

Miroslav Fikar
Ján Mikleš

Identifikácia systémov

STU Bratislava

Publikácia je zameraná na výklad metód identifikácie systémov a ich praktickej implementácie pri získavaní informácií o neznámych dynamických systémoch.

Určená je hlavne študentom Chemickotechnologickej fakulty STU v Bratislave, môže však poslúžiť aj iným záujemcom, ktorí sa chcú s danou problematikou bližšie oboznámiť.

© Dr.-Ing. Miroslav Fikar, Prof. Ing. Ján Mikleš, DrSc.

Lektori: Doc. Ing. P. Hudzovič, CSc.
Doc. Ing. R. Prokop, CSc.

Publikácia neprešla redakčnou úpravou

Schválilo vedenie CHTF STU v Bratislave - č. 6/1998

ISBN 80-227-1177-2

<http://www.kirp.chtf.stuba.sk/~fikar/books/ident/index.htm>
Hypertext PDF version: 11. februára 2017

Predhovor

Publikácia „Identifikácia systémov“ je určená hlavne poslucháčom IV. a V. ročníka študujúcich na Chemicko-technologickej fakulte STU v Bratislave študijný odbor „Chemické inžinierstvo a riadenie procesov“, ale môže pomôcť aj iným záujemcom o danú problematiku. Je zameraná na výklad identifikačných metód a ich praktického použitia.

Obsah publikácie je rozdelený do štyroch kapitol. Prvá kapitola je úvodom to problematiky identifikácie, opisuje rozdelenie metód a vstupných signálov. Druhá kapitola sa zaoberá deterministickými metódami identifikácie z prechodových, frekvenčných charakteristík a metódami využívajúcimi všeobecný deterministický signál. V tretej kapitole sa objasňujú korelačné metódy vychádzajúce z Wiener-Hopfových rovníc a štatistické metódy pre statické a dynamické systémy. Odvodená je rekurzívna metóda najmenších štvorcov a jej modifikácie pre identifikáciu časovo premenných systémov. Pozornosť je venovaná aj identifikácii mnohorozmerových a spojitých systémov. Štvrtá kapitola je venovaná problémom filtrácie údajov, odhadu stavu a odvodeniu Kalmanovho filtra.

V závere sú uvedené dva dodatky. Prvý sa zaoberá základnými operáciami s maticami, pričom dôraz sa kladie na derivácie podľa vektorov. V druhom sú objasnené základy z teórie pravdepodobnosti, náhodných veličín a procesov a prechodu náhodného signálu lineárnym systémom.

Autori ďakujú doc. Ing. P. Hudzovičovi, CSc a doc. Ing. R. Prokopovi, CSc. za cenné pripomienky, ktoré pomohli odstrániť mnohé nedostatky rukopisu. Vďaka tiež patrí študentom IV. ročníka, ktorých návrhy a pripomienky pomohli pri návrhu konečnej podoby rukopisu.

Bratislava, apríl 1998

autori

Obsah

1	Úvod do identifikácie	11
1.1	Základné pojmy, predmet identifikácie systémov	11
1.2	Postup pri identifikácii	12
1.2.1	Výber štruktúry modelu a jeho verifikácia	14
1.2.1.1	Všeobecné aspekty výberu modelu	14
1.2.1.2	Apriórne informácie	15
1.2.1.3	Určenie štruktúry modelu založené na prvotnej analýze údajov	15
1.2.1.4	Porovnanie štruktúr modelov	16
1.2.1.5	Kritériá kvality identifikácie	16
1.2.1.6	Verifikácia modelu	17
1.3	Klasifikácia identifikačných metód	18
1.4	Vstupné testovacie signály	19
1.4.1	Rozdelenie vstupných signálov	19
1.4.2	Najčastejšie používané vstupné signály	20
1.4.3	Koncept identifikačnej výdatnosti	22
2	Deterministické metódy	25
2.1	Spracovanie prechodovej charakteristiky	25
2.1.1	Systém 1. rádu	26
2.1.2	Systém 2. rádu	27
2.1.3	Systém vyššieho rádu	33
2.1.4	Systémy s integračnou činnosťou	39
2.1.5	Systémy s derivačnou činnosťou	42
2.2	Všeobecný signál	42
2.2.1	Metóda konvolučného integrálu	42
2.2.2	Metóda postupnej integrácie	44
2.2.3	Autotuning	46
2.3	Frekvenčná analýza	49
2.3.1	Získanie frekvenčných charakteristík	49
2.3.2	Odhad prenosovej funkcie	53
3	Stochastické metódy	57
3.1	Korelačné metódy	57
3.1.1	Analýza lineárneho systému vo frekvenčnej oblasti	57
3.1.2	Korelačná analýza	60
3.1.3	Spektrálna analýza	61
3.2	Regresné metódy	63

3.2.1	Požiadavky na odhad parametrov	63
3.2.2	Identifikácia statických modelov	63
3.2.3	Identifikácia dynamických systémov	67
3.2.3.1	Rekurzívna MNŠ	69
3.2.3.2	Identifikovateľnosť modelu	73
3.2.3.3	Metóda pomocných premenných	74
3.2.3.4	Modifikácie základnej rekurzívnej MNŠ	75
3.2.3.5	Modely lineárnych dynamických systémov	78
3.2.3.6	Verifikácia modelov	81
3.2.3.7	Praktické otázky identifikácie	82
3.2.3.8	Mnohorozmerové systémy	84
3.2.3.9	Parametre spojitého prenosu	86
4	Filtrácia údajov a odhad stavu	89
4.1	Filtrácia nameraných údajov	89
4.2	Deterministický odhad stavu	91
4.3	Optimálny odhad stavu	93
4.4	Optimálny diskretný Kalmanov filter	96
A	Niektoré operácie s maticami	99
A.1	Základy	99
A.2	Derivácie	100
B	Pravdepodobnosť, náhodné veličiny a procesy	103
B.1	Základné pojmy teórie pravdepodobnosti	103
B.2	Náhodné veličiny	104
B.3	Náhodné procesy	110
B.4	Biely šum	116
B.5	Odozva lineárneho systému na náhodný vstup	118
	Literatúra	123

Zoznam obrázkov

1.1	Rozdelenie veličín pôsobiacich na objekt.	12
1.2	Schematický diagram postupu pri EI.	13
1.3	Vplyv veľkosti modelu na hodnotu kritéria.	16
1.4	Blokové schémy pre jednotlivé typy odchýliek.	17
1.5	Príklady na rôzne typy vstupných signálov.	20
1.6	Posuvný register dĺžky n	21
2.1	PCH systému 1. rádu.	27
2.2	PCH aperiodického systému 2. rádu.	29
2.3	PCH periodického systému 2. rádu.	31
2.4	PCH systému vyššieho rádu.	33
2.5	Určenie n, r, T Hudzovičovou metódou.	36
2.6	Priebeh prechodových charakteristík.	38
2.7	PCH jednoduchého integrátora.	40
2.8	PCH systému s integrátorom.	41
2.9	Testovací signál a odozva systému.	46
2.10	Vylepšená frekvenčná analýza.	50
2.11	Získanie rohových frekvencií a zosilnenia pomocou metódy dotyčníc.	54
3.1	Bloková schéma systému, ktorého prenos je $G(s)$	58
3.2	Vývoj rozptylu predikčných chýb ako funkcie počtu parametrov modelu.	84
3.3	Bloková schéma identifikácie parametrov spojitého prenosu	87
4.1	Systém automatického riadenia s deterministickým odhadom stavu	91
4.2	Bloková schéma lineárneho spojitého systému s konštantnými koeficientmi a rekonšuktora	92
B.1	Grafické znázornenie zákona rozdelenia diskkrétnej náhodnej veličiny a zodpovedajúcej distribučnej funkcie	105
B.2	Priebeh distribučnej funkcie spojitej náhodnej veličiny a zodpovedajúcej hustoty pravdepodobnosti	107
B.3	Realizácie náhodného procesu.	110
B.4	Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia bieleho šumu	117
B.5	Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia	118

Zoznam skratiek

ARMA	auto-regressive moving average
ARMAX	auto-regressive moving average exogenous
ARX	auto-regressive exogenous
EI	experimentálna identifikácia
FIR	finite impulse response
IV	identifikačná výdatnosť
MM	matematický model
MNŠ	metóda najmenších štvorcov
OE	output error
RMNŠ	rekurzívna metóda najmenších štvorcov
PEM	prediction error method
PCH	prechodová charakteristika

Kapitola 1

Úvod do identifikácie

1.1 Základné pojmy, predmet identifikácie systémov

Základnými pojmami pri identifikácii systémov sú reálny objekt a jeho model. Pod pojmom reálny objekt budeme mať na mysli originál, reálne zariadenie, predmet objektívnej reality, na ktorom je možné vykonať určité pozorovania (merania) za účelom poznania relácií v ňom prebiehajúcich, prípadne na ktorom možno realizovať isté experimenty (nie je nevyhnutnou podmienkou).

Mierou poznania o reálnom objekte, ktorú možno uchovať a spracovať, je informácia (presnejšie empirická informácia).

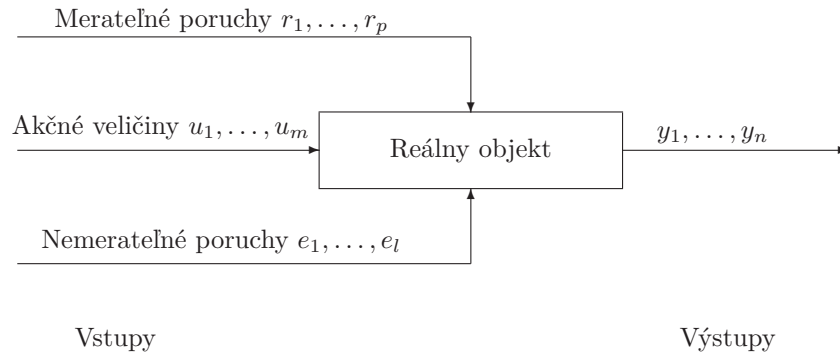
Pod modelom reálneho objektu budeme rozumieť v zásade iný systém, ktorý nejakým spôsobom napodobňuje reálny originál. Pre naše účely budeme uvažovať matematický model (MM) systému, ktorý v tvare algebraických, diferenciálnych, diferenčných rovníc, alebo pravdepodobnostných vzťahov kvantifikuje relácie medzi jednotlivými veličinami v reálnom objekte.

Oba, reálny objekt i jeho model, tvoria systémy - prvý z nich reálny systém, druhý abstraktný systém.

Klasifikáciou systémov podľa prijatých MM sa zaoberá modelovanie procesov. Najvýznamnejšími deleniami z hľadiska experimentálnej identifikácie (EI) bude delenie modelov na statické a dynamické, spojité a diskrétné, deterministické a stochastické, lineárne a nelineárne, jednorozmerové a viacrozmerové.

Ďalej, medzi triedami MM treba rozlišovať modely štruktúry a modely správania sa (vlastností). Hľadanie modelov štruktúry prostriedkami analýzy je predmetom dynamiky procesov. Výsledkom analýzy sú analytické, stavové modely. Z hľadiska EI budú pre nás zaujímavé modely vlastností, zohľadňujúce relácie medzi vstupmi a výstupmi reálneho objektu.

Pre ďalšie úvahy bude potrebné vrátiť sa ku klasifikácii vstupných veličín objektu. Budeme rozlišovať tie, ktoré možno technickým spôsobom na základe nejakého rozhodnutia meniť, ovládať. Tieto veličiny nazývame akčné. Príkladom v technologických systémoch môžu byť prietoky médií, elektrický príkon, prúd, napätie a pod. Ostatné vstupy, ktoré nemožno zámerne ovplyvňovať, sú poruchy. Tieto môžu mať charakter tzv. externej poruchy, tzn. poruchy, ktorú možno merať, ale nemožno ju ovplyvňovať. Spravidla sem patria také veličiny ako teploty a zloženia vstupných médií (surovín), výhrevnosť plynov pri spaľovacích procesoch a pod. Z hľadiska funkčného môžu mať tieto veličiny charakter stochastického (náhodného) signálu, ale aj neznámej všeobecnej deterministickej funkcie.



Obr. 1.1: Rozdelenie veličín pôsobiacich na objekt.

Ostatné poruchy sú nemerateľné a opäť môžu mať deterministický alebo stochastický charakter (čo sa však nedá overiť). Sem patria napr. nemerateľné koncentrácie, vplyv okolia a pod. Celá situácia je na obr. 1.1.

Teraz môžeme pristúpiť k definovaniu pojmu identifikácie. Podľa L. A. Zadeha je táto definícia nasledovná: *Identifikácia je určenie systému z danej triedy systémov, ku ktorému je testovaný systém na základe vstupov a výstupov ekvivalentný.*

V definícii budeme chápať ako testovaný systém reálny objekt, na ktorom uskutočňujeme merania a pod pojmom trieda systémov MM, reprezentovaný operátorom F_M (trieda operátorov je $S = \{F_M\}$).

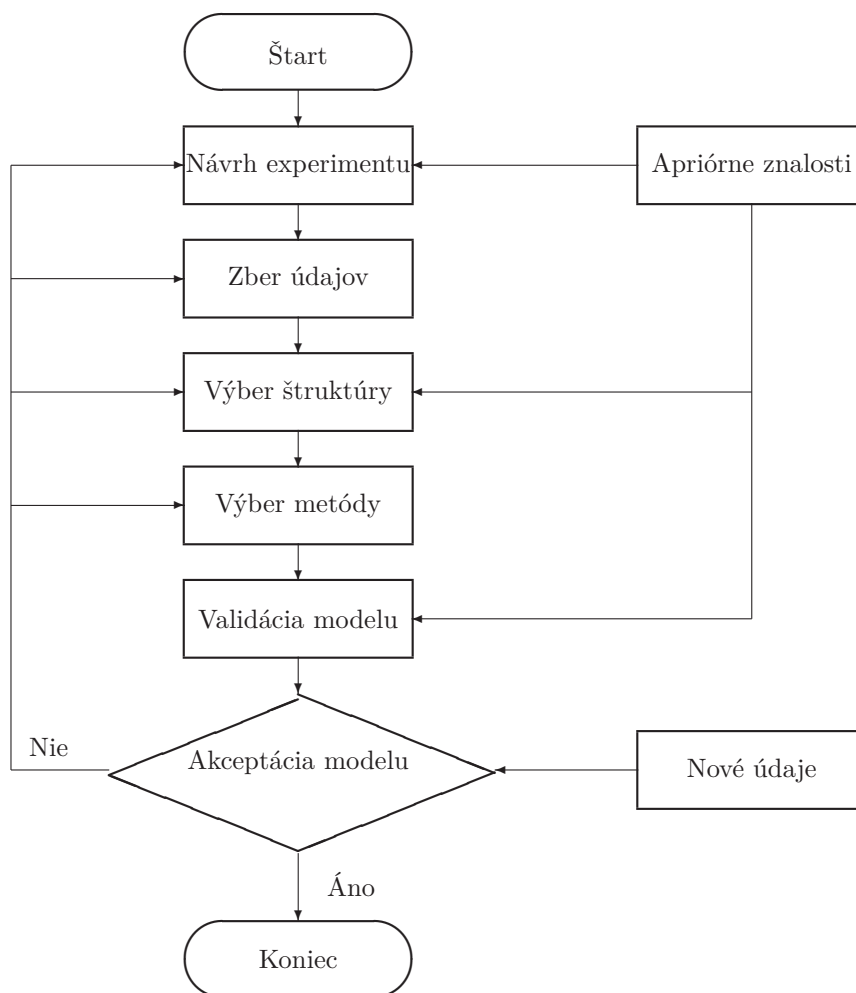
1.2 Postup pri identifikácii

Pri identifikácii sa spravidla postupuje vo viacerých etapách. Schematicky je celý postup znázornený na obr. 1.2. Najdôležitejšie kroky v tomto postupe sú nasledovné:

1. Navrhnuť štruktúru MM. V tejto etape sa zvyčajne využíva deduktívna metóda. Na základe apriórnych informácií, všeobecných fyzikálnych a fyzikálnochemických zákonitostí s použitím teórie systémov sa formuluje štruktúra identifikovaného systému v tvare matematických rovníc.
2. Parametre týchto rovníc sa určujú na báze aposteriórnych informácií, t.j. nameraných vstupno-výstupných údajov (induktívna metóda).

K tomuto postupu treba uviesť niektoré poznámky:

- V prvej etape sa často využívajú empirické a poloempirické skúsenosti o identifikovanom procese. Tieto majú často heuristický charakter. V tomto štádiu vnáša *konštruktér* navrhovanej štruktúry svoje osobné poznatky a skúsenosti, t.j. subjektívny prvok. Preto sa niekedy hovorí o „umení“ pri identifikácii.
- Niektoré apriórne informácie môžu byť výsledkom experimentu, t.j. aposteriórnych informácií, s použitím inej identifikačnej metódy. Napríklad na základe nameranej prechodovej charakteristiky sa dá usúdiť, či ide o systém prvého, alebo vyššieho



Obr. 1.2: Schematický diagram postupu pri EI.

rádu. „Lepšie“ hodnoty parametrov tejto štruktúry potom neskôr určíme inou identifikačnou metódou.

- Niekedy platí navrhnutá štruktúra iba pre určitú množinu hodnôt vstupov a výstupov, pre inú množinu údajov je nutné štruktúru modelu zmeniť.
- Ako ukazuje obr. 1.2, celý postup je niekedy nutné viac ráz opakovať. Najčastejšie dôvody iteratívneho charakteru pri identifikácii reálneho objektu sú:
 1. numerické problémy nájdenia najlepšieho modelu vzhľadom na dané kritérium,
 2. nevhodne zadané kritérium,
 3. nesprávna množina modelov,
 4. nedostatočne informatívna množina údajov.

1.2.1 Výber štruktúry modelu a jeho verifikácia

Výber vhodnej štruktúry modelu F_M je najdôležitejšou časťou pre úspešné riešenie úlohy EI. Tento výber musí byť založený na pochopení identifikačnej metódy a na informáciách o identifikovanom modeli.

Ak sme určili štruktúru modelu, identifikačná metóda nám poskytne istý model z tejto štruktúry. Tento model môže byť ten najlepší dostupný, ale zásadnou otázkou je, či je dost dobrý pre zamýšľané použitie. Testovanie vhodnosti modelu je označované ako *verifikácia modelu*.

1.2.1.1 Všeobecné aspekty výberu modelu

Pri výbere štruktúry modelu je nutné sa vopred rozhodnúť o niektorých vlastnostiach modelu. ide najmä o:

- Výber typu modelu. Rozlišujeme medzi nelineárnymi a lineárnymi, stavovými a vstupno-výstupnými modelmi. Časť vlastností modelu môže byť dopredu známa, alebo uvažujeme „black box model“¹.
- Výber veľkosti modelu - rád stavového modelu, stupne odhadovaných polynómov, atď., pričom jednotlivé modely M_i splňujú podmienku

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3, \dots \quad (1.1)$$

čo znamená, že pre určitú voľbu (prípadne zanedbanie) niektorých parametrov modelu M_3 získame model M_2 , atď.

Kvalita modelu

- Flexibilita : použite takej štruktúry modelu, ktorá poskytuje dobré vlastnosti popisu možných systémov. Dá sa dosiahnuť použitím väčšieho množstva parametrov alebo ich „strategickým“ umiestnením.
- Úspornosť : štruktúra modelu musí byť aj čo najúspornejšia, t.j. použitie minimálneho množstva parametrov, pretože ich počet rozhoduje o náročnosti výpočtov a zároveň vo veľa prípadoch iba zbytočne komplikuje model.

¹black box (čierna skrinka) je typ modelu, ktorý neobsahuje žiadne apriórne informácie o skúmanom procese

Cena modelu. Cena modelu je asociovaná s nárokmi na jeho získanie, t.j. riešenie systému rovníc, minimalizácia funkcionálu. Ovplyvňuje ju:

- Zložitosť modelu - počet parametrov.
- Vlastnosti účelovej funkcie - existencia stacionárnych bodov a pod.
- Zamýšľané použitie modelu - pre chemickoinginierske použitie je obyčajne potrebný zložitejší a podrobnejší model ako pre účely riadenia, kde je potrebné vystihnúť základné dynamické vlastnosti reálneho objektu.

Techniky výberu modelu

- Apriórne informácie,
- informácie získané z prvotnej analýzy údajov,
- porovnanie rozličných štruktúr modelu,
- verifikácia modelu.

1.2.1.2 Apriórne informácie

Typ modelu. Výber typu modelu je často subjektívny a nezávisí od nameraných údajov. Je väčšinou výsledkom kompromisov medzi aspektmi uvedenými vyššie, dostupnosťou určitých programových balíkov a vedomosťami o práci s určitými modelmi.

Kompromis medzi flexibilitou a čo najmenším množstvom parametrov je základom problému identifikácie. Obyčajne sa využívajú apriórne znalosti o systéme a intuícia. Práve tieto fakty neumožňujú spraviť z identifikácie plnoautomatizovaný postup.

Pre fyzikálne systémy je apriórna informácia najlepšie zahrnutá v spojitom modeli. Na druhej strane použitie black box modelov znižuje zložitosť modelov bez obmedzení na fyzikálne parametre.

Všeobecná rada je: „skúsiť najprv najjednoduchšie veci“. Zložité modely by mali byť použité až potom, keď jednoduchý model neobstojí pri verifikácii. Často spôsobí nelineárna transformácia údajov ľahšie odhadovanie modelu. Najmä nelineárne efekty snímačov a akčných členov sú obyčajne známe a môžu byť využité pri redefinícii vstupno-výstupných signálov.

Rád modelu. Riešenie tohto problému zvyčajne vyžaduje pomoc z experimentálnych údajov. Avšak, fyzikálne poznanie a zamýšľané použitie modelu často naznačí rád modelu.

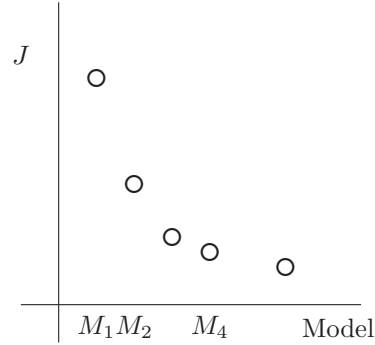
Príbuzným problémom je časový rozsah modelu. Aj je systém „stiff“ (obsahuje rozdielne veličiny s rozdielnou dynamikou), bude najlepšie získať viacero modelov, každý pokrývajúci vhodnú časť rozsahu frekvencií.

1.2.1.3 Určenie štruktúry modelu založené na prvotnej analýze údajov

Odhad typu modelu: Toto je biele miesto na mape identifikačných techník. Ale napríklad sa dá testovať prítomnosť nelineárnych efektov.

Odhad rádu systému: Existuje viacero metód, z ktorých uvedieme tri najčastejšie používané, a ktoré sú podrobnejšie uvedené v nasledujúcich kapitolách:

1. frekvenčné diagramy a spektrálna analýza,
2. testovanie hodnosti kovariančných matíc,
3. testy korelovanosti premenných a rezíduí.



Obr. 1.3: Vplyv veľkosti modelu na hodnotu kritéria.

1.2.1.4 Porovnanie štruktúr modelov

Nové údaje. Nie je prekvapujúce, ak model vyhovuje údajom, pre ktoré bol odhadovaný. Reálnym testom však je, či bude vyhovovať aj novým údajom z procesu. Takto sa dá porovnávať aj viacero modelov, pričom kritériom môže byť napr.

$$J = \sum (y - y_M)^2 \quad (1.2)$$

Výhodou takéhoto postupu je jeho pragmatický charakter, nepotrebujeme mať žiadne argumenty a predpoklady o pravdepodobnostiach a o skutočnom systéme. Nevýhodou je, že potrebujeme nové údaje a teda nemôžeme využiť všetky informácie pri návrhu modelu.

Tie isté údaje. Ak sú modely porovnané na tých istých údajoch, tak je jasné, že väčší model bude nevyhnutne dávať nižšiu alebo rovnakú hodnotu kritéria. Keď sa štruktúra modelu zväčšuje, hodnota kritéria je nerastúcou funkciou (obr. 1.3).

Treba určiť, kde sa nachádza zlom na tejto krivke. Pre tento účel bolo vypracovaných viacero kritérií, napr. AIC (Akaikeho informačné kritérium) (Ljung, 1987).

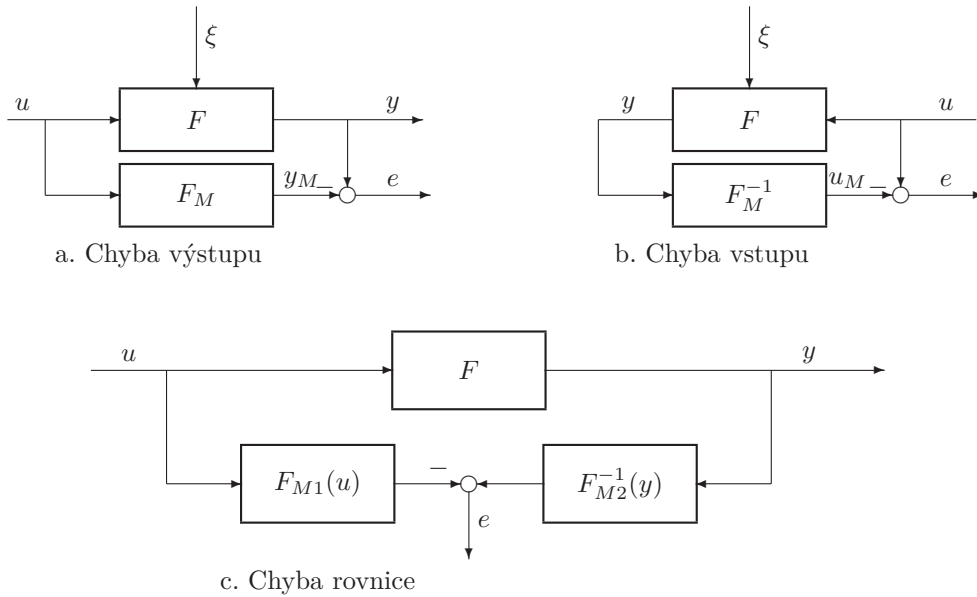
1.2.1.5 Kritériá kvality identifikácie

Pri známej štruktúre modelu zhodu modelu (operátora modelu) s operátorom objektu charakterizujeme účelovou funkciou (kritériom) $J[s(F, F_M)]$ kde s je tzv. stratová funkcia, F a F_M operátor objektu, resp. jeho modelu. Podľa účelovej funkcie možno porovnávať rôzne štruktúry modelov. Výber účelovej funkcie výrazne ovplyvňuje algoritmus riešenia úlohy identifikácie.

V prvom kroku pre kvantitatívne hodnotenie stupňa blízkosti operátorov volíme vhodnú stratovú funkciu $s(F, F_M)$. Blížkosť operátorov sa posudzuje na báze odchýliek korešpondujúcich signálov alebo parametrov operátorov modelu a objektu. Pretože priamo pozorovateľné sú predovšetkým signály, rozoznávame v zásade tri spôsoby formovania odchýlky medzi modelom a objektom.

- Chyba výstupu, kedy vytvárame odchýlku medzi výstupmi paralelne zapojeného objektu a modelu (obr. 1.4a). Vektor ξ zahŕňa merateľné aj nemerateľné poruchy. Chyba výstupu je

$$e = y - y_M = y - F_M(u) \quad (1.3)$$



Obr. 1.4: Blokové schémy pre jednotlivé typy odchýliek.

- Chyba vstupu, kedy vytvárame odchýlku na strane vstupných signálov modelu a objektu v sériovom zapojení (obr. 1.4b). Chyba je daná ako

$$e = u - u_M = u - F_M^{-1}(y) \quad (1.4)$$

u_M je vstup modelu, generujúci výstup y . Samozrejme, F_M^{-1} je inverzný operátor a teda F_M musí byť invertovateľný.

- Chyba rovnice: vo všeobecnejšom prípade môže byť chyba definovaná ako

$$e = F_{M2}^{-1}(y) - F_{M1}(u) \quad (1.5)$$

kde F_{M2} predstavuje invertovateľnú časť modelu a celý model je daný ako $F_M = F_{M1}F_{M2}$. Chyba je priamo generovaná zo vstupno-výstupného opisu ako nesúlad medzi ľavou a pravou stranou rovnice (obr. 1.4c).

1.2.1.6 Verifikácia modelu

Metóda odhadu parametrov vyberie „najlepší“ model vzhľadom na vybranú štruktúru modelu. Avšak je dôležité si položiť otázku, či je tento model dosť dobrý:

- Súhlasí model s nameranými údajmi ?
- Je model dosť dobrý pre naše účely ?
- Popisuje model skutočný proces ?

Odpoveď na tieto otázky obvykle nie je ľahká a jednoznačná. Uvádzame niektoré kritériá, naznačujúce odpoveď:

Dôvod získania modelu. V tomto prípade sa pýtame, či je získaný model vhodný na riešenie problému, ktorý motivoval celú identifikáciu. Napr. ak v prípade riadenia regulátor založený na modeli dáva uspokojivé výsledky, tak je model vhodný. Avšak môže byť neuskutočniteľné, nákladné, alebo nebezpečné, aby sa všetky modely vyskúšali. V tom prípade sa musia použiť iné metódy.

Fyzikálny zmysel parametrov. Ak je model daný parametrami, ktoré majú fyzikálnu podstatu, tak je to prirodzená a dôležitá podmienka.

Konzistencia v/v správania sa modelu. V prípade black-box modelov sa pri verifikácii ich vlastností koncentrujeme na ich vstupno-výstupné vlastnosti. Lineárne systémy znázorníme pomocou Bodeho diagramov a nelineárne systémy simuláciou. Je dobrou praxou porovnať rôzne lineárne modely pomocou Bodeho diagramov spolu s ich intervalovými odhadmi.

Redukcia modelu. Ak redukuje model a jednoduchší model má veľmi podobné vstupno-výstupné vlastnosti, tak bol model príliš zložitý a môže byť zjednodušený.

Intervalové odhady parametrov. Ak je v intervalovom odhade nejakého parametra zahrnutá aj nula, môžeme uvažovať jeho anulovanie.

1.3 Klasifikácia identifikačných metód

Existuje niekoľko možností ako klasifikovať identifikačné metódy. Uvedme jednotlivé triedy.

A identifikácia z aktívneho alebo pasívneho experimentu. Použitie jednej z týchto metód je spravidla dané možnosťami danej technológie a náročnosťou experimentu, ktorý je možné technologickým zariadením vykonať. To znamená, že je možné buď generovať na vstupoch špeciálne signály, alebo identifikovať len v run-time prevádzke.

B Z hľadiska matematického aparátu, ktorý je potrebný pri spracovaní nameraných údajov, je možné rozlíšiť nasledovné metódy:

- deterministické,
- stochastické.

Pod *deterministickými metódami* sa myslia metódy vyhodnotenia na špeciálne signály a numerické metódy výpočtu konvolučného integrálu.

Pod *stochastickým prístupom* sa rozumie numerické riešenie Wiener-Hopfovej rovnice. Zahŕňame sem aj *štatistické metódy*, kde sa vychádza z metódy najmenších štvorcov (a jej modifikácií), metódy maximálnej vierohodnosti a z Bayesovho prístupu. Každá zo štatistických metód predpokladá určité vlastnosti náhodných porúch a každá vyžaduje inú mieru znalostí o ich vlastnostiach (najmenej náročná je z tohto hľadiska MNS).

Samozrejme, že voľba metódy nie je náhodná. Závisí od úrovne hladiny náhodných rušivých zložiek, ich významnosti a ich vlastností.

C Podľa spôsobu spracovania nameraných údajov možno metódy deliť na:

- metódy pre jednorazové (dávkové) spracovanie,

- metódy priebežné (rekurzívne).

Metódy pre jednorazové spracovanie ďalej delíme na manuálne a počítačové. Metódy pre manuálne spracovanie nie sú vhodné pre počítačový výpočet, alebo sú ťažko algoritimizovateľné, pretože závisia od subjektívneho hodnotenia nejakého ukazovateľa (napr. výška inflexného bodu na nameranej prechodovej charakteristike). Počítačové jednorazové metódy spracúvajú súbor nameraných údajov metódou nie vhodnou pre manuálny výpočet (MNŠ, numerická integrácia, výpočet korelačných funkcií). Niekedy sa tieto metódy nazývajú off-line.

Priebežné metódy spracúvajú namerané údaje postupne, identifikované parametre sa spresňujú na základe každého ďalšieho merania. Sú používané rekurentné vzťahy - preto rekurzívne metódy. Použitie týchto metód je vhodné pri on-line nasadení riadiacich počítačov, sú základom pre tzv. adaptívne riadenie.

1.4 Vstupné testovacie signály

1.4.1 Rozdelenie vstupných signálov

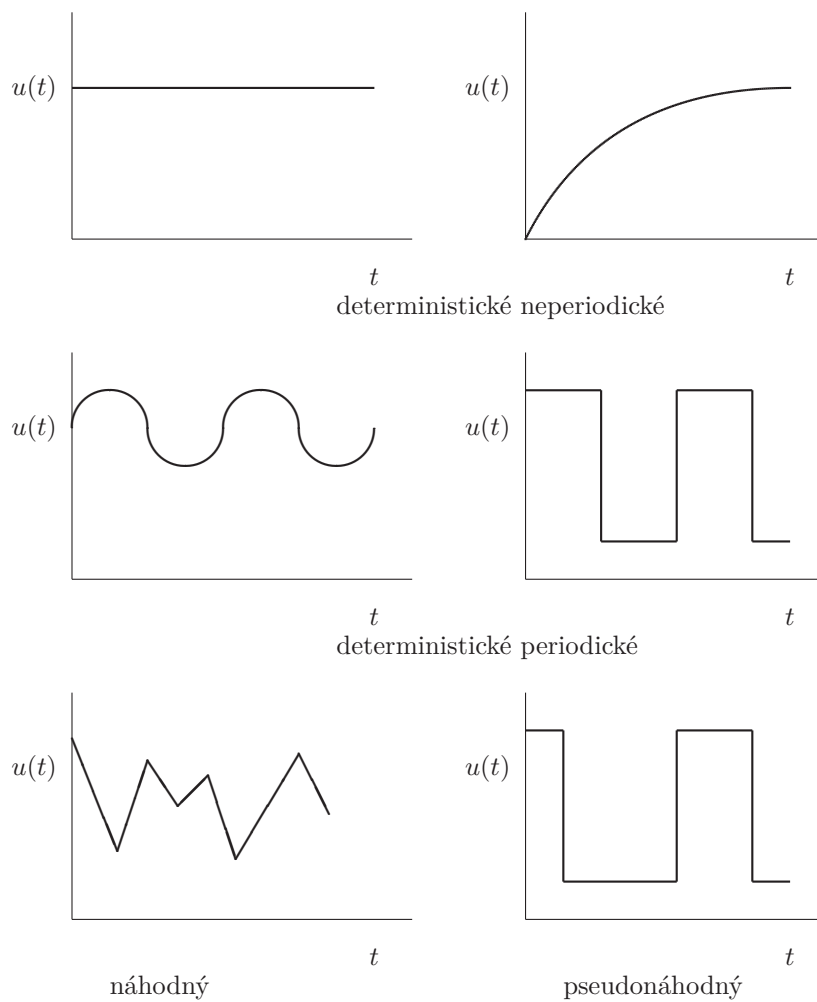
Vstupné testovacie signály môžeme triediť z rozličných hľadísk. V prvom prípade rozlišujeme prirodzené, prevádzkové signály pozorované v priebehu prevádzky (pasívny experiment) a umelo vytvárané vstupné signály s určitými vlastnosťami, privádzané na vstup (aktívny experiment). Vlastnosti signálov posudzujeme podľa ich charakteristík časových, frekvenčných, štatistických a ďalších. Signály ďalej triedime na:

- deterministické signály, ich priebehy v čase sú známe, ich hodnoty môžeme určiť pre každý časový okamih,
- náhodné signály, ich priebehy v čase sú náhodné funkcie času, môžeme určiť len ich štatistické charakteristiky,
- pseudonáhodné signály, ich priebeh v čase je známy, v rámci jednej periódy majú charakter známej realizácie náhodného procesu, tieto realizácie sa periodicky opakujú.

