Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Habilitačná práca

Bratislava, 2011

Ing. Michal Kvasnica, PhD.

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Rýchle a pamäťovo efektívne prediktívne riadenie hybridných systémov

Habilitačná práca

Odbor: 5.2.14 Automatizácia

Bratislava, 2011

Ing. Michal Kvasnica, PhD.

Touto cestou sa chcem poďakovať všetkým, vďaka ktorým táto práca vznikla. Ďakujem predovšetkým Miroslavovi Fikarovi za vytvorenie úžasných pracovných podmienok, cenné diskusie, pripomienky i konštruktívnu kritiku. Moja poďakovanie tiež patrí všetkým kolegom z Oddelenia informatizácie, automatizácie a riadenia procesov, predovšetkým Ľubošovi Čirkovi, Martinovi Hercegovi, Ivane Rauovej a Alexandrovi Szücsovi. Najväčšia vďaka však patrí mojej rodine za neúnavnú podporu v mojej akademickej kariére.

Michal Kvasnica

Mojej rodine.

Obsah

1 Úvod

V prediktívnom riadení sa optimálne akčné zásahy získavajú pomocou riešenia optimalizačného problému, ktorý pozostáva z účelovej funkcie a ohraničení. Účelová funkcia vyjadruje vzdialenosť predikovaného vývoja riadeného systému od zvolenej referencie a energiu potrebnú na jej dosiahnutie. Ohraničenia zahŕňajú jednak hranice prípustných hodnôt procesných premenných (t.j. stavov, akčných zásahov a výstupov), ako i rovnicu predikcie, ktorá určuje predikovanú odozvu systému na zvolené akčné zásahy. Pomocou vhodnej voľby ohraničení je tiež možné garantovať stabilitu uzavretého regulačného obvodu a rekurzívnu riešiteľnosť problému prediktívneho riadenia, prípadne zaviesť do formulácie kvalitatívne faktory v podobe ohraničení na maximálne preregulovanie, veľkosti zmien akčných zásahov a podobne.

Úspešnosť nasadenia prediktívneho riadenia v praxi je určená dvoma dominujúcimi faktormi: kvalitou regulácie a cenou implementácie. Prvý faktor závisí predovšetkým od kvality predikčného modelu, ktorý je použitý v účelovej funkcii na vyjadrenie budúceho správania sa systému a taktiež od voľby predikčného horizontu, t.j. dĺžky predikcie. Druhý aspekt vyjadruje výpočtový výkon potrebný na riešenie optimalizačnej úlohy prediktívneho riadenia v reálnom čase. Keďže tieto dva aspekty sú navzájom prepojené priamou úmerou, prediktívne riadenie sa v súčasnosti používa predovšetkým pri riadení pomalých procesov, ktorých dlhé časové konštanty poskytujú dostatočný časový priestor na vyriešenie optimalizačného problému na bežne dostupných riadiacich platformách.

V posledných rokoch je vo svetovej literatúre jasne viditeľná snaha o vývoj prístupov vedúcich k zníženiu implementačnej náročnosti prediktívneho riadenia pre rýchle procesy kde sa časové konštanty pohybujú rádovo v mili a mikrosekundách. Jedným z najúspešnejších smerov je pritom tzv. *explicitné prediktívne riadenie*, ktorého cieľom je "predpočítať" optimálne akčné zásahy pre všetky prípustné počiatočné podmienky v tvare prehľadávacej tabuľky. Táto fáza, hoci výpočtovo náročná, sa pritom uskutočňuje off-line. Implementácia explicitných prediktívnych regulátorov, t.j. získanie konkrétnej hodnoty optimálneho akčného zásahu pre danú počiatočnú podmienku sa potom redukuje na obyčajné vyhľadávanie v tabuľke, ktoré sa dá uskutočniť veľmi rýchlo aj na platformách s obmedzeným výpočtovým výkonom. Hlavným limitujúcim faktorom explicitného prediktívneho riadenia je jednoznačne zložitosť jeho riešenia, vyjadrená počtom prvkov vygenerovanej prehľadávacej tabuľky. Zložitejšie tabuľky si jednak vyžadujú väčšie množstvo pamäte na ich uloženie, ako i väčší výpočtový výkon na ich prehľadávanie. Oba tieto faktory negatívne ovplyvňujú cenu implementácie.

1.1 Ciele a prínosy práce

Predkladaná habilitačná práca sleduje jednoduchý, a pritom ambiciózny cieľ: znížiť zložitosť (a tým pádom implementačnú cenu) explicitného prediktívneho riadenia. Dôraz je pritom kladený na podstatné zníženie náročnosti, rádovo minimálne desaťnásobné v porovnaní s existujúcimi prístupmi. Čiastkové ciele, ktoré predstavujú jednotlivé teoretické a praktické prínosy, sú formulované nasledovne:

- Formulácia prediktívneho riadenia pre hybridné systémy, ktoré kombinujú elementy spojitej dynamiky a diskrétnej logiky s akcentom na rýchle získanie riešenia.
- Znižovanie zložitosti explicitných prediktívnych regulátorov pomocou využitia ich geometrických vlastností.
- Vývoj softwarových nástrojov na jednoduchý návrh, syntézu, overenie a implementáciu explicitného prediktívneho riadenia.

