *Computers chem. Engng.*, 21(S1):S881–S886, 1997. 131

J. Rajesh, K. Gupta, H. S. Kusumakar, V. K. Jayaraman a B. D. Kulkarni. Dynamic optimization of chemical processes using ant colony framework. *Computers and Chemistry*, 25:583–595, 2001. 96, 104, 107

W. H. Ray. *Advanced Process Control*. McGraw-Hill, New York, 1981. 52

W. H. Ray a J. Szekely. *Process Optimization*. J. Wiley & Sons, New York, 1973. 52, 53

O. Rosen a R. Luus. Evaluation of gradients for piecewise constant optimal control. *Computers chem. Engng.*, 15(4):273–281, 1991. 59

A. I. Ruban. Sensitivity coefficients for discontinuous dynamic systems. *Computer and Systems Sciences International*, 36:536–542, 1997. 79

K. Schittkowski. NLPQL: A new fortran implementation of a sequential quadratic programming algorithm for parallel computing. Výskumná správa, Department of Mathematics, University of Bayreuth, D - 95440 Bayreuth, 1981. 87

K. Schittkowski. NLPQL : A FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, 5:485–500, 1985. 111, 137

M. Schlegel a W. Marquardt. Detection and exploitation of the control switching structure in the solution of dynamic optimization problems. *Journal of Process Control*, 16:275–290, 2006. 79

Š. Ševčík. *Dynamická optimalizácia procesov*. Diplomová práca, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Radlinskeho 9, 812 37 Bratislava, Slovenská Republika, 2006. 96

G. Soave. Equilibrium constants from a modified Redlich-Kwong equation of state. *Chem. Eng. Sci.*, 27(6):1197–1203, 1971. 142

H. Spanjers, P. Vanrolleghem, G. Olsson a P. Dold. Respirometry in control of the activated sludge process. *Wat. Sci. Tech.*, 34(3–4):117–126, 1996. 135

B. Srinivasan, S. Palanki a D. Bonvin. Dynamic optimization of batch processes I. Characterization of the nominal solution. *Computers and Chemical Engineering*, 27:1–26, 2003. 79

J. Štecha. *Optimální rozhodování a řízení*. Katedra řídicí techniky, Elektrotechnická Fakulta, Praha, 1999. 16

K. L. Teo, C. J. Goh a K. H. Wong. *A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991. 72, 75, 136, 137

J. Unger, A. Kröner a W. Marquardt. Structural analysis of differential-algebraic equation systems–theory and applications. *Computers chem. Engng.*, 19(8):867–882, 1995. 146

J.-L. Vasel. *Contribution à l'étude des transferts d'oxygène en gestion des eaux*. Doktorská práca, Fondation Universitaire Luxemourgeoise, Luxembourg, Arlon, 1988. 130, 135

V. S. Vassiliadis, R. W. H. Sargent a C. C. Pantelides. Solution of a class of multistage dynamic optimization problems. 1. Problems without path constraints, 2. Problems with path constraints. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 33:2111–2122, 2123–2133, 1994. 71, 75, 79, 124, 126, 137

J. V. Villadsen a M. L. Michelsen. *Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978. 67

A. Víteček a M. Vítečková. *Optimální systémy řízení*. VŠB Technická Univerzita Ostrava, Ostrava, 1 vydanie, 2002. 16

H. Zhao, S. H. Isaacs, A. Søeberg a M. Kümmel. A novel control strategy for improved nitrogen removal in an alternating activated sludge process - Part I. Process analysis. *Wat. Res.*, 28(3):521–534, 1994a. 137

H. Zhao, S. H. Isaacs, A. Søeberg a M. Kümmel. A novel control strategy for improved nitrogen removal in an alternating activated sludge process - Part II. Control development. *Wat. Res.*, 28(3):535–542, 1994b. 79, 131

H. Zhao, S. H. Isaacs, H. Søeberg a M. Kümmel. An analysis of nitrogen removal and control strategies in an alternating activated sludge process. *Wat. Res.*, 29(2):535–544, 1995. 79, 131

Register

čistička odpadových vôd, 130
- model, 131
- optimalizačný problém, 134

adjungované veličiny, 56

balík
- DYNO, 111
- dynopt, 96

BCI, 53
Bolzov tvar, 55

control vector parametrization, 52
CVI, 53
CVP, 52, 54

dynamické programovanie, 23, 28

formulácia problému
- hybridné systémy, 80

funkcionál
- Bolzov tvar, 55
- Mayerov tvar, 63, 103

gradienty, 56

Hamiltonián, 56
Hamiltonova funkcia, 19
Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova rovnica, 28

iterácia hraničnej podmienky, 53
iterácia vektora riadenia, 53

Mayerov tvar, 63, 103
metóda citlivostných rovníc, 60
metóda konečných rozdielov, 60
minimalizácia času, 69, 90, 155

nelineárne programovanie, 54
NLP, 54, 56, 64
numerické metódy, 52

obmedzenia, 55, 64
- stavy, 71, 137
  - bodové, 72
  - koncové, 72
  - prídavné premenné, 73, 74
  - trajektória, 68, 71

optimálne riadenie
- hybridná dynamika, 79

optimálne sledovanie, 41, 45
ortogonálna kolokácia, 52, 63, 72

parametrizácia vektora riadenia, 54
periodické problémy, 69
podmienky optimality, 56
- hybridné systémy, 81

princíp minima, 16
princíp optimálnosti, 25
problém sledovania, 42

rektifikačná kolóna, 141
- model, 141
- ustálený stav, 146

riadenie
- integračná činnosť, 45
- optimálne, 16
  - spätnoväzbové, 29

Riccatiho rovnica, 32
rovnica
- Hamiltonova-Jacobiho-Bellmanova, 28
- Riccatiho, 32

servo problém, 42, 44

umiestnenie pólov, 39

variačný počet, 18
veta
- existencia optimálneho riadenia, 39