V týchto triedach sú možné ďalšie klasifikácie, vystačíme s nasledujúcou.

Signály :

1. deterministické signály
 - (a) periodické
 - (b) neperiodické
2. náhodné signály
 - (a) nestacionárne
 - (b) stacionárne
 - i. ergodické
 - ii. neergodické
3. pseudonáhodné signály
 - (a) dvojhodnotové



Obr. 1.5: Príklady na rôzne typy vstupných signálov.

(b) viachodnotové

Charakteristiky stacionarity a ergodicity sú podrobnejšie uvedené v dodatku B.

Ukážky rozličných vstupných testovacích signálov sú na obr. 1.5.

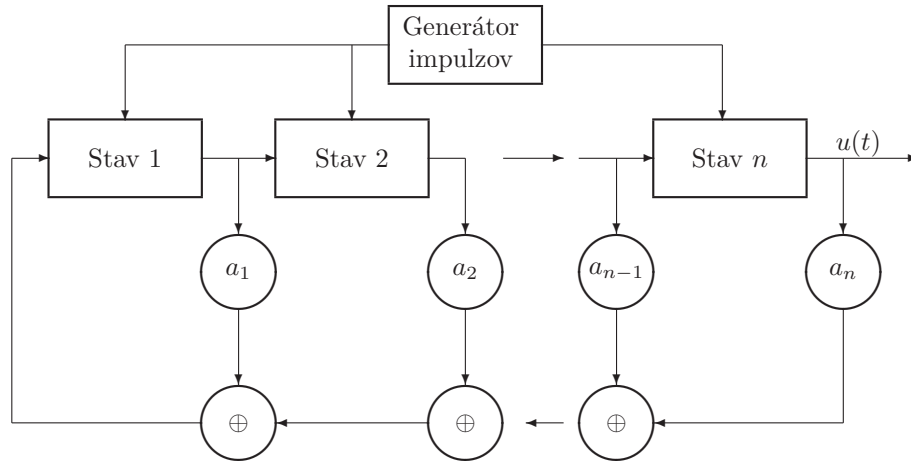
1.4.2 Najčastejšie používané vstupné signály

Vstupné signály, ktoré sa najčastejšie používajú, by mali byť ľahko realizovateľné a odozva systému na ich pôsobenie by mala byť ľahko vyhodnotiteľná.

Medzi najčastejšie používané signály patria:

1. skoková funkcia, ktorá je definovaná ako

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Obr. 1.6: Posuvný register dĺžky n .

2. pulz

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \vee t > T \\ u_0 & t \in \langle 0, T \rangle \end{cases} \quad (1.7)$$

3. suma sínusov

$$u(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad (1.8)$$

4. pseudonáhodná binárna postupnosť (PRBS - pseudorandom binary sequence) - je to dvojestavová binárna postupnosť generovaná použitím posuvného bitového registra dĺžky n s ľubovoľným nenulovým počiatočným stavom (obr. 1.6).

Pseudonáhodná binárna postupnosť je postupnosť obdĺžnikových pulzov s modulovanou šírkou, ktorá aproximuje diskretný biely šum. Pseudonáhodnosť vyplýva z faktu, že je charakterizovaná dĺžkou postupnosti, počas ktorej sa šírka pulzu mení náhodne, ale v dlhšom časovom intervale je periodická. Perióda opakovania je daná dĺžkou postupnosti n .

Register pracuje diskretné. Vždy na povel hodín sa posunú údaje jednotlivých stavov doprava a výsledný signál je daný stavom n . Pre každú dĺžku registra n sa dajú nájsť 2 z registrov, ktoré sa binárne sčítavajú tak, aby sa výsledná postupnosť $u(t)$ čo najdlhšie neopakovala. Maximálna dĺžka postupnosti je $2^n - 1$. Potrebné voľby koeficientov a_i sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

n	$2^n - 1$	$a_i = a_j = 1, a_k(k \neq i, j) = 0$
2	3	1,2
3	7	1,3
4	15	3,4
5	31	3,5
6	63	5,6
7	127	4,7
8	255	2(3,4),8
9	511	5,9
10	1023	7,10

Znak \oplus je sčítavanie dvoch binárnych čísel a je definovaný nasledovne

$$u_1 \oplus u_2 = \begin{cases} 0 & u_1 = u_2 \\ 1 & u_1 \neq u_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Charakteristickou vlastnosťou PRBS je, že dĺžka najdlhšieho pulzu je n . Pre správne nastavenie PRBS by mal byť tento čas dlhší, ako čas t_{90} prechodovej charakteristiky identifikovaného systému. Ak uvažujeme periódu vzorkovania T_v , potom platí

$$nT_v > t_{90} \quad (1.10)$$

Z tejto podmienky sa dá určiť n .

Ďalšou podmienkou je, aby dĺžka testu L nebola menšia ako dĺžka postupnosti. Musí teda platiť

$$(2^n - 1)T_v < L \quad (1.11)$$

Poznamenávame ale, že táto podmienka vedie často k príliš dlhému času trvania experimentu. Preto sa často používa zmenená frekvencia pre PRBS

$$f_{prbs} = \frac{f_v}{p}, \quad p = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

a rovnica (1.10) prejde do tvaru

$$pnT_v > t_{90} \quad (1.13)$$

1.4.3 Koncept identifikačnej výdatnosti

Vhodným vstupným signálom pre identifikáciu systému je taký, ktorý zaručí, že parametre systému budú odhadnuté správne. V teórii identifikácie sa preto zavádza koncept identifikačnej výdatnosti (persistent excitation) nasledovne:

Definícia: Signál $u(t)$ je identifikačne výdatný (IV) rádu n ak

1. existuje nasledujúca limita

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+\tau)u(t) \quad (1.14)$$

2. matica

$$\mathbf{R}_u(n) = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(n-1) \\ R_{uu}(1) & \ddots & R_{uu}(n-2) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{uu}(n-1) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

je pozitívne definitná (viď rovnicu (3.28)).

Ak je signál $u(t)$ ergodický, potom je matica $\mathbf{R}_u(n)$ jeho kovariančnou maticou.

Rád n niektorých vybraných vstupných signálov

Ak uvažujeme $u(t)$ ako biely šum s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ^2 , potom $\mathbf{R}_u(n) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$, ktorá je vždy pozitívne definitná. V tomto prípade teda platí, že biely šum je IV ľubovoľného rádu.

Ak $u(t)$ je skoková funkcia hodnoty σ , potom platí $R_{uu}(\tau) = \sigma^2$ pre ľubovoľné τ . $\mathbf{R}_u(n)$ je teda pozitívne definitná len v prípade, že $n = 1$.

Podobne sa dá ukázať, že pre impulznú funkciu je $\mathbf{R}_u(n)$ vždy nulová a teda impulz nie je IV žiadneho rádu.

Ak $u(t)$ je suma sínusov

$$u(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad (1.16)$$

potom sa dá ukázať, IV rádu m .

Signál $u(t)$ generovaný ako PRBS s n registrami, ktorý má periódu opakovania $2^n - 1$ je IV rádu $2^n - 1$.

Ak používame pre identifikáciu nejakého systému určitý signál, potom je dôležité zaručiť, aby bol jeho rád IV bol minimálne rovnaký, ako počet identifikovaných parametrov. V opačnom prípade sa môže stať, že parametre modelu nebudú odhadnuté správne. Avšak, táto podmienka platí iba pre procesy s prítomnosťou šumov. V opačnom prípade nie je koncept IV aplikovateľný. Z toho vyplýva, že identifikácia deterministických modelov z prechodovej charakteristiky je možná, ale použitie štatistických metód najmenších štvorcov pre ten istý vstupný signál prinesie nesprávne výsledky. Dôvodom je, že nezašumené systémy sú identifikovateľné aj z konečného počtu dát ($N < \infty$), kým koncept IV sa týka vlastností pre ($N \rightarrow \infty$).

Kapitola 2

Deterministické metódy

Táto kapitola je venovaná metódam, pri ktorých predpokladáme, že vstupná veličina je deterministická, čiže neuvažujeme pôsobenie náhodných veličín na systém.

Medzi užitočné deterministické signály patria:

- jednotkový skok
- harmonický signál
- všeobecný deterministický signál

Nevýhodou všetkých uvedených signálov je, že vyžadujú aktívny experiment, ktorý je nutné uskutočniť mimo bežnej prevádzky. Na druhej strane, pretože všetky metódy sú jednoducho realizovateľné, nestrácajú ani dnes na význame a slúžia najmä pri prvotnej identifikácii na získanie orientačných charakteristík skúmaného systému (zosilnenie, časové konštanty).

2.1 Spracovanie prechodovej charakteristiky

Najčastejšie používaným vstupným signálom je skoková zmena jednej zo vstupných veličín pri zachovaní ostatných vstupných veličín konštantných. Pred uskutočnením skokovej zmeny je nutné, aby bol skúmaný systém v ustálenom stave. Časový priebeh výstupnej veličiny je prechodová charakteristika.

Takto získaný priebeh je ale ešte nutné upraviť. V prvom kroku sa prechodová charakteristika posúva, aby počiatočná hodnota výstupu bola v nule. V druhom kroku sa charakteristika normalizuje vzhľadom k veľkosti skoku vstupnej veličiny.

Keďže skúmaný systém môže vo všeobecnosti byť nelineárny, je nutné vykonať niekoľko skokových zmien rozličných veľkostí a znamienok. Po odčítaní počiatočnej hodnoty výstupu od nameraných hodnôt jednotlivých prechodových charakteristík (posun) môžeme druhý krok vynechať a použiť vyhodnocovací vzorec v tvare

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \Delta u_k y_{ik}}{\sum_{k=1}^N (\Delta u_k)^2} \quad (2.1)$$

kde i je i -ty bod prechodovej charakteristiky,
 k - k -te meranie, $k = 1, \dots, N$,
 Δu_k - skoková zmena vstupu pri k -tom meraní,
 y_{ik} - hodnota výstupu pri k -tom meraní v i -tom intervale,
 \hat{y}_i - výsledná hodnota PCH v čase $t = i\Delta t$, kde Δt je perióda vzorkovania

Vzťah (2.1) na získame základe minimalizácie štvorcov odchýliek medzi jednotlivými nameranými bodmi y_{ik} a predpokladanou teoretickou hodnotou \hat{y}_i . Pre bod i platí

$$\min_{\hat{y}_i} J_i = \sum_{k=1}^N (\Delta u_k \hat{y}_i - y_{ik})^2 \quad (2.2)$$

V minime je parciálna derivácia J_i podľa \hat{y}_i rovná nule

$$\frac{\partial J_i}{\partial \hat{y}_i} = \sum_{k=1}^N 2\Delta u_k (\Delta u_k \hat{y}_i - y_{ik}) = 0 \quad (2.3)$$

z čoho priamo vyplýva rovnica (2.1).

2.1.1 Systém 1. rádu

Uvažujme náhradu modelu systému prenosom prvého rádu

$$F(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ds} \quad (2.4)$$

kde K je zosilnenie, T časová konštanta a D dopravné oneskorenie systému, ktoré potrebujeme určiť. Časová forma tejto rovnice pre výstup $y(t)$ sa dá získať pomocou spätnej Laplaceovej transformácie a je daná vzťahom

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < D \\ K \left(1 - e^{-\frac{t-D}{T}}\right) & t \geq D \end{cases} \quad (2.5)$$

Zosilnenie systému je dané ako hodnota prechodovej charakteristiky v nekonečne $K = y(\infty)$ ak skok na vstupe má jednotkovú veľkosť (obr. 2.1). Uvažujme, že poznáme dva body t_1, y_1 a t_2, y_2 na prechodovej charakteristike. Z rovnice (2.5) vyplýva

$$y_1 = K \left(1 - e^{-\frac{t_1-D}{T}}\right) \quad (2.6)$$

$$y_2 = K \left(1 - e^{-\frac{t_2-D}{T}}\right) \quad (2.7)$$

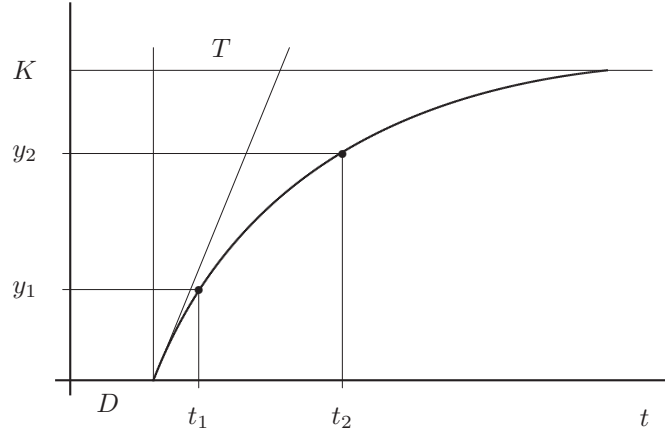
Zlogaritmovaním týchto rovníc a ich následnou úpravou dostaneme výsledné vzťahy

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln \frac{K-y_1}{K-y_2}} \quad (2.8)$$

$$D = \frac{t_2 x - t_1}{x - 1}, \quad x = \frac{\ln \frac{K-y_1}{K}}{\ln \frac{K-y_2}{K}} \quad (2.9)$$

Uvažujme napríklad odčítanie hodnôt v hodnotách výstupu 33% a 70%. Potom platí $y_1/K = 0.33$ a $y_2/K = 0.7$, takže z predošlých rovníc získame zjednodušené vzorce:

$$T = 1.245(t_{0.7} - t_{0.33}), \quad D = 1.498t_{0.33} - 0.498t_{0.7} \quad (2.10)$$



Obr. 2.1: PCH systému 1. rádu.

Hodnota T sa dá taktiež približne odčítať z prechodovej charakteristiky, ako je to naznačené na obr. 2.1, prípadne ako čas, za ktorý dosiahne výstupná veličina 63% svojej ustálenej hodnoty.

Inou metódou, ako získať hodnoty časovej konštanty a dopravného oneskorenia, je uvažovať logaritmus prechodovej funkcie

$$\frac{y}{K} - 1 = -e^{-\frac{t-D}{T}} \quad (2.11)$$

$$\ln\left(1 - \frac{y}{K}\right) = -\frac{t}{T} + \frac{D}{T} \quad (2.12)$$

Ak teda preložíme priamku bodmi funkcie (2.12), jej priesečník s časovou osou udáva hodnotu dopravného oneskorenia a priesečník v čase $t = 0$ definuje pomer D/T . Pre výpočet priamky sa obyčajne používa metóda najmenších štvorcov.

Keďže argument logaritmu musí byť kladný, je táto metóda limitovaná iba pre časť prechodovej charakteristiky, kde platí $y(t) < K$.

2.1.2 Systém 2. rádu

Aperiodický systém

Dve rovnaké časové konštanty Uvažujme náhradu modelu systému prenosom druhého rádu s rovnakými časovými konštantami

$$F(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} e^{-Ds} \quad (2.13)$$

kde K je zosilnenie, T časová konštantka a D dopravné oneskorenie. Rovnicu prechodovej charakteristiky získame pomocou spätnej Laplaceovej transformácie

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t-D}{T}} \left(1 + \frac{t-D}{T} \right) \right) \quad (2.14)$$

Zosilnenie systému je dané podobne ako v predchádzajúcom prípade ako hodnota prechodovej charakteristiky v nekonečne $K = y(\infty)$.

Pre výpočet časovej konštanty a dopravného oneskorenia použijeme postup analogický ako v predošlom prípade vedúci k rovnici (2.10). Zavedme si normalizovaný čas t_n daný ako

$$t_n = \frac{t - D}{T} \quad (2.15)$$

pomocou ktorého bude normalizovaná rovnica (2.14) v tvare

$$\frac{y(t)}{K} = 1 - e^{-t_n} (1 + t_n) \quad (2.16)$$

Uvažujme napríklad odčítanie hodnôt v hodnotách výstupu 33% a 70%. Potom platí $y_1/K = 0.33$ a $y_2/K = 0.7$. Predošlú rovnicu nie je možné riešiť analyticky, ale iba numericky a získame

$$t_{n1} = 1.1796, \quad t_{n2} = 2.4392 \quad (2.17)$$

Z rovnice (2.15) potom dostaneme

$$T = 0.7939(t_{0.7} - t_{0.33}), \quad D = 1.9365t_{0.33} - 0.9365t_{0.7} \quad (2.18)$$

Nerovnaké časové konštanty Uvažujme náhradu modelu systému prenosom druhého rádu s rozdielnymi časovými konštantami

$$F(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (2.19)$$

kde K je zosilnenie, T_1, T_2 časové konštanty, ktoré potrebujeme určiť. Časová forma tejto rovnice pre vstup $U(s) = 1/s$ je výstup $y(t)$ a dá sa získať pomocou spätnej Laplaceovej transformácie ako

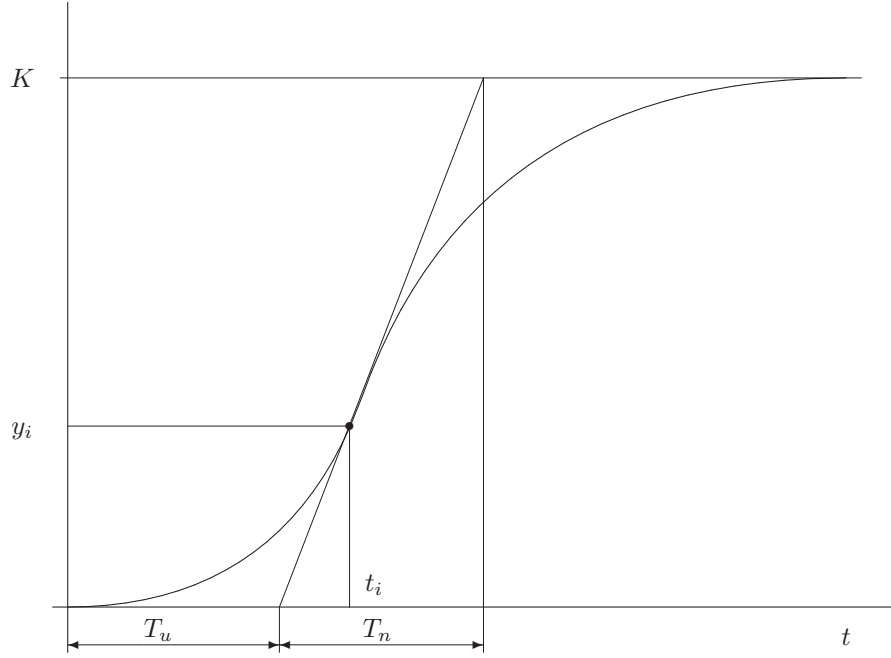
$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.20)$$

Zosilnenie systému je dané podobne ako v predchádzajúcom prípade ako hodnota prechodovej charakteristiky v nekonečne $K = y(\infty)$.

Uvažujme, že sme odmerali pomocou prechodovej charakteristiky čas prietahu T_u a čas nábehu T_n (obr 2.2). Úlohou je na základe týchto dvoch časov odvodiť vzťahy umožňujúce získať hodnoty časových konštant. Budú nás zaujímať nasledovné závislosti: ak $T_2/T_1 = k$, potom $T_n/T_u = f_1(k)$, $T_n/T_1 = f_2(k)$, z ktorých sa dajú získať T_1, T_2 .

Pri odvodení využijeme nasledovné tvrdenia:

1. Dotyčnica prechodovej charakteristiky v inflexnom bode $[t_i, y_i]$ je daná rovnicou $p : y = a + bt$,
2. Priamka p prechádza bodmi $[T_u, 0], [T_u + T_n, K], [t_i, y_i]$ a platí $b = K/T_n$ a $a = -T_u b$,
3. Smernica priamky je daná ako $b = \dot{y}(t_i)$,
4. $\ddot{y}(t_i) = 0$ (inflexný bod).



Obr. 2.2: PCH aperiodického systému 2. rádu.

Pre prvú a druhú deriváciu sa dajú z (2.20) odvodiť vzťahy

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.21)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(-\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.22)$$

Čas t_i je možné získať na základe tvrdenia 4 a rovnice (2.22) ako

$$t_i = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.23)$$

Pomocou tvrdenia 3 vypočítame hodnotu smernice b priamky p

$$b = \dot{y}(t_i) \quad (2.24)$$

$$= \frac{K}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} = \frac{K}{T_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}} \quad (2.25)$$

Hodnota T_n sa dá určiť pomocou tvrdenia 2 ako

$$T_n = \frac{K}{b} = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}} \text{ alebo } = T_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1}{T_2 - T_1}} \quad (2.26)$$

Na záver je možné vypočítať hodnotu T_u z tvrdenia 2

$$T_u = -\frac{a}{b} = -\frac{y_i - bt_i}{b} = t_i - \frac{y_i}{b} \quad (2.27)$$

$$= t_i - \frac{1}{K} T_n y_i \quad (2.28)$$

Úpravou tohto vzťahu dostaneme

$$T_u = t_i - T_n + T_1 + T_2 = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} - T_n + T_1 + T_2 \quad (2.29)$$

Definujme si pomer časových konštánt ako $k = T_2/T_1$. Z rovníc (2.26), (2.29) potom vyplýva

$$\frac{T_n}{T_u} = f_1(k) = \frac{1}{k^{-\frac{k}{k-1}} \left[1 + k + \frac{k}{k-1} \ln k \right] - 1} \quad (2.30)$$

$$\frac{T_n}{T_1} = f_2(k) = k^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.31)$$

Závislosti $f_1(k)$, $f_2(k)$ sa dajú spracovať vo forme tabuľky alebo diagramu. Niektoré z hodnôt sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

k	$f_2(k)$	$f_1(k)$
0.05	1.171	31.737
0.10	1.292	20.088
0.20	1.495	13.974
0.40	1.842	10.910
0.80	2.441	9.720
0.90	2.581	9.665
0.95	2.650	9.653
0.99	2.705	9.649
1.05	2.786	9.652
1.10	2.853	9.662
1.30	3.117	9.748
2.00	4.000	10.355

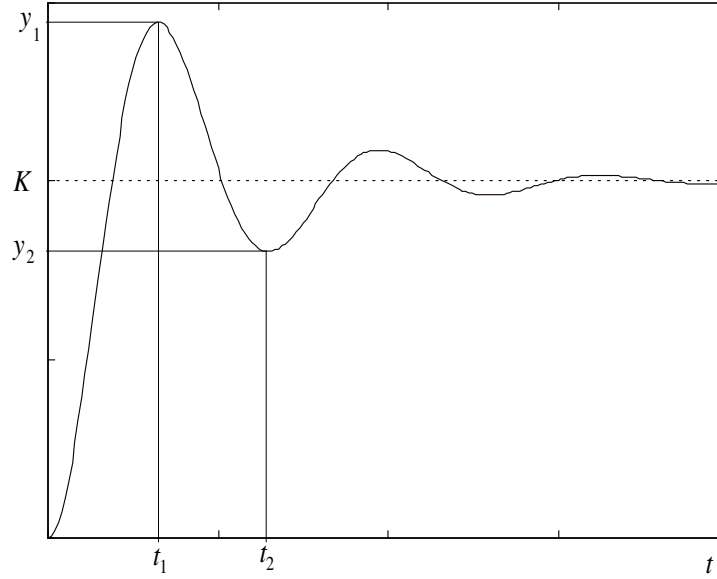
Postup pri určovaní časových konštánt je potom nasledujúci:

1. Nakreslí sa PCH, zistia sa hodnoty konštánt T_u, T_n a vypočíta sa ich podiel $T_n/T_u = f_1(k)$,
2. Pomocou tabuľky alebo grafu so závislosťami $f_i(k)$ sa odčíta pre dané $f_1(k)$ hodnota k ,
3. Pre dané k sa zistí hodnota $f_2(k)$ a odhad časovej konštanty $T_1 = T_n/f_2(k)$,
4. Hodnota časovej konštanty T_2 sa vypočíta podľa vzťahu $T_2 = k T_1$.

Poznamenávame, že ak hodnota f_1 odčítaná z prechodovej charakteristiky je menšia ako 9.65, potom nie je možné aproximovať chovanie systému prenosom druhého rádu s nerovnakými časovými konštántami.

V tejto metóde nie je možné určiť dopravné oneskorenie. Toto je možné odhadovať na základe času od uskutočnenia skokovej zmeny do počiatku zmeny výstupnej veličiny. Iný spôsob, ktorý zahŕňa aj odhad dopravného oneskorenia, je popísaný v Švec a kol. (1975).

Príklad 2.1 Z nameranej prechodovej charakteristiky systému boli odčítané hodnoty $T_u = 2\text{s}$, $T_n = 23\text{s}$. Z toho vyplýva $f_1 = 11.5$, $k = 0.33$ (alebo $k = 3.0$). Z tabuľky interpolujeme hodnotu $f_2 = 1.7$ a hodnoty časových konštánt $T_1 = 13.5\text{s}$, $T_2 = 4.4\text{s}$.



Obr. 2.3: PCH periodického systému 2. rádu.

Kmitavý systém

V prípade, že prechodová charakteristika skúmaného procesu vykazuje kmitavý charakter (obr. 2.3), nie je možné použiť predošlú metódu. V tomto prípade sa dá skúsiť aproximácia objektu vlastným systémom druhého rádu s prenosom v tvare

$$F(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} \quad (2.32)$$

Úlohou je pre dané body $[t_1, y_1]$, $[t_2, y_2]$ a ustálenú hodnotu $y(\infty)$ určiť hodnoty zosilnenia K , vlastnej frekvencie ω_0 , časovej konštanty $T = 1/\omega_0$ a tlmenia ξ . Pri odvodení využijeme fakt, že derivácia prechodovej charakteristiky v bodoch t_i (lokálne extrémny) je nulová.

Zosilnenie systému je dané podobne ako v predchádzajúcich prípadoch ako hodnota prechodovej charakteristiky v nekonečne $K = y(\infty)$.

Na tomto mieste tiež uvedieme odvodenie rovnice prechodovej charakteristiky. Rovnica PCH v Laplaceovej transformácii je v tvare

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{K\omega_0^2}{s(s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2)} \quad (2.33)$$

Využijeme metódu rozkladu daného zlomku na parciálne zlomky a porovnáme ich koeficienty

$$Y(s) = \frac{K\omega_0^2}{s(s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2)} = K \left[\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} \right] \quad (2.34)$$

$$= K \left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_0}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} \right] \quad (2.35)$$

Druhý člen na pravej strane sa dá upraviť na súčet obrazov tlmených trigonometrických funkcií pomocou doplnenia menovateľa na úplný štvorec

$$\frac{s + 2\xi\omega_0}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2} = \frac{s + 2\xi\omega_0}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2 - \omega_0^2\xi^2} \quad (2.36)$$

$$= \frac{s + \xi\omega_0}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi\omega_0}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \quad (2.37)$$

$$= \frac{s + \xi\omega_0}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2 P^2} + \frac{\xi}{P} \frac{\omega_0 P}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2 P^2} ; P = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.38)$$

Dosadením do (2.35) dostaneme

$$Y(s) = K \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_0}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2 P^2} - \frac{\xi}{P} \frac{\omega_0 P}{(s + \omega_0\xi)^2 + \omega_0^2 P^2} \right] \quad (2.39)$$

Spätnou Laplaceovou transformáciou využitím nasledovných vzťahov

$$e^{-at} \sin \omega t \equiv \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (2.40)$$

$$e^{-at} \cos \omega t \equiv \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} \quad (2.41)$$

získame časový priebeh $y(t)$

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{P} e^{-\xi\omega_0 t} (P \cos(\omega_0 P t) + \xi \sin(\omega_0 P t)) \right] \quad (2.42)$$

Členy v okrúhlych zátvorkách sa dajú upraviť pomocou súčtového vzorca $\sin(a + \tau)$. V našom prípade platí $a = \omega_0 P t$, $\xi = \cos \tau$, $P = \sin \tau$. Platí

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{P} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 P t + \tau) \right] ; \tau = \arccos \xi \quad (2.43)$$

Derivovaním $y(t)$ podľa času dostaneme

$$\dot{y}(t) = K \frac{\omega_0}{P} e^{-\xi\omega_0 t} [\xi \sin(\omega_0 P t + \tau) - P \cos(\omega_0 P t + \tau)] \quad (2.44)$$

$$= K \frac{\omega_0}{P} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 P t) \quad (2.45)$$

kde bol opäť využitý súčtový vzorec $\sin(a - \tau)$. V bodoch lokálnych extrémov musí platiť

$$\dot{y}(t_k) = 0 \iff \sin(\omega_0 P t_k) = 0 \Rightarrow t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 P} \quad (2.46)$$

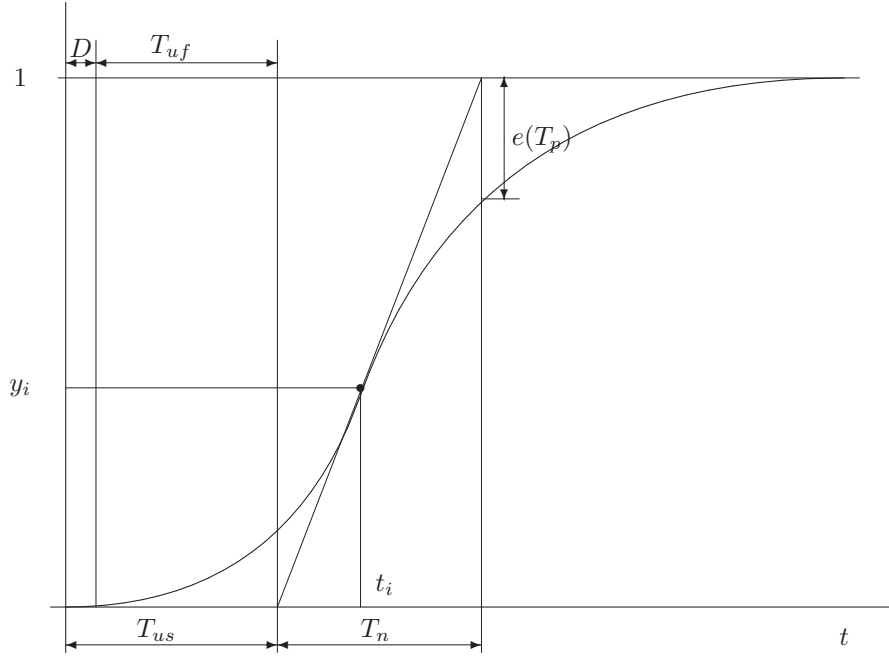
Dosadením t_k do rovnice výstupu (2.43) dostaneme

$$y(t_k) = K \left[1 - \frac{1}{P} e^{-\frac{1}{P} k\pi\xi} \sin(k\pi + \tau) \right] \quad (2.47)$$

$$= K \left[1 - (-1)^k \left(e^{-\frac{1}{P} \pi\xi} \right)^k \right] \quad (2.48)$$

$$= K(1 - (-1)^k M^k), \quad M = e^{-\frac{1}{P} \pi\xi} \quad (2.49)$$

Postup získavania neznámych parametrov je potom nasledovný:



Obr. 2.4: PCH systému vyššieho rádu.

1. $K = y(\infty)$,
2. $y_1 = K(1 + M), y_2 = K(1 - M^2) \Rightarrow M = \frac{y_1 - y_2}{y_1}$,
3. $M = e^{-\frac{1}{P}\pi\xi} \Rightarrow \xi = \left| \frac{\ln M}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M)^2}} \right|, P = \sqrt{1 - \xi^2}$
4. $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 P}, t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0 P} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{(t_2 - t_1)P}, T = 1/\omega_0$.

2.1.3 Systém vyššieho rádu

Strejcova metóda

Uvažujme náhradu modelu systému prenosom n -tého rádu

$$F(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} e^{-Ds} \quad (2.50)$$

kde K je zosilnenie, T časová konštanta, D dopravné oneskorenie systému a n rád systému, ktoré potrebujeme určiť.

Skúmame vlastnosti normovanej PCH pre prípad $D = 0$ v tvare (obr. 2.4)

$$F(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^n} \quad (2.51)$$

Postup odvodenia je rovnaký ako pre prípad aperiodického systému 2. rádu. Časová forma normovanej PCH pre výstup $y(t)$ sa dá získať pomocou spätnej Laplaceovej trans-

formácie a je daná vzťahom

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{T}\right)^k \quad (2.52)$$

Vypočítame prvú a druhú deriváciu y

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.53)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{T^n} \left[\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{T} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.54)$$

V inflexnom bode platí $\ddot{y}(t_i) = 0$

$$t_i = T(n-1) \quad (2.55)$$

Prvá derivácia v čase t_i je

$$\dot{y}(t_i) = \frac{(n-1)^{n-1}}{T(n-1)!} e^{-(n-1)} \quad (2.56)$$

Z obrázku je zrejmé, že platí $\dot{y}(t_i) = 1/T_n$ a teda

$$\frac{T}{T_n} = \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(n-1)} = g(n) \quad (2.57)$$

Vidíme, že táto funkcia je len funkciou n .

Podobnými úpravami ako pre systém 2. rádu sa dá odvodiť vzťah medzi T_u a T_n

$$\frac{T_u}{T_n} = e^{-(n-1)} \left[\frac{(n-1)^n}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (n-1)^k \right] - 1 = f(n) \quad (2.58)$$

Táto funkcia je opäť iba funkciou n .

Na základe rozličných hodnôt n môžeme zostrojiť nasledujúcu tabuľku:

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	0.000	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493
$g(n)$	1.000	0.368	0.271	0.224	0.195	0.161

Postup pri identifikácii je nasledovný:

1. Z nameranej PCH určiť hodnoty $K = y(\infty)$, T_{us} , T_n ,
2. Určiť podiel $f_s = T_{us}/T_n$,
3. V tabuľke vybrať rád systému n_0 tak, aby platilo

$$f(n_0) \leq f_s < f(n_0 + 1),$$

4. Dopravné oneskorenie D sa určí ako rozdiel medzi skutočným a fiktívnym časom nábehu T_u

$$D = [f_s - f(n_0)]T_n$$

pretože platí $T_u = T_n f(n)$,

5. Časová konštanta T sa určí pomocou hodnôt z riadku funkcie $g(n)$ pre príslušné n_0 . Odčíta sa $g(n_0)$ a T sa určí ako

$$T = T_n g(n_0).$$

Broidova metóda

Predpoklad zhody všetkých časových konštánt nemusí byť vždy splnený. Broida zaviedol prenos

$$F(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{T}{k}s + 1\right)} e^{-Ds} \quad (2.59)$$

Analogicky ako pri Strejcovej metóde boli odvodené funkcie $f(n), g(n)$, ktorých hodnoty udáva nasledujúca tabuľka

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	0.000	0.096	0.192	0.268	0.331	0.385
$g(n)$	1.000	0.500	0.440	0.420	0.410	0.400

Postup pri identifikácii je rovnaký ako pri Strejcovej metóde.