Odpovede na jednotlivé čiastkové ciele sú poskytnuté v podobe priložených publikovaných prác autora, doplnených o vysvetľujúci komentár. Jednotlivé práce pritom predstavujú ucelený súbor prác venovaných oblasti prediktívneho riadenia. Všetky separáty vedeckých prác sú v anglickom jazyku, tak ako boli publikované alebo akceptované na publikovanie.

Hlavné prínosy práce sa dajú rozdeliť do dvoch kategórií. Tou prvou sú nové teoretické poznatky, dovoľujúce zásadným spôsobom znížiť cenu implementácie explicitného prediktívneho regulátora tým, že sa podstatne redukuje zložitosť takýchto regulátorov. Druhým hlavným prínosom je preklenutie medzery medzi teóriou a praxou tým, že práca predstavuje softwarové nástroje umožňujúce jednoduché využitie publikovaných teoretických výsledkov v praxi.

2 Súčasný stav problematiky a prehľad literatúry

Prediktívne riadenie (Model Predictive Control, MPC) (Maciejowski, 2002) je založené na voľbe akčných zásahov pomocou riešenia optimalizačného problému, čo dovoľuje do formulácie riadenia zahrnúť nielen procesné aspekty (ako je napr. sledovanie žiadaných hodnôt alebo dodržanie procesných ohraničení), ale aj zobrať do úvahy ekonomické (napr. maximalizácia zisku alebo minimalizácia spotreby energií) a environmentálne aspekty. To je dôvod prečo je prediktívne riadenie široko využívané v praxi (Qin a Badgewell, 1997), predovšetkým v riadení chemických a petrochemických výrob.

Na základe merania stavových veličín $x(t)$, ktoré predstavujú počiatočnú podmienku optimalizácie sa pomocou *predikčného modelu* predpovedá budúce správanie sa riadeného systému po čas $t + N$, kde N označuje *predikčný horizont*. Riešením optimalizačného problému sa potom získa celá sekvencia akčných zásahov $u(t), \ldots, u(t + N)$, ktorá minimalizuje zvolenú účelovú funkciu N diskrétnych časových krokov do budúcnosti. Následne sa z tejto sekvencie vyberie iba prvý člen $u(t)$, implementuje sa do systému, získa sa nové meranie stavových veličín a celý proces sa opakuje. Tento opakujúci sa prístup k implementácii má dve základné výhody. Prvou je zavedenie spätnej väzby, ktorá kompenzuje nemerané poruchy a rozdiely medzi predikovaným a skutočným správaním sa systému. Druhým dôvodom je fakt, že opakovaným riešením problému s konečným predikčným horizontom sa docieli aproximácia problému s nekonečným predikčným horizontom, čo implikuje (za určitých podmienok) stabilitu spätnoväzbového zapojenia (Mayne a kol., 2000). Preto sa tento spôsob implementácie tiež často označuje ako *riadenie s pohyblivým horizontom* (Receding Horizon Control) (Rawlings a Muske, 1993).

Ak je predikčný model lineárny a ak všetky ohraničenia v probléme sú konvexné, problém prediktívneho riadenia sa dá sformulovať ako konvexný optimalizačný problém (Boyd a Vandenberghe, 2004). Lineárne modely sú však presné iba v blízkom okolí linearizačného bodu (Zadeh a Whalen, 1962; Richalet a kol., 1978; Garcia a kol., 1989; Camacho a Bordons, 1999). Ak je potrebná vyššia presnosť modelu, je možné použiť nelineárne predikčné modely (Meadows a Rawlings, 1997; Sastry, 1999; Cannon a kol., 2003; Findeisen a kol., 2006), čo však vedie na riešenie problému nelineárneho programovania (Floudas, 1995) so všetkými negatívnymi dôsledkami (napr. ťažkosti s nájdením globálne optimálneho riešenia). V posledných rokoch sa preto vo zvýšenej miere začali na predikciu používať *hybridné modely* (Branicky, 1995; Bemporad a Morari, 1999; Sontag, 1981; Heemels a kol., 2000; De Schutter a Van den Boom, 2001; Heemels a kol., 2001), ktoré kombinujú elementy spojitej dynamiky a diskrétnej logiky. Ide o systémy tvorené viacerými lineárnymi modelmi (reprezentujúcimi lokálne linearizácie v okolí viacerých linearizačných bodov), medzi ktorými sa systém prepína na základe splnenia logických podmienok. Hoci hybridné systémy sú vo svojej podstate nelineárne, ich vnútorná po častiach lineárna štruktúra dovoľuje jednoduchšie nájdenie globálneho optima (Morari a kol., 2003; Kvasnica a kol., 2010a).

Spôsob tvorby hybridných modelov závisí od zvoleného modelovacieho prístupu. Tzv. Linear Complementarity modely (Heemels a kol., 2000) využívajú na opis hybridného správania kolmosť vektorov a sú preto ideálne na opis elektrických obvodov. Mixed Logical Dynamical (MLD) systémy (Bemporad a Morari, 1999) zachytávajú všeobecné logické podmienky v tvare logických súčtov, súčinov, IF-THEN pravidiel a stavových automatov. Preto sú vhodné na opis všeobecného hybridného chovania pri plánovaní (Bemporad a kol., 2000a), verifikácii (Bemporad a kol., 2000c) a riadení (Rozgonyi a Hangos, 2005). MLD modely sa dajú jednoducho vytvoriť napr. použitím modelovacieho jazyka HYSDEL (Torrisi a Bemporad, 2002; Kvasnica a Herceg, 2010). Nakoniec, *po častiach afinné* (Piecewise Affine, PWA) modely (Sontag, 1981) sú ideálne na aproximáciu nelineárnych modelov pomocou viacnásobnej linerizácie (Bemporad a kol., 2000b; Mayne a Raković, 2003; Kvasnica a kol., 2010a). PWA modely sa dajú zostrojiť buď identifikáciou zo vstupno-výstupných dát (Ferrari-Trecate a kol., 2001; Roll a kol., 2004; Ferrari-Trecate, 2005), priamou analytickou linearizáciou (Kvasnica a kol., 2010a), alebo využitím optimalizačných procedúr na nájdenie optimálnej PWA aproximácie všeobecnej nelineárnej funkcie (Kvasnica a kol., 2011d).

Z pohľadu nasadenia prediktívneho riadenia v praxi, bez ohľadu na typ zvoleného predikčného modelu, je zvyčajne potrebné garantovať splnenie nasledovných požiadaviek:

- rekurzívna riešiteľnosť,
- spätnoväzbová stabilita,
- globálnu optimálnosť,
- implementovateľnosť v reálnom čase.

Požiadavka na rekurzívnu riešiteľnosť (Scokaert a kol., 1999) znamená, že ak je problém prediktívneho riadenia riešiteľný (t.j. ak existuje riešenie zlučiteľné z ohraničeniami) v čase t, tak bude existovať aj riešenie v ľubovolnom čase $t + k$, $k \to \infty$. Riešiteľnosť je pritom základnou podmienkou reálnej implementácie lebo garantuje existenciu riešenia (či už optimálneho alebo suboptimálneho). Štandardne sa táto požiadavka zabezpečuje použitím invariantných množín (Bitsoris, 1988; Blanchini, 1999; Raković a kol., 2004; Grieder a kol., 2005; Herceg a kol., 2009), prípadne mäkkých ohraničení (Kerrigan a Maciejowski, 2000; Zeilinger a kol., 2010).

Spätnoväzbová stabilita sa tradične dosahuje pridaním ohraničení na koncový predikovaný stav (Mayne a kol., 2000; Grieder a kol., 2003), použitím časovo optimálneho riadenia (Mayne a Schroeder, 1997; Grieder a kol., 2005; Herceg a kol., 2009), využitím nekonečného predikčného horizontu (Grieder a kol., 2004a; Baotić a kol., 2006), alebo zavedením ohraničení spôsobujúcich kontraktivitu stavov (de Oliveira Kothare a Morari, 2000).

Globálnu optimálnosť je jednoduché dosiahnuť ak sa dá zvolená úloha prediktívneho riadenia formulovať ako konvexný optimalizačný problém (Zadeh a Whalen, 1962; Boyd a Vandenberghe, 2004). Ak je však prediktívne riadenie formulované pre nelineárne alebo hybridné predikčné modely, dosiahnutie globálnej optimálnosti je výpočtovo náročné či už pre hybridné (Bemporad a Morari, 1999; Kvasnica, 2008), alebo nelineárne formulácie (Floudas, 1995; Adjiman a kol., 1996; Papamichail a Adjiman, 2004; Chachuat a kol., 2006).