Hudzovičova metóda

K ďalšiemu zovšeobecneniu prenosu vyššieho rádu zaviedol Hudzovič (1986) prenos

$$F(s) = \frac{K}{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{T}{1 - i\frac{r}{n-1}}s\right)} e^{-Ds} \quad (2.60)$$

Identifikované parametre sú $\{K, T, n, r, D\}$ a $0 \leq r < 1$. Parameter r sa nazýva parameter rozloženia časových konštánt. Platí

$$0 \leq r = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} < 1 \quad (2.61)$$

Pre jeho rozličné hodnoty možno dostať Strejcov ($r = 0$) a Broidov ($r = fr1 - nn$) tvar. Keďže počet identifikovaných parametrov sa zvýšil o jeden, je potrebné zväčšiť aj počet nameraných údajov. Ako vhodná sa ukázala hodnota rozdielu doplnku normovanej PCH od ustáleného stavu (obr. 2.4) v čase $T_u + T_n = T_p$ daná ako $e_p(T_p) = 1 - y(T_p)$.

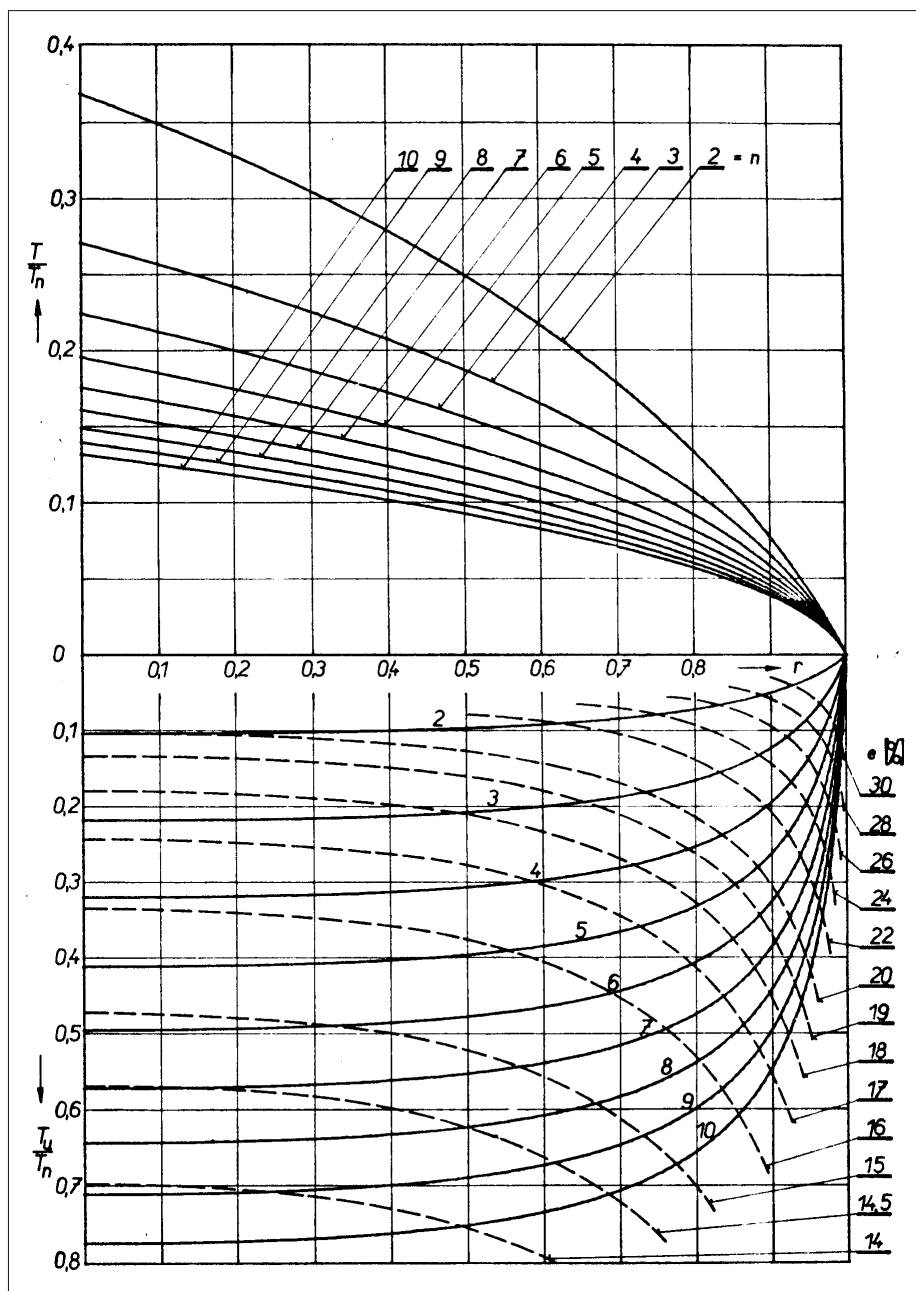
K identifikácii sa používajú nomogramy (viď obr. 2.5). Postup je nasledovný: Obvyklým spôsobom určíme zosilnenie K . Potom prechodovú charakteristiku normujeme tak, aby sa výstup zo systému blížil k jednotke. Z normovanej PCH určíme pomer $f_s = T_u/T_n$ a doplnok $e(T_p)$. V dolnej časti grafu určíme priesečník týchto údajov, ktorý udáva pracovný bod $P(n, r)$. Keďže vo všeobecnosti nebude tomuto bodu zodpovedať celočíselná hodnota n , presunieme sa do nového pracovného bodu $P(n_0, r_0)$, pričom sa presúvame k nižším hodnotám f_s pri zachovaní konštantného e .

Novým pracovným bodom $P(n_0, r_0)$ je teda určený rád systému n_0 , parameter rozloženia časových konštánt r_0 a modifikovaná hodnota funkcie $f_s(n_0, r_0)$. Na jej základe určíme podobne ako pri Strejcovej metóde hodnotu dopravného oneskorenia vzťahom

$$D = [f_s(n, r) - f_s(n_0, r_0)] T_n \quad (2.62)$$

Časovú konštantu T určíme na základe horného grafu, kde pre dané n_0 odčítame pomer T/T_n a vypočítame T .

Príklad 2.2 Z nameranej prechodovej charakteristiky boli odčítané nasledovné hodnoty: $K = 1$, $T_n = 21.2\text{s}$, $T_u = 3.3\text{s}$, $e(T_p) = 24\%$. Z nich bol vypočítaný pomer $T_u/T_n = 0.16$. Z dolnej časti obr. 2.5 boli odčítané hodnoty $n_0 = 3$, $r_0 = 0.88$, $f_s(n_0, r_0) = 0.135$. Na



Obr. 2.5: Určenie n, r, T Hudzovičovou metódou. (Nomogram prevzatý z publikácie: [Hudzovič \(1986\)](#))

základe vzťahu (2.62) sa určilo oneskorenie $D = 0.53s$. Nakoniec z hornej časti grafu sa odčítal pomer $T/T_n = 0.07$ a vypočítala hodnota časovej konštanty $T = 1.48s$. Výsledný prenos je teda v tvare

$$F(s) = \frac{1}{(1 + Ts)(1 + \frac{T}{1-r/2}s)(1 + \frac{T}{1-r}s)} e^{-0.53s} \quad (2.63)$$

$$F(s) = \frac{1}{(1 + 1.48s)(1 + 2.64s)(1 + 12.33s)} e^{-0.53s} \quad (2.64)$$

Thal-Larsenova metóda

Slúži na identifikáciu parametrov prenosu 3. rádu

$$F(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} e^{-Ds} \quad (2.65)$$

kde časové konštanty sú viazané vzťahom

$$T_2 = T_3 = \mu T_1, \quad 0 \leq \mu < 1 \quad (2.66)$$

Identifikované parametre sú $\{K, D, T_1, \mu\}$. Metóda využíva odčítanie hodnôt t_{10}, t_{40}, t_{80} , t.j. časov, keď PCH dosiahne 10, 40, 80% svojej ustálenej hodnoty. Na určenie parametrov slúžia vypracované diagramy (Unbehauen a Rao, 1987).

Šalamonova metóda

Slúži k identifikácii parametrov prenosu

$$F(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^{n-1}(mTs + 1)}, \quad \text{kde } 0 \leq m < 1 \quad (2.67)$$

Dopravné oneskorenie treba eliminovať pred začatím postupu. K identifikácii parametrov $\{K, T, n, m\}$ sa používajú semilogaritmické PCH diagramy (Hudzovič, 1986).

Iteračná metóda odhadu prenosu

V doteraz uvedených metódach odhadu prenosu z prechodovej charakteristiky stačilo odmerať len zopár údajov. Preto boli vhodné na ručné spracovanie. Existujú aj metódy, ktoré sú vhodné na počítačové spracovanie. Vyberieme jednu, ktorá sa snaží minimalizovať plochu odchýlky medzi skutočnou a vypočítanou prechodovou charakteristikou (Moncman et al., 1972).

Uvažujme normalizovaný prenos v tvare

$$F(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^n} \quad (2.68)$$

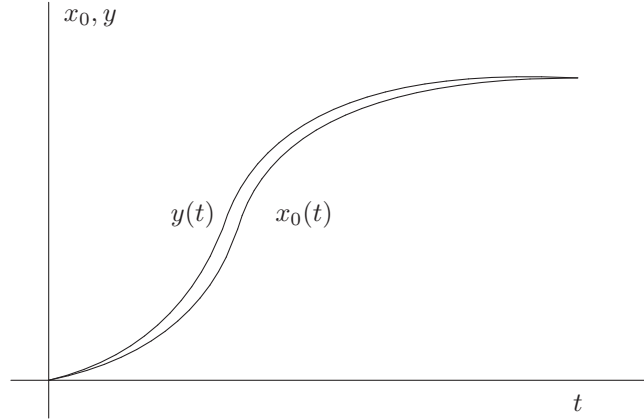
a predpokladajme, že výstup systému je $y(t)$.

Zvoľme si náhradný prenos

$$\hat{F}(s) = \frac{1}{(1 + T_0s)^n} \quad (2.69)$$

ktorého výstupnú veličinu označíme ako $x_0(t)$. Definujme si odchýlku $\epsilon(t)$ medzi aktuálnym a vypočítaným výstupom zo systému v tvare (obr. 2.6)

$$\epsilon(t) = x_0(t) - y(t) \quad (2.70)$$



Obr. 2.6: Priebeh prechodových charakteristík.

Zvolme si koncový čas T_m , keď je už PCH ustálená a vypočítajme integrál odchýlky $\epsilon(t)$ ako

$$P = \int_0^{T_m} \epsilon(t) dt = A_0 T_m \quad (2.71)$$

Pomocou druhej rovnosti môžeme vypočítať výšku obdĺžnika A_0 , ktorého plocha je rovnaká ako P .

Jednou z možností, ako teraz vylepšiť odhad $x_0(t)$, je

$$x_1(t) = x_0(t) - A_0 \quad (2.72)$$

ktorý zodpovedá prenosu

$$\hat{F}(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s)^n} \quad (2.73)$$

Potom platí

$$\frac{1}{(1 + T_1 s)^n} = \frac{1}{(1 + T_0 s)^n} - A_0(1 - e^{-T_m s}) \quad (2.74)$$

Rozvojom tejto rovnice do Taylorovho radu a uvažujúc iba lineárne členy dostaneme vzťah pre iteráciu časovej konštanty

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{n} A_0 T_m \quad (2.75)$$

Tento rekurentný vzťah môžeme zovšeobecniť ako

$$T_{i+1} = T_i + \frac{P_i}{n} \quad (2.76)$$

a opakujeme ho dotedy, kým hodnota integrálu P_i neklesne pod vopred stanovenú hodnotu.

Kritériom pre odhad rádu n je korelačný koeficient medzi x_i, y definovaný vzťahom

$$R_{xy} = \sqrt{\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \epsilon^2(t) dt} \quad (2.77)$$

Tento vypočítame pre rozličné hodnoty n a vyberieme z nich najlepšiu.

Celý postup sa dá napísať nasledovne:

1. Zvoľme si $n = 1$, počiatočnú hodnotu časovej konštanty T_0 , toleranciu α , dostatočnú dĺžku prechodovej charakteristiky T_m a maximálny počet iterácií I_m . Nastavme počítadlo iterácií na $i = 0$.
2. Vypočítajme trajektóriu $x_i(t)$ a hodnotu integrálu P_i z (2.71).
3. Ak $|P_i^n| \leq \alpha$ potom je T_i^n riešením pre dané n a vypočítame R_{xy}^n podľa (2.77).
4. Ak $|P_i^n| > \alpha$ a $i < I_m$ potom vypočítajme T_{i+1}^n , $i := i + 1$ a vráťme sa na bod 2
5. Ak $|P_i^n| > \alpha$ a $i \geq I_m$ potom vypočítame R_{xy}^n podľa (2.77).
6. Ak $n = 1$ a $R_{xy}^n < R_{xy}^{n-1}$ potom zväčšíme rád n o jednotku, nastavíme $T_0^{n+1} = T_i^n$, vynulujeme počítadlo $i = 0$ a vráťme sa na bod 2.
7. Ak $R_{xy}^n \geq R_{xy}^{n-1}$ potom je T_i^{n-1} optimálna pre rád $n - 1$.

V [Moncman et al. \(1972\)](#) sú uvedené aj iteračné postupy pre prenosy v tvare

$$F(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^n} e^{-Ds} \quad (2.78)$$

$$F(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^n (1 + kTs)}, \quad 0 < k < 1. \quad (2.79)$$

2.1.4 Systémy s integračnou činnosťou

Jednoduchý integrátor

Uvažujme náhradu modelu systému prenosom jednoduchého integrátora

$$F(s) = \frac{K}{s} \quad (2.80)$$

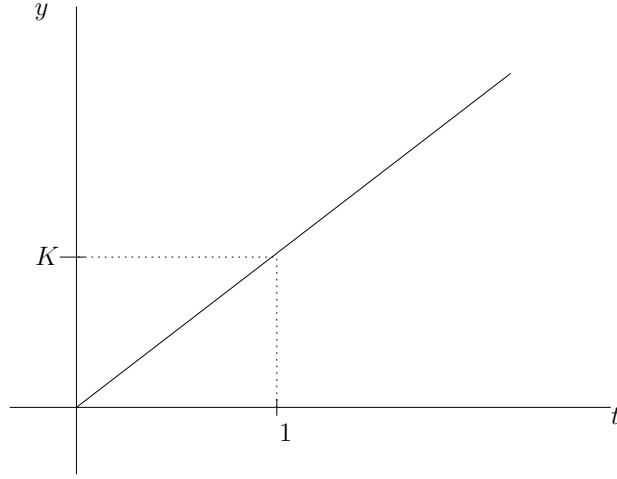
kde K je zosilnenie, ktoré potrebujeme určiť. Časová forma tejto rovnice pre výstup $y(t)$ sa dá získať pomocou spätnej Laplaceovej transformácie a je daná vzťahom

$$y(t) = Kt \quad (2.81)$$

Smernica prechodovej charakteristiky je daná ako

$$\dot{y}(t) = K \quad (2.82)$$

takže K je hodnota prírastku PCH za jednu sekundu pre jednotkový skok na vstupe (obr. 2.7).



Obr. 2.7: PCH jednoduchého integrátora.

Systém obsahujúci integrátor

Uvažujme náhradu modelu systému prenosom n -tého rádu a s integračnou činnosťou

$$F(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)^n} \quad (2.83)$$

kde K je zosilnenie a T časová konštanta, ktoré potrebujeme určiť.

V čase idúcom do nekonečna má prechodová charakteristika nasledovné vlastnosti (obr. 2.8):

- smernica prechodovej charakteristiky má sklon

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Y(s) = K \quad (2.84)$$

Hodnotu K teda určíme ako u jednoduchého integrátora zo smernice asymptoty prechodovej charakteristiky pre $t \rightarrow \infty$.

- prechodovú charakteristiku môžeme aproximovať priamkou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K(t - t_0) \quad (2.85)$$

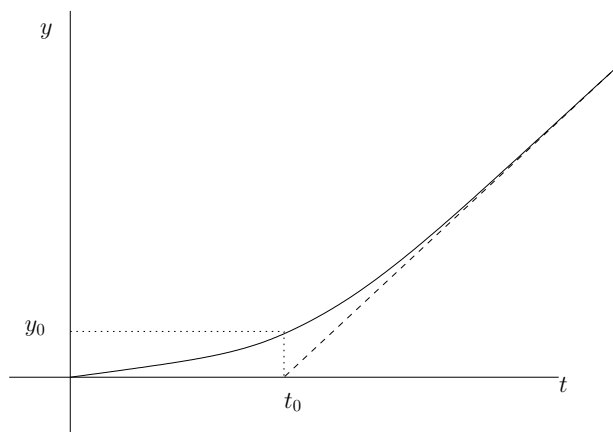
Pre jednotlivé rády sú prechodové funkcie v nasledovnom tvare

$$n = 1 : y(t) = K \left(-T + t + T e^{-t/T} \right) \quad (2.86)$$

$$n = 2 : y(t) = K \left(-2T + t + 2T e^{-t/T} + t e^{-t/T} \right) \quad (2.87)$$

$$n = 3 : y(t) = K \left(-3T + t + 3T e^{-t/T} + 2t e^{-t/T} + \frac{t^2}{2T} e^{-t/T} \right) \quad (2.88)$$

$$n = 4 : y(t) = K \left(-4T + t + 4T e^{-t/T} + 3t e^{-t/T} + \frac{t^2}{T} e^{-t/T} + \frac{t^3}{6T^2} e^{-t/T} \right) \quad (2.89)$$



Obr. 2.8: PCH systému s integrátorom.

Pre čas t_0 platí vo všeobecnosti

$$t_0 = nT \quad (2.90)$$

Hodnota $y_0 = y(t_0)$ je teda daná ako

$$n = 1 : y_0 = Kt_0e^{-1} \quad (2.91)$$

$$n = 2 : y_0 = 2Kt_0e^{-2} \quad (2.92)$$

$$n = 3 : y_0 = 4.5Kt_0e^{-3} \quad (2.93)$$

$$n = 4 : y_0 = \frac{32}{3}Kt_0e^{-4} \quad (2.94)$$

Na základe týchto údajov je postup pri identifikácii nasledovný:

1. Zo smernice asymptoty určíme K
2. Odčítame t_0 ako čas, v ktorom pretína asymptota os x
3. Odčítame z prechodovej charakteristiky y_0 a vypočítame parameter

$$B = \frac{y_0}{Kt_0} \quad (2.95)$$

4. Určíme rád systému z tabuľky:

n	1	2	3	4
B	0.368	0.271	0.224	0.195

Ak rád systému nie je možné určiť presne, odčítame od t_0 časť ako dopravné oneskorenie podobne ako v Strejcovej metóde.

5. Vypočítame časovú konštantu

$$T = \frac{t_0}{n} \quad (2.96)$$

2.1.5 Systémy s derivačnou činnosťou

Uvažujme náhradu modelu systému prenosom n -tého rádu a s derivačnou činnosťou

$$F(s) = \frac{Ks}{(Ts + 1)^n} \quad (2.97)$$

Integrál prechodovej funkcie je daný ako

$$F_I(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (2.98)$$

Vidíme, že tento integrál je štandardnou prenosovou funkciou aproximovateľnou Strejcovou metódou. Tomuto prenosu zodpovedá prechodová funkcia v Laplaceovom obraze

$$Y_I(s) = F_I(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \frac{1}{s} \quad (2.99)$$

Ak teda numericky zintegrujeme získanú prechodovú charakteristiku, môžeme postupovať predošlými metódami.

2.2 Všeobecný signál

V prípade, že uskutočnenie aktívneho experimentu je obtiažne alebo nerealizovateľné, môžeme použiť metódy využívajúce všeobecný deterministický signál. Na základe name-
ranej vstupnej a výstupnej veličiny určíme vlastnosti skúmaného systému.

V ďalšom uvedieme metódu konvolučného integrálu, ktorá získava impulznú charakteristiku systému. Jej integráciou sa dá získať prechodová charakteristika riešiteľná metódami už uvedenými.

Druhá metóda bola vypracovaná Strejcom a spočíva v postupnej integrácii vstupnej a výstupnej veličiny za účelom získania parametrov prenosu.

Na záver uvádzame Åströmovu metódu v uzavretom regulačnom obvode, ktorá využíva dvojhladinový pravouhlý vstupný signál.

2.2.1 Metóda konvolučného integrálu

Výstupnú veličinu je pre lineárny dynamický (spojitý) systém možné vyjadriť pomocou konvolučného (Duhamelovho) integrálu

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (2.100)$$

kde $u(t)$ je vstupná a $y(t)$ výstupná veličina. $h(\tau)$ je impulzná funkcia (odozva systému na Diracov impulz). Metóda konvolučného integrálu rieši numericky tento integrál tak, že výsledkom je diskrétna impulzná charakteristika. Jedná sa teda o neparametrickú metódu – neurčujú sa priamo parametre prenosu.

Integrál nahradíme konečnou sumou, pričom predpokladáme, že vstup do systému je v jednej perióde vzorkovania konštantný

$$y(t) = \sum_{j=0}^n h(\tau_j)u(t - \tau_j)\Delta\tau, \quad \Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1} = \Delta \quad (2.101)$$

Platí tiež $t_i = t_{i-1} + \Delta$. Označíme $y(t_i) = y(i)$. Pretože argument v u musí byť väčší alebo rovný nule, pre τ_n platí

$$t_i - \tau_n = t_0 + i\Delta - (\tau_0 + n\Delta) = t_0 - \tau_0 + (i - n)\Delta \quad (2.102)$$

Pretože t_0, τ_0 môžu byť rovné nule, musí platiť $i - n \geq 0$ a teda $i \geq n$. Ak i je postupne $i = n, n + 1, \dots, 2n$, potom $i = n + k$, $k \geq 0$.

Potom môžeme položiť $t_0 = \tau_0$ a označiť $u(t_i - \tau_j)$ ako $u(n + k - j)$. Podobne označíme $h(\tau_j) = h(j)$, $y(t_i) = y(n + k)$ a rovnica (2.101) prejde do tvaru

$$y(n + k) = \sum_{j=0}^n h(j)u(n + k - j)\Delta, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.103)$$

Po rozpise

$$\begin{aligned} y(n) &= [h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + \dots + h(n)u(0)]\Delta \\ y(n+1) &= [h(0)u(n+1) + h(1)u(n) + \dots + h(n)u(1)]\Delta \\ &\vdots \\ y(2n) &= [h(0)u(2n) + h(1)u(2n-1) + \dots + h(n)u(n)]\Delta \end{aligned} \quad (2.104)$$

Ak označíme vektory a matice

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T &= (y(n), y(n+1), \dots, y(2n)) \\ \mathbf{h}^T &= (h(0), h(1), \dots, h(n)) \\ \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u(n) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ u(n+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u(2n) & u(2n-1) & \dots & u(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

potom možno sústavu rovníc (2.104) prepísať do tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h}\Delta$. Neznámou je vektor \mathbf{h} , ktorý vypočítame ako

$$\mathbf{h} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}/\Delta \quad (2.105)$$

príčom predpokladáme, že matica \mathbf{U} je regulárna.

Meranie vstupov a výstupov je nasledovné: od času 0 do $n-1$ meriame iba u a potom do času $2n$ meriame u aj y .

Týmto postupom získame impulznú charakteristiku a jej numerickú integráciou prechodovú charakteristiku. Tú identifikujeme niektorou zo známych metód.

Doporučené hodnoty pre Δ, n sú

$$\begin{aligned} n &> 15 \\ n\Delta &> t_k \end{aligned}$$

kde t_k je čas, za ktorý sa impulzná charakteristika vráti na 1% zo svojej maximálnej hodnoty.

V prípade, že sú namerané výstupy z procesu zatažené významne šumom, je lepšie namerať viac ako $2n$ dvojích údajov a výsledný preurčený systém rovníc riešiť v zmysle metódy najmenších štvorcov.

Uvažujme merania od času 0 do času $2n + m$, $m > 0$

$$\begin{aligned}
 y(n) &= [h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + \dots + h(n)u(0)]\Delta \\
 y(n+1) &= [h(0)u(n+1) + h(1)u(n) + \dots + h(n)u(1)]\Delta \\
 &\vdots \\
 y(2n) &= [h(0)u(2n) + h(1)u(2n-1) + \dots + h(n)u(n)]\Delta \\
 &\vdots \\
 y(2n+m) &= [h(0)u(2n+m) + h(1)u(2n+m-1) + \dots + h(n)u(n+m)]\Delta
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Ak označíme vektory a matice

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}^T &= (y(n), y(n+1), \dots, y(2n), \dots, y(2n+m)) \\
 \mathbf{h}^T &= (h(0), h(1), \dots, h(n)) \\
 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u(n) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ u(n+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u(2n) & u(2n-1) & \dots & u(n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u(2n+m) & u(2n+m-1) & \dots & u(n+m) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

potom možno sústavu rovníc (2.106) vyriešiť v zmysle metódy najmenších štvorcov (3.51) ako

$$\mathbf{h} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{Y} / \Delta \tag{2.107}$$

2.2.2 Metóda postupnej integrácie

Predpokladáme, že šum pôsobiaci na systém je zanedbateľný. Identifikujeme koeficienty diferenciálnej rovnice

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t) \tag{2.108}$$

Vyhodnocujeme údaje na intervale $0 \leq t \leq T$. Uvažujme, že vstup a výstup sú na začiatku a na konci intervalu ustálené, t.j.

$$u^{(j)}(0^-) = u^{(j)}(T^+) = 0, y^{(j)}(0^-) = y^{(j)}(T^+) = 0, j \geq 0 \tag{2.109}$$

V prvom prípade predpokladáme, že $u(0) = u(T)$ a $y(0) = y(T)$. Integrujeme rovnicu (2.108) od 0 do T :

$$a_n \int_0^T y^{(n)}(t) dt + \dots + a_1 \int_0^T \dot{y}(t) dt + a_0 \int_0^T y(t) dt = \int_0^T u(t) dt \tag{2.110}$$

Platí, že

$$\int_0^T y^{(i)}(t) dt = \left| y^{(i-1)}(t) \right|_0^T = y^{(i-1)}(T) - y^{(i-1)}(0) = 0 \tag{2.111}$$

a teda

$$a_0 = \frac{\int_0^T u(t)dt}{\int_0^T y(t)dt} \quad (2.112)$$

Ďalej rovnicu (2.108) integrujeme najskôr od t do T a potom od 0 do T . Postupne dostaneme:

$$a_n \int_t^T y^{(n)}(t)dt + \dots + a_1 \int_t^T \dot{y}(t)dt + a_0 \int_t^T y(t)dt = \int_t^T u(t)dt \quad (2.113)$$

$$a_n \left| y^{(n-1)}(t) \right|_t^T + \dots + a_1 |y(t)|_t^T + a_0 \int_t^T y(t)dt = \int_t^T u(t)dt \quad (2.114)$$

$$-a_n y^{(n-1)}(t) - \dots - a_1 y(t) + a_0 \int_t^T y(t)dt = \int_t^T u(t)dt \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} -a_n \int_0^T y^{(n-1)}(t)dt - \dots - a_1 \int_0^T y(t)dt + a_0 \int_0^T \int_t^T y(t)d^2t \\ = \int_0^T \int_t^T u(t)d^2t \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$a_1 = \frac{a_0 \int_0^T \int_t^T y(t)d^2t - \int_0^T \int_t^T u(t)d^2t}{\int_0^T y(t)dt} \quad (2.117)$$

Pre a_2 by sme dostali

$$a_2 = \frac{a_1 \int_0^T \int_t^T y(t)d^2t - a_0 \int_0^T \int_t^T \int_t^T y(t)d^3t + \int_0^T \int_t^T \int_t^T u(t)d^3t}{\int_0^T y(t)dt} \quad (2.118)$$

Pre vyššie koeficienty sa metóda nepoužíva.

Druhý spôsob je možný, keď uvažujeme, že počiatočný a konečný stav nie sú rovnaké, t.j. $u(0) \neq u(T)$ a $y(0) \neq y(T)$. Pre koeficient a_0 potom priamo platí

$$a_0 = \frac{u(T) - u(0)}{y(T) - y(0)} \quad (2.119)$$

Ďalej zavedieme substitúciu $x(t) = y(T) - y(t)$, $v(t) = u(T) - u(t)$ a teda platí $x(T) = 0$, $x(0) = y(T) - y(0)$. Pre takto definované nové premenné sa rovnica (2.108) dá prepísať ako

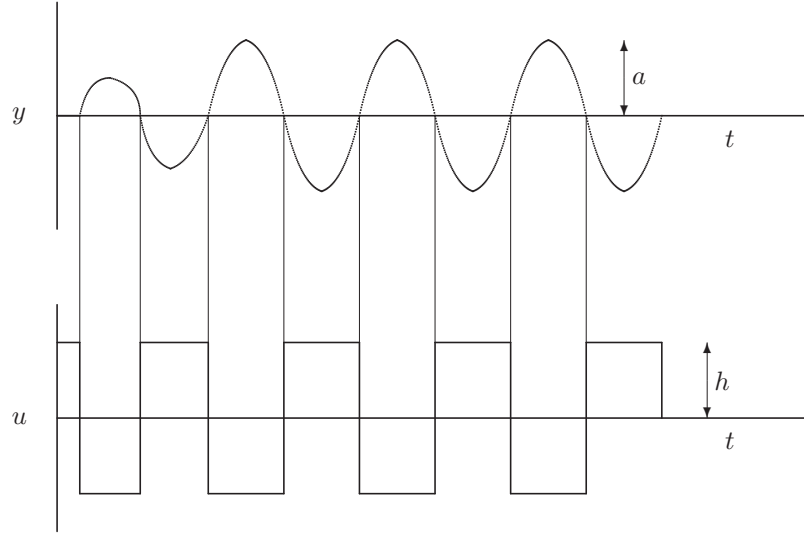
$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = v(t) \quad (2.120)$$

Integrovaním od 0 do T dostaneme analogicky výraz pre koeficient a_1

$$a_1 = \frac{a_0 \int_0^T x(t)dt - \int_0^T v(t)dt}{y(T) - y(0)} \quad (2.121)$$

Pre a_2 by sme dostali

$$a_2 = \frac{1}{x(0)} \left[\int_0^T \int_t^T v(t)d^2t - a_0 \int_0^T \int_t^T x(t)d^2t + a_1 \int_0^T x(t)dt \right] \quad (2.122)$$



Obr. 2.9: Testovací signál a odozva systému.

Druhý spôsob je lepší, pretože je o jednu integráciu menej a zvyšuje sa presnosť výpočtov.

Pre diferenciálnu rovnicu s pravou stranou je postup analogický, ale získa sa sústava algebraických rovníc pre neznáme koeficienty.

Pre vyčíslenie hodnôt integrálov sa dajú použiť rozličné numerické integračné metódy.

2.2.3 Autotuning

Åström a Hägglung navrhli metódu odhadovania kritickej frekvencie a kritického zosilnenia pomocou identifikácie neznámeho procesu v uzavretom regulačnom obvode a nazvali ju ATV (autotune variation). Princíp metódy je znázornený na obr 2.9.

Ako regulátor je použitý dvojpohový prepínač. Akčná veličina u je zvýšená o h nad hodnotu riadenia v ustálenom stave. Keď riadená veličina y prejde žiadanou hodnotou, riadenie je prepnuté na hodnotu h pod ustálenou hodnotou. Keď prejde riadená veličina opäť žiadanou hodnotou, je riadenie prepnuté späť na hodnotu h nad ustálenou hodnotou. Prepínanie je uskutočňované, až kým sa kmitanie výstupnej veličiny stane pravidelným (čo sa magnitúdy a periódy týka). Vtedy sú reakciou systému vynútené kmity. Períodou vynútených kmitov je kritická perióda P_k prenosovej funkcie, ktorá vyjadruje závislosť medzi riadenou veličinou y a riadiacou veličinou u . Takže kritická frekvencia je

$$\omega_k = \frac{2\pi}{P_k} \quad (2.123)$$

a bezpečnosť vo fáze (1/kritické zosilnenie) tej istej prenosovej funkcie je (čo vyplýva z teórie harmonickej rovnováhy)

$$K_k = \frac{4h}{a\pi} \quad (2.124)$$

kde h je zmena riadenia od ustáleného stavu a a je zmena výstupu od ustáleného stavu. Táto metóda má viacero výhod oproti testom v otvorenom regulačnom obvode:

1. Nie je potrebná žiadna znalosť o časových konštantách systému. Jediný parameter, ktorý je nutné zadať, je výška h , ktorá sa obyčajne volí 2-10% rozsahu akčnej veličiny.
2. ATV je test v uzavretom regulačnom obvode a teda proces bude stále v blízkosti žiadanej hodnoty. To spôsobí, že proces bude pracovať približne v lineárnej oblasti.
3. Získa sa presná informácia v oblasti frekvencií, ktoré sú dôležité.

Ako výsledky testu sa získajú hodnoty kritického frekvencie ω_k a kritického zosilnenia K_k . Tieto výsledky môžu byť priamo použité na nastavovanie PID regulátora metódou Ziegler-Nicholsa. Tiež je ale možné vypočítať prenosovú funkciu, ktorá aproximuje správanie sa systému. Základom tohto prístupu je zvolit si jednoduché tvary prenosov a nájsť ich parametre, ktoré budú vyhovovať ATV testu.

Ďalšie parametre, ktoré sú nutné vopred vedieť, sú zosilnenie systému K a dopravné oneskorenie D . Zosilnenie sa dá vypočítať, keď sa vykoná malá zmena riadiacej veličiny od ustáleného stavu. Potom platí

$$K = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0} \quad (2.125)$$

Treba však dávať pozor, ak je proces silne nelineárny, aby bola zmena akčnej veličiny veľmi malá. Dopravné oneskorenie sa dá odčítať zo začiatku ATV testu a je to čas, kedy y začne reagovať na zmenu v u .

Predpokladajme, že chceme nájsť približný model procesu, ktorý je jedným z nasledujúcich prenosových funkcií:

$$F(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} e^{-Ds} \quad n = 1, 2, 3 \quad (2.126)$$

$$F(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)^n} e^{-Ds} \quad n = 1, 2 \quad (2.127)$$

Neznámymi v týchto prenosoch sú časové konštanty, pretože K, D už poznáme.

Z ATV testu poznáme frekvenciu ω_k , uhol A a zosilnenie M pri tejto frekvencii.

$$A = -\pi \quad M = \frac{1}{K_k} \quad (2.128)$$

Najlepší model a rád n sa určia výberom toho prenosu, ktorý bude najlepšie vyhovovať nasledovným rovniciam, ktoré boli získané z amplitúdy a fázy(argumentu) komplexného čísla.

- Model 1 - jedna časová konštanta: $F(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-Ds}$

$$T = \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\left(\frac{K}{M}\right)^2 - 1} \quad (2.129)$$

$$T = -\frac{1}{\omega_k} \tan(A + \omega_k D) \quad (2.130)$$

- Model 2 - dve rovnaké časové konštanty: $F(s) = \frac{K}{(Ts+1)^2} e^{-Ds}$

$$T = \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\left(\frac{K}{M}\right) - 1} \quad (2.131)$$

$$T = -\frac{1}{\omega_k} \tan\left(\frac{A + \omega_k D}{2}\right) \quad (2.132)$$

- Model 3 - tri rovnaké časové konštanty: $F(s) = \frac{K}{(Ts+1)^3} e^{-Ds}$

$$T = \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\left(\frac{K}{M}\right)^{2/3} - 1} \quad (2.133)$$

$$T = -\frac{1}{\omega_k} \tan\left(\frac{A + \omega_k D}{3}\right) \quad (2.134)$$

- Model 4 - dve nerovnaké časové konštanty: $F(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} e^{-Ds}$

$$M = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega_k T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega_k T_2)^2}} \quad (2.135)$$

$$A = -\omega_k D + \arctan(-\omega_k T_1) + \arctan(-\omega_k T_2) \quad (2.136)$$

- Model 5 - jedna jednoduchá a jedna dvojitá časová konštanty:

$$F(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)^2} e^{-Ds}$$

$$M = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega_k T_1)^2} [1 + (\omega_k T_2)^2]} \quad (2.137)$$

$$A = -\omega_k D + \arctan(-\omega_k T_1) + 2 \arctan(-\omega_k T_2) \quad (2.138)$$

Na overenie, či Model 1 vyhovuje nameraným údajom, sa vypočíta hodnota T z rovníc (2.129), (2.130). Ak sú tieto hodnoty približne rovnaké, tak Model 1 vyhovuje dobre údajom. Podobne sa dajú testovať aj Modely 2,3. Ak vyhovuje viacero modelov, tak je najlepšie použiť ten najjednoduchší. Poznávame, že ak je $D = 0$, potom musí byť použitý model tretieho rádu.