Implementovateľnosť riadenia v reálnom čase znamená dodržanie limitov na dostupný výpočtový čas a operačnú pamäť. Ako už bolo diskutované vyššie, implementácia prediktívneho riadenia vyžaduje vyriešenie daného optimalizačného problému v každej perióde vzorkovania. Preto je veľmi dôležité formulovať tento problém tak, aby sa dalo jeho optimum nájsť dostatočne rýchlo. Vo všeobecnosti je časová zložitosť optimalizačných problémov nelineárnou funkciou počtu premenných n a počtu ohraničení m. Pre problémy lineárneho (LP) a kvadratického (QP) programovania je táto zložitosť približne $\mathcal{O}(n^{3.5}\sqrt{m})$ (den Hertog, 1994), pričom konštantný člen v $\mathcal{O}$ notácii je pre kvadratické programovanie zhruba 5 násobne vyšší (Neumaier, 2004, str. 37). Pri riadení hybridných systémov sa dá optimalizačný problém previesť (Borrelli, 2003; Kvasnica, 2009; Kvasnica a kol., 2010a) na lineárny alebo kvadratický program s celočíselnými premennými (MILP/MIQP), ktorého výpočtová zložitosť je v najhoršom prípade exponenciálna v počte celočíselných premenných. Napriek tomu sa mnohé praktické problémy dajú riešiť pomerne efektívne použitím metód vetiev a hraníc (Fletcher a Leyffer, 1998), ktorá je implementovaná v početných softvérových balíkoch. Za všetky spomeňme aspoň CPLEX (ILOG, Inc., 2003) a GLPK (Makhorin, 2001). Podobný prístup sa dá aplikovať aj na riešenie nelineárnych problémov (Adjiman a kol., 1996; Papamichail a Adjiman, 2004; Chachuat a kol., 2006).

Napriek znateľnému pokroku vo vývoji optimalizačného problému však prediktívne riadenie bolo dlho doménou pomalých systémov, ktorých dlhé časové konštanty poskytujú dostatočný časový priestor na optimalizáciu. Zásadný prielom prišiel s prácou Bemporad a kol. (2002), ktorá na problém prediktívneho riadenia aplikuje metódu *parametrického programovania* (Gal a Nedoma, 1972; Bank a kol., 1982). V tomto prístupe sa daný optimalizačný problém rieši iba raz *pre všetky* prípustné hodnoty počiatočných podmienok. Výsledkom je zákon riadenia v tvare funkcie, ktorá mapuje počiatočné podmienky na optimálne akčné zásahy. To dovoľuje redukovať implementáciu prediktívneho riadenia na problém vyhodnotenia funkcie. Pre prediktívne problémy založené na lineárnych a hybridných predikčných modeloch sa dá ukázať, že takýto *explicitný prediktívny regulátor* nadobúda (Borrelli, 2003) tvar PWA funkcie, ktorá sa dá interpretovať ako prehľadávacia tabuľka zložená z polyhedrálnych regiónov a k nim asociovaných affinných zákonov riadenia.

Jednoduchosť a rýchlosť implementácie explicitného prediktívneho riadenia umožňuje jeho nasadenie aj pri riadení rýchlych systémov, kde sa časové konštanty pohybujú rádovo v mili a mikrosekundách. Príklady aplikácií zahŕňajú predovšetkým riadenie napäťových a prúdových prevodníkov (Papafotiou a kol., 2007; Mariethoz a kol., 2008; Geyer a kol., 2008a, 2009; Papafotiou a kol., 2009; Peyrl a kol., 2009; Mariethoz a kol., 2009; Beccuti a kol., 2009; Bolognani a kol., 2009), mechanických systémov (Niederberger a Morari, 2006; Niederberger a kol., 2006; Fleming a kol., 2007; Belloli a kol., 2007; Alessandri a kol., 2007; Lingxun a kol., 2008; Herceg a kol., 2009; Cychowski a kol., 2009), aplikácie v automobilovom priemysle (Möbus a kol., 2003; Giorgetti a kol., 2006; Cairano a kol., 2006; Borrelli a kol., 2006; Vasak a kol., 2006; Van Der Heijden a kol., 2007; Corona a De Schutter, 2008; Naus a kol., 2008), ako i pri riadení autonómnych zariadení (Falcone a kol., 2007; Jianqiang a kol., 2008; Keviczky a kol., 2008).

Nasadenie explicitného prediktívneho riadenia v praxi je však limitované dvoma rozhodujúcimi faktormi. Tým prvým je exponenciálna výpočtová zložitosť zostrojenia explicitného riešenia (Grieder, 2004), ktorá dovoľuje takýto prístup použiť iba pre systémy s malým počtom stavov, zvyčajne menším ako 5. Druhou limitáciou je zložitosť výsledného riešenia, vyjadrená počtom regiónov prehľadávacej tabuľky, ktorá negatívne ovplyvňuje rýchlosť implementácie a množstvo spotrebovanej pamäte (Kvasnica, 2009).

Zložitosť zostrojenia explicitného riešenia je primárne určená počtom ohraničení v konkrétnom optimalizačnom probléme a sekundárne počtom optimalizovaných premenných. Oba tieto faktory pritom priamo súvisia s dĺžkou zvoleného predikčného horizontu. Preto sa dá nájdenie riešenia urýchliť buď znížením stupňov voľnosti pomocou tzv. move blockingu (Tøndel a Johansen, 2002; Cagienard a kol., 2007), redukciou predikčného modelu (Hovland a kol., 2008), prevedením problému minimalizácie účelovej funkcie na úlohu minimalizáciu času (Grieder a kol., 2005; Herceg a kol., 2009), využitím dynamického programovania (Christophersen a kol., 2005; Baotić a kol., 2006), alebo efektívnou elimináciou redundantných ohraničení (Suard a kol., 2004).

Zložitosť výsledného explicitného riešenia (teda počet regiónov) sa dá znížiť viacerými spôsobmi, extenzívne opísanými v Kvasnica a kol. (2011a). Jeden smer je založený na relaxácii optimálnosti (Bemporad a Filippi, 2003; Ulbig a kol., 2007; Jones a Morari, 2009), čím sa dosiahne jednoduchšie, ale suboptimálne riešenie. Alternatívne je možné nahradiť pôvodné regióny explicitného riešenia jednoduchšími objektami, napr. hyperkockami (Johansen a Grancharova, 2003) alebo simplexmi (Grieder a kol., 2004b; Scibilia a kol., 2009), prípadne interpolovať riešenie iba z malej podmnožiny regiónov (Rossiter a Grieder, 2005). Hoci všetky tieto spôsoby v niektorých prípadoch vedú k pozoruhodnému zníženiu zložitosti, vo všeobecnosti nedávajú záruku podstatného zjednodušenia. Naviac so sebou prinášajú suboptimálnosť a problémy so zachovaním stabilizujúcich vlastností.

Druhý veľký smer sa zaoberá zjednodušením už existujúceho explicitného riešenia a jeho nahradením jednoduchším funkčným zápisom. Táto možnosť zahŕňa, okrem iných, tzv. optimálne spájanie regiónov (Geyer a kol., 2008b), elimináciu regiónov v ktorých je akčný zásah saturovaný (Kvasnica a Fikar, 2010b), alebo elimináciu saturovaných regiónov pomocou separačných funkcií (Kvasnica a kol., 2011c). V týchto prístupoch dochádza k podstatnému zníženiu zložitosti explicitných regulátorov bez straty optimálnosti. Alternatívne je možné explicitný zákon riadenia nahradiť hladkými funkciami a to buď sumou nelineárnych wavelet kriviek (Summers a kol., 2009), Laguerrovými polynómami (Valencia-Palomo a Rossiter, 2010), alebo obyčajnými polynómami vo viacerých premenných (Kvasnica a kol., 2008, 2011b). V poslednom uvedenom prípade je síce nahradenie suboptimálne, ale výsledný regulátor garantuje spätnoväzbovú stabilitu a splnenie ohraničení.

Tretí smer sa zaoberá čo najrýchlejším vyhodnotením explicitných riešení pre danú hodnotu počiatočnej podmienky. Štandardne sa táto úloha realizuje postupným prehľadávaním všetkých regiónov, čo vedie k lineárnej zložitosti tejto implementačnej fázy. Počet operácií potrebných na uskutočnenie tohto postupu sa dá znížiť tvorbou vhodných vyhľadávacích stromov (Tøndel a kol., 2003b; Christophersen a kol., 2007), v ktorých je zložitosť vyhľadávania už iba logaritmická v počte regiónov. Zrýchlenie sa tiež dá docieliť využitím konvexnosti účelovej funkcie (Baotic a kol., 2008) alebo spojitosti zákona riadenia (Wen a kol., 2009).

3 Prediktívne riadenie hybridných systémov

3.1 Hybridné systémy

Uvažujeme, že je daný nelineárny model riadeného systému v diskrétnej časovej oblasti v tvare

$$x^+ = f(x, u), \tag{3.1}$$

kde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ je vektor stavov, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ je vektor akčných zásahov a x^+ reprezentuje stavy v ďalšej perióde vzorkovania. Predpokladá sa, že vektor stavov je plne dostupný v každom časovom kroku. Vektor pravých strán $f(\cdot,\cdot)$ reprezentuje nelineárne vektorové pole. Všeobecné nelineárne modely na jednej strane poskytujú vysokú presnosť opisu reálneho systému, na druhej strane však ich nelineárna charakteristika môže spôsobiť problémy s dosiahnutím globálneho optima v následnej optimalizácii.

Preto je štandardnou praxou aproximovať nelineárny model v okolí zvoleného linearizačného bodu (x^s, u^s) pomocou Taylorovho rozvoja (Struik, 1969), teda

$$f(x, u) \approx f_{\mathrm{LIN}}(x, u, x^s, u^s), \tag{3.2}$$

kde

$$f_{\mathrm{LIN}}(x, u, x^s, u^s) = f(x^s, u^s) + \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right)_{x^s, u^s}(x - x_s) + \left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right)_{x^s, u^s}(u - u_s), \tag{3.3}$$

čím sa model (3.1) transformuje na lineárny (v skutočnosti afinný) model v tvare

$$x^+ = Ax + Bu + c. \tag{3.4}$$

Výhodou lineárnych modelov je ich jednoduchá štruktúra, nevýhodou potom fakt, že presnosť opisu je dostatočná iba v blízkom okolí linearizačného bodu.