Modely 4,5 sú obtiažnejšie na použitie. Obe rovnice sa musia riešiť iteračne, pričom získanie riešenia nie je zaručené.

Príklad 2.3 Predpokladajme, že $K = 34.16$, $D = 0.3$, $M = 0.198$, $A = -\pi$, $\omega_k = 0.542$.

Model 1 : $T = 318.3$, $T = -0.303$ (nie - model nevyhovuje)

Model 2 : $T = 24.16$, $T = 22.64$ (áno - model vyhovuje)

Model 3 : $T = 10.10$, $T = 2.83$ (nie)

Model 4 : $T_1 = 16.98$, $T_2 = 34.33$ (áno)

Model 5 : $T_1 = 186.2$, $T_2 = 1.554$ (áno)

Napríklad Model 4 je

$$F(s) = \frac{34.16}{(16.98s + 1)(34.33s + 1)} e^{-0.3s}$$

2.3 Frekvenčná analýza

Frekvenčnú charakteristiku skúmaného systému získame, ak na jeho vstup pripojíme zdroj harmonických kmitov. Pre rozdielne frekvencie takto získame po nevyhnutnom prechodovom čase pomer amplitúd výstupného a vstupného signálu ako aj fázový posun medzi nimi. Každá dvojica určuje jeden bod frekvenčnej charakteristiky, z ktorej sa dá potom určiť prenos skúmaného systému.

2.3.1 Získanie frekvenčných charakteristík

Základná metóda

Uvažujme vstupný signál do identifikovaného procesu s prenosom $F(s)$ v tvare funkcie sínus

$$u(t) = a \sin(\omega t). \quad (2.139)$$

Ak je systém asymptoticky stabilný, potom jeho odozva v ustálenom stave bude

$$y(t) = b \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.140)$$

kde

$$b = a |F(j\omega)| \quad (2.141)$$

$$\varphi = \arg[F(j\omega)] \quad (2.142)$$

a $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ Tieto rovnice sa dajú dokázať nasledovne: predpokladajme pre jednoduchosť, že systém je na počiatku v ustálenom stave. Ak by táto podmienka nebola splnená, tak počiatkové hodnoty spôsobili iba určité prechodové efekty. Potom je možné odozvu systému vypočítat na základe konvolučného (Duhamelovho) integrálu

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (2.143)$$

kde $h(t)$ je impulzná funkcia, ktorej Laplaceova transformácia je $F(s)$. Definujme si funkciu $F_t(s)$ vzťahom

$$F_t(s) = \int_0^t h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.144)$$

Keďže platí

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (2.145)$$

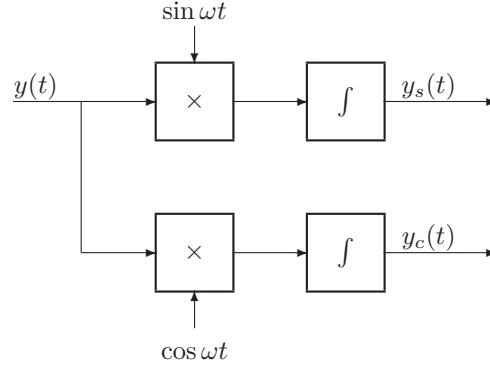
môžeme dosadiť do rovnice (2.143) rovnice (2.139) a (2.144)

$$y(t) = \frac{a}{2j} \int_0^t h(\tau) [e^{j\omega(t-\tau)} - e^{-j\omega(t-\tau)}] d\tau \quad (2.146)$$

$$= \frac{a}{2j} [e^{j\omega t} F_t(j\omega) - e^{-j\omega t} F_t(-j\omega)] \quad (2.147)$$

$$= \frac{a}{2j} |F_t(j\omega)| [e^{j\omega t} e^{j \arg F_t(j\omega)} - e^{-j\omega t} e^{-j \arg F_t(j\omega)}] \quad (2.148)$$

$$= a |F_t(j\omega)| \sin(\omega t + \arg F_t(j\omega)) \quad (2.149)$$



Obr. 2.10: Vylepšená frekvenčná analýza.

Ak budeme uvažovať, že t sa blíži do nekonečna, potom dostaneme rovnice (2.141), (2.142).

Poznamenávame, že obyčajne bude fáza φ záporná. Ak budeme merať amplitúdy vstupného a výstupného signálu a, b a fázový rozdiel φ , budeme môcť odhadnúť komplexnú funkciu $F(j\omega)$ pre jednu frekvenciu. Opakovaním tohto postupu pre rozličné frekvencie získame grafickú reprezentáciu $F(j\omega)$ ako funkciu ω . Tieto závislosti vo forme Nyquistovho či Bodeho diagramu sa často využívajú pri návrhu regulátorov.

Nevýhodou tejto metódy je jej citlivosť na šum merania, a preto sa zriedka využíva v tejto forme.

Metóda harmonickej korelácie

Jedným zo spôsobov, ako vylepšiť správanie sa horeuvedenej metódy, je použitie korelačnej techniky. Výstup zo systému je prenasobený funkciou $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ a výsledné signály sa integrujú v rozsahu $[0, T]$. Tento postup je znázornený na obr. 2.10.

Predpokladajme, že skutočný systém je popísaný rovnicou

$$Y(s) = F(s)U(s) + E(s) \quad (2.150)$$

kde $E(s)$ je Laplaceov obraz nejakej poruchy $e(t)$. Potom rovnica výstupu je

$$y(t) = b \sin(\omega t + \varphi) + e(t) \quad (2.151)$$

Pre jednotlivé výstupy $y_s(t)$, $y_c(t)$ potom platí

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \int_0^T b \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t) dt + \int_0^T e(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{bT}{2} \cos \varphi - \frac{b}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \int_0^T b \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T e(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{bT}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned} \quad (2.153)$$

Ak by merania neboli zatažené žiadnou chybou ($e(t) = 0$) a integračný čas T je násobkom periódy sínusoidy ($T = 2k\pi/\omega$), potom

$$y_s(T) = \frac{bT}{2} \cos \varphi \quad (2.154)$$

$$y_c(T) = \frac{bT}{2} \sin \varphi \quad (2.155)$$

Z týchto rovníc sa dá hľadaný prenos $F(j\omega)$ jednoducho nájsť. Napríklad umocnením rovníc, ich následným sčítaním a použitím rovnice (2.141) dostaneme

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{aT} \sqrt{y_s^2 + y_c^2} \quad (2.156)$$

Podobne pre fázu prenosu vyplýva

$$\arg[F(j\omega)] = \varphi = \arctan \frac{y_c}{y_s} \quad (2.157)$$

Treba však brať do úvahy, že funkcia tangens je periodická a že fáza prenosu je záporná.

Odozva na impulz

V predošlých metódach bolo potrebné vykonať na reálnom procese toľko experimentov, koľko bodov frekvenčnej charakteristiky bolo potrebné získať. V praxi je tento postup nerealizovateľný, podobne ako fakt, že proces kmitá neustálenými kmitmi na hranici stability.

Postup opísaný v tejto časti vyžaduje iba jeden experiment, pričom vstup do procesu je formou pulzu – začína na nule, nenulová časť trvá iba určitý čas a potom je opäť nulový. Výhodou tak je aj to, že sa identifikovaný proces nevzdiali natrvalo zo zvoleného operačného bodu, ale sa doň opäť po určitom čase vráti.

Podobne, ako Laplaceova transformácia časového signálu je v tvare

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (2.158)$$

môžeme ekvivalentne definovať Fourierovu transformáciu časového signálu

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.159)$$

Ak však vieme, že daný vstupný signál je do času $t = 0$ nulový, zmení sa v čase nula a odozvie za určitý čas, potom

$$U(j\omega) = \int_0^{T_u} u(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.160)$$

kde T_u je čas, v ktorom už opäť platí $u(t) = 0, t \geq T_u$.

Prenosovú funkciu identifikovaného procesu môžeme písať v tvare

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\int_0^{T_y} y(t)e^{-j\omega t} dt}{\int_0^{T_u} u(t)e^{-j\omega t} dt} \quad (2.161)$$

$$= \frac{\int_0^{T_y} y(t) \cos(j\omega t) dt - j \int_0^{T_y} y(t) \sin(j\omega t) dt}{\int_0^{T_u} u(t) \cos(j\omega t) dt - j \int_0^{T_u} u(t) \sin(j\omega t) dt} \quad (2.162)$$

$$= \frac{Y_c - jY_s}{U_c - jU_s} \quad (2.163)$$

kde výsledný tvar bol získaný pomocou Eulerových vzťahov. Funkcie Y_c, Y_s, U_c, U_s získame numerickou integráciou z údajov o pôvodnom nameranom signále $y(t), u(t)$ vynásobeného trigonometrickou funkciou pri frekvencii, v ktorej chceme určiť frekvenčný prenos.

Postup pri vypočítaní bodov frekvenčnej charakteristiky je potom nasledovný:

1. Vstupom do procesu je signál, ktorý má konečné trvanie – napríklad trvá počas jednej periódy vzorkovania a potom je opäť nulový.
2. Odmeriame odozvu systému až do času, kedy sa výstup vráti na nulovú hodnotu.
3. Zvolíme si frekvencie v intervale $\omega_i = \langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle, i = 1, \dots, n$.
4. Pre každú z nich vypočítame numerickou integráciou štyri integrály Y_c, Y_s, U_c, U_s . Je ľahké ukázať, že platí

$$\operatorname{Re}(F(j\omega_i)) = \frac{Y_c U_c + Y_s U_s}{U_c^2 + U_s^2}, \quad \operatorname{Im}(F(j\omega_i)) = \frac{Y_c U_s - Y_s U_c}{U_c^2 + U_s^2} \quad (2.164)$$

$$|F(j\omega_i)| = \sqrt{\frac{Y_c^2 + Y_s^2}{U_c^2 + U_s^2}}, \quad \varphi_i = \arctan \frac{Y_c U_s - Y_s U_c}{Y_c U_c + Y_s U_s} \quad (2.165)$$

Pochopiteľne, získaná frekvenčná charakteristika je validná iba v tom rozsahu frekvencií, ktoré boli prítomné vo vstupnom signáli. Preto je vhodné vykresliť aj absolútnu hodnotu vstupného a výstupného signálu ako funkciu frekvencie

$$|U(j\omega)| = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}, \quad |Y(j\omega)| = \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2} \quad (2.166)$$

Pre príliš vysoké hodnoty frekvencií sú tieto funkcie prakticky nulové a získané body FCH neinformatívne.

2.3.2 Odhad prenosovej funkcie

Výsledkom vyššie uvedených postupov je získanie párov $\omega_k, F(j\omega_k)$. Na ich základe sa dá identifikovať prenos systému viacerými metódami. Spomenieme grafickú metódu dotyčníc z Bodeho diagramu vhodnú pre hrubý odhad prenosu skúmaného systému a Levyho metódu, pri ktorej sa odhadujú priamo koeficienty hľadaného prenosu.

Metóda asymptôt

Táto metóda vychádza z amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky systému s prenosom v tvare

$$F(s) = K \frac{\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{z_k} s\right)}{s^l \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_k} s\right)} \quad (2.167)$$

V prenosu neuvvažujeme komplexne združené korene, pre ktoré by bolo použitie tejto metódy zložitejšie.

Amplitúdová charakteristika je daná ako graf funkcie

$$20 \log |F(j\omega)| \times \log \omega \quad (2.168)$$

a teda amplitúda je uvedená v decibeloch (db). Logaritmovaním rovnice (2.167) dostaneme

$$y = 20 \log |F(j\omega)| = 20 \log |K| - 20 \log |j\omega|^l + \sum_{k=1}^m 20 \log \left|1 + \frac{1}{z_k} j\omega\right| - \sum_{k=1}^n 20 \log \left|1 + \frac{1}{p_k} j\omega\right| \quad (2.169)$$

Pre zostrojenie amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky, alebo pre jej analýzu, potrebujeme vedieť, ako vyzerajú príslušné čiastkové charakteristiky jej elementov. Tieto sú dané nasledovne:

zosilnenie : K

$$y = 20 \log |K| \quad (2.170)$$

je rovnicou priamky rovnobežnou s x -ovou osou.

l -násobný integrátor : $(j\omega)^l$

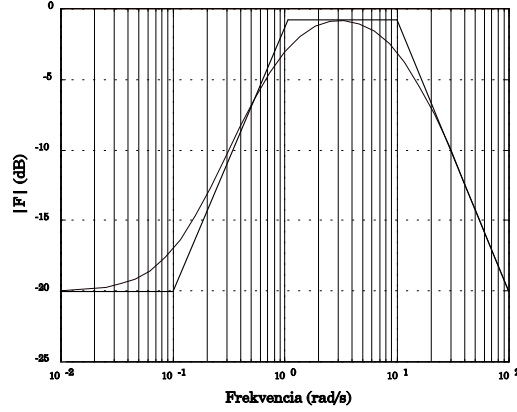
$$y = -20 \log |j\omega|^l = -20l \log \omega \quad (2.171)$$

je rovnicou priamky klesajúcou o $20l$ na dekádu.

nula : $1 + \frac{1}{z_k} j\omega$. Uvažujme dva prípady, ak ω je omnoho menšia (väčšia) ako hodnota nuly z_k . V týchto prípadoch platí

$$y = 20 \log \left|1 + \frac{1}{z_k} j\omega\right| \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \text{ak } \omega \ll z_k \\ 20 \log \left|\frac{\omega}{z_k} j\right| = 20 \log \frac{\omega}{z_k} & \text{ak } \omega \gg z_k \end{cases} \quad (2.172)$$

To znamená, že ak ω/z_k sa blíži k nule, tak krivka sa približuje k osi x . V opačnom prípade sa krivka blíži k asymptote stúpajúcej o 20 db na dekádu. Obe asymptoty sa pretínajú v bode s frekvenciou $\omega = z_k$ (rohová frekvencia). Poznamenávame, že sme museli prijať predpoklad, že sa jedná o stabilnú nulu ($z_k > 0$).



Obr. 2.11: Získanie rohových frekvencií a zosilnenia pomocou metódy dotyčníc.

pól - v tomto prípade je situácia rovnaká, ako pre nulu s rozdielom, že asymptota neštúpa, ale klesá.

Pre overenie správnosti môžeme použiť fázové frekvenčné charakteristiky. V prípade, že rozdiely medzi nameranou a vypočítanou krivkou sú zanedbateľné, vystihuje model vlastnosti skúmaného systému. V prípade, že fázové charakteristiky sa značne líšia, môže byť príčinou

1. Dopravné oneskorenie, keď platí

$$\arg(F(j\omega)) - \arg(\hat{F}(j\omega)) = -\omega D \quad (2.173)$$

čiže sa rozdiel fázových frekvenčných charakteristík v semilogaritmickom zobrazení exponenciálne mení. Z konkrétnych hodnôt rozdielu je možné dopravné oneskorenie určiť.

2. V prípade r nestabilných núl sa rozdiel medzi fázovými frekvenčnými charakteristikami ustáli na hodnote, ktorá je záporným celočíselným násobkom priameho uhla $-r\pi$. V tomto prípade môžeme rozšíriť prenos o zlomok

$$F_1(s) = \left(\frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^r \quad (2.174)$$

Príklad 2.4 Identifikácia z Bodeho diagramu

Uvažujme amplitúdovú frekvenčnú charakteristiky na obr. 2.11. Okolo krivky zostrojíme asymptoty a z ich priesečníkov odčítame rohové frekvencie. Zosilnenie sa odčítava z priesečníka krivky s y -ovou osou. Približný odhad prenosu je v tvare:

$$F(s) = 0.1 \frac{(1 + \frac{1}{0.1}s)}{(1 + \frac{1}{1}s)(1 + \frac{1}{10}s)}$$

Levyho metóda

Predpokladajme, že prenos systému je daný vo forme racionálnej lomenej funkcie

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (2.175)$$

Z tejto rovnice vyplýva

$$A(j\omega)F(j\omega) = B(j\omega) \quad (2.176)$$

Koeficienty polynómov A, B môžeme dostať, ak budeme minimalizovať sumu štvorcov odchýliek

$$J = \sum_{k=1}^N e_k^* e_k \quad (2.177)$$

kde $e_k = A(j\omega_k)F(j\omega_k) - B(j\omega_k)$ a $*$ označuje transpozíciu komplexne združeného čísla. Ak zavedieme veličiny

$$\boldsymbol{\theta} = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m)^T \quad (2.178)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -j\omega_1 F_1, \dots, -(j\omega_1)^n F_1, 1, j\omega_1, \dots, (j\omega_1)^m \\ \vdots \\ -j\omega_N F_N, \dots, -(j\omega_N)^n F_N, 1, j\omega_N, \dots, (j\omega_N)^m \end{pmatrix} \quad (2.179)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad (2.180)$$

potom hodnota $\boldsymbol{\theta}$, ktorá minimalizuje kritérium (2.177) sa dá vypočítať podľa rovnice

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\text{Re}(\mathbf{X}^* \mathbf{X})]^{-1} \text{Re}[\mathbf{X}^* \mathbf{Y}] \quad (2.181)$$

kde Re značí reálnu časť komplexného čísla.

Kapitola 3

Stochastické metódy

V predchádzajúcej kapitole sme sa zaoberali identifikačnými metódami, ktoré vyhodnocovali pôsobenie deterministického vstupného signálu na proces. V praxi však vždy na skúmaný systém pôsobia poruchy a ani vstupy doň nie sú úplne deterministické. Z tohto dôvodu sa budeme v tejto kapitole venovať metódam, ktoré berú do úvahy rušivé signály a chyby merania.

V prvej skupine metód sa určujú vlastnosti systému na základe pravdepodobnostných charakteristík vstupných a výstupných signálov. Tieto metódy využívajú Wiener-Hopfove vzťahy.

Druhá skupina, tzv. regresné metódy, sa snaží minimalizovať účinky šumov a je založená na metóde najmenších štvorcov.

3.1 Korelačné metódy

V tejto časti si odvodíme Wiener-Hopfove rovnice analýzou lineárnych systémov vo frekvenčnej oblasti. Tieto rovnice sú základom korelačnej analýzy, ktorej výsledkom je impulzná charakteristika systému. V druhom prípade ide o spektrálnu analýzu, ktorá prostredníctvom výkonových spektrálnych hustôt určí frekvenčný prenos systému.

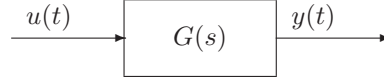
3.1.1 Analýza lineárneho systému vo frekvenčnej oblasti

Majme spojitý lineárny systém s konštantnými koeficientmi (obr. 3.1). Odozva lineárneho systému na náhodný vstupný signál je náhodný proces určený autokorelačnou funkciou a výkonovou spektrálnou hustotou. Pravdepodobnostné charakteristiky náhodného výstupného signálu sa dajú nájsť vtedy, ak poznáme charakteristiky procesu na vstupe systému a charakteristiky samotného systému. Našou úlohou bude nájsť pravdepodobnostné charakteristiky náhodného procesu na výstupe systému.

Nech $u(t)$ je ľubovoľná realizácia stacionárneho náhodného procesu na vstupe systému a $y(t)$ zodpovedajúca odozva systému

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)u(t - \tau_1)d\tau_1 \quad (3.1)$$

kde $g(t)$ je impulzná funkcia systému. Tak, ako môžeme pre každú realizáciu písať rov-

Obr. 3.1: Bloková schéma systému, ktorého prenos je $G(s)$

nicu (3.1), tak môžeme písať vzťah pre matematickú nádej veličiny $y(t)$ v tvare

$$E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)E\{u(t - \tau_1)\} d\tau_1 \quad (3.2)$$

Ak v odozve systému na jednu realizáciu náhodného procesu na vstupe určíme okamihy času t a $t + \tau$, potom hodnota výstupu v čase t je daná rovnicou (3.1) a hodnota výstupu v čase $t + \tau$ je daná rovnicou

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)u(t + \tau - \tau_2)d\tau_2 \quad (3.3)$$

Autokorelačná funkcia signálu na výstupe systému je

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E\{y(t)y(t + \tau)\} \\ &= E\left\{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)u(t - \tau_1)d\tau_1\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)u(t + \tau - \tau_2)d\tau_2\right\}\right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

resp.

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)g(\tau_2)E\{u(t - \tau_1)u(t + \tau - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.5)$$

Z rovnice

$$E\{u(t - \tau_1)u(t + \tau - \tau_2)\} = E\{u(t - \tau_1)u\{(t - \tau_1) + (\tau + \tau_1 - \tau_2)\}\} \quad (3.6)$$

vyplýva, že

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)g(\tau_2)R_{uu}(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.7)$$

pričom $R_{uu}(\tau + \tau_1 - \tau_2)$ je autokorelačná funkcia vstupného signálu s argumentom $(\tau + \tau_1 - \tau_2)$.

Stredná hodnota kvadrátu náhodného signálu na výstupe systému je

$$\overline{y^2(t)} = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)g(\tau_2)R_{uu}(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.8)$$

Výkonovú spektrálnu hustotu výstupnej veličiny systému dostaneme ako Fourierov obraz autokorelačnej funkcie v tvare

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)g(\tau_2)R_{uu}[\tau + (\tau_1 - \tau_2)]e^{-j\omega\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

Výkonovú spektrálnu hustotu $S_{yy}(\omega)$ je možné po vynásobení podintegrálnej funkcie v rovnici (3.9) výrazom $(e^{j\omega\tau_1}e^{-j\omega\tau_2})(e^{-j\omega\tau_1}e^{j\omega\tau_2}) = 1$ písať nasledovne

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}[\tau + (\tau_1 - \tau_2)]e^{-j\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d\tau \quad (3.10)$$

Teraz zavedieme novú premennú $\tau' = \tau + \tau_1 - \tau_2$. Po tejto zámene integrál (3.9) je súčinom troch integrálov

$$S_{yy}(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \right] \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau')e^{-j\omega\tau'} d\tau' \right] \quad (3.11)$$

Posledný z týchto integrálov je výkonová spektrálna hustota vstupného signálu

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau')e^{-j\omega\tau'} d\tau' \quad (3.12)$$

Druhý integrál je Fourierov obraz váhovej funkcie $g(t)$, t.j. frekvenčný prenos systému

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \quad (3.13)$$

A nakoniec pre prvý integrál platí

$$G(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \quad (3.14)$$

Zo vzťahov (3.10) – (3.14) vyplýva, že

$$S_{yy}(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) \quad (3.15)$$

kde $|G(j\omega)|^2 = G(-j\omega)G(j\omega)$.

Keď poznáme výkonovú spektrálnu hustotu $S_{yy}(\omega)$, potom môžeme písať strednú hodnotu kvadrátu náhodného signálu na výstupe v tvare

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) d\omega \quad (3.16)$$

Podobne ako pri odvodení autokorelačnej funkcie, pre vzájomnú korelačnú funkciu platí

$$R_{uy}(\tau) = E \{u(t)y(t + \tau)\} \\ = E \left\{ u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)u(t + \tau - \tau_2) d\tau_2 \right\} \right\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) E \{u(t)u(t + \tau - \tau_2)\} d\tau_2 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) R_{uu}(\tau - \tau_2) d\tau_2 \quad (3.17)$$

Túto rovnicu nazývame reálny tvar Wiener-Hopfovej rovnice:

$$R_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_{uu}(\tau - \sigma)d\sigma \quad (3.18)$$

Po Fourierovej transformácii prechádza do tvaru

$$S_{uy}(\omega) = G(j\omega)S_{uu}(\omega) \quad (3.19)$$

Najčastejšie používané vzťahy v identifikácii dynamických systémov sú rovnice (3.18) alebo (3.19). Rovnica (3.15) nie je pre identifikáciu vhodná. Ak potrebujeme určiť neznámu funkciu $g(s)$ pre známe funkcie R_{uu}, R_{uy} , hovoríme o úlohe *dekonvolúcie*.

3.1.2 Korelačná analýza

Model systému používaný v korelačnej analýze je diskretným ekvivalentom rovnice (3.1)

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t - k) + v(t) \quad (3.20)$$

kde $\{g(k)\}$ impulzná charakteristika a $v(t)$ je šum. Predpokladajme, že vstup u je stacionárny stochastický proces nezávislý od v . Potom pre korelačné funkcie môžeme písať Wiener-Hopfovú rovnicu (3.18) v diskretnom tvare

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)R_{uu}(\tau - k) \quad (3.21)$$

Korelačné funkcie môžu byť odhadnuté z merania pomocou vzťahov

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y(t + \tau)u(t), \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.22)$$

$$\hat{R}_{uu}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} u(t + \tau)u(t), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad \hat{R}_{uu}(-\tau) = \hat{R}_{uu}(\tau) \quad (3.23)$$

Potom odhad $\hat{g}(t)$ môže byť určený riešením rovnice

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)\hat{R}_{uu}(\tau - k) \quad (3.24)$$

Toto ale vo všeobecnosti dá sústavu lineárnych rovníc nekonečného rozmeru. Problém sa dá zjednodušiť viacerými spôsobmi. Uvažujme napríklad, že vstup u je biely šum. Potom vieme, že pre jeho autokorelačnú funkciu platí $R_{uu}(\tau) = 0$ ak $\tau \neq 0$. Pre tento prípad sa rovnica (3.24) zjednoduší na tvar

$$\hat{g}(k) = \hat{R}_{uy}(k)/\hat{R}_{uu}(0) \quad (3.25)$$

Iným prístupom je uvažovanie konečnej impulznej charakteristiky

$$\hat{g}(k) = 0 \quad k \geq M \quad (3.26)$$

Tento model voláme konečnou impulznou odozvou (FIR - finite impulse response). Hodnota konštanty M by mala byť zvolená dostatočne veľká v porovnaní s dominantnými

časovými konštantami systému. Obyčajne sa volí tak, aby hodnota impulznej charakteristiky v tomto bode neprevyšovala určité percento maximálnej hodnoty impulznej charakteristiky. Rovnicu (3.24) môžeme prepísať do tvaru

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^M \hat{g}(k) \hat{R}_{uu}(\tau - k) \quad (3.27)$$

Keď sa táto rovnica prepíše pre každé τ dostaneme systém lineárnych rovníc

$$\begin{pmatrix} \hat{R}_{yu}(0) \\ \vdots \\ \hat{R}_{yu}(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{uu}(0) & \dots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\ \hat{R}_{uu}(1) & \ddots & \hat{R}_{uu}(M-2) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{R}_{uu}(M-1) & \dots & \hat{R}_{uu}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}(0) \\ \vdots \\ \hat{g}(M-1) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

resp. v maticovom tvare

$$\mathbf{R}_{yu} = \mathbf{R}_{uu} \mathbf{g} \quad (3.29)$$

získame riešenie v tvare

$$\mathbf{g} = \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{R}_{yu} \quad (3.30)$$

Systém rovníc (3.28) možno zovšeobecniť na viac ako $M-1$ vzoriek \mathbf{R}_{yu} . Potom dostaneme preurčenú sústavu rovníc, ktorú riešime metódou najmenších štvorcov.

$$\mathbf{g} = (\mathbf{R}_{uu}^T \mathbf{R}_{uu})^{-1} \mathbf{R}_{uu}^T \mathbf{R}_{yu} \quad (3.31)$$

Nevýhodou korelačnej analýzy je, že matica \mathbf{R}_{uu} , ktorú treba invertovať, je zle podmienená a výsledná impulzná charakteristika značne skreslená.

3.1.3 Spektrálna analýza

Metóda spektrálnej analýzy je založená na využití frekvenčného tvaru Wiener-Hopfovej rovnice (3.19), z ktorého vyplýva

$$G(j\omega) = \frac{S_{uy}(\omega)}{S_{uu}(\omega)} \quad (3.32)$$

Podobne, ako v korelačnej analýze, aj v tomto prípade využívame diskkrétne tvary výkonových spektrálnych hustôt

$$S_{uu}(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N R_{uu}(\tau) e^{-j\tau\omega} \quad (3.33)$$

$$S_{uy}(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N R_{uy}(\tau) e^{-j\tau\omega} \quad (3.34)$$

prípade priamo dosadením za korelačné funkcie. Pre $S_{uy}(\omega)$ platí

$$S_{uy}(\omega) = \frac{1}{2N+1} \sum_{\tau=-N}^N \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y(t+\tau)u(t) e^{-j\tau\omega} \quad (3.35)$$

Aplikovaním substitúcie $s = t + \tau$ a vzťahu $e^{-j\tau\omega} = e^{-js\omega}e^{jt\omega}$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{uy}(\omega) &= \frac{1}{2N+1} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N y(s)u(t)e^{-js\omega}e^{jt\omega} \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{s=1}^N y(s)e^{-js\omega} \sum_{t=1}^N y(s)u(t)e^{jt\omega} \\ &= \frac{1}{2N} Y_N(\omega) U_N(-\omega) \end{aligned} \quad (3.36)$$

kde

$$Y_N(\omega) = \sum_{s=1}^N y(s)e^{-js\omega} \quad (3.37)$$

$$U_N(\omega) = \sum_{s=1}^N u(s)e^{-js\omega} \quad (3.38)$$

sú diskrétné Fourierove transformácie postupností $y(t), u(t)$. Analogicky pre $S_{uu}(\omega)$ platí

$$S_{uy}(\omega) = \frac{1}{2N+1} U_N(\omega) U_N(-\omega) \quad (3.39)$$

Rovnicu (3.32) môžeme teda písať v tvare

$$G(j\omega) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \quad (3.40)$$

Jej praktická aplikácia však nedáva dobré výsledky. Je to spôsobené tým, že korelačné funkcie sú pre veľké τ dost nepresné. Preto zavádzame do vzťahov pre výpočet výkonových spektrálnych hustôt tzv. *frekvenčné okno* $w(\tau)$

$$S_{uy}(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N R_{uy}(\tau) w(\tau) e^{-j\tau\omega} \quad (3.41)$$

Medzi typické frekvenčné okná patria

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| < M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (\text{pravouhlé}) \quad (3.42)$$

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| < M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (\text{Bartlettové}) \quad (3.43)$$

$$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi\tau}{M}) & |\tau| < M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases} \quad (\text{Hamming-Tukeyovo}) \quad (3.44)$$

Veľkosť okna M je potrebné vhodne zvoliť, pričom musí platiť

- $M \ll N$,
- $|R_{uu}(\tau)| \ll R_{uu}(0)$ pre $\tau \geq M$.

3.2 Regresné metódy

Regresná analýza je vhodná pre vyšetovanie nielen statických, ale aj dynamických systémov. Prudký rozvoj výpočtovej techniky spôsobil aj rozvoj a zdokonaľovanie regresných metód.

V tejto časti si vysvetlíme, aké požiadavky sú kladené na odhady parametrov, odvodíme základnú metódu najmenších štvorcov v prípade statických systémov a jej vlastnosti. V ďalšej časti sa budeme venovať identifikácii dynamických systémov, rekurzívnej metóde najmenších štvorcov a jej modifikáciám.

3.2.1 Požiadavky na odhad parametrov

Ak $\hat{\theta}$ je odhadnutý vektor parametrov θ , potom

nevychýlenosť (nestrannosť) odhadu znamená, že ak $\hat{\theta}^k$ je odhad urobený na základe k meraní, potom pre každé k musí platiť

$$E \{ \hat{\theta}^k \} = \theta$$

konzistencia znamená, že pre ľubovoľný vektor konštant $\epsilon > \mathbf{0}$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P[\theta - \epsilon < \hat{\theta}^k < \theta + \epsilon] = 1$$

navyše sa hovorí, že odhad je konzistentný v stredne kvadratickom zmysle, keď spĺňa podmienku

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Cov}(\hat{\theta}^k) = 0$$

výdatnosť (efektívnosť), t.j., keď medzi odhadom $\hat{\theta}$ a každým iným odhadom $\bar{\theta}$ platí

$$\text{Cov}(\bar{\theta}) - \text{Cov}(\hat{\theta}) \geq 0$$

V skalárnom prípade je minimálny ten odhad, ktorý má minimálnu disperziu. Pri nulovej disperzii prechádza pravdepodobnosť v istotu.

3.2.2 Identifikácia statických modelov

Uvažujme opis systému, ktorý je možné vyjadriť v tvare

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \theta) + \mathbf{v} \tag{3.45}$$

kde $\mathbf{y}[n, 1]$ je vektor výstupov, $\mathbf{u}[m, 1]$ je vektor vstupov, $\mathbf{v}[n, 1]$ je vektor aditívnych šumov, $\theta[s, 1]$ je vektor parametrov a F je funkcia štruktúry identifikovaného modelu.

Funkcia F môže obsahovať rôzne funkcie u_i , napr. $\ln u_i$, $\sin u_i$, u_i^2 a pod. V každom prípade je F lineárna vzhľadom k parametrom θ_j , ktoré majú byť identifikované. Túto funkciu je nutné voliť vopred, najčastejšie na základe nejakých skúseností.

Základnou metódou pre odhad parametrov je metóda najmenších štvorcov. Bola navrhnutá Gaussom pre výpočet obežných dráh planét (Gauss, 1809).

Metóda najmenších štvorcov

Uvažujme skalárny prípad. Potom platí

$$y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_s x_s + v = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} + v \quad (3.46)$$

Hľadáme takú hodnotu $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, ktorá by minimalizovala súčet druhých mocnín odchýliek nameraných údajov od modelovaných výstupov, t.j.

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^l (y_i - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}_i)^2 \quad (3.47)$$

Táto rovnica môže byť prepísaná do vektorového zápisu

$$J(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) \quad (3.48)$$

kde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_l^T \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

Z nulovej hodnoty gradientu funkcie (3.48) podľa $\boldsymbol{\theta}$ dostaneme

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (3.50)$$

a ak je informačná matica $\mathbf{R} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ invertovateľná, potom

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (3.51)$$

Veta 3.1 *Predpokladajme, že náhodná veličina \mathbf{y} má strednú hodnotu $\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}$ a rozptyl σ^2 . Potom náhodný proces \mathbf{Y} má strednú hodnotu $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$, kovariančnú maticu $\sigma^2 \mathbf{I}$. Pre odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ daný vzťahom (3.51) platí*

1. je lineárnou funkciou údajov,
2. je nevychýlený,
3. jeho kovariančná matica je daná ako $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2$,
4. je výdatný.