Presnosť aproximácie nelineárneho modelu $f(x, u)$ sa dá zvýšiť použitím viacerých linearizačných bodov. Označme pomocou $f_{\mathrm{LIN},i}(x, u, x^{s,i}, u^{s,i})$ linearizáciu funkcie $f(x, u)$ v okolí i-tého linearizačného bodu. Ak uvažujeme celkovo n_L linearizačných bodov, výsledná viacnásobná linearizácia nelineárneho modelu (3.1) je vyjadrená pomocou

$$x^+ = f_{\mathrm{PWA}}(x, u) = \begin{cases} A_1 x + B_1 u + c_1 & \text{ak } \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{D}_1 \\ & \vdots \\ A_{n_L} x + B_{n_L} u + c_{n_L} & \text{ak } \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{D}_{n_L}, \end{cases} \tag{3.5}$$

kde A_i, B_i, c_i predstavujú matice i-tej lokálnej linearizácie pre $i = 1, \ldots, n_L$. Model v tvare (3.5) sa tiež označuje ako *po častiach affinný* (Piecewise Affine, PWA) model (Sontag, 1981), ktorý patrí do kategórie *hybridných systémov* (Branicky, 1995). Takéto systémy sa vyznačujú prepojením spojitej dynamiky a diskrétnej logiky, často vyjadrenej práve prostredníctvom logických pravidiel v tvare *ak-potom*.

Predpokladajme, že PWA systém (3.5) je *jednoznačne určený* v zmysle nasledovnej definície (Bemporad a Morari, 1999):

Definícia 3.1 *PWA systém (3.5) je jednoznačne určený ak jeho doména* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$ *je rozdelená na* n_L *regiónov* $\mathcal{D}_i$ *tak, že platí* $\mathcal{D} = \bigcup_i^{n_L} \mathcal{D}_i$ *a* $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, *t.j. že regióny sa neprekrývajú.*

Tým pádom PWA systém vykazuje deterministické správanie, keďže ku každému bodu (x, u) prináleží práve jedna lokálna linearizácia. Jednoznačne určené PWA systémy sú ekvivalentné (Heemels a kol., 2001) iným populárnym tvarom hybridných systémov, ako sú napr. Mixed Logical Dynamical (MLD) systémy (Bemporad a Morari, 1999), Linear Complementarity systémy (Heemels a kol., 2000) a max-min-plus-scaling modely (De Schutter a Van den Boom, 2001). Hoci sú PWA modely (a hybridné modely vo všeobecnosti) stále nelineárne kvôli prítomnosti logických prepínacích pravidiel, ich vnútorná lineárna štruktúra umožňuje jednoduchšiu syntézu riadenia (Morari a kol., 2003), čo bolo overené aj na príklade chemického reaktora v Kvasnica a kol. (2010a). Podrobnejšie sa tvorbe PWA modelov venujeme v kapitole 5.2.

3.2 Prediktívne riadenie hybridných systémov

Je daný jednoznačne určený PWA systém (3.5), ktorého stavy a akčné zásahy sú ohraničené

$$x \in \mathcal{X}, \;\; u \in \mathcal{U}, \tag{3.6}$$

kde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ a $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ sú kompaktné (konvexné a uzavreté) polytopické množiny obsahujúce počiatok vo svojom striktnom vnútrajšku. V prediktívnom riadení s konečným predikčným horizontom N sa v každej diskrétnej perióde vzorkovania rieši nasledovný optimalizačný problém:

$$\begin{aligned}
J_N^*(x_0) \;\; &= \;\; \min_{U_N} \;\; \|Q_N x_N\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \|Q_x x_k\|_p + \|Q_u u_k\|_p, && \text{(3.7a)}\\
\text{s.t.} \;\; & \;\; x_{k+1} = f_{\text{PWA}}(x_k, u_k), \quad k = 0, \ldots, N-1, && \text{(3.7b)}\\
& \;\; x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 0, \ldots, N, && \text{(3.7c)}\\
& \;\; u_k \in \mathcal{U}, \quad k = 0, \ldots, N-1, && \text{(3.7d)}\\
& \;\; x_N \in \mathcal{X}_f, && \text{(3.7e)}
\end{aligned}$$

kde x_k (u_k) označuje predikciu vstupov (akčných zásahov) v k-tom kroku predikcie, začínajúc z počiatočnej podmienky $x_0 = x(t)$, kde $x(t)$ je aktuálne meranie stavov, $J_N^* \in \mathbb{R}$ je optimálna hodnota účelovej funkcie, $\mathcal{X}_f \subset \mathbb{R}^{n_x}$ je kompaktná polytopická terminálna množina a p označuje vektorovú normu. Výsledkom optimalizácie je sekvencia optimálnych akčných zásahov $U_N^* = (u_0^*, \ldots, u_{N-1}^*)$, z ktorej sa v zmysle riadenia z pohyblivým horizontom aplikuje do systému iba prvý element, čiže

$$u^* = [\mathbb{1} \; \mathbb{0} \; \cdots \; \mathbb{0}] U_N^* \tag{3.8}$$

reprezentuje zákon riadenia.