Dôkaz častí 1–3:

1. Z rovnice (3.51) priamo vyplýva $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{L}\mathbf{Y}$.

2.

$$E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\} = E\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}\} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E\{\mathbf{Y}\} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

3.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T\} &= E\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E\{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T\} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{I} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2 = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2 \end{aligned}$$

Veta 3.2 Uvažujme stochastický proces \mathbf{Y} s strednou hodnotou $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ a kovariančnou maticou $\boldsymbol{\Sigma}$ (kde $\boldsymbol{\Sigma}$ je známa pozitívne definitná matica). Potom najlepší nevychýlený odhad pre $\boldsymbol{\theta}$ je

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y} \quad (3.52)$$

Dôkaz: Maticu $\boldsymbol{\Sigma}$ môžeme písať v tvare $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$, kde \mathbf{P} je nesingulárna matica. Ak si definujeme nový stochastický proces $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}$ potom platí $E\{\bar{\mathbf{Y}}\} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}$, kde $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$. Pre kovariančnú maticu procesu $\bar{\mathbf{Y}}$ potom platí

$$\begin{aligned} E\{(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta})(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta})^T\} &= E\{\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{P}^{-T}\} \\ &= \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^{-T} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

a z vety 3.1 vyplýva pre $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}})^{-1} \bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

Z rovnice (3.52) vyplýva aj interpretácia matice $\boldsymbol{\Sigma}$ ako vyjadrenie relatívnej presnosti našich meraní, pretože je vlastne minimalizované kritérium

$$J(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) \quad (3.53)$$

Takto modifikovanú MNS používame v prípade, že náhodný šum v je korelovaný a poznáme jeho kovariančnú maticu. Môže sa to stať z nasledujúcich dôvodov:

1. systematické chyby pri meraní,
2. časové oneskorenie pri odčítavaní meraní,
3. filtrácia alebo extrapolácia údajov,
4. nesprávny model,
5. nesprávny výber vstupných veličín.

Vo vete 3.1 bolo ukázané, že kovariančná matica odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ závisí od σ^2 . Tento rozptyl však normálne nepoznáme, a preto ho tiež potrebujeme odhadovať. Vhodný nevychýlený odhad σ^2 je daný v nasledujúcej vete:

Veta 3.3 Nevychýlený odhad σ^2 je veličina

$$\hat{\sigma}^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) / (l - s) \quad (3.54)$$

kde l je počet meraní a s počet odhadovaných parametrov

V prípade, že náhodná veličina \mathbf{Y} má normálne rozdelenie, potom platia nasledovné tvrdenia:

Veta 3.4 Odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ má tiež normálne rozdelenie, t.j. $\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx N(\boldsymbol{\theta}, (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2)$.

Veta 3.5 Veličina S_e/σ^2 , kde $S_e = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})$ má rozloženie χ^2 s $l - s$ stupňami voľnosti.

Veta 3.6 *Veličina*

$$t_v = \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 h_{ii}}}, \quad h_{ii} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{ii}^{-1}$$

má t (Studentovo) rozdelenie s $l - s$ stupňami voľnosti.

Tento výsledok sa často používa pre určenie intervalového odhadu pre daný parameter. S $(1 - \alpha)\%$ -nou pravdepodobnosťou je intervalový odhad pre θ_i daný ako

$$\hat{\theta}_i - t_{l-s, \alpha} [h_{ii} \hat{\sigma}^2]^{1/2} < \theta_i < \hat{\theta}_i + t_{l-s, \alpha} [h_{ii} \hat{\sigma}^2]^{1/2} \quad (3.55)$$

V prípade skúmania štatistických charakteristík lineárnej kombinácie parametrov využívame nasledovnú vetu

Veta 3.7 *Nech náhodný proces \mathbf{Y} má strednú hodnotu $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ a kovariančnú maticu $\sigma^2 \mathbf{I}$. Uvažujme lineárnu kombináciu parametrov v tvare $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\theta}$. Potom platí*

1. $E\{\mathbf{p}^T \boldsymbol{\theta}\} = \mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{p}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$
2. $Cov(\mathbf{p}^T \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{p}^T Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{p} = \sigma^2 \mathbf{p}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{p}$
3. $100(1 - \alpha)\%$ -ný intervalový odhad $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\theta}$ je

$$(\mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} - t_{l-s, \alpha} s_p; \mathbf{p}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} + t_{l-s, \alpha} s_p) \quad (3.56)$$

$$\text{kde } s_p = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \mathbf{p}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{p}}$$

Príklad 3.1 V poľnohospodárskom experimente sa získali rôzne výtazky úrody y vzhľadom na rozličné množstvá použitého hnojiva u

u:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y:	1.1	0.9	1.1	1.4	1.3	1.1	1.2	1.6	2.1	2.0	1.6	1.7

1. Ak predpokladáme, že experimenty boli nezávislé, odvodte všeobecné vzorce a určite model v tvare

$$y_k = \theta_0 + \theta_1 u_k + v_k$$

kde v_k sa predpokladá, že má normálne náhodné rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ^2 .

2. určte 95% intervalové odhady oboch parametrov.

Postup: Model sa dá prepísať do tvaru

$$y_i = [\theta_0, \theta_1] \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} + v_k = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} + v_k$$

Odhad parametrov $\hat{\theta}$ sa dá určiť podľa rovnice (3.51) kde

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}, & \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_l \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} &= \frac{1}{l \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & l \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{l \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ l \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V našom prípade dospejeme k výsledku $\theta_0 = 0.8864$, $\theta_1 = 0.0829$, pričom minimálna hodnota účelovej funkcie (3.48) je $J_m = 0.6005$.

Intervalové odhady oboch koeficientov získame dosadením do rovnice (3.55)

$$\begin{aligned} t_{10,0.005}[h_{11}J_m/(l-s)]^{1/2} &= 1.8125 \left(\frac{650}{1716} \frac{0.6005}{10} \right)^{1/2} = 0.2734 \\ t_{10,0.005}[h_{22}J_m/(l-s)]^{1/2} &= 1.8125 \left(\frac{12}{1716} \frac{0.6005}{10} \right)^{1/2} = 0.03714 \end{aligned}$$

Takže 95% intervalové odhady dostaneme

$$\begin{aligned} 0.8864 - 0.2734 < \theta_0 < 0.8864 + 0.2734 &\Rightarrow 0.613 < \theta_0 < 1.1598 \\ 0.0829 - 0.03714 < \theta_1 < 0.0829 + 0.03714 &\Rightarrow 0.04576 < \theta_1 < 0.12004 \end{aligned}$$

3.2.3 Identifikácia dynamických systémov

Budeme pracovať s identifikáciou stupňového prenosu daného vzťahom

$$F(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ L^{-1} \left(\frac{F_s(s)}{s} \right) \right\} \quad (3.57)$$

Potom môžeme vyjadriť stupňový prenos v tvare

$$F(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}} \quad (3.58)$$

čo odpovedá diferenčnej rovnici

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \quad (3.59)$$

V reálnom prostredí treba uvažovať v tejto rovnici náhodnú zložku, takže

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (3.60)$$

Tento model je v literatúre zaoberajúcou sa identifikáciou označovaný ako ARX (podrobnosti viď na strane 79).

Ak zavedieme označenie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}^T &= (a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}) \\ \mathbf{z}^T(t) &= (-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b))\end{aligned}$$

potom

$$y(t) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t) + e(t) \quad (3.61)$$

Táto rovnica má tvar totožný s rovnicou (3.46) a teda sa na ňu dá aplikovať rovnaký postup, ako pri identifikácii statických modelov. Jediný rozdiel je v tom, že vektor \mathbf{z} je funkciou údajov, a preto sa podmienky pre získanie minimálneho, konzistentného a nevychýleného modelu budú líšiť.

Ak máme k dispozícii súbor nameraných hodnôt rovnice (3.61) v tvare

$$\begin{aligned}y(1) &= -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(1-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(1-i) + e(1) \\ y(2) &= -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(2-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(2-i) + e(2) \\ &\vdots \\ y(K) &= -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(K-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(K-i) + e(K)\end{aligned} \quad (3.62)$$

kde $K > n_a + n_b$ a označíme

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(K) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -y_0 & \dots & -y_{1-n_a} & u_0 & \dots & u_{1-n_b} \\ -y_1 & \dots & -y_{2-n_a} & u_1 & \dots & u_{2-n_b} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -y_{K-1} & \dots & -y_{K-n_a} & u_{K-1} & \dots & u_{K-n_b} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

potom platí

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}, \quad J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} \quad (3.65)$$

a minimalizáciou dostaneme známy vzťah

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \quad (3.66)$$

Veta 3.8 V odhade (3.66) platí:

1. Odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je nevychýlený, ak stredná hodnota \mathbf{e} je nulová a \mathbf{e} je nekorelovaná s riadkami matice \mathbf{Z} .
2. Ak $E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$, $Cov(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ a \mathbf{Z} , \mathbf{e} sú nekorelované, potom

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2 (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \quad (3.67)$$

3. Ak rozptyl σ^2 nepoznáme, môžeme ho odhadovať podľa vzťahu

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K - N} (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad N = \max(n_a, n_b) \quad (3.68)$$

Dôkaz 1:

$$\begin{aligned} E\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\} &= E\{(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y}\} = E\{(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T (\mathbf{Z}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e})\} \\ &= \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T E\{\mathbf{e}\} = \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Maticu $(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}$ nazývame kovariančnou maticou.

3.2.3.1 Rekurzívna MNŠ

V rekurzívnych (volaných aj on-line) MNŠ sú odhady parametrov vypočítavané rekurzívne v čase. To znamená, že ak poznáme odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)$, ktorý je vypočítaný z údajov známych do času $t-1$, potom $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ sa zistí pomocou nejakej jednoduchej modifikácie $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1)$.

Rekurzívne metódy majú nasledujúce charakteristické črty:

- Sú významnou časťou adaptívnych systémov, kde daná akcia je založená na aktuálnom modeli.
- Ich požiadavky na pamäť počítača sú veľmi malé, pretože nevyžadujú uchovanie všetkých nameraných údajov.
- Sú ľahko modifikovateľné pre spracovanie údajov v reálnom čase a pre meniace sa parametre.

Pre lepšie pochopenie odvodenia rekurzívnej identifikačnej metódy uvažujme nasledujúci príklad.

Príklad 3.2 Uvažujme model v tvare

$$y(t) = a + e(t)$$

kde $e(t)$ je porucha s rozptylom 1. Je ľahké ukázať, že odhad parametra a v zmysle najmenších štvorcov je daný ako aritmetický priemer všetkých meraní

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i)$$

Táto rovnica môže byť prepísaná nasledovne

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^{t-1} y(i) + y(t) \right] = \frac{1}{t} [(t-1)\hat{a}(t-1) + y(t)] \\ &= \hat{a}(t-1) + \frac{1}{t} [y(t) - \hat{a}(t-1)] \end{aligned}$$

Výsledok teda naznačuje, že odhad parametra v čase t je rovný odhadu v čase $t-1$ plus korekčný člen. Korekčný člen je úmerný odchýlke predikovanej hodnoty $\hat{a}(t-1)$ od toho, čo sa nameralo v čase t , čiže $y(t)$. Faktor úmernosti je $1/t$, čo znamená, že veľkosť zmien

sa bude so zvyšujúcim sa časom znižovať, pretože sa hodnota $\hat{a}(t-1)$ bude približovať ku skutočnej hodnote a .

Podobne sa dá ukázať, že kovariančná matica je daná ako $P(t) = 1/t$ a aj tento vzťah môže byť prepísaný rekurzívne

$$P(t) = \frac{P(t-1)}{1 + P(t-1)}$$

Pri odvodení rekurzívnych metód má veľkú dôležitosť lemma o inverzii matice - Woodburyho identita.

Veta 3.9 *Nech platí $M = A + BC^{-1}D$. Za predpokladu, že matice A, C sú regulárne, potom*

$$M^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C)^{-1}DA^{-1} \quad (3.70)$$

Dôkaz: Potvrdenie, že táto lemma platí, dostaneme nasledovne. Vynásobíme celú rovnicu zľava maticou M a dostaneme

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= (A + BC^{-1}D)[A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C)^{-1}DA^{-1}] \\ &= I + BC^{-1}DA^{-1} - (B + BC^{-1}DA^{-1}B)(DA^{-1}B + C)^{-1}DA^{-1} \\ &= I + BC^{-1}DA^{-1} - BC^{-1}(DA^{-1}B + C)(DA^{-1}B + C)^{-1}DA^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Odvodenie lemy o inverzii matice je nasledovné. Uvažujme

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ -D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Keďže platí $XP = I$, roznásobením dostaneme

$$AP_1 + BP_3 = I, \quad AP_2 + BP_4 = 0 \quad (3.72)$$

$$-DP_1 + CP_3 = 0, \quad -DP_2 + CP_4 = I \quad (3.73)$$

Predpokladáme, že A, C sú regulárne matice, ktoré je možné invertovať. Potom platí

$$\begin{aligned} P_3 &= C^{-1}DP_1, & P_2 &= -A^{-1}BP_4 \\ P_1 &= [A + BC^{-1}D]^{-1}, & P_4 &= [C + DA^{-1}B]^{-1} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Tiež platí $PX = I$ a teda

$$P_1A - P_2D = I \Rightarrow P_1 = A^{-1} + P_2DA^{-1} \quad (3.75)$$

Porovnaním posledných troch rovníc dostaneme žiadaný výsledok.

Ak budeme uvažovať $C = 1, B = b, D = b^T$, potom dostaneme nasledujúci vzťah

$$M^{-1} = (A + bb^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}b(b^T A^{-1}b + 1)^{-1}b^T A^{-1} \quad (3.76)$$

kde vnútorná matica, ktorá sa má invertovať, je iba číslo.

Pri odvodení RMNŠ predpokladajme, že poznáme odhad parametrov v čase t označený ako $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ a kovariančnú maticu $\mathbf{P}(t) = (\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Z}(t))^{-1}$. Našou úlohou je odvodiť rekurzívne vzťahy pre $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1)$ a $\mathbf{P}(t+1)$. Ak máme meranie v čase $t+1$, potom

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t+1) &= \begin{pmatrix} \mathbf{Y}(t) \\ y(t+1) \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}(t+1) &= \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(t) \\ \mathbf{z}^T(t+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^T(t+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^T(t) & \mathbf{z}^T(t+1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pre kovariančnú maticu $\mathbf{P}(t+1)$ platí

$$\mathbf{P}(t+1) = (\mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Z}(t+1))^{-1} \quad (3.77)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^T(t) & \mathbf{z}^T(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}(t) \\ \mathbf{z}^T(t+1) \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (3.78)$$

$$= [\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)]^{-1} \quad (3.79)$$

$$= [\mathbf{P}^{-1}(t) + \mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)]^{-1} \quad (3.80)$$

Použitím lemy o inverzii matice dostaneme

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)[\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) + 1]^{-1}\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t) \quad (3.81)$$

Označme $\gamma(t+1) = [\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) + 1]^{-1}$. Z toho vyplýva vzťah

$$\gamma(t+1) = 1 - \gamma(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) \quad (3.82)$$

ktorý využijeme pri odvodzovaní vzťahu (3.84).

Celkovo pre aktualizáciu \mathbf{P} platí vzťah

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t) \quad (3.83)$$

Odvodenie pre nový odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1)$ je analogické a využíva vzťahy (3.82), (3.83):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1} &= \mathbf{P}(t+1)\mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Y}(t+1) \\ &= \mathbf{P}(t+1) \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^T(t) & \mathbf{z}^T(t+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}(t) \\ y(t+1) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{P}(t+1)[\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{z}^T(t+1)y(t+1)] \\ &= [\mathbf{P}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)] \times \\ &\quad [\mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{z}^T(t+1)y(t+1)] \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)y(t+1) \\ &\quad - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)y(t+1) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ &\quad + \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)[1 - \gamma(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)]y(t+1) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ &\quad + \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)y(t+1) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)[y(t+1) - \mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)]\end{aligned} \quad (3.84)$$

Formálne môžeme zapísať rekurzívnu metódu najmenších štvorcov nasledovne:

$$\begin{aligned}
\epsilon(t+1) &= y(t+1) - \mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\
\gamma(t+1) &= [1 + \mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)]^{-1} \\
\mathbf{L}(t+1) &= \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) \\
\mathbf{P}(t+1) &= \mathbf{P}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t) \\
\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{L}(t+1)\epsilon(t+1)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Každý rekurzívny algoritmus musí mať dané počiatočné podmienky. V našom prípade potrebujeme počiatočné podmienky pre $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ a $\mathbf{P}(0)$, kde $\mathbf{P}(0)$ môžeme chápať ako neurčitost odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$. Pochopiteľne, že oba parametre majú vplyv na konvergenciu RMNŠ. Ako ukážeme nižšie, minimalizované kritérium nie je v tvare (3.47), ale je dané ako

$$J_{t+1}(\boldsymbol{\theta}) = [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)]^T \mathbf{P}^{-1}(0) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)] + \sum_{i=1}^{t+1} [y(i) - \mathbf{z}^T(i)\boldsymbol{\theta}]^2 \tag{3.86}$$

Ako vidíme, ku klasickému výrazu daného druhým členom kritéria je pridaný člen zahŕňajúci efekt nenulových počiatočných podmienok. Na to, aby bol jeho vplyv minimalizovaný, volíme obvykle $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{P}(0) = c\mathbf{I}$ kde c je nejaká veľká konštanta, napr. $10^5 - 10^{10}$.

Pre úplnosť uvedieme dôkaz vyššie uvedených tvrdení.

Veta 3.10 *Minimalizácia kritéria (3.86) vedie k rovniciam (3.85)*

Dôkaz: Kritérium (3.86) môžeme prepísať do vektorového tvaru

$$\begin{aligned}
J_{t+1}(\boldsymbol{\theta}) &= [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)]^T \mathbf{P}^{-1}(0) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)] \\
&\quad + [\mathbf{Y}(t+1) - \mathbf{Z}(t+1)\boldsymbol{\theta}]^T [\mathbf{Y}(t+1) - \mathbf{Z}(t+1)\boldsymbol{\theta}]
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Jeho minimum sa získa položením parciálnej derivácie podľa $\boldsymbol{\theta}$ rovnej nule a dostaneme

$$[\mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Z}(t+1) + \mathbf{P}^{-1}(0)]\boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Y}(t+1) \tag{3.88}$$

Keďže na základe meraní do času $t+1$ získame hodnotu $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1)$, platí

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = [\mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Z}(t+1) + \mathbf{P}^{-1}(0)]^{-1} [\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Y}(t+1)] \tag{3.89}$$

Postupnou rekuziou rovnice (3.80) dostaneme vzťah

$$\mathbf{P}^{-1}(t+1) = \mathbf{P}^{-1}(0) + \mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Z}(t+1) \tag{3.90}$$

takže pre odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1)$ platí

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \mathbf{P}(t+1)[\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \mathbf{Z}^T(t+1)\mathbf{Y}(t+1)] \tag{3.91}$$

$$= \mathbf{P}(t+1)[\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{z}(t+1)y(t+1)] \tag{3.92}$$

Vzťah (3.89) posunutý do času t je daný ako

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{P}(t)[\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \mathbf{Z}^T(t)\mathbf{Y}(t)] \tag{3.93}$$

takže vzťah (3.92) môžeme prepísať na

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \mathbf{P}(t+1)[\mathbf{P}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{z}(t+1)y(t+1)] \tag{3.94}$$

Dosadením za $\mathbf{P}^{-1}(t)$ z rovnice (3.80) dostaneme

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \mathbf{P}(t+1)[\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{z}(t+1)y(t+1)] \quad (3.95)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{P}(t+1)\mathbf{z}(t+1)\boldsymbol{\epsilon}(t+1) \quad (3.96)$$

Vidíme, že tento vzťah by bol ekvivalentný s poslednou z rovníc (3.85), ak by platilo

$$\mathbf{P}(t+1)\mathbf{z}(t+1) = \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) \quad (3.97)$$

Ak dosadíme za $\mathbf{P}(t+1)$ z rovnice (3.83), dostaneme

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}(t) - \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)\mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)]\mathbf{z}(t+1) &= \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) \\ \gamma(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)[1 + \mathbf{z}^T(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1)] &= \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t+1) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Výraz v hranatých zátvorkách nie je nič iné, ako $\gamma^{-1}(t+1)$, čím je celý dôkaz ukončený.

3.2.3.2 Identifikovateľnosť modelu

Identifikovateľnosť modelu opísaného diferenčnou rovnicou a odhadovaného rekurzívnu metódou najmenších štvorcov závisí od invertibility kovariančnej matice a pochopiteľne od typu vstupného signálu $u(t)$. Keďže platí

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \sum_{i=1}^t \mathbf{z}(i)\mathbf{z}^T(i) \quad (3.99)$$

vidíme, že táto matica bude v najlepšom prípade invertovateľná, ak $t \geq n$, kde n je dimenzia vektora údajov $\mathbf{z}(t)$. Táto nerovnosť je však iba nutnou, ale nie postačujúcou podmienkou, keďže vektor $\mathbf{z}(t)$ nemusí byť tzv. identifikačne výdatný. Pre lepšie pochopenie uvažujme triedu FIR modelov (viď strana 79), kde sa uvažuje model v tvare

$$y(t) = \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + e(t) \quad (3.100)$$

Vektor parametrov a údajov sú potom v tvare

$$\boldsymbol{\theta}^T = [b_1, \dots, b_n] \quad (3.101)$$

$$\mathbf{z}(t)^T = [u(t-1), \dots, u(t-n)] \quad (3.102)$$

Porovnaním s (3.99) dostávame podmienku pre identifikačnú výdatnosť vstupu $u(t)$: Vstup $u(t)$ je identifikačne výdatný rádu n , ak platí

$$k_1 \mathbf{I} > \sum_{k=t}^{t+l} [u(k-1), \dots, u(k-n)][u(k-1), \dots, u(k-n)]^T > k_2 \mathbf{I} \quad (3.103)$$

kde $k_1, k_2 > 0$ a l je kladné celé číslo (z nutnej podmienky vyplýva $l \geq n$).

Môžeme teda tvrdiť nasledovné:

Veta 3.11 *RMNS pre FIR systém (3.100) konverguje k $\boldsymbol{\theta}$ ak*

1. vstup $u(t)$ je identifikačne výdatný rádu minimálne n .

V prípade ARX modelu opísaného rovnicou (3.60) v tvare

$$y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(t-i) + e(t) \quad (3.104)$$

sú podmienky konvergencie parametrov komplikovanejšie. Ich dôkaz možno nájsť napr. v Goodwin a Sin (1984).

Veta 3.12 *RMNSŠ pre ARX systém (3.104) konverguje k θ ak*

1. *polynómy A, B sú nesúdeliteľné,*
2. *systém je stabilný,*
3. *vstup $u(t)$ je identifikačne výdatný rádu minimálne $2n$.*

Vo všeobecnosti, odhady parametrov pomocou metódy najmenších štvorcov, pre ktoré boli doteraz uvedené postupy, je možné použiť iba pre stabilné systémy. Toto bolo uvedené aj v predchádzajúcej vete. Vyplýva to z faktu, že vstup $u(t)$ musí byť identifikačne výdatný. Pre nestabilné systémy by sa teda dalo navrhnúť, aby bol identifikovaný systém najprv stabilizovaný nejakým regulátorom. Podmienka identifikačnej výdatnosti ale nie je splnená v prípade uzatvoreného regulačného obvodu, kedy je $u(t)$ generované ako lineárna kombinácia vektora údajov $\mathbf{z}(t)$, čiže

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{z}(t) \quad (3.105)$$

Z uvedeného vyplýva, že v uzatvorenom regulačnom obvode definovanom zákonom riadenia z predošlého vzťahu, nie je isté, že bude zaručená konvergencia parametrov. Konvergenciu ale môžeme zaručiť pridaním externého signálu do URO, ktorý bude dostatočne identifikačne výdatný. Presnejšie je to uvedené v nasledovnej vete:

Veta 3.13 *RMNSŠ pre systém (3.104) konverguje k θ ak*

1. *polynómy A, B sú nesúdeliteľné,*
2. *vstup $u(t)$ je generovaný pomocou spätnej väzby v tvare*

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{z}(t) + v(t) \quad (3.106)$$

3. *externý signál $v(t)$ je identifikačne výdatný rádu minimálne $4n$.*

3.2.3.3 Metóda pomocných premenných

Odhad parametrov podľa rovnice (3.66) môže byť písaný aj v tvare

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)\mathbf{y}(t) \right] \quad (3.107)$$

Pre odchýlku $\hat{\theta} - \theta$ platí

$$\hat{\theta} - \theta = \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)\mathbf{e}(t) \right] \quad (3.108)$$

Ak by mal byť odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nevychýlený, potom musí platiť

$$E \{ \mathbf{z}(t) \mathbf{e}(t) \} = 0 \quad (3.109)$$

Základnou myšlienkou metódy pomocných premenných je zmeniť vektor údajov $\mathbf{z}(t)$ tak, aby nebol korelovaný s $\mathbf{e}(t)$. Jedným zo spôsobov, ako to zaručiť, je zdefinovať namiesto neho vektor pomocných premenných $\boldsymbol{\xi}$ tak, aby

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\xi}(t) \mathbf{e}(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\xi}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}^T(t) \boldsymbol{\theta}] = 0 \quad (3.110)$$

Pre odhad parametrov potom platí

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\sum_{t=1}^N \boldsymbol{\xi}(t) \mathbf{z}^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \boldsymbol{\xi}(t) \mathbf{y}(t) \right] \quad (3.111)$$

Existujú rozličné spôsoby pre výber vektora $\boldsymbol{\xi}$. Najčastejšie sa uvažuje ako (filtrovaný) vektor minulých vstupov do systému v tvare

$$\boldsymbol{\xi}^T(t) = [u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_a - n_b)] \quad (3.112)$$

Pre rekurzívnu metódu pomocných premenných potom platí

$$\begin{aligned} \gamma(t+1) &= [1 + \mathbf{z}^T(t+1) \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\xi}(t+1)]^{-1} \\ \mathbf{L}(t+1) &= \gamma(t+1) \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\xi}(t+1) \\ \mathbf{P}(t+1) &= \mathbf{P}(t) - \gamma(t+1) \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\xi}(t+1) \mathbf{z}^T(t+1) \mathbf{P}(t) \end{aligned} \quad (3.113)$$

3.2.3.4 Modifikácie základnej rekurzívnej MNŠ

V rovnici (3.80) bolo ukázané, že aktualizácia kovariančnej matice je založená na rovnici

$$\mathbf{P}^{-1}(t+1) = \mathbf{P}^{-1}(t) + \mathbf{z}(t+1) \mathbf{z}^T(t+1) \quad (3.114)$$

Tento vzorec sa dá zovšeobecniť do tvaru

$$\mathbf{P}^{-1}(t+1) = \lambda_1(t) \mathbf{P}^{-1}(t) + \lambda_2(t) \mathbf{z}(t+1) \mathbf{z}^T(t+1) \quad (3.115)$$

kde $0 < \lambda_1(t) \leq 1$, $0 \leq \lambda_2(t) < 2$. Poznamenávame, že λ_1, λ_2 majú práve opačný efekt. λ_1 zväčšuje kovariančnú maticu a λ_2 ju znižuje. Táto úprava vedie tiež k zmene výpočtu $\gamma(t+1)$ a teda aj zosilnenia identifikácie $\mathbf{L}(t+1)$.

Rekurzívny vzorec pre výpočet kovariančnej matice je potom daný

$$\gamma(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)/\lambda_2(t) + \mathbf{z}^T(t+1) \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1)} \quad (3.116)$$

$$\mathbf{P}(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} [\mathbf{P}(t) - \gamma(t+1) \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1) \mathbf{z}^T(t+1) \mathbf{P}(t)] \quad (3.117)$$

Rozličné hodnoty λ_i potom vedú k rôznym identifikačným algoritmom

klesajúce zosilnenie: ak $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, potom zosilnenie klesá a kovariančná matica narastá. Tento typ je vhodný pre identifikáciu stacionárnych systémov.

konštantné exponenciálne zabúdanie: ak $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = 1$. Typické hodnoty pre λ_1 sú medzi 0.95 až 0.99. Tomuto nastaveniu zodpovedá kritérium

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \lambda_1^{t-i} \epsilon_i^2 \quad (3.118)$$

Efekt λ_1 spočíva v postupnom zabúdaní starších údajov, pričom najväčšia váha je na poslednom meraní. Tento typ identifikačného algoritmu je vhodný v prípade, že sa parametre systému menia pomaly.

stúpajúce exponenciálne zabúdanie: V tomto prípade je $\lambda_2 = 1$ a exponenciálne zabúdanie λ_1 je dané vzťahom

$$\lambda_1(t) = \lambda_0 \lambda_1(t-1) + 1 - \lambda_0 \quad (3.119)$$

a typické počiatočné hodnoty sú

$$\lambda_1(0) = \lambda_0 \in (0.95, 0.99) \quad (3.120)$$

Takto zvolené exponenciálne zabúdanie sa asymptoticky blíži k 1 a teda počiatočné dáta sú zabudnuté.

Tento typ identifikácie sa používa najmä pre stacionárne systémy, pretože zabraňuje príliš rýchlemu znižovaniu zosilnenia na začiatku a má za následok rýchlu konvergenciu, ak sú odhady parametrov vo veľkej vzdialenosti od optimálnych.

premenlivé exponenciálne zabúdanie: V tomto prípade je $\lambda_2 = 1$ a exponenciálne zabúdanie λ_1 je dané vzťahom ([Fortescue et al. \(1981\)](#))

$$\lambda_1(t) = 1 - k\gamma(t)\epsilon^2(t) \quad (3.121)$$

kde konštanta k má byť malé kladné číslo (napr. 0.001).

V tomto prípade pracuje algoritmus nasledovne: Ak sa identifikovaný systém zmení, ϵ^2 sa zvýši a spôsobí zníženie hodnoty λ_1 . Staršie údaje sa teda budú rýchlejšie zabúdať. Ak ϵ^2 klesne, λ_1 sa opäť priblíži k hodnote 1 a miera zabúdania sa zníži.

konštantná stopa: V tomto prípade sú λ_i volené tak, aby bola zachovaná konštantná stopa kovariančnej matice

$$\text{tr}\mathbf{P}(t+1) = \text{tr}\mathbf{P}(t) = ng \quad (3.122)$$

kde n je počet identifikovaných parametrov a $g = 0.1 - 4$ je počiatočné zosilnenie.

Tento spôsob je vhodný pre sledovanie systémov s parametrami meniacimi sa v čase.

konštantné zosilnenie: V tomto prípade je $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ a teda pre kovariančnú maticu platí

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \quad (3.123)$$

Tento algoritmus sa používa pre identifikáciu systémov s malým počtom parametrov (≤ 3), ak nie je šum merania výrazný. Identifikácia parametrov je vo všeobecnosti pomalšia, ale algoritmus je jednoduchšie implementovateľný.

Okrem toho sa používajú aj kombinácie uvedených prístupov, napr. keď sa spája konštantná stopa kov. matice s rôznym spôsobom zabúdania. Tieto postupy sú vhodné pre odhad časovo závislých parametrov, ak nemáme počiatkové informácie o parametroch.

Rekuzívne metódy so zabudovaným exponenciálnym zabúdaním majú jednu nevýhodu. Ak metóda nedostane dlhší čas nové informácie ($\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{z}(t)$), môže sa stať, že kovariančná matica nebude pozitívne definitná a algoritmus sa zrúti (bursting effect). Vo všeobecnosti sa preto doporučuje sledovať, či stopa kovariančnej matice nie je príliš veľká.

Na zaistenie stability bola vyvinutá metóda so smerovým zabúdaním, ktorá zabúda iba v tom smere, v ktorom prišli nové informácie (Kulhavý a Kárný, 1984). Rovnice popisujúce túto metódu sú nasledovné:

$$r(t) = \mathbf{z}(t+1)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1) \quad (3.124)$$

$$\mathbf{L}(t+1) = \frac{\mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1)}{1+r(t)} \quad (3.125)$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) - \frac{1-\lambda_1(t)}{r(t)} & \text{ak } r(t) > 0 \\ 1 & \text{ak } r(t) = 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) - \frac{\mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1) \mathbf{z}(t+1)^T \mathbf{P}(t)}{\beta(t)^{-1} + r(t)} \quad (3.127)$$

Ďalší prístup k zlepšeniu chovania spočíva v priamej modifikácii kovariančnej matice \mathbf{P} . Je zrejmé, že na jej hlavnej diagonále sa nachádza informácia o rozptyle (neurčitosti) jednotlivých parametrov. Preto sa v prípade časovo premenných parametrov môže zväčšiť ich rozptyl a tým aj zrýchliť adaptáciu na nové podmienky.

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t+1) + \delta \mathbf{I} \quad (3.128)$$

kde $\delta < 0.01$.

Inou možnosťou úprav RMNŠ je identifikáciu selektívne vypínať, ak sú odhady parametrov správne. Podobne, ako v prípade premenlivého exponenciálneho zabúdania, je sledovaná veľkosť predikčnej chyby. Ak je vo vhodnom intervale, parametre sa meniť nebudú. Definujeme si preto parameter α

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \gamma(t) \epsilon^2(t) > \epsilon^2 > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (3.129)$$

kde parameter ϵ je malé kladné číslo. Potom v rovniciach (3.85) použijeme modifikované vzťahy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+1) &= \mathbf{P}(t) - \alpha(t+1) \gamma(t+1) \mathbf{P}(t) \mathbf{z}(t+1) \mathbf{z}(t+1)^T \mathbf{P}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \alpha(t+1) \mathbf{L}(t+1) \epsilon(t+1) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Takto sa zabezpečí, že kovariančná matica a odhady parametrov sa nebudú meniť, ak je výstup z procesu v dobrej zhode s výstupom z modelu.

Pre správne používanie RMNŠ je dôležité korektné napĺňanie vektora údajov \mathbf{z} . Ak by sme napríklad chceli identifikovať systém s prenosom

$$F(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

potom je vektor údajov daný napríklad

$$\mathbf{z}^T(t) = [-y(t-1), -y(t-2), u(t-1), u(t-2)]$$

v každej perióde vzorkovania. Vektor parametrov k nemu prislúchajúci je v tvare

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, b_1, b_2]$$

Faktorizácia kovariančnej matice Nevyhnutnou operáciou pri MNŠ je inverzia pozitívne definitnej matice $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$. Táto inverzia sa neodstráni ani v prípade priebežných algoritmov a realizuje sa pomocou lemy o inverzii matice. Pri numerických výpočtoch sa však často môže stať, že po určitom čase sa vplyvom nepresností a zaokrúhlovacích chýb nedodrží pozitívna definitnosť kovariančnej matice a identifikačný algoritmus diverguje.

Preto sa v identifikačných algoritmoch rozkladá (faktorizuje) kovariančná matica ako produkt dvoch alebo troch matíc. Identifikačné algoritmy potom pracujú priamo s týmito maticami a tak zabezpečujú pozitívnu definitnosť pôvodnej kovariančnej matice.

Prvý spôsob je pomocou dekompozície v tvare

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T, \quad \text{alebo} \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \quad (3.131)$$

Ak matica \mathbf{Q} je dolná (horná) trojuholníková matica, potom sa jedná o Choleskyho dekompozíciu a \mathbf{Q} sa nazýva aj odmocninou matice \mathbf{P} . V tomto prípade je možné maticu \mathbf{Q} získať pomocou nasledovných vzťahov

$$q_{ii} = \sqrt{p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki}^2}, \quad q_{ij} = \frac{1}{q_{ii}} \left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki} q_{kj} \right)$$

Vzorce slúžiace na modifikáciu matíc \mathbf{L}, \mathbf{P} v RMNŠ sú nasledovné

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t+1) &= \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{z}(t+1) \\ \beta(t+1) &= \lambda(t+1) + \mathbf{f}^T(t+1) \mathbf{f}(t+1) \\ \omega(t+1) &= 1 / [\beta(t+1) + \sqrt{\beta(t+1) \lambda(t+1)}] \\ \mathbf{L}(t+1) &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{f}(t+1) \\ \mathbf{Q}(t+1) &= [\mathbf{Q}(t) - \omega(t+1) \mathbf{L}(t) \mathbf{f}^T(t+1)] / \sqrt{\lambda(t+1)} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Druhý spôsob je založený na UD dekompozícii matice v tvare

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} \quad (3.133)$$

kde \mathbf{U} je horná trojuholníková matica s jednotkami na hlavnej diagonále a \mathbf{D} je diagonálna matica. Pre ich výpočet využívame vzťahy

$$d_i = p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki}^2, \quad u_{ij} = \frac{1}{d_i} \left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki} u_{kj} \right)$$

Vzorce pre modifikáciu výpočtu takto faktorizovanej kovariančnej matice sú uvedené v literatúre o rekurzívnej identifikácii (Bierman, 1977).