Ako bolo ukázané v Kvasnica (2009) a Kvasnica a kol. (2010a), optimalizačný problém (3.7) sa dá transformovať na štandardný optimalizačný problém s celočíselnými premennými:

$$
\begin{aligned}
J_N^*(x_0) \quad &= \quad \min_{U_N} ||Q_N x_N||_p + \sum_{k=0}^{N-1} \big(||Q_x x_k||_p + ||Q_u u_k||_p\big) && (3.9a)\\
\text{s.t.} \quad & \quad H_i \left[\begin{smallmatrix} x_k \\ u_k \end{smallmatrix}\right] - K_i \leq M(1-\delta_{k,i}), && (3.9b)\\
& \quad \sum_{i=1}^{n_L} \delta_{k,i} = 1, && (3.9c)\\
& \quad x_{k+1} - (A_i x_k + B_i u_k + c_i) \leq M(1-\delta_{k,i}), && (3.9d)\\
& \quad x_{k+1} - (A_i x_k + B_i u_k + c_i) \geq -M(1-\delta_{k,i}), && (3.9e)\\
& \quad x_k \in \mathcal{X}, && (3.9f)\\
& \quad u_k \in \mathcal{U}, && (3.9g)
\end{aligned}
$$

kde $\delta_{i,k} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n_L$, $k = 0, \ldots, N-1$ sú binárne premenné, ktoré predstavujú pravdivostné indikátory príslušnosti vektora (x_k, u_k) k i-tému regiónu dynamiky PWA modelu, M je dostatočne veľká konštanta (Williams, 1993) a H_i, K_i sú polpriestorové reprezentácie regiónov PWA modelu, teda $\mathcal{D}_i = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \mid H_i \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \leq K_i\}$, $i = 1, \ldots, n_L$. Keďže všetky ohraničenia v probléme (3.9) sú lineárne a účelová funkcia je buď kvadratická (pre $p = 2$) alebo po častiach lineárna (pre $p = 1/\infty$), problém (3.9) sa dá formulovať buď ako kvadratický (MIQP) alebo ako lineárny (MILP) program s celočíselnými premennými (Lazimy, 1985). Ako bolo ilustrované v Kvasnica a kol. (2010a) na prípadovej štúdii chemického reaktora, MILP/MIQP problémy sa zvyčajne dajú riešiť mnohonásobne rýchlejšie v porovnaní s plne nelineárnou formuláciou prediktívneho riadenia. Naviac, v dôsledku použitia hybridného predikčného modelu je dosiahnutá aj vysoká presnosť aproximácie pôvodného nelineárneho procesu.

3.3 Explicitné prediktívne riadenie

V explicitnom prediktívnom riadení je cieľom získať explicitnú reprezentáciu zákona riadenia (3.8) v tvare

$$u^* = \kappa(x), \tag{3.10}$$

teda ako funkciu $\kappa : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}^{n_u}$, ktorá mapuje počiatočné podmienky problému (3.7) na priestor optimálnych akčných zásahov. Ak sa dá funkcia κ získať, implementácia prediktívneho riadenia v uzavretej slučke, t.j. získanie optimálneho akčného zásahu u^* pre konkrétne hodnoty x, sa redukuje na obyčajne vyhodnotenie funkcie. Tým sa zásadným spôsobom redukuje výpočtový výkon (a teda čas) potrebný na implementáciu prediktívneho riadenia.

Ak sa dá optimalizačný problém (3.7) previesť na štandardný tvar kvadratického (QP), lineárneho (LP), MILP alebo MIQP programovania, funkcia κ sa dá nájsť prostredníctvom *parametrického programovania* (Gal a Nedoma, 1972; Bank a kol., 1982; Bemporad a kol., 2002). V tomto prístupe sa rieši všeobecný optimalizačný problém v tvare

$$
\begin{aligned}
J^*(x) \;&=\; \min_u u^T P_{z,z} u + x^T P_{x,u} u + P_u u + P_x x + P_0 && \text{(3.11a)} \\
\text{s.t.} \quad & Su \leq W + Ex, && \text{(3.11b)}
\end{aligned}
$$