3.2.3.5 Modely lineárnych dynamických systémov

V tejto časti si objasníme základné typy diskretných lineárnych modelov využívaných pri identifikácii. V prvom rade objasníme pojem ARMA procesu, na základe ktorého je možné vyjadriť ľubovoľný stacionárny náhodný signál ako biely šum prechádzajúci lineárnym systémom. V ďalšom uvedieme na základe rozličných typov šumu niektoré typické lineárne modely systémov. Odhad parametrov pre všetky tieto modely je založený na minimalizácii sumy štvorcov predikčných chýb, a preto sa v literatúre tieto techniky označujú skratkou PEM (Prediction Error Methods).

ARMA proces

Uvažujme stacionárny proces $v(t)$, ktorý môže byť reprezentovaný ako biely šum prechádzajúci lineárnym systémom v tvare

$$v(t) = F(q)e(t) \quad (3.134)$$

kde q je operátor posunutia ($q^{-1}y(t) = y(t-1)$) a $F(q)$ je racionálna lomená funkcia v tvare

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{C(q)}{A(q)} \\ C(q) &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \\ A(q) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \end{aligned}$$

a môžeme písať

$$\begin{aligned} v(t) &= -a_1v(t-1) - \dots - a_{n_a}v(t-n_a) \\ &\quad + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c) \end{aligned} \quad (3.135)$$

Stochastický proces splňujúci túto rovnicu sa nazýva ARMA. Je zložený z dvoch častí: AR (autoregressive), keď $n_c = 0$

$$v(t) + a_1v(t-1) + \dots + a_{n_a}v(t-n_a) = e(t) \quad (3.136)$$

a z MA (moving average), ak $n_a = 0$

$$v(t) = e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c) \quad (3.137)$$

ARX model Vo všeobecnosti predpokladáme, že skutočný systém je popísaný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} &= -a_1y(t-1) - \dots - a_{n_a}y(t-n_a) \\ &\quad + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Rozličné typy modelov sa potom rozlišujú spôsobom, akým sa ku systému pripája biely šum.

ARX model predpokladá, že chyba vstupuje ako biely šum do rovnice systému (viď rovnicu (3.60))

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1y(t-1) - \dots - a_{n_a}y(t-n_a) \\ &\quad + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Vektor parametrov a vektor údajov sú teda v tvare

$$\boldsymbol{\theta}^T = (a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}) \quad (3.141)$$

$$\mathbf{z}^T(t) = (-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b)) \quad (3.142)$$

Model je označovaný ako ARX, pretože AR popisuje časť $A(q)y$ a X je extra vstup. Vo špeciálnom prípade, ak $n_a = 0$ hovoríme o FIR (finite impulse response) modeli.

ARX model je v identifikácii používaný najčastejšie, pretože vo vektore údajov vystupujú iba priamo merateľné signály a nie je potrebné niektoré veličiny rekonštruovať, ako v nasledovných metódach.

ARMAX model Tento model predpokladá, že chyba vstupuje ako MA model, takže

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1 y(t-1) - \dots - a_{n_a} y(t-n_a) \\ &\quad + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \\ &\quad + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c) \end{aligned} \quad (3.143)$$

Vektor parametrov a vektor údajov sú v tvare

$$\boldsymbol{\theta}^T = (a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, c_1, \dots, c_{n_c}) \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T(t) &= (-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b), \\ &\quad \epsilon(t-1), \dots, \epsilon(t-n_c)) \end{aligned} \quad (3.145)$$

kde $\epsilon(t)$ je predikčná chyba definovaná ako

$$\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \mathbf{z}^T(t)\boldsymbol{\theta} \quad (3.146)$$

OE model Predpokladáme, že chyba vstupuje ako aditívny biely šum k výstupnej veličine (šum merania)

$$\begin{aligned} w(t) &= -f_1 w(t-1) - \dots - f_{n_f} w(t-n_f) \\ &\quad + b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$y(t) = w(t) + e(t) \quad (3.148)$$

Vektor parametrov a vektor údajov sú v tvare

$$\boldsymbol{\theta}^T = (f_1, \dots, f_{n_f}, b_1, \dots, b_{n_b}) \quad (3.149)$$

$$\mathbf{z}^T(t) = (-w(t-1), \dots, -w(t-n_f), u(t-1), \dots, u(t-n_b)) \quad (3.150)$$

Vidíme, že vzťahy sú vo formálnom súhlase s ARX modelom. Avšak, vnútorná premenná $w(t)$ nie je pozorovateľná, a preto je iba odhadovaná zo vzťahu

$$w(t) = \hat{y}(t) \quad (3.151)$$

Meno modelu je z anglického názvu Output Error, čiže chyba na výstupe.

Box-Jenkinsov model Zovšeobecnením OE modelu je Box-Jenkinsov model, kde šum na výstupe je modelovaný ako ARMA proces

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (3.152)$$

Všeobecný model Zovšeobecnená štruktúra vyhovujúca pre všetky uvedené modely môže byť v tvare

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (3.153)$$

Pre špecifikáciu vektora údajov a vektora parametrov definujeme nasledovné veličiny

$$w(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) \quad (3.154)$$

$$v(t) = A(q)y(t) - w(t) \quad (3.155)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.156)$$

Potom môžeme písať

$$\boldsymbol{\theta}^T = (a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, f_1, \dots, f_{n_f}, c_1, \dots, c_{n_c}, d_1, \dots, d_{n_d}) \quad (3.157)$$

$$\mathbf{z}^T(t) = (-y(t-1), \dots, -y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b), -w(t-1), \dots, -w(t-n_f), \epsilon(t-1), \dots, \epsilon(t-n_c), -v(t-1), \dots, -v(t-n_f)) \quad (3.158)$$

3.2.3.6 Verifikácia modelov

V tejto časti sa budeme zaoberať verifikáciou modelov založenou na myšlienke, že predikčná chyba je biely šum. K tomuto prípadu môže dôjsť iba v prípade, ak prenos identifikovaného modelu vystihuje vlastnosti reálneho procesu a ak stupne polynómov boli zvolené presne.

Verifikácia modelu je potom realizovaná vo viacerých krokoch:

1. Vytvorenie vstupno-výstupného súboru pre identifikovaný model (použitím tej istej postupnosti vstupov ako pre systém).
2. Vytvorenie súboru predikčných chýb modelu (min. 100 údajov).
3. Test na nekorelovanosť predikčných chýb.

Test nekorelovanosti. Nech $\epsilon(t)$ je postupnosť centrovaných predikčných chýb (centrovaná veličina sa získa odčítaním meranej hodnoty od priemernej hodnoty). Ďalej sa vypočítajú

$$R(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t) \quad , \quad R_n(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1 \quad (3.159)$$

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t)\epsilon(t-i) \quad , \quad R_n(i) = \frac{R(i)}{R(0)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.160)$$

Ak je postupnosť rezíduí biela a počet vzoriek veľmi veľký ($N \rightarrow \infty$), potom platí $R_n(i) = 0, i > 0$.

V reálnych situáciách sa tento prípad nikdy nestane, pretože predikčná chyba v sebe obyčajne zahŕňa aj chyby zvolenej štruktúry, nelineárne efekty a tiež počet vzoriek je obyčajne relatívne malý.

Preto sa pri praktickej verifikácii vychádza zo štatistických intervalových testov v tvare

$$R_n(0) = 1, \quad |R_n(i)| \leq \frac{2.17}{\sqrt{N}} \quad (3.161)$$

pričom tento test bol konštruovaný na základe predpokladu, že biely šum má asymptotické gaussovské rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a disperziou $\sigma = 1/\sqrt{N}$ a intervalový odhad odpovedá 3% úrovni pravdepodobnosti. Ak $R_n(i)$ má uvedené gaussovské rozdelenie pravdepodobnosti tak je 1.5% pravdepodobnosť, že $R_n(i) > 2.17/\sqrt{N}$ alebo $R_n(i) < -2.17/\sqrt{N}$. Ak by sme uvažovali 7% pravdepodobnosť, potom by sa 2.17 zamenilo za 1.8.

Poznámky:

- Pre akceptovateľný model obyčajne platí

$$|R_n(i)| \leq \frac{2.17}{\sqrt{N}}$$

- Ak viacero štruktúr modelov má rovnaký počet parametrov, potom vyberieme model s najmenšou hodnotou $|R_n(i)|$.
- Príliš dobrá hodnota kritéria naznačuje, že štruktúra modelu sa môže zjednodušiť.
- Z praktického hľadiska sa môže používať zjednodušené kritérium v tvare

$$|R_n(i)| < 0.15, \quad i > 0$$

- V prípade, že hodnoty predikčných chýb sú veľmi malé oproti hodnotám výstupov, tento test stráca zmysel, pretože v tomto prípade nemajú rezíduá gaussovské rozdelenie pravdepodobnosti.

3.2.3.7 Praktické otázky identifikácie

Odstraňovanie statického posunu V metóde najmenších štvorcov sme vždy predpokladali, že šum merania má nulovú strednú hodnotu. V praxi však nastáva tento prípad relatívne zriedka, a preto je nutné merania modifikovať. Podľa charakteru šumu môžeme použiť viacero spôsobov.

Uvažujme diferenčnú rovnicu identifikovaného systému v tvare

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + d(t) \quad (3.162)$$

Ak by sme neeliminovali nenulovú strednú hodnotu poruchy, potom by sa identifikačný algoritmus snažil identifikovať také parametre polynómov A, B , aby predikčná chyba mala nulovú strednú hodnotu, čím by nevyhnutne zavádzal systematickú chybu do koeficientov A, B .

1. Ak $d(t) = d$ a ustálený stav je daný hodnotami y^s, u^s , potom definujeme odchýlkové veličiny $\tilde{y}(t) = y(t) - y^s, \tilde{u}(t) = u(t) - u^s$ a identifikujeme model v tvare

$$A(z^{-1})\tilde{y}(t) = B(z^{-1})\tilde{u}(t) + e(t)$$

kde šum $e(t)$ už má nulovú strednú hodnotu.

2. Ak $d(t) \neq d$, to znamená, že porucha $d(t)$ je časovo premenná, potom ju môžeme eliminovať dvoma spôsobmi. Uvažujme rovnicu (3.162) v čase $t - 1$

$$A(z^{-1})y(t-1) = B(z^{-1})u(t-1) + d(t-1)$$

Odčítaním tejto rovnice od (3.162) dostaneme

$$\begin{aligned} A(z^{-1})(y(t) - y(t-1)) &= B(z^{-1})(u(t) - u(t-1)) + d(t) - d(t-1) \\ A(z^{-1})\tilde{y}(t) &= B(z^{-1})\tilde{u}(t) + \Delta d(t) \end{aligned}$$

Za predpokladu, že porucha $d(t)$ sa pomaly mení, môžeme posledný člen zanedbať a používať inkrementálne hodnoty vstupov a výstupov.

Tento postup sa dá zovšeobecniť a nové premenné sú dané všeobecne v tvare

$$\tilde{y}(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{1 + f_1 z^{-1}}, \quad \tilde{u}(t) = \frac{u(t) - u(t-1)}{1 + f_1 z^{-1}} \quad (3.163)$$

kde $-0.5 \leq f_1 \leq 0$.

Druhý spôsob eliminácie časovo premennej poruchy spočíva v jej priamej identifikácii zavedením rozšíreného modelu

$$\mathbf{z}^T(t) = [-y_{t-1}, \dots, -y_{t-n_a}, u_{t-1}, \dots, u_{t-n_b}, 1] \quad (3.164)$$

$$\boldsymbol{\theta}^T = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, d] \quad (3.165)$$

Normalizácia signálov Signály používané ako vstupy a výstupy do reálneho objektu majú často veľmi rozdielne hodnoty. Ak by boli použité priamo na identifikáciu či riadenie, mohlo by to viesť k numerickým problémom. Napríklad kovariančná matica, ktorú je nutné invertovať, by bola veľmi zle podmienená. Preto sa v praxi signály normalizujú. Častá metóda je zvoliť normalizované signály v tvare

$$y'(t) = \frac{y(t)}{y^s} \quad (3.166)$$

kde y^s je ustálená hodnota danej veličiny. Ďalšia možnosť je použiť v menovateli absolútnu hodnotu maxima danej veličiny.

Určenie stupňov polynómov A, B Pred samotnou identifikáciou reálneho objektu je nutné stanoviť stupne polynómov n_a, n_b a dopravné oneskorenie D . Obyčajne vychádzame z čiastočnej znalosti objektu, prípadne z hrubého odhadu modelu pomocou neparаметrických metód.

Odhad n_a . V prípade, že nepoznáme stupeň polynómu menovateľa prenosu, môžeme voliť $n_a \leq 3$, čo postačuje pre väčšinu priemyselných procesov. Dobrou počiatočnou hodnotou je $n_a = 2$.

Odhad n_b, D . Z teórie riadenia vieme, že oneskorenie u systémov popísaných diferenciálnymi rovnicami je ukryté v koeficientoch polynómu B , pričom je prvých $D + 1$ koeficientov nulových. Ak dopravné oneskorenie nepoznáme, volíme ho obvykle nulové. Stupeň n_b rovný dvom je dobrou počiatočnou hodnotou.

Odhad D . Ak odhadovaný čitateľ (polynóm B) je v tvare

$$B = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots$$

a platí

$$|b_1| < 0.15|b_2|$$

potom môžeme uvažovať $b_1 = 0$ a zvýšiť hodnotu D . Po tomto zásahu meníme štruktúru identifikovaného modelu a identifikujeme odznova. Potom môžeme opäť testovať vzťah

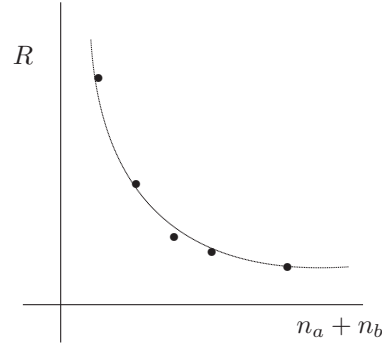
$$|b_i| < 0.15|b_{i+1}|$$

a opakovať celý cyklus dovtedy, kým daná nerovnosť platí.

Odhad maximálnych stupňov n_a, n_b . Účelom je získať čo najjednoduchší model procesu, pretože od neho obvykle závisí zložitosť regulátora, ale aj robustnosť modelu vzhľadom na pracovný bod regulácie.

Jeden z prístupov odhadovania maximálnych hodnôt stupňov polynómov je študovať vývoj rozptylu predikčných chýb, t.j.

$$R = E \{ \epsilon^2(t) \} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t) \quad (3.167)$$



Obr. 3.2: Vývoj rozptylu predikčných chýb ako funkcie počtu parametrov modelu.

ako funkciu súčtu $n_a + n_b$. Typický tvar tejto krivky je na obr. 3.2.

Teoreticky by mala byť táto krivka daná ako zalomená priamka najprv klesajúca a potom konštantná. Konštantný úsek indikuje, že zvyšovanie počtu parametrov nezlepšuje presnosť modelu.

Prakticky je však ťažko presne určiť zalomenie krivky, a preto sa používajú aproximačné testy: uvažujme, že k hodnote n_a, n_b bola vypočítaná hodnota R_1 . Ak zvýšime napr. stupeň $n'_a = n_a + 1$ a dostaneme hodnotu R_2 , potom ak

$$R_2 \geq 0.8R_1$$

nemá zmysel zvyšovať stupeň n_a . To isté platí pre n_b .

3.2.3.8 Mnohorozmerné systémy

Uvažujme lineárny mnohorozmerný systém v tvare

$$\mathbf{A}(z^{-1})\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(z^{-1})\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (3.168)$$

kde $\mathbf{A}[n \times n]$ a $\mathbf{B}[n \times m]$ sú polynomicke matice v tvare

$$\mathbf{A}(z^{-1}) = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_a} z^{-n_a} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{B}(z^{-1}) = \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{n_b} z^{-n_b} \quad (3.170)$$

Uvažujme, že všetky prvky matíc $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ sú neznáme. Potom môžeme tento model písať aj v tvare

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (3.171)$$

kde

$$\boldsymbol{\varphi}^T(t) = [-\mathbf{y}_{t-1}^T \dots -\mathbf{y}_{t-n_a}^T \mathbf{u}_{t-1}^T \dots \mathbf{u}_{t-n_b}^T] \quad (3.172)$$

$$\mathbf{\Theta}^T = (\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{n_a} \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_{n_b}) \quad (3.173)$$

pričom $\boldsymbol{\varphi} \in [n_a n + n_b m \times 1]$ a $\mathbf{\Theta} \in [n \times n_a n + n_b m]$. Poznamenávame, že vektor údajov je rovnaký pre všetky zložky výstupného vektora.

Pre lepšie pochopenie uvažujme prípad $n = 2, m = 3, n_a = 1, n_b = 2$ a matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{111} & b_{112} & b_{113} \\ b_{121} & b_{122} & b_{123} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_{211} & b_{212} & b_{213} \\ b_{221} & b_{222} & b_{223} \end{pmatrix}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^T(t) &= [-y_{1,t-1}, -y_{2,t-1}, u_{1,t-1}, u_{2,t-1}, u_{3,t-1}, \\ &\quad u_{1,t-2}, u_{2,t-2}, u_{3,t-2}] \\ \boldsymbol{\Theta}^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{111} & b_{112} & b_{113} & b_{211} & b_{212} & b_{213} \\ a_{21} & a_{22} & b_{121} & b_{122} & b_{123} & b_{221} & b_{222} & b_{223} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Často sa ale vyskytuje situácia, že niektoré prvky identifikovaných matíc sú známe. V takomto prípade už tento postup nemôžeme použiť, pretože jednotlivé elementy výstupného vektora nevyužívajú rovnaký vektor údajov.

Rovnicu (3.171) môžeme prepísať do tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\phi}^T(t)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}(t) \quad (3.174)$$

kde

$$\boldsymbol{\phi}^T(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t) \otimes \mathbf{I}_n \quad (3.175)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \text{col}(\boldsymbol{\Theta}^T) \quad (3.176)$$

Operácia $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ sa volá Kroneckerove násobenie a je definovaná pre matice ľubovoľných rozmerov ako

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{11}\mathbf{Y} & \dots & x_{1m}\mathbf{Y} \\ x_{21}\mathbf{Y} & \dots & x_{2m}\mathbf{Y} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}\mathbf{Y} & \dots & x_{nm}\mathbf{Y} \end{pmatrix} \quad (3.177)$$

Operátor $\text{col}()$ môžeme definovať ako získanie stĺpcového vektora \mathbf{x} transformáciou matice \mathbf{X} „naukladáním“ jednotlivých stĺpcov matice na seba:

$$\text{col}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^m \end{pmatrix} \quad (3.178)$$

Pre lepšie pochopenie uvažujme opäť predošlý príklad. Platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}^T(t) &= [-y_{1,t-1}\mathbf{I}_2, -y_{2,t-1}\mathbf{I}_2, u_{1,t-1}\mathbf{I}_2, u_{2,t-1}\mathbf{I}_2, u_{3,t-1}\mathbf{I}_2, \\ &\quad u_{1,t-2}\mathbf{I}_2, u_{2,t-2}\mathbf{I}_2, u_{3,t-2}\mathbf{I}_2] \\ \boldsymbol{\theta}^T &= [a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, \\ &\quad b_{111}, b_{121}, b_{112}, b_{122}, b_{113}, b_{123}, \\ &\quad b_{211}, b_{221}, b_{212}, b_{222}, b_{213}, b_{223}]\end{aligned}$$

V prípade, že by boli niektoré prvky vektora parametrov $\boldsymbol{\theta}$ nulové, stačí iba zrušiť zodpovedajúce riadky matice $\boldsymbol{\phi}(t)$. Ak sú dané elementy známe, ale nenulové, je potrebné odčítať príslušné riadky prenasobené hodnotou príslušného parametra od aktuálneho výstupu $\mathbf{y}(t)$ a tento používať namiesto skutočného vektora výstupov.

3.2.3.9 Parametre spojitého prenosu

Vychádzajme z diferenciálnej rovnice lineárneho spojitého systému

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (3.179)$$

kde $p = d/dt$ je operátor derivovania a polynómy sú dané ako

$$A(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_{n_a-1}p^{n_a-1} + p^{n_a} \quad (3.180)$$

$$B(p) = b_0 + b_1p + \dots + b_{n_b}p^{n_b} \quad (3.181)$$

Predpokladáme, že systém je striktne rýdži, t.j. stupeň polynómu $B(p)$ je nižší ako stupeň polynómu $A(p)$.

Pri tomto postupe neuvažujeme prítomnosť dopravného oneskorenia. Ak však identifikovaný proces obsahuje významné dopravné oneskorenie, jeho neuvažovanie by mohlo výrazne znížiť kvalitu identifikácie. Preto v tomto prípade je najvhodnejšie pri identifikácii parametrov spojitého prenosu používať vstupný signál oneskorený o hodnotu dopravného oneskorenia.

Ak by sme mali k dispozícii derivácie vstupov a výstupov, mohli by sme priamo identifikovať koeficienty neznámych polynómov a_i, b_i . Tie sú však zvyčajne nemerateľné. Preto celú rovnicu (3.179) vydělíme polynómom $C(p)$ a dostaneme

$$\frac{A(p)}{C(p)}y(t) = \frac{B(p)}{C(p)}u(t) \quad (3.182)$$

$$A(p)y_f(t) = B(p)u_f(t) \quad (3.183)$$

kde

$$y_f(t) = \frac{1}{C(p)}y(t), \quad u_f(t) = \frac{1}{C(p)}u(t) \quad (3.184)$$

Vidíme, že identifikovať parametre môžeme aj z rovnice (3.183). Všetky potrebné derivácie filtrovaných veličín sú ľahko dostupné z rovnice (3.184) za podmienky, že stupeň polynómu C je väčší alebo rovný stupňu polynómu A . V praxi obvyčajne volíme stupne rovnaké a polynóm C v tvare

$$C(p) = (1 + c_0p)^{n_a} \quad (3.185)$$

kde c_0 je časová konštanta filtra a jej hodnota by mala byť nižšia ako hodnota ľubovoľnej časovej konštanty polynómu A .

Ak budeme u_f a y_f a ich derivácie merať v periódach t , potom môžeme definovať identifikačný problém nasledovne

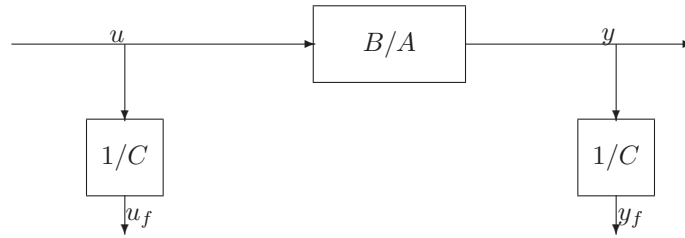
$$y_f^{(n_a)} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}(t) + e(t) \quad (3.186)$$

$$\boldsymbol{\theta}^T = (a_0, \dots, a_{n_a-1}, b_0, \dots, b_{n_b}) \quad (3.187)$$

$$\mathbf{z}^T(t) = (-\dot{y}_f, \dots, -y_f^{(n_a-1)}, u_f, \dot{u}_f, \dots, u_f^{(n_b)}) \quad (3.188)$$

Bloková schéma tohto postupu je znázornená na obr. 3.3.

Poznamenávame, že je rovnako možné odvodiť postup identifikácie spojitého systému s jednotkovým koeficientom a_0 . Model s $a_n = 1$ je však vhodnejší pre účely riadenia.



Obr. 3.3: Bloková schéma identifikácie parametrov spojitého prenosu

Príklad 3.3 Uvažujme identifikáciu spojitého systému 2. rádu v tvare

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u}$$

Zavedme si filter 2. rádu

$$C(p) = (1 + c_0p)^2$$

a filtrované veličiny

$$C(p)y_f = y, \quad C(p)u_f = u$$

Ak si tieto rovnice rozložíme do stavového tvaru dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 = y_f & \quad x_2 = \dot{y}_f & \dot{x}_1 = x_2 & \quad \dot{x}_2 = (y - x_1 - 2c_0x_2)/c_0^2 \\ x_3 = u_f & \quad x_4 = \dot{u}_f & \dot{x}_3 = x_4 & \quad \dot{x}_4 = (u - x_3 - 2c_0x_4)/c_0^2 \end{aligned}$$

Popis systému je teraz daný ako

$$\begin{aligned} \ddot{y}_f &= -a_0y_f - a_1\dot{y}_f + b_0u_f + b_1\dot{u}_f \\ &= -a_0x_1 - a_1x_2 + b_0x_3 + b_1x_4 \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^T &= (a_0, a_1, b_0, b_1) \\ \boldsymbol{z}^T &= (-x_1, -x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

Kapitola 4

Filtrácia údajov a odhad stavu

4.1 Filtrácia nameraných údajov

Číslicový počítač pôsobí v regulačnom obvode ako diskretný člen. To znamená, že počítač sníma a vysiela údaje v diskretných časových okamihoch. Do popredia sa dostáva otázka, ako eliminovať v týchto diskretných okamihoch možný šum a získať správny odhad meranej veličiny. Uvádzame tu spôsob podľa Hebkého (1984). Metóda vychádza v regresného vyrovnania viacnásobných vzoriek nameraných počas každej periódy vzorkovania.

Uvažujme, že skutočná hodnota meranej veličiny y je nameraná s určitou chybou

$$z(t) = y(t) + v(t) \quad (4.1)$$

kde $v(t)$ je neznámy šum, o ktorom predpokladáme, že má nulovú strednú hodnotu. Veličinu z snímame v každej perióde vzorkovania n -krát, pričom poloha vzoriek z_1, \dots, z_n je v perióde vzorkovania ľubovoľná, ale v každej perióde rovnaká.

Veličina $y(t)$ sa filtruje lineárnou závislosťou

$$y(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \varepsilon(t) \quad (4.2)$$

kde ε je chyba aproximácie. Pre snímanú veličinu z potom platí

$$z_i = \theta_0 + \theta_1 t_i + w_i = \theta^T \mathbf{z}_i + w_i \quad (4.3)$$

kde $\theta^T = (\theta_0, \theta_1)$ a $\mathbf{z}_i^T = (1, t_i)$. Vektor θ reprezentuje vektor identifikovaných parametrov, ktoré treba v každej perióde vzorkovania odhadnúť na základe nameraných hodnôt z_1, \dots, z_n . Použijeme metódu najmenších štvorcov, ktorá v tomto prípade minimalizuje funkciu

$$\min J = \sum_{i=1}^n w_i^2 \quad (4.4)$$

Takto definovaný problém sme už riešili v príklade 3.1, kde bolo ukázané, že minimalizácia

našej účelovej funkcie vedie k nasledovným vzťahom

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{M} = \frac{1}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 & -\sum t_i \\ -\sum t_i & n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum z_i \\ \sum t_i z_i \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M} \mathbf{D} = \frac{1}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 \sum z_i - \sum t_i \sum t_i z_i \\ n \sum t_i z_i - \sum t_i \sum z_i \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Odhad výstupnej veličiny v čase t_e (čo môže byť aj $(n+1)T_v$) vyjadříme ako

$$y_e = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}_e, \quad \mathbf{z}_e^T = (1, t_e) \quad (4.9)$$

Po dosadení do rovnice (4.8) dostaneme

$$y_e = \mathbf{D}^T \mathbf{M} \mathbf{z}_e = \mathbf{D}^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M} \mathbf{z}_e = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Hodnoty f_1, f_2 sú dané iba časovým rozložením vzoriek v perióde vzorkovania a nezávislé od nameraných údajov. Preto je možné si ich dopredu vypočítať. Dosadením dostaneme výsledný vzťah

$$y_e = f_1 \sum_{i=1}^n z_i + f_2 \sum_{i=1}^n t_i z_i \quad (4.11)$$

Veľmi zaujímavý a užitočný je prípad, ak sa z_i merajú v pravidelných intervaloch a posledná vzorka je meraná v okamihu odhadu, čiže platí $t_i - t_{i-1} = \Delta, t_e = t_n$. Označme si $t_i = i$. Potom platí

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (4.12)$$

Matica \mathbf{M} a vektor \mathbf{f} sú potom v tvare

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} & -\frac{6}{n(n-1)} \\ -\frac{6}{n(n-1)} & \frac{12}{n(n+1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

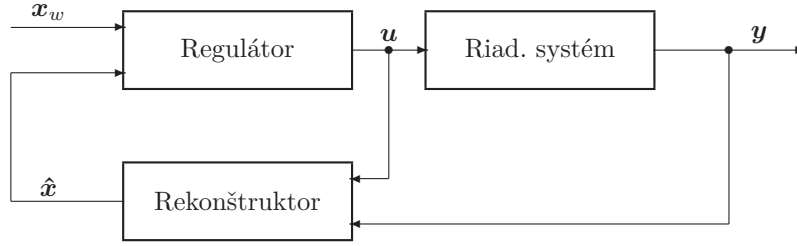
$$\mathbf{f} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{6^n} \\ \frac{6^n}{n(n+1)} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Výsledný odhad y_n je potom v tvare

$$y_n = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n z_i + \frac{6}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i z_i \quad (4.15)$$

V prípade, že v perióde vzorkovania snímame 5 krát v ekvidištantných intervaloch, dostaneme

$$y_n = -0.4 \sum_{i=1}^5 z_i + 0.2 \sum_{i=1}^5 i z_i \quad (4.16)$$



Obr. 4.1: Systém automatického riadenia s deterministickým odhadom stavu

4.2 Deterministický odhad stavu

Deterministický odhad stavu systému sa dá realizovať pomocou „rekonštruktora“. Rekonštruktor je dynamický systém, ktorý rekonštruje stav deterministického systému, t.j. systému bez významnejšieho šumu a bez významnejšej chyby merania. Rekonštruktor sa používa na rekonštrukciu vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$ na základe nameraného vektora výstupných veličín $\mathbf{y}(t)$ a vektora vstupných veličín $\mathbf{u}(t)$ (Luenberger, 1971; Ackermann, 1976).

Na obr. 4.1 je ukázané ako sa využíva odhadnutý stav $\hat{\mathbf{x}}$ deterministického systému pri automatickom riadení. \mathbf{x}_w je vektor žiadanych stavových veličín.

Vlastnosti rekonštruktora ukážeme pre lineárny deterministický systém

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (4.18)$$

Vektor \mathbf{x} má n zložiek, vektor \mathbf{y} má r zložiek a vektor \mathbf{u} má m zložiek. Predpokladáme, že náš skúmaný systém je pozorovateľný. Rekonštruktor je popísaný rovnicou

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_d\mathbf{y}(t) \quad (4.19)$$

Rád systému (4.19) je zhodný s rádom systému (4.17). Otázka je ako voliť matice $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ a \mathbf{K}_d , aby chyba rekonštrukcie

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.20)$$

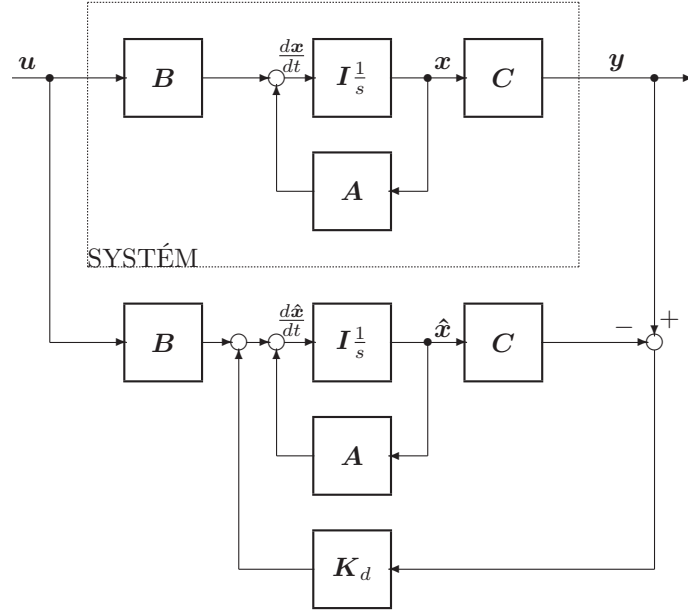
pri ľubovoľných začiatkových podmienkach išla asymptoticky k nule.

Odpočítaním rovnice (4.19) od rovnice (4.17) dostaneme

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.21)$$

$$-\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = -\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (4.22)$$

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_d\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\mathbf{u}(t) \quad (4.23)$$



Obr. 4.2: Bloková schéma lineárneho spojitého systému s konštantnými koeficientmi a rekonštruktora

Ak platí

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}_d \mathbf{C} \quad (4.25)$$

potom rovnica (4.23) nadobudne tvar

$$\frac{de(t)}{dt} = \hat{\mathbf{A}}e(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_d \mathbf{C})e(t) \quad (4.26)$$

Chyba rekonštrukcie $e(t)$ sa blíži asymptoticky k nule pri ľubovoľných začiatočných podmienkach vtedy, keď vlastné hodnoty matice $\mathbf{A} - \mathbf{K}_d \mathbf{C}$ majú zápornú reálnu časť. Toto je možné splniť vhodnou voľbou matice \mathbf{K}_d .

Rovnica rekonštruktora na základe vyššie uvedeného teraz bude

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_d \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_d y(t) \quad (4.27)$$

Poznamenávame, že matice systému vo vzťahoch (4.26) a (4.27) sú totožné. Rovnicu (4.27) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_d [y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (4.28)$$

Návrh rekonštruktora spočíva vlastne vo voľbe matice \mathbf{K}_d . Na obr. 4.2 je bloková schéma lineárneho spojitého systému s konštantnými koeficientmi a zodpovedajúci rekonštruktora stavu.

Znalosť odhadu stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$ umožňuje použiť regulátor

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (4.29)$$

ktorý pôsobí jednak na skutočný systém, jednak na jeho model, ktorý je korigovaný na základe chyby rekonštrukcie.

4.3 Optimálny odhad stavu

V tejto časti sa budeme zaoberať odhadom stavu, ak na systém pôsobia náhodné vstupy. Výsledkom bude Kalmanov filter, ktorý je hlavným praktickým výsledkom teórie optimálneho odhadu. Bez straty na všeobecnosti sa predpokladá, že na systém pôsobí biely šum. Totiž skutočný náhodný vstup je možné vždy vyjadriť ako výstup lineárneho filtra, na ktorého vstupe pôsobí biely šum. Optimálny odhad stavu v Kalmanovom zmysle bol mnohokrát publikovaný, napr. v prácach (Kalman a Bucy, 1961; Kwakernaak a Sivan, 1972), atď.

Majme systém

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_0 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.32)$$

kde

\mathbf{x} je vektor stavových veličín rozmeru n ,

\mathbf{y} - vektor výstupných veličín rozmeru r ,

$\boldsymbol{\xi}$ - vektor náhodných procesov na vstupe systému rozmeru n ,

\mathbf{x}_0 - odhad začiatočného stavu,

$\boldsymbol{\xi}_0$ - náhodná chyba odhadu začiatočného stavu,

\mathbf{A}, \mathbf{C} - matice konštánt príslušných rozmerov,

$\boldsymbol{\eta}$ - vektor náhodných chýb merania rozmeru r .

Predpokladá sa, že náhodné procesy $\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ sú Gaussove biele šumy navzájom nekorelované a nekorelované so začiatočným stavom.

Predpokladáme platnosť nasledovných vzťahov:

$$\begin{aligned} E\{\boldsymbol{\xi}(t)\} &= \mathbf{0}, & E\{\boldsymbol{\xi}(t)[\boldsymbol{\xi}(\tau)]^T\} &= \mathbf{Q}(t)\delta(t-\tau) \\ E\{\mathbf{x}(0)\} &= \mathbf{x}_0, & E\{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0))(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0))^T\} &= \mathbf{P}_0 \\ E\{\boldsymbol{\eta}(t)\} &= \mathbf{0}, & E\{\boldsymbol{\eta}(t)[\boldsymbol{\eta}(\tau)]^T\} &= \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Úlohou je nájsť optimálny odhad stavu tak, aby funkcionál

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{x})^T \mathbf{Q}(t)^{-1} (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{C}(t)\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(t) (\mathbf{y} - \mathbf{C}(t)\mathbf{x})] dt \\ &+ \frac{1}{2} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0] \end{aligned} \quad (4.34)$$

bol minimálny. Tento problém môže byť uvažovaný ako problém deterministického optimálneho riadenia definovaním riadenia

$$\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (4.35)$$

a prepísaním funkcionálu J do tvaru

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}^T \mathbf{Q}^{-1}(t) \mathbf{u} + (\mathbf{y} - \mathbf{C}(t)\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(t) (\mathbf{y} - \mathbf{C}(t)\mathbf{x})] dt \end{aligned} \quad (4.36)$$

Po preformulovaní úloha hľadania optimálneho stavu bude spočívať v nájdení takého $\mathbf{u}(t)$, aby funkcionál J podľa rovnice (4.36) bol minimálny, pričom musí platiť vzťah

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \quad (4.37)$$

Hamiltonián pre sformulovanú úlohu optimalizácie je

$$H = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{u} + (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})] + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (4.38)$$

Z podmienky

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

vyplýva, že

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (4.40)$$

kde

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.41)$$

Z podmienky transversality pre voľné $\mathbf{x}(0)$ a $\mathbf{x}(t_f)$ vyplývajú dve okrajové podmienky pre $\boldsymbol{\lambda}$ v tvare

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{P}_0 \boldsymbol{\lambda}(0) \quad (4.42)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

Označme optimálny odhad a riadenie v čase t s údajmi $\mathbf{y}(t)$ do času t_f pomocou

$$\hat{\mathbf{x}}(t/t_f) \quad , \quad \hat{\mathbf{u}}(t/t_f) \quad (4.44)$$

Problém filtrácie je určený optimálnym odhadom v koncovom čase s danými údajmi do tohoto času. Optimálny filtrovaný odhad a riadenie sa označuje pomocou

$$\hat{\mathbf{x}}(t_f/t_f) \quad , \quad \hat{\mathbf{u}}(t_f/t_f) \quad (4.45)$$

Optimálny odhad je daný vzťahom (4.37) so zákonom optimálneho riadenia (4.40)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t/t_f) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t/t_f) - \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (4.46)$$

Ďalej zavedieme transformáciu

$$\hat{\mathbf{x}}(t/t_f) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (4.47)$$

pričom $\mathbf{z}(t)$ je vektor rozmeru n a $\mathbf{P}(t)$ je matica rozmeru $n \times n$, ktoré treba určiť. Dosadením (4.47) do (4.46) dostaneme

$$\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{P}\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}[\mathbf{z} - \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}] - \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \quad (4.48)$$

S využitím rovnice (4.41) a (4.47) rovnica (4.48) bude

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{P}[-\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{z} - \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}] \\ = \mathbf{A}[\mathbf{z} - \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}] - \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (4.49)$$

resp.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{z} \\ = [\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{Q}] \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Táto rovnica je splnená, ak platí

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}) + \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (4.51)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (4.52)$$

Zo začiatkovej podmienky transverzality a transformácie (4.47) vyplýva

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.53)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \quad (4.54)$$

V prípade problému filtrácie $\hat{\mathbf{x}}(t_f/t_f)$ je odhad založený na metóde najmenších štvorcov v čase t_f , ktorý je podmienený všetkými dátami do času t_f . Z koncovkej podmienky transverzality (4.43) vidíme, že v čase $t = t_f$ je $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}$. Na základe tohoto pre dané t_f z transformácie (4.47) vyplýva, že

$$\hat{\mathbf{x}}(t_f/t_f) \equiv \mathbf{z}(t_f) \quad (4.55)$$

Filtrovaný odhad je teda určený rovnicou (4.51), pričom t je vždy aktuálny čas

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t/t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t/t)) + \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t/t) \quad (4.56)$$

pričom

$$\hat{\mathbf{x}}(0/0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.57)$$

a matica $\mathbf{P}(t)$ je daná rovnicou (4.52). Rovnice (4.52) a (4.56) predstavujú rovnice Kalmanovho filtra.

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t) \quad (4.58)$$

je zosilnenie Kalmanovho filtra. Ak definujeme chybu odhadu

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t/t) \quad (4.59)$$

potom pre

$$\boldsymbol{\mu}_e = E\{\mathbf{e}(t)\} \quad (4.60)$$

platí

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_e(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})\boldsymbol{\mu}_e(t), \quad \boldsymbol{\mu}_e(0) = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

$\boldsymbol{\mu}_e(t)$ je identicky nulové, a preto odhad daný rovnicami (4.52) a (4.56) je neodchýlený. Kovariancia chyby odhadu je

$$\text{Cov}_e(t, \tau) = E\{\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(\tau)\} \quad (4.62)$$

a pre $t = \tau$ môžeme písať

$$\text{Cov}_e(t, \tau) = \text{Cov}_e(t) \quad (4.63)$$

Na základe vyššie uvedených vzťahov sa dá veľmi jednoducho ukázať, že

$$\text{Cov}_e(t) = \mathbf{P}(t) \quad (4.64)$$

teda $\mathbf{P}(t)$ je rozptylom chyby odhadu.

Poznámka: Kalmanov filter je možno jednoducho rozšíriť pre prípad nelineárnych systémov. Vtedy hovoríme o rozšírenom Kalmanovom filtri.

4.4 Optimálny diskretný Kalmanov filter

V tejto časti uvedieme bez odvodu rovnice diskretného Kalmanovho filtra. Na ich základe ukážeme prepojenie medzi rekurzívnou metódou najmenších štvorcov a optimálnym odhadom stavu.

Majme diskretný systém

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \quad \boldsymbol{\xi}_k \simeq N(0, \mathbf{Q}) \quad (4.65)$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\xi}_0 \simeq N(0, \mathbf{P}_0) \quad (4.66)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad \boldsymbol{\eta}_k \simeq N(0, \mathbf{R}) \quad (4.67)$$

kde vektory a matice sú definované rovnako ako v predošlej časti.

Predpokladá sa, že náhodné procesy $\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\eta}_k$ sú Gaussove biele šумы navzájom nekorelované a nekorelované so začiatočným stavom.

Úlohou je nájsť optimálny odhad stavu tak, aby funkcionál

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^t [(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k)] \\ & + \frac{1}{2} [\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0] \end{aligned} \quad (4.68)$$

bol minimálny.

Riešením tohto problému je diskretný Kalmanov filter, ktorý je daný nasledovnými rovnicami

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{L}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k), \quad (4.69)$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T - \mathbf{L}_k(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{L}_k^T, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \quad (4.72)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (4.73)$$

Uvažujme teraz odhad konštantných parametrov modelu diskretného procesu. Pre interpretáciu pomocou Kalmanovho filtra budeme uvažovať parametre ako stavy procesu a jeho opis v tvare stavového modelu bude teda nasledovný

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k, \quad (4.74)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \bar{\boldsymbol{\theta}}_0 + \boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\xi}_0 \simeq N(0, \mathbf{P}_0) \quad (4.75)$$

$$y_k = \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + e_k, \quad e_k \simeq N(0, 1) \quad (4.76)$$

Takto definovaný stavový opis definuje parametre ako konštantné stavy s neznámymi počiatočnými podmienkami a výstup je zaťažený chybou merania. Porovnaním so všeobecným stavovým opisom určeným rovnicami (4.65)–(4.67) dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} = 1, \quad \mathbf{C} = \mathbf{z}_k^T. \quad (4.77)$$

Tieto dosadíme do rovníc Kalmanovho filtra a získame vzťahy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{L}_k \left(y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \right), \quad (4.78)$$

$$\mathbf{L}_k = \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + 1}, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + 1}. \quad (4.80)$$

Získali sme takto rovnaké rovnice pre rekurzívnu metódu najmenších štvorcov, ako boli odvodené v rovnicach (3.85). Interpretácia pomocou Kalmanovho filtra zároveň objasňuje voľbu počiatočných podmienok pre $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0$ a \mathbf{P}_0 . Zodpovedajú našim znalostiam parametrov (ich strednej hodnoty a kovariancie) v čase nula.

V druhom prípade uvažujme odhad časovo premenných parametrov modelu diskretného procesu. Pre interpretáciu pomocou Kalmanovho filtra budeme opäť uvažovať parametre ako stavy procesu a jeho opis v tvare stavového modelu bude teda nasledovný

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \simeq N(0, \mathbf{Q}_1) \quad (4.81)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \bar{\boldsymbol{\theta}}_0 + \boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\xi}_0 \simeq N(0, \mathbf{P}_0) \quad (4.82)$$

$$y_k = \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + e_k, \quad e_k \simeq N(0, r_2) \quad (4.83)$$

Takto definovaný stavový opis definuje parametre ako stavy, ktoré sa môžu meniť v čase a u ktorých nepoznáme počiatočné podmienky. Podobne, výstup je zaťažený chybou merania. Porovnaním so všeobecným stavovým opisom určeným rovnicami (4.65)–(4.67) dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{R} = r_2, \quad \mathbf{C} = \mathbf{z}_k^T. \quad (4.84)$$

Tieto dosadíme do rovníc Kalmanovho filtra a získame vzťahy

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{L}_k \left(y_k - \mathbf{z}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \right), \quad (4.85)$$

$$\mathbf{L}_k = \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + r_2}, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{z}_k + r_2} + \mathbf{Q}_1. \quad (4.87)$$

Najdôležitejšou zmenou je prídanie matice Q_1 k aktualizácii kovariančnej matice. Toto je zhodné s pridávaním určitého násobku jednotkovej matice v rovnici (3.128) a zabraňuje vynulovaniu kovariančnej matice. Tým sa zachováva neurčitosť v hodnotách parametrov a umožňujú sa ich zmeny. Nevýhodou je, že sa parametre neustália. Pomer medzi hodnotami Q_1 a r_2 je kompromisom medzi schopnosťou sledovania zmien parametrov a citlivosťou na šumy.

Dodatok A

Niektoré operácie s maticami

A.1 Základy

- Sčítanie - komutatívnosť

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

- Násobenie

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{A.2})$$

- Transpozícia

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{A.4})$$

- Inverzia

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (\text{A.6})$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \quad (\text{A.7})$$

Pre 2×2 maticu \mathbf{A} v tvare

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (\text{A.8})$$

je inverzia daná ako

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Derivácie

1. Derivácie podľa skalárnej veličiny. Matice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$, derivácia podľa skalára t :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}a_{ij} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ABC}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{BC} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\mathbf{C} + \mathbf{AB}\frac{d\mathbf{C}}{dt} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.13})$$

2. derivácia podľa vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Definujme si gradientový operátor

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} = \nabla_{\mathbf{x}^T} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A.15})$$

Derivácia skalára c podľa vektora \mathbf{x} :

$$\nabla_{\mathbf{x}}c = \left(\frac{\partial c}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial c}{\partial x_n} \right)^T \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}c = \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}^T}c = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 c}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 c}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 c}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Derivácia vektora $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ podľa vektora \mathbf{x} :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^T = \mathbf{I} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^T \mathbf{v}) = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}^T)\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}^T)\mathbf{u} \quad (\text{A.20})$$

Ak \mathbf{A} nie je funkciou \mathbf{x} potom

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^T, \quad \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T \mathbf{A}) = \mathbf{A}, \quad \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.21})$$

Ak \mathbf{A} nie je funkciou \mathbf{x} , \mathbf{A} je symetrická matica a $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ potom

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}) = 2(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T) \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (\text{A.22})$$

Nech pre všetky vektory \mathbf{x} s reálnymi prvkami x_i je splnená nerovnosť

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (\text{A.23})$$

Potom kvadratická norma Q aj matica \mathbf{A} sú pozitívne definitné (ak ≥ 0 , potom pozitívne semidefinitné, ak < 0 , potom negatívne definitné).

Dodatok B

Pravdepodobnosť, náhodné veličiny a procesy

V mnohých reálnych prípadoch na dynamický systém pôsobia také vstupné veličiny, ktoré nie sú konkrétnou funkciou času. Pod názvom „konkrétna funkcia času“ myslíme tu skokovú zmenu vstupnej veličiny, impulznú funkciu, harmonicky premennú veličinu, atď. Pre *konkrétnu (deterministickú)* časovú funkciu platí, že v každom čase má jednoznačne priradenú funkčnú hodnotu.

Vstupné veličiny dynamických systémov môžu nadobúdať v čase rôzne náhodné hodnoty. V takýchto prípadoch môžeme určiť len pravdepodobnosť tej, alebo inej formy pôsobenia vstupov v tom, alebo inom čase. Toto nevyplýva z toho, že pôsobenie vstupov je dopredu neznáme, ale z toho, že samotná podstata reálneho pôsobenia vstupov je taká, že veličiny v každom čase a proces ich zmien v čase závisia od množstva rôznych veličín, ktoré sa môžu kombinovať jedna s druhou, pôsobiť súčasne, alebo inak v čase. Veličinám, pri ktorých ku každému časovému okamihu je priradená náhodná hodnota z určitej množiny možných hodnôt hovoríme, že sú *náhodné (stochastické)*.

Znalosť základov teórie pravdepodobnosti je predpokladom štatistického skúmania dynamických systémov.

B.1 Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

Ak budeme skúmať ľubovoľný jav (skutočnosť, ktorá nastala v dôsledku pokusu), ktorý je charakterizovaný určitými podmienkami existencie a je o ňom známe, že tento jav sa pri splnení týchto podmienok môže, resp. nemôže realizovať, potom sa takýto jav nazýva náhodný. *Náhodný jav* je charakterizovaný *pravdepodobnosťou*.

Predpokladajme, že urobíme N pokusov a že v m prípadoch sa jav A realizoval. Pomer m/N sa nazýva *relatívna početnosť*. Relatívna početnosť je experimentálnou charakteristikou náhodného javu. Pri rôznych pokusoch relatívna početnosť nadobúda rôzne hodnoty, ale pri zväčšovaní čísla N pri pokusoch sa bude blížiť k nejakej konštantnej hodnote, ktorá sa nazýva *pravdepodobnosť* náhodného javu A pri zadaných podmienkach pokusu a označuje sa symbolom $P(A)$.

Jav, pre ktorý je pravdepodobnosť rovná jednotke, sa nazýva *jav istý* a jav, pre ktorý je pravdepodobnosť rovná nule, je *jav nemožný*. Pravdepodobnosť ostatných javov leží

v intervale

$$0 < P(A) < 1 \quad (\text{B.1})$$

Javy A a B nazývame *vylučujúcimi sa javmi*, ak pri daných podmienkach nie je možný ich súčasný výskyt. Pre pravdepodobnosti vylučujúcich sa javov A a B platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{B.2})$$

Jav A sa nazýva nezávislým od javu B , ak $P(A)$ nezávisí od toho, či nastal, alebo nenastal jav B . Jav A sa nazýva *závislým* na jave B , ak $P(A)$ sa mení v závislosti na tom, či nastal, alebo nenastal jav B .

Pravdepodobnosť javu A vyčíslená pri podmienke, že už nastal jav B , sa nazýva *podmienenou pravdepodobnosťou*. Označuje sa $P(A|B)$.

Podmienka nezávislosti javu A od javu B sa dá napísať v tvare

$$P(A|B) = P(A) \quad (\text{B.3})$$

Majme dva ľubovoľné javy A a B , pričom $P(B) > 0$. Pre podmienenú pravdepodobnosť $P(A|B)$ javu A , ak nastal jav B , platí

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{B.4})$$

Tento vzťah sa nazýva Bayesov vzorec. Pre nezávislé javy A a B podľa (B.3) tiež platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (\text{B.5})$$

B.2 Náhodné veličiny

Náhodná veličina je veličina, ktorá môže nadobúdať akúkoľvek číselnú hodnotu z niektorej množiny v závislosti od výsledku pokusu. O *diskrétnej náhodnej veličine* ξ hovoríme vtedy, ak množina hodnôt, ktoré nadobúda, je konečnou postupnosťou čísel x_1, x_2, \dots, x_n . Diskrétna náhodná veličina je určená vtedy, ak sú známe jej číselné hodnoty, ktoré nadobúda, ako aj pravdepodobnosť P_i výskytu každej z nich. Výraz (tabuľka)

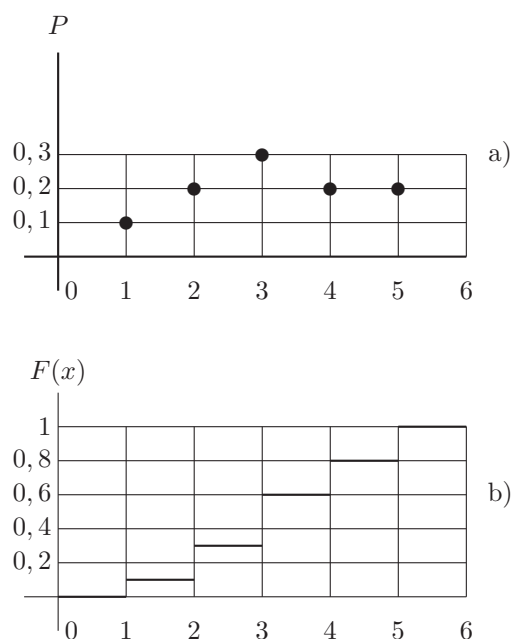
$$\xi = \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_n \\ P_1, P_2, \dots, P_n \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

predstavuje tzv. *zákon rozdelenia pravdepodobnosti diskrétnej náhodnej veličiny*. Príklad grafického znázornenia zákona rozdelenia diskrétnej náhodnej veličiny je na obr. B.1a. Na tomto obrázku sú priradené k hodnotám náhodnej veličiny x_i zodpovedajúce pravdepodobnosti P_i . Náhodná veličina nadobúda všetky možné hodnoty x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ľahko zistíme, že platí (nielen v tomto prípade):

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (\text{B.7})$$

Popri zákone rozdelenia sa používa ešte iná funkcia, ktorá charakterizuje pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt náhodnej veličiny. Túto funkciu označíme $F(x)$ a definujeme vzorcom

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P_i \quad (\text{B.8})$$



Obr. B.1: Grafické znázornenie zákona rozdelenia diskkrétnej náhodnej veličiny a zodpovedajúcej distribučnej funkcie

a budeme ju nazývať *distribučnou funkciou* veličiny ξ . Táto funkcia sa vzťahuje na všetky reálne hodnoty x z intervalu $(-\infty, +\infty)$. Symbol $x_i \leq x$ pod znakom \sum označuje súčet vzťahujúci sa na všetky tie hodnoty x_i , ktoré sú menšie, alebo sa rovnajú číslu x . $F(x)$ je pravdepodobnosťou javu $\xi \leq x$, čo možno zapísať:

$$F(x) = P(\xi \leq x) \quad (\text{B.9})$$

$F(x)$ spĺňa podmienku

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (\text{B.10})$$

Keď množinu možných hodnôt náhodnej veličiny ξ usporiadame tak, že platí: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, potom z definície pravdepodobnosti vyplýva, že $F(x) = 0$ pre akúkoľvek hodnotu x , ktorá spĺňa podmienku $x < x_1$. Tiež platí, že $F(x) = 1$ pre $x > x_n$. Grafické znázornenie distribučnej funkcie diskkrétnej náhodnej veličiny (obr. B.1a) je na obr. B.1b.

Hoci zákon rozdelenia charakterizuje náhodnú veličinu úplne, pre praktické účely sú treba ďalšie charakteristiky vyjadrené pomocou obyčajných nenáhodných čísiel. Spomedzi možných číselných charakteristík náhodnej veličiny majú podstatnú úlohu stredná hodnota (matematická nádej), rozptyl a stredná kvadratická odchýlka.

Stredná hodnota diskkrétnej náhodnej veličiny sa určuje z výrazu

$$\mu = E\{\xi\} = \sum_{i=1}^n x_i P_i \quad (\text{B.11})$$

Ak sú všetky hodnoty rovnako pravdepodobné, potom

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{B.12})$$

Pre prípad hádzania hracou kockou platí

$$\mu = \sum_{i=1}^6 x_i P_i = \left(1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6}\right) = 3.5$$

Všimnime si nasledovné vlastnosti strednej hodnoty. Ak je veličina Z konštantná, potom jej stredná hodnota je rovná Z :

$$E\{Z\} = Z \quad (\text{B.13})$$

Konštantu Z je možno vyňať pred označenie strednej hodnoty:

$$E\{Z\xi\} = ZE\{\xi\} \quad (\text{B.14})$$

Pre ľubovoľné náhodné veličiny stredná hodnota ich súčtu je rovná súčtu stredných hodnôt týchto veličín

$$E\{\xi + \eta\} = E\{\xi\} + E\{\eta\} \quad (\text{B.15})$$

Stredná hodnota súčinu nezávislých náhodných veličín je rovná súčinu stredných hodnôt týchto veličín

$$E\{\xi\eta\} = E\{\xi\}E\{\eta\} \quad (\text{B.16})$$

Ak ξ je náhodná veličina a μ je stredná hodnota tejto veličiny, potom veličina $(\xi - \mu)$ je odchýlka náhodnej veličiny od jej strednej hodnoty. Táto odchýlka je náhodnou veličinou tak isto ako sama veličina ξ .

Rozptyl (variancia, disperzia) náhodnej veličiny ξ je rovný strednej hodnote kvadrátu odchýlky $(\xi - \mu)$

$$\sigma^2 = D[\xi] = E\{(\xi - \mu)^2\} = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P_i \quad (\text{B.17})$$

Zatiaľ čo stredná hodnota je číslo, okolo ktorého sa sústreďujú hodnoty náhodnej veličiny, rozptyl hovorí o tom, ako ďaleko sú od nej jednotlivé hodnoty rozptýlené.

Rozptyl je možno ľahko vyčíslieť na základe vlastností strednej hodnoty

$$\sigma^2 = E\{\xi^2 - 2\xi E\{\xi\} + (E\{\xi\})^2\} = E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2, \quad (\text{B.18})$$

t.j. rozptyl sa rovná rozdielu strednej hodnoty kvadrátu náhodnej veličiny a kvadrátu strednej hodnoty náhodnej veličiny. Pretože platí

$$E\{\xi^2\} \geq (E\{\xi\})^2, \quad (\text{B.19})$$

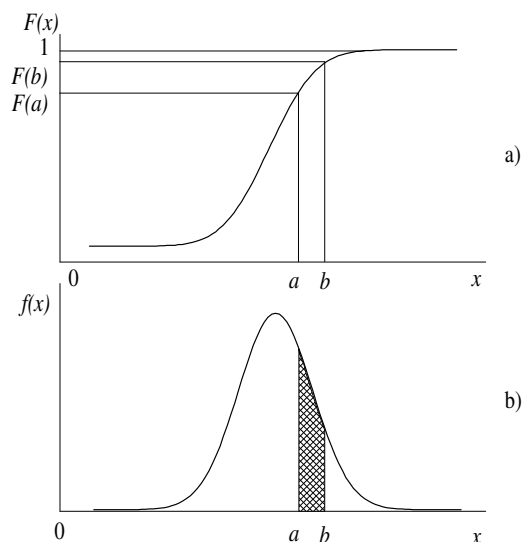
rozptyl bude vždy kladné číslo, teda

$$\sigma^2 \geq 0 \quad (\text{B.20})$$

Druhá odmocnina z rozptylu sa nazýva *stredná kvadratická odchýlka* náhodnej veličiny

$$\sigma = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2} \quad (\text{B.21})$$

O *spojitej náhodnej veličine* budeme hovoriť vtedy, ak môže nadobúdať všetky hodnoty v ohraničenom intervale (a, b) , alebo v intervale od $-\infty$ do ∞ a ak distribučná



Obr. B.2: Priebeh distribučnej funkcie spojitej náhodnej veličiny a zodpovedajúcej hustoty pravdepodobnosti

funkcia $F(x)$ je v týchto intervaloch spojitá. *Distribučná funkcia spojitej náhodnej veličiny ξ*

$$F(x) = P(\xi < x) \quad (\text{B.22})$$

je pravdepodobnosťou toho, že náhodná veličina nadobúda hodnotu menšiu ako x . Priebeh distribučnej funkcie spojitej náhodnej veličiny je na obr. B.2a. Pre $F(x)$ platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (\text{B.23})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (\text{B.24})$$

Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná veličina nadobudne určitú číselnú hodnotu x je nekonečne malá. Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná veličina je v intervale (a, b) má konečnú hodnotu a môžeme písať

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) \quad (\text{B.25})$$

Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná veličina bude medzi hodnotami x a $x + dx$ je

$$P(x \leq \xi < x + dx) = \frac{dF(x)}{dx} dx \quad (\text{B.26})$$

Veličina

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (\text{B.27})$$

sa nazýva *hustota rozdelenia pravdepodobnosti*. Na obr. B.2b je príklad hustoty pravdepodobnosti spojitej náhodnej veličiny. Pre $F(x)$ môžeme písať

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (\text{B.28})$$

Pretože distribučná funkcia je neklesajúca funkcia, pre hustotu pravdepodobnosti musí platiť, že

$$f(x) \geq 0 \quad (\text{B.29})$$

Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná veličina bude v intervale (a, b) , je určená plochou pod krivkou hustoty pravdepodobnosti v hraniciach zadaného intervalu a teda môžeme písať

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{B.30})$$

Ak daný interval rozšírime od $-\infty$ do ∞ , potom dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{B.31})$$

Stredná hodnota spojitaj náhodnej veličiny sa určuje z výrazu

$$\mu = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{B.32})$$

Náhodná veličina môže byť charakterizovaná vzťahom

$$E\{\xi^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx \quad (\text{B.33})$$

Jedná sa o *moment m -tého stupňa* náhodnej veličiny ξ . *Moment prvého stupňa* je rovný strednej hodnote. *Moment druhého stupňa* náhodnej veličiny je určený vzťahom

$$E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (\text{B.34})$$

Centrálny moment m -tého stupňa má tvar

$$E\{(\xi - \mu)^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m f(x) dx \quad (\text{B.35})$$

Rozptyl spojitaj náhodnej veličiny ξ možno vyjadriť nasledovne

$$\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (\text{B.36})$$

$$\sigma^2 = E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2 \quad (\text{B.37})$$

Stredná kvadratická odchýlka je

$$\sigma = \sqrt{E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2} \quad (\text{B.38})$$

Normálny zákon rozdelenia spojitaj náhodnej veličiny (Gaussovo rozdelenie) je taký, ktorého hustota pravdepodobnosti sa dá vyjadriť vzťahom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.39})$$

kde σ je stredná kvadratická odchýlka,
 μ je stredná hodnota.

Majme teraz dve spojité náhodné veličiny ξ_1, ξ_2 definované na tom istom pravdepodobnostnom priestore. Je možné zaviesť pojem *združenej hustoty pravdepodobnosti* $f(x_1, x_2)$ týchto náhodných veličín. Ak náhodné veličiny ξ_1 a ξ_2 sú nezávislé, potom

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \quad (\text{B.40})$$

pričom $f_1(x_1)$ je hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny ξ_1
 $f_2(x_2)$ je hustota pravdepodobnosti náhodnej veličiny ξ_2

Podobne ako v prípade jednej náhodnej veličiny aj v prípade dvoch náhodných veličín môžeme zaviesť momenty (pravda, ak existujú), napríklad

$$E\{\xi_1^r, \xi_2^s\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^r x_2^s f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.41})$$

Centrálny moment dvoch náhodných veličín ξ_1 a ξ_2 má tvar

$$E\{(\xi_1 - \mu_1)^r (\xi_2 - \mu_2)^s\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)^r (x_2 - \mu_2)^s f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.42})$$

pričom $\mu_1 = E\{\xi_1\}$, $\mu_2 = E\{\xi_2\}$.

Osobitná pozornosť sa venuje kovariancii. Nech ξ_1 a ξ_2 sú integrovateľné náhodné veličiny. Potom sa číslo

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) &= E\{(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

nazýva *kovarianciou* (alebo korelačným momentom) náhodných veličín ξ_1 a ξ_2 .

Ak ξ_1 a ξ_2 majú konečné rozptyly, tak číslo

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (\text{B.44})$$

nazývame *koefficientom korelácie* náhodných veličín ξ_1, ξ_2 . ($\sigma_1 = \sqrt{D[\xi_1]}$, $\sigma_2 = \sqrt{D[\xi_2]}$).

Náhodné veličiny ξ_1, ξ_2 sa nazývajú nekorelované, ak

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad (\text{B.45})$$

Integrovateľné náhodné veličiny ξ_1, ξ_2 s integrovateľným súčinom $\xi_1 \xi_2$ sú nekorelované práve vtedy, keď

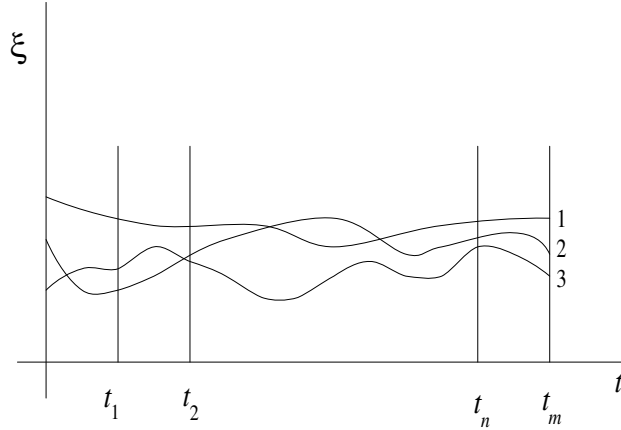
$$E\{\xi_1, \xi_2\} = E\{\xi_1\} E\{\xi_2\} \quad (\text{B.46})$$

Uvedené tvrdenie vyplýva z toho, že $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E\{\xi_1, \xi_2\} - E\{\xi_1\} E\{\xi_2\}$.

Ak ξ_1, ξ_2 sú nezávislé integrovateľné náhodné veličiny, tak sú nekorelované.

Pri náhodných veličinách $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ definovaných na tom istom pravdepodobnostnom priestore, ktoré sú prvkami vektora $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, sa často pri výpočtoch obmedzujeme len na určenie strednej hodnoty $E\{\boldsymbol{\xi}\}$ a kovariančnej matice $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi})$.

Stredná hodnota $E\{\boldsymbol{\xi}\}$ vektora $\boldsymbol{\xi}$ je vektor stredných hodnôt jeho prvkov.



Obr. B.3: Realizácie náhodného procesu.

Kovariančná matica $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi})$ vektora $\boldsymbol{\xi}$ so strednou hodnotou $E\{\boldsymbol{\xi}\}$ je stredná hodnota matice $(\boldsymbol{\xi} - E\{\boldsymbol{\xi}\})(\boldsymbol{\xi} - E\{\boldsymbol{\xi}\})^T$, t.j.

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}) = E\{(\boldsymbol{\xi} - E\{\boldsymbol{\xi}\})(\boldsymbol{\xi} - E\{\boldsymbol{\xi}\})^T\} \quad (\text{B.47})$$

Kovariančná matica je symetrická kladne- (semi)definitná matica, ktorá v i -tom riadku a j -tom stĺpci má kovariancie náhodných veličín ξ_i a ξ_j , t.j.

$$\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = E\{(\xi_i - E\{\xi_i\})(\xi_j - E\{\xi_j\})\} \quad (\text{B.48})$$

Prvky matice (B.47) určujú stupeň väzby medzi náhodnými veličinami, pričom

$$\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{Cov}(\xi_j, \xi_i) \quad (\text{B.49})$$

Na hlavnej diagonále kovariančnej matice sú rozptyly náhodných veličín ξ_i , teda

$$\text{Cov}(\xi_i, \xi_i) = E\{(\xi_i - E\{\xi_i\})(\xi_i - E\{\xi_i\})\} = \sigma_i^2 \quad (\text{B.50})$$

B.3 Náhodné procesy

Pri skúmaní dynamických systémov vznikla potreba zaoberať sa javom prebiehajúcim v čase (procesom). Ak urobíme meranie nejakej fyzikálnej veličiny (napríklad teploty reakčnej zmesi v prietokovom chemickom reaktore s miešaním) za rovnakých podmienok niekoľkokrát za sebou vždy za rovnaký čas t_m , potom výsledkom merania môžu byť napr. priebehy znázornené na obr. B.3. Priebehy 1, 2, 3 sa navzájom odlišujú. Zo znalosti priebehu 1 sa nedá dopredu určiť priebeh 2, priebeh 3, atď. Toto je dôvod toho, že namiesto skúmania jednotlivých funkčných závislostí je potrebné skúmať vlastnosti veľkého počtu funkcií. Ak počet týchto funkcií (v našom prípade nameraných závislostí 1, 2, 3, ...) sa blíži k nekonečnu, potom súbor týchto funkcií dávame do súvislosti s predstavou *náhodného* (stochastického) *procesu*.

Pod pojmom *náhodný proces* budeme rozumieť množinu náhodných veličín $\xi(t)$ závisiacich od času. Za účelom opísania náhodného procesu sa rozširuje koncept náhodnej veličiny ξ na náhodnú funkciu $\xi(t)$. Dá sa povedať, že náhodný proces je taká funkcia času, hodnoty ktorej v každom čase sú náhodnou veličinou. Náhodná veličina v náhodnom

procesu nadobúda rôzne hodnoty nielen v závislosti od výsledku pokusu, ktorý zodpovedá elementárnemu javu, ale aj v závislosti od času. Náhodná veličina, zodpovedajúca podmienkam daného pokusu a meniac sa v čase, ktorá patrí do množiny náhodných veličín $\xi(t)$, je konkrétnou funkciou času a nazýva sa *realizácia náhodného procesu*.

Náhodný proces v jednotlivých pevných okamihoch času t_1, t_2, \dots, t_n závisí len od elementárneho javu, a preto sa mení na náhodnú veličinu s príslušnou hustotou pravdepodobnosti. Z tohoto vyplýva, že náhodný proces môže byť určený súborom hustôt pravdepodobností, ktoré zodpovedajú spojitým náhodným veličinám $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ pre okamihy času t_1, t_2, \dots, t_n . Hustota pravdepodobnosti náhodného procesu je funkciou času a označuje sa symbolom $f(x, t)$. Pre každý jednotlivý čas t_i existuje príslušná hustota pravdepodobnosti $f(x_i, t_i)$.

Uvažujme okamih času t_1 a príslušnú spojitú náhodnú veličinu $\xi(t_1)$. Pravdepodobnosť toho, že náhodná veličina $\xi(t_1)$ bude medzi hodnotami x_1 a $x_1 + dx_1$, je

$$P(x_1 \leq \xi(t_1) < x_1 + dx_1) = f_1(x_1, t_1)dx_1 \quad (\text{B.51})$$

pričom $f_1(x_1, t_1)$ je hustota pravdepodobnosti pre okamih času t_1 (*jednorozmerová hustota pravdepodobnosti*).

Uvažujme dva okamihy času t_1 a t_2 . Pravdepodobnosť toho, že náhodná veličina $\xi(t_1)$ bude v čase t_1 medzi hodnotami x_1 a $x_1 + dx_1$ a v čase t_2 náhodná veličina $\xi(t_2)$ bude medzi hodnotami x_2 a $x_2 + dx_2$, je

$$P(x_1 \leq \xi(t_1) < x_1 + dx_1; x_2 \leq \xi(t_2) < x_2 + dx_2) = f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2 \quad (\text{B.52})$$

pričom $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ je *dvojrozmerová hustota pravdepodobnosti*. $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ určuje vzťah medzi hodnotami náhodného procesu $\xi(t)$ v okamihoch času t_1 a t_2 .

Zavádza sa tiež *n-rozmerová hustota pravdepodobnosti* $f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$. S pomocou *n-rozmerovej hustoty pravdepodobnosti* je možné určiť pravdepodobnosť toho, že proces $\xi(t)$ bude prechádzať *n*-bodmi s odchýlkou nie väčšou ako dx_1, \dots, dx_n .

Náhodný proces je štatisticky úplne určený hustotami pravdepodobnosti f_1, f_2, \dots, f_n a väzbou medzi nimi.

Najjednoduchším typom náhodného procesu je úplne náhodný proces (*biely šum*). V takomto procese všetky hodnoty náhodnej veličiny v jednotlivých okamihoch času sú navzájom nezávislé. Pre úplne náhodný proces platí

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, t_1)f(x_2, t_2) \quad (\text{B.53})$$

ako aj

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1)f(x_2, t_2) \dots f(x_n, t_n) \quad (\text{B.54})$$

Na základe jednorozmerovej hustoty pravdepodobnosti môžeme určiť *strednú hodnotu náhodného procesu* v tvare

$$\mu(t) = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t)dx \quad (\text{B.55})$$

V (B.55) sme neuviedli index premenných hustoty pravdepodobnosti, lebo okamih času t_1 môže byť ľubovoľný.

Rozptyl náhodného procesu môžeme písať v tvare

$$D[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(t)]^2 f_1(x, t)dx \quad (\text{B.56})$$

$$D[\xi(t)] = E \{ \xi^2(t) \} - (E \{ \xi(t) \})^2 \quad (\text{B.57})$$

Stredná hodnota náhodného procesu $\mu(t)$ je funkciou času a je strednou hodnotou pre všetky realizácie náhodného procesu. Rozptyl $D[\xi(t)]$ hovorí o tom, ako sú realizácie náhodného procesu rozptýlené vzhľadom na strednú hodnotu $\mu(t)$.

Na základe dvojrozmierovej hustoty pravdepodobnosti je možné nájsť väzbu medzi hodnotami náhodného procesu v okamihoch času t_1 a t_2 . Táto väzba je určená *autokorelačnou (korelačnou) funkciou*, ktorá má tvar

$$R_\xi(t_1, t_2) = E \{ \xi(t_1)\xi(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.58})$$

Autokovariančná funkcia má tvar

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\xi(t_1, t_2) &= E \{ (\xi(t_1) - \mu(t_1))(\xi(t_2) - \mu(t_2)) \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu(t_1)][x_2 - \mu(t_2)] f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Pre autokorelačnú funkciu platí

$$R_\xi(t_1, t_2) = \text{Cov}_\xi(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \quad (\text{B.60})$$

Vzájomný vzťah dvoch náhodných procesov $\xi(t)$ a $\eta(t)$ sa opisuje pomocou *vzájomnej korelačnej funkcie*

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E \{ \xi(t_1)\eta(t_2) \} \quad (\text{B.61})$$

a pomocou *vzájomnej kovariančnej funkcie*

$$\text{Cov}_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E \{ (\xi(t_1) - \mu(t_1))(\eta(t_2) - \mu(t_2)) \} \quad (\text{B.62})$$

Za účelom opisu štatistických vlastností náhodného procesu s normálnym rozdelením postačuje použiť strednú hodnotu a korelačnú funkciu. Vo všeobecnosti tomu tak nie je.

Ak namiesto argumentov t_1 a t_2 použijeme v rovniciach (B.58), (B.60) argumenty t a τ , potom autokorelačná funkcia bude

$$R_\xi(t, \tau) = E \{ \xi(t)\xi(\tau) \} \quad (\text{B.63})$$

a autokovariančná funkcia

$$\text{Cov}_\xi(t, \tau) = E \{ (\xi(t) - \mu(t))(\xi(\tau) - \mu(\tau)) \} \quad (\text{B.64})$$

Ak $t = \tau$ potom platí

$$\text{Cov}_\xi(t, t) = E \{ (\xi(t) - \mu(t))^2 \} \quad (\text{B.65})$$

a teda $\text{Cov}_\xi(t, t)$ sa rovná rozptylu náhodnej veličiny ξ . Často sa používa skrátenejší zápis $\text{Cov}_\xi(t, t) = \text{Cov}_\xi(t)$.

Predpokladajme teraz, že navzájom závislé náhodné procesy $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ sú prvkami vektora $\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)]^T$. Jedná sa o *vektor náhodných procesov*. V prípade vektorových náhodných procesov sa často pri výpočtoch obmedzujeme len na určenie vektora stredných hodnôt a autokovariančnej matice.

Majme vektor náhodných procesov $\boldsymbol{\xi}(t)$. Potom

$$\boldsymbol{\mu}(t) = E \{ \boldsymbol{\xi}(t) \} \quad (\text{B.66})$$

sa nazýva *vektorom stredných hodnôt* vektorového náhodného procesu.

Výraz

$$\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(t_1, t_2) = E \{ (\boldsymbol{\xi}(t_1) - \boldsymbol{\mu}(t_1))(\boldsymbol{\xi}(t_2) - \boldsymbol{\mu}(t_2))^T \} \quad (\text{B.67})$$

resp.

$$\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(t, \tau) = E \{ (\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))(\boldsymbol{\xi}(\tau) - \boldsymbol{\mu}(\tau))^T \} \quad (\text{B.68})$$

je *autokovariančnou maticou* vektorového náhodného procesu $\boldsymbol{\xi}(t)$.

Pre autokovariančnú maticu platí vzťah

$$\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(\tau, t) = [\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(t, \tau)]^T \quad (\text{B.69})$$

Ak má náhodný proces normálne rozdelenie, potom stredná hodnota a autokorelačná funkcia umožňujú získať všetky n -rozmerové rozdelenia. Z toho vyplýva, že na určenie štatistických vlastností náhodného procesu s normálnym rozdelením (namiesto určenia všetkých funkcií f_n) postačuje použiť strednú hodnotu a autokorelačnú funkciu.

Pri skúmaní náhodných procesov sa využíva výraz

$$\bar{\mu} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt \quad (\text{B.70})$$

$\bar{\mu}$ nezávisí od času a je výsledkom sledovania nejakého systému v dostatočne veľkom časovom intervale. Vo všeobecnom prípade sa využíva vzťah

$$\bar{\mu}^m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\xi(t)]^m dt \quad (\text{B.71})$$

Pre $m = 2$ tento výraz určuje $\bar{\mu}^2$.

Náhodné procesy sa rozdeľujú na *stacionárne* a *nestacionárne*. V prípade stacionárneho náhodného procesu všetky hustoty pravdepodobností f_1, f_2, \dots, f_n nezávisia od zmeny začiatku odčítavania času a jednorozmerová hustota pravdepodobnosti vo všeobecnosti nezávisí od času t . To znamená, že stredná hodnota (B.55) a rozptyl (B.56) nie sú funkciou času.

Pre mnoho stacionárnych procesov platí, že sú *ergodické*, t.j. s pravdepodobnosťou rovnou jednej platí

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = \bar{\mu} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t) dt \quad (\text{B.72})$$

$$\mu^2 = \bar{\mu}^2, \quad \mu^m = \bar{\mu}^m \quad (\text{B.73})$$

V praxi sa obyčajne predpokladá, že procesy sú stacionárne a ergodické.

Vlastnosti (B.72) a (B.73) ukazujú, že za účelom skúmania štatistických vlastností stacionárneho ergodického procesu postačuje skúmať jednu realizáciu náhodného procesu v dostatočne veľkom časovom intervale.

V prípade stacionárneho procesu dvojrozmerná hustota pravdepodobnosti f_2 nezávisí od okamihov času t_1 a t_2 , ale závisí od $\tau = t_2 - t_1$, ktorý oddeľuje dve náhodné veličiny $\xi(t_1)$ a $\xi(t_2)$. V dôsledku toho autokorelačná funkcia (B.58) môže byť napísaná v tvare

$$R_\xi(\tau) = E \{ \xi(t_1)\xi(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, \tau) \quad (\text{B.74})$$

Pre stacionárny a ergodický náhodný proces platia vlastnosti (B.72) a (B.73) a pre výraz $E \{ \xi(t)\xi(t + \tau) \}$ môžeme písať

$$\begin{aligned} E \{ \xi(t)\xi(t + \tau) \} &= \overline{\xi(t)\xi(t + \tau)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t)\xi(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

teda autokorelačná funkcia pre stacionárny ergodický proces môže byť vyjadrená v tvare

$$R_\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t)\xi(t + \tau) dt \quad (\text{B.76})$$

Autokorelačná funkcia procesu určuje závislosť náhodnej veličiny v čase $t + \tau$ od jej hodnoty v čase t . V prípade stacionárneho ergodického náhodného procesu autokorelačná funkcia môže byť vyčíslená z ľubovoľnej realizácie náhodného procesu.

Pre autokorelačnú funkciu $R_\xi(\tau)$ platí

$$R_\xi(-\tau) = R_\xi(\tau) \quad (\text{B.77})$$

Pre $\tau = 0$ autokorelačná funkcia je určená strednou hodnotou štvorca náhodnej veličiny

$$R_\xi(0) = E \{ \xi^2(t) \} = \overline{\xi(t)\xi(t)} \quad (\text{B.78})$$

Pre $\tau \rightarrow \infty$ autokorelačná funkcia bude štvorcom strednej hodnoty náhodnej veličiny. Toto sa dá ľahko ukázať. Pre ergodický proces platí

$$R_\xi(\tau) = \overline{\xi(t)\xi(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.79})$$

Pre $\tau \rightarrow \infty$ sú $\xi(t)$ a $\xi(t + \tau)$ navzájom nezávislé, a preto využijúc vzťah (B.53), ktorý platí pre úplne náhodný proces, dostaneme

$$R_\xi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_2) dx_2 = \mu^2 = (\bar{\mu})^2 \quad (\text{B.80})$$

Hodnota autokorelačnej funkcie pre $\tau = 0$ je jej najväčšou hodnotou a teda platí, že

$$R_\xi(0) \geq R_\xi(\tau) \quad (\text{B.81})$$

Pre vzájomnú korelačnú funkciu dvoch stacionárne vzájomne ergodických náhodných procesov $\xi(t)$ a $\eta(t)$ môžeme písať

$$E \{ \xi(t)\eta(t + \tau) \} = \overline{\xi(t)\eta(t + \tau)} \quad (\text{B.82})$$

resp.

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f_2(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t)\eta(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

Majme teraz stacionárny ergodický náhodný proces, ktorého autokorelačná funkcia je $R_\xi(\tau)$. Táto autokorelačná funkcia nám dáva informáciu o náhodnom procese v časovej oblasti. Tú istú informáciu o náhodnom procese vo frekvenčnej oblasti môžeme získať, ak urobíme Fourierovu transformáciu autokorelačnej funkcie. Fourierov obraz $S_\xi(\omega)$ autokorelačnej funkcie $R_\xi(\tau)$ je určený vzťahom

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.84})$$

Je zrejmé, že aj naopak autokorelačnú funkciu $R_\xi(\tau)$ môžeme dostať pri známom $S_\xi(\omega)$ použitím vzťahu pre spätnú Fourierovu transformáciu

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (\text{B.85})$$

$R_\xi(\tau)$ a $S_\xi(\omega)$ sú nenáhodné charakteristiky náhodného procesu. $S_\xi(\omega)$ sa nazýva *výkonová spektrálna hustota* náhodného procesu. Táto funkcia má veľký význam pri skúmaní transformácie náhodných vstupov lineárnymi dynamickými systémami.

Pre výkonovú spektrálnu hustotu platí $S_\xi(\omega)$

$$S_\xi(-\omega) = S_\xi(\omega) \quad (\text{B.86})$$

Na určenie výkonovej spektrálnej hustoty zo známej autokorelačnej funkcie a naopak môžu byť použité vzťahy

$$S_\xi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_\xi(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (\text{B.87})$$

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (\text{B.88})$$

Zavedieme tiež pojem *vzájomnej výkonovej spektrálnej hustoty* dvoch vzájomne ergodických náhodných procesov s nulovými strednými hodnotami. Vzájomná výkonová spektrálna hustota $S_{\xi\eta}(\omega)$ náhodných procesov $\xi(t)$ a $\eta(t)$ sa nazýva Fourierov obraz ich vzájomnej korelačnej funkcie $R_{\xi\eta}(\tau)$:

$$S_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.89})$$

Vzájomnú korelačnú funkciu $R_{\xi\eta}(\tau)$ môžeme dostať pri známom $S_{\xi\eta}(\omega)$ použitím vzťahu pre spätnú Fourierovu transformáciu

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi\eta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (\text{B.90})$$

Ak vo výrazoch (B.75) a (B.85) dosadíme $\tau = 0$, potom môžeme písať nasledovné vzťahy

$$E \{ \xi(t)^2 \} = R_\xi(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi^2(t) dt \quad (\text{B.91})$$

$$E \{ \xi(t)^2 \} = R_\xi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega \quad (\text{B.92})$$

Rovnica (B.91) charakterizuje energetické ukazovatele procesu. Pravá časť rovnice sa môže interpretovať ako priemerný výkon signálu. Rovnica (B.92) určuje tiež priemerný výkon procesu, ale vyjadrený pomocou výkonovej spektrálnej hustoty. Priemerný výkon procesu je určený plochou pod krivkou výkonovej spektrálnej hustoty a výkonová spektrálna hustota $S_\xi(\omega)$ určuje rozdelenie výkonu signálu podľa frekvencie. Pre $S_\xi(\omega)$ platí

$$S_\xi(\omega) \geq 0 \quad (\text{B.93})$$

B.4 Biely šum

Majme stacionárny náhodný proces, pre ktorý platí, že pre všetky frekvencie má rovnakú hodnotu výkonovej spektrálnej hustoty, t.j.

$$S_\xi(\omega) = V \quad (\text{B.94})$$

Takýto proces má „biele“ spektrum a nazýva sa *biely šum*. Výkonová spektrálna hustota bieleho šumu je znázornená na obr. B.4a. Z rovnice (B.92) vyplýva, že priemerný výkon bieleho šumu je nekonečný, pretože platí

$$E \{ \xi(t)^2 \} = \frac{1}{\pi} V \int_0^\infty d\omega \quad (\text{B.95})$$

V reálnych podmienkach neexistujú také procesy, pre ktoré platí vzťah (B.95).

Autokorelačná funkcia bieleho šumu môže byť určená z rovnice (B.88)

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty V \cos \omega \tau d\omega = V \delta(\tau) \quad (\text{B.96})$$

kde

$$\delta(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega \tau d\omega \quad (\text{B.97})$$

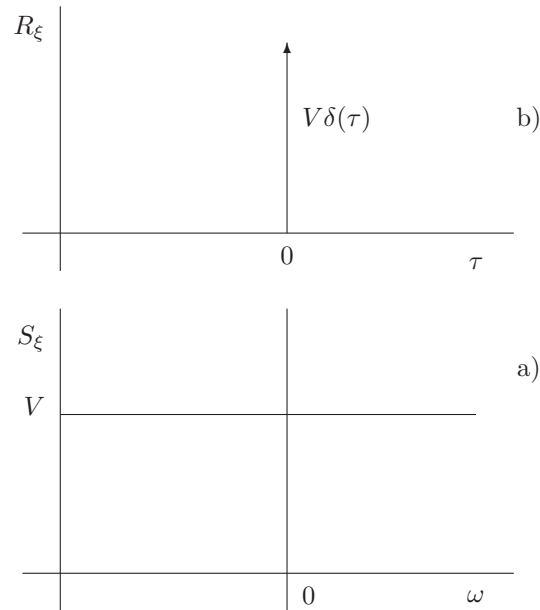
pretože Fourierova transformácia delta funkcie $F_\delta(j\omega)$ je rovná jednej a spätná Fourierova transformácia pre delta funkciu má tvar

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F_\delta(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos \omega \tau d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sin \omega \tau d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega \tau d\omega \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

Autokorelačná funkcia bieleho šumu (obr. B.4b) je určená delta funkciou a je rovná nule pre ľubovoľné hodnoty τ okrem $\tau = 0$. Biely šum je príkladom úplne náhodného procesu, v ktorom $\xi(t)$ a $\xi(t + \tau)$ sú nezávislé.

Za účelom fyzikálne realizovateľného procesu je vhodné zaviesť pojem bieleho šumu s ohraničenou výkonovou spektrálnou hustotou

$$\begin{aligned} S_\xi(\omega) &= V && \text{pre } |\omega| < \omega_1 \\ S_\xi(\omega) &= 0 && \text{pre } |\omega| > \omega_1 \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$



Obr. B.4: Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia bieleho šumu

Autokorelačná funkcia tohoto procesu je

$$R_\xi(\tau) = \frac{V}{\pi} \int_0^{\omega_1} \cos \omega \tau d\omega = \frac{V}{\pi \tau} \sin \omega_1 \tau \quad (\text{B.100})$$

Pre tento proces tiež platí

$$\bar{\mu}^2 = D = \frac{V}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} d\omega = \frac{V\omega_1}{\pi} \quad (\text{B.101})$$

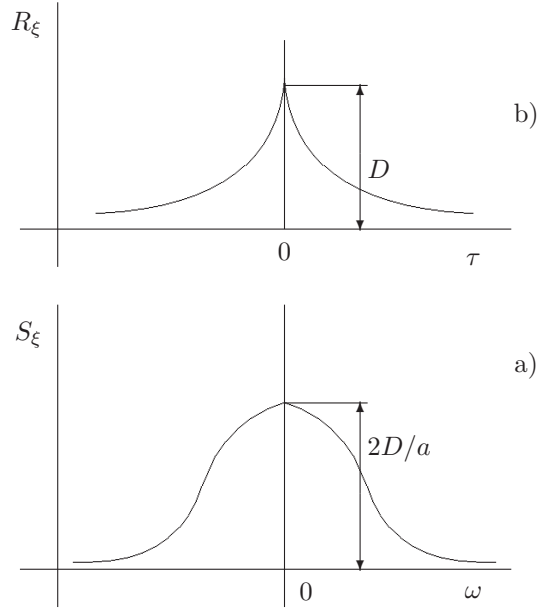
Niekedy je vhodné aproximovať závislosť (B.94) spojitou krivkou. Za týmto účelom je možné použiť vzťah

$$S_\xi(\omega) = \frac{2aD}{\omega^2 + a^2} \quad (\text{B.102})$$

Zodpovedajúca autokorelačná funkcia bude v tvare

$$R_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2aD}{\omega^2 + a^2} e^{j\omega\tau} d\omega = D e^{-a|\tau|} \quad (\text{B.103})$$

Priebeh výkonovej spektrálnej hustoty a autokorelačnej funkcie tohoto procesu je znázornený na obr. B.5. Vzťahy (B.102) a (B.103) veľmi dobre opisujú mnoho náhodných procesov. Napr. ak $a \gg 1$, potom tieto vzťahy s „veľmi dobrým“ priblížením opisujú biely šum.



Obr. B.5: Výkonová spektrálna hustota a autokorelačná funkcia procesu podľa (B.102) a (B.103)

B.5 Odozva lineárneho systému na náhodný vstup

Majme spojitý lineárny systém s konštantnými koeficientmi

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (\text{B.104})$$

$$\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \quad (\text{B.105})$$

pričom $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ je vektor stavových veličín a na vstupe do systému pôsobí vektor náhodných procesov $\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)]^T$. \mathbf{A} a \mathbf{B} sú matice konštant rozmerov $n \times n$ a $n \times m$. Začiatkový stav $\boldsymbol{\xi}_0$ je vektor náhodných veličín.

Predpokladáme, že matematická nádej $E\{\boldsymbol{\xi}_0\}$ a kovariančná matica $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}_0)$ sú známe a platí

$$E\{\boldsymbol{\xi}_0\} = \mathbf{x}_0 \quad (\text{B.106})$$

$$E\{(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)^T\} = \text{Cov}(\boldsymbol{\xi}_0) = \text{Cov}_0 \quad (\text{B.107})$$

Ďalej predpokladáme, že vektor vstupných veličín $\boldsymbol{\xi}(t)$ je vektorom náhodných procesov, ktorý nie je závislý od vektora začiatkového stavu $\boldsymbol{\xi}_0$ a poznáme jeho vektor stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu}(t)$ a jeho autokovariančnú maticu $\text{Cov}_\xi(t, \tau)$ a platí

$$E\{\boldsymbol{\xi}(t)\} = \boldsymbol{\mu}(t), \quad \text{pre } t \geq 0 \quad (\text{B.108})$$

$$E\{(\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))(\boldsymbol{\xi}(\tau) - \boldsymbol{\mu}(\tau))^T\} = \text{Cov}_\xi(t, \tau), \text{ pre } t \geq 0, \tau \geq 0 \quad (\text{B.109})$$

$$E \{ (\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))(\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T \} \equiv 0 \quad \text{pre } t \geq 0 \quad (\text{B.110})$$

Pretože $\boldsymbol{\xi}_0$ je vektor náhodných veličín a $\boldsymbol{\xi}(t)$ je vektor náhodných procesov, aj $\boldsymbol{x}(t)$ bude vektorom náhodných procesov. Našou úlohou bude nájsť matematickú nádej $E \{ \boldsymbol{x}(t) \}$, kovariančnú maticu $\text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t) = \text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t, t)$ a autokovariančnú maticu $\text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t, \tau)$ vektora stavových veličín $\boldsymbol{x}(t)$ pre dané $\boldsymbol{\xi}_0$ a $\boldsymbol{\xi}(t)$.

Pre každý náhodný začiatkový stav a pre každý náhodný priebeh vstupných veličín môžeme pre zodpovedajúce náhodné priebehy stavových veličín písať

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\xi}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}(\alpha)d\alpha \quad (\text{B.111})$$

pričom $\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ je fundamentálna matica systému.

Ak označíme

$$E \{ \boldsymbol{x}(t) \} = \bar{\boldsymbol{x}}(t) \quad (\text{B.112})$$

potom platí vzťah

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}(\alpha)d\alpha \quad (\text{B.113})$$

ktorý zodpovedá riešeniu diferenciálnej rovnice

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}(t) \quad (\text{B.114})$$

so začiatkovou podmienkou

$$\bar{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (\text{B.115})$$

Za účelom nájdania $\text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t)$ a $\text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t, \tau)$ vektora stavových veličín $\boldsymbol{x}(t)$ pre dané $\boldsymbol{\xi}_0$ a $\boldsymbol{\xi}(t)$ je treba najskôr vyjadriť odchýlku $\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)$. Túto odchýlku môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{\xi}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}_0] + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}[\boldsymbol{\xi}(\alpha) - \boldsymbol{\mu}(\alpha)]d\alpha \quad (\text{B.116})$$

Je zrejmé, že $\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} - \frac{d\bar{\boldsymbol{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}[\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)] + \mathbf{B}[\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu}(t)] \quad (\text{B.117})$$

so začiatkovou podmienkou

$$\boldsymbol{x}(0) - \bar{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{x}_0 \quad (\text{B.118})$$

S využitím rovnice (B.116) môžeme $\text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t)$ vektora stavových veličín $\boldsymbol{x}(t)$ vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\boldsymbol{x}}(t) &= E \{ (\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t))(\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t))^T \} \\ &= E \left\{ \left\{ \boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{x}_0] + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}[\boldsymbol{\xi}(\alpha) - \boldsymbol{\mu}(\alpha)]d\alpha \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{x}_0] + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - \beta)\mathbf{B}[\boldsymbol{\xi}(\beta) - \boldsymbol{\mu}(\beta)]d\beta \right\}^T \right\} \quad (\text{B.119}) \end{aligned}$$

a po úprave nasledovne

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)E\{(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)^T\}\mathbf{\Phi}^T(t) \\
&+ \int_0^t \mathbf{\Phi}(t)E\{(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)(\boldsymbol{\xi}(\beta) - \boldsymbol{\mu}(\beta))^T\}\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(t - \beta)d\beta \\
&+ \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}E\{(\boldsymbol{\xi}(\alpha) - \boldsymbol{\mu}(\alpha))(\boldsymbol{\xi}_0 - \mathbf{x}_0)^T\}\mathbf{\Phi}^T(t)d\alpha \\
&+ \int_0^t \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}E\{(\boldsymbol{\xi}(\alpha) - \boldsymbol{\mu}(\alpha))(\boldsymbol{\xi}(\beta) - \boldsymbol{\mu}(\beta))^T\}\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(t - \beta)d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{B.120}$$

Nakoniec po zohľadnení vzťahov (B.107), (B.109) a (B.110) $\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)$ bude

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\text{Cov}_0\mathbf{\Phi}^T(t) \\
&+ \int_0^t \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(\alpha, \beta)\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(t - \beta)d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{B.121}$$

Podobne sa dá odvodiť vzťah pre $\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t, \tau)$ vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$ v tvare

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t, \tau) &= \mathbf{\Phi}(t)\text{Cov}_0\mathbf{\Phi}^T(\tau) \\
&+ \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(\alpha, \beta)\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(\tau - \beta)d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{B.122}$$

Ak na vstupe systému (B.104) a (B.105) pôsobí vektorový náhodný proces, pričom platia rovnice (B.106), (B.107), (B.108) a (B.110) a

$$\begin{aligned}
E\{(\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu}(t))(\boldsymbol{\xi}(\tau) - \boldsymbol{\mu}(\tau))^T\} &= \mathbf{V}(t)\delta(t - \tau) \\
&\text{pre } t \geq 0, \tau \geq 0, \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}^T(t) \geq 0
\end{aligned} \tag{B.123}$$

potom kovariančnú maticu $\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)$ vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$ vypočítame dosadením autokovariančnej matice $\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(t, \tau)$ vektorového náhodného procesu $\boldsymbol{\xi}(t)$

$$\text{Cov}_{\boldsymbol{\xi}}(\alpha, \beta) = \mathbf{V}(\alpha)\delta(\alpha - \beta) \tag{B.124}$$

do rovnice (B.121) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\text{Cov}_0\mathbf{\Phi}^T(t) \\
&+ \int_0^t \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\mathbf{V}(\alpha)\delta(\alpha - \beta)\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(t - \beta)d\beta d\alpha
\end{aligned} \tag{B.125}$$

$$\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\text{Cov}_0\mathbf{\Phi}^T(t) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t - \alpha)\mathbf{B}\mathbf{V}(\alpha)\mathbf{B}^T\mathbf{\Phi}^T(t - \alpha)d\alpha \tag{B.126}$$

Kovariančná matica $\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)$ vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$ daná rovnicou (B.126) je riešením maticovej diferenciálnej rovnice

$$\frac{d\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t) + \text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{V}(t)\mathbf{B}^T \tag{B.127}$$

so začiatočnou podmienkou

$$\text{Cov}_{\mathbf{x}}(0) = \text{Cov}_0 \tag{B.128}$$

Autokovariančnú maticu $\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t, \tau)$ vektora stavových veličín $\mathbf{x}(t)$, ak na vstupe systému pôsobí vektorový náhodný proces, pre ktorý platí (B.123), vypočítame dosadením (B.124) do rovnice (B.122). Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{\mathbf{x}}(t, \tau) &= \Phi(t - \tau)\text{Cov}_{\mathbf{x}}(\tau) && \text{pre } t > \tau \\ \text{Cov}_{\mathbf{x}}(t, \tau) &= \text{Cov}_{\mathbf{x}}(t)\Phi(\tau - t) && \text{pre } \tau > t\end{aligned}\quad (\text{B.129})$$

Ak lineárny spojitý systém s konštantnými koeficientmi je asymptoticky stabilný a sledujeme ho od času $-\infty$ a ak na vstupe je vektorový stacionárny náhodný proces, pre ktorý platí (B.123), potom $\mathbf{x}(t)$ je stacionárny náhodný proces.

Matematická nádej

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{B.130})$$

je riešením rovnice

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} \quad (\text{B.131})$$

pričom $\boldsymbol{\mu}$ je vektor konštantných matematických nádejí stacionárnych náhodných procesov na vstupe systému.

Kovariančná matica

$$E\{(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}})^T\} = \text{Cov}_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.132})$$

je matica konštant a je riešením rovnice

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\text{Cov}_{\mathbf{x}} + \text{Cov}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{B}^T \quad (\text{B.133})$$

pričom \mathbf{V} je symetrická kladne semidefinitná matica konštant definovaná vzťahom

$$E\{(\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\mu})^T\} = \mathbf{V}\delta(t - \tau) \quad (\text{B.134})$$

Autokovariančná matica

$$E\{(\mathbf{x}(t_1) - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}(t_2) - \bar{\mathbf{x}})^T\} = \text{Cov}_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) \equiv \text{Cov}_{\mathbf{x}}(t_1 - t_2, 0) \quad (\text{B.135})$$

je pre prípad stacionárnych procesov závislá len od $\tau = t_1 - t_2$ a môžeme ju určiť zo vzťahov

$$\begin{aligned}\text{Cov}_{\mathbf{x}}(\tau, 0) &= e^{\mathbf{A}\tau}\text{Cov}_{\mathbf{x}} && \text{pre } \tau > 0 \\ \text{Cov}_{\mathbf{x}}(\tau, 0) &= \text{Cov}_{\mathbf{x}}e^{-\mathbf{A}^T\tau} && \text{pre } \tau < 0\end{aligned}\quad (\text{B.136})$$

Príklad B.1 *Analýza systému prvého rádu s náhodným vstupom*

Majme jednorozmerový systém určený skalárnou rovnicou

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + b\xi(t) \quad (\text{B.137})$$

pričom $a < 0$ a $b > 0$. Predpokladajme, že platí

$$x(0) = \xi_0 \quad (\text{B.138})$$

kde ξ_0 je náhodná veličina.

Ďalej predpokladajme, že sú známe nasledovné štatistické charakteristiky

$$E\{\xi_0\} = x_0$$

$$E \{(\xi_0 - x_0)^2\} = \text{Cov}_0$$

$$E \{\xi(t)\} = \mu \quad \text{pre } t \geq 0 \quad (\text{B.139})$$

$$E \{(\xi(t) - \mu)(\xi(\tau) - \mu)\} = V \delta(t - \tau) \quad \text{pre } t, \tau \geq 0$$

$$E \{(\xi(t) - \mu)(\xi_0 - x_0)\} \equiv 0 \quad \text{pre } t \geq 0$$

Našou úlohou bude nájsť matematickú nádej $E \{x(t)\}$, rozptyl $\text{Cov}_x(t)$ a autokovariančnú funkciu pre stacionárny prípad $\text{Cov}_x(\tau, 0)$ veličiny x .

Matematická nádej $E \{x(t)\}$ je

$$\bar{x} = e^{at}x_0 - \frac{b}{a}(1 - e^{at})\mu \quad (\text{B.140})$$

Pretože $a < 0$, x pre čas $t \rightarrow \infty$ bude asymptoticky stacionárnym náhodným procesom s matematickou nádejou v tvare

$$\bar{x}_\infty = -\frac{b}{a}\mu \quad (\text{B.141})$$

Rozptyl určíme podľa rovnice (B.126) v tvare

$$\text{Cov}_x(t) = e^{2at}\text{Cov}_0 - \frac{b^2}{2a}(1 - e^{2at})V \quad (\text{B.142})$$

Rozptyl pre čas $t \rightarrow \infty$ bude

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}_x(t) = -\frac{b^2V}{2a} \quad (\text{B.143})$$

Autokovariančná funkcia pre stacionárny prípad je

$$\text{Cov}_x(\tau, 0) = -e^{a|\tau|}\frac{b^2V}{2a} \quad (\text{B.144})$$

Literatúra

- K. J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- J. Ackermann. Einführung in die Theorie der Beobachter. *Regelungstechnik*, 24:217 – 226, 1976. [91](#)
- G. J. Bierman. *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Academic Press, New York, 1977. [78](#)
- V. Bobál, J. Böhm, R. Prokop a J. Fessler. *Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů: algoritmy a implementace*. VUT, Brno, 1998.
- D. Chmúrny, R. Prokop a M. Bakošová. *Automatické riadenie technologických procesov*. Alfa, Bratislava, 1988.
- P. Eykhoff, editor. *System identification*. Wiley, London, 1974.
- P. Eykhoff. *Trends and Progress in System Identification*. Oxford, Pergamon Press, 1981.
- T. R. Fortescue, L. S. Kershenbaum a B. E. Ydsie. Implementation of self tuning regulators with variable forgetting factors. *Automatica*, 17:831–835, 1981. [76](#)
- K. F. Gauss. *Theoria motus corporum celestium*. English translation: Theory of the Motion of the Heavenly Bodies, Dover, New York, 1963, 1809. [63](#)
- G. C. Goodwin a K. S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984. [74](#)
- Z. Hebký. Vícenásobné vzorkování při číslicovém řízení. *Automatizace*, 27(6):142–145, 1984. [89](#)
- P. Hudzovič. *Identifikácia a modelovanie*. Bratislava, ES SVŠT, 1986. [35](#), [36](#), [37](#)
- R. E. Kalman a R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Engr.*, 83:95 – 100, 1961. [93](#)
- R. Kulhavý a M. Kárný. Tracking of slowly varying parameters by directional forgetting. In *Proc. 9th IFAC World Congr., Budapest*, pages 79–83, 1984. [77](#)
- H. Kwakernaak a R. Sivan. *Linear optimal control systems*. Wiley, New York, 1972. [93](#)
- L. Ljung. *System identification: Theory for the user*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1987. [16](#)

- L. Ljung a T. Söderström. *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
- D. G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. AC*, 16:596 – 602, 1971. [91](#)
- W. L. Luyben. *Process Modelling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. McGraw Hill, Singapore, 1990.
- P. S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. Academic Press, New York, 1979.
- E. Moncman, J. Ďuroš a J. Mikleš. Approximation von übertragungsfunktionen mit Hilfe des Digitalrechners. *Regelungstechnik und Prozess-Datenverarbeitung*, 20(6):261–267, 1972. [37](#), [39](#)
- Rohál-Ilkiv. *Identifikácia sústav*. SjF SVŠT, Bratislava, 1987.
- T. Šalát a kol. *Malá encyklopédia matematiky*. Obzor, Bratislava, 1978.
- T. Söderström a P. Stoica. *System identification*. Prentice Hall Int., 1989.
- V. Strejc. *Stavová teorie lineárního řízení*. Academia, Praha, 1978.
- J. Švec a kol. *Průručka automatizační a výpočetní techniky*. Praha, SNTL, 1975. [30](#)
- H. Unbehauen a G. P. Rao. *Identification of Continuous Systems*. North-Holland, Amsterdam, 1987. [37](#)

Autori Dr.-Ing. M. Fikar - Prof. Ing. J. Mikleš, DrSc.
Názov Identifikácia systémov
Vydanie 1. vydanie
Náklad 100 výtlačkov
Rozsah 114 strán, 25 obrázkov, 8, 143 AH, 8, 320 VH
Edičné číslo 4726
Tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave
Vytlačené 1999

ISBN 80-227-1177-2

85 - 210 - 99 Sk 27,-