kde $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ je vektor optimalizovaných premenných, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ je vektor parametrov. $P_{u,u}$, $P_{x,u}$, P_u, P_x, P_0, S, W, E sú matice príslušných rozmerov, ktoré sa dajú získať štandardnými matematickými úpravami (Borrelli, 2003; Kvasnica, 2009) problému prediktívneho riadenia (3.7), pričom $u := U_N$. Formulácia (3.11) zahŕňa jednak parametrické konvexné kvadratické programovanie (pQP) keď $P_{u,u} \succeq 0$, parametrické lineárne programovanie (pLP) ak $P_{u,u} = \mathbb{0}$, ako i parametrické celočíselné programovanie (pMILP, pMIQP) ak $u \in \mathbb{R}^{n_r} \times \{0, 1\}^{n_b}$ kde n_r je počet reálnych premenných a n_b počet binárnych premenných. Parametrickým riešením problému (3.11) rozumieme také riešenie, ktoré u^* vyjadruje ako explicitnú funkciu $\kappa(x)$ parametra x pre všetky jeho prípustné hodnoty spĺňajúce ohraničenia (3.11b). Základné vlastnosti parametrického riešenia sú sumarizované v nasledovnej Vete.

Veta 3.2 (Borrelli (2003)) *Funkcia $u^* = \kappa(x)$ je po častiach affinou funkciou vektora parametrov x, definovanou výrazom*

$$
\kappa(x) = \begin{cases} F_1 x + G_1 & \text{ak } x \in \mathcal{R}_1 \\ & \vdots \\ F_R x + G_R & \text{ak } x \in \mathcal{R}_R, \end{cases} \tag{3.12}
$$

kde $\mathcal{R}_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $i = 1, \ldots, R$ sú polytopické regióny rozdeľujúce priestor prípustných parametrov, t.j. $\mathcal{R}_i = \{x \mid H_i x \leq K_i\}$ a $R < \infty$ označuje celkový počet regiónov.

Teoretické algoritmy na získanie explicitného riešenia (t.j. parametrov F_i, G_i a $\mathcal{R}_i$ PWA funkcie κ) sú opísané napr. v Bemporad a kol. (2002); Borrelli (2003); Tøndel a kol. (2003a); Spjøtvold a kol. (2005); Jones a kol. (2005); Baotić (2005); Kvasnica (2009) a ich softvérová implementácia je dostupná v balíku Multi-Parametric Toolbox (Kvasnica a kol., 2004a; Kvasnica, 2009).

3.4 Časovo optimálne explicitné prediktívne riadenie

Parametrickým riešením problému prediktívneho riadenia (3.7) teda získavame explicitný zákon riadenia (3.10) v tvare PWA funkcie, ktorá sa dá interpretovať a implementovať ako prehľadávacia tabuľka. Nevýhodou prístupu je fakt, že riešenie sa získava enumeráciou všetkých prípustných kombinácií aktívnych ohraničení problému (3.11). To je zároveň dôvod, prečo je zložitosť takéhoto riešenia, vyjadrená počtom regiónov R, v najhoršom prípade exponenciálnou funkciou počtu ohraničení, ktorý v prediktívnom riadení závisí primárne od dĺžky predikčného horizontu a sekundárne od počtu vstupov a stavov.

Rýchlosť zostrojenia explicitného riešenia sa dá teda zvýšiť skrátením predikčného horizontu, čo má však negatívne dôsledky na kvalitu riadenia. Alternatívou je použitie *časovo optimálneho* riadenia, kde sa rieši nasledovný problém:

$$
\begin{aligned}
J^*(x_0) \quad &= \quad \min N, &\quad (3.13a)\\
\text{s.t.} \quad & \quad x_{k+1} = f_{\text{PWA}}(x_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1, &\quad (3.13b)\\
& \quad x_k \in \mathcal{X}, \quad k = 0, \dots, N, &\quad (3.13c)\\
& \quad u_k \in \mathcal{U}, \quad k = 0, \dots, N-1, &\quad (3.13d)\\
& \quad x_N \in \mathcal{X}_f, &\quad (3.13e)
\end{aligned}
$$

ktorý sa od základného problému (3.7) líši zmenou účelovej funkcie: namiesto minimalizácie nákladovej funkcie sa pre každú hodnotu počiatočnej podmienky x_0 hľadá najmenší počet krokov, za ktoré sa dá systém previesť z ľubovolného stavu x_0 do zvolenej cieľovej množiny $\mathcal{X}_f$. Ako sme ukázali v Grieder a kol. (2005), parametrické riešenie problému (3.13) pre hybridný predikčný model v PWA tvare sa dá nájsť iteračne v zmysle dynamického programovania (Bellman, 1957; Bertsekas, 2000; Borrelli a kol., 2005). Podstata zrýchlenia je v tom, že namiesto jedného problému s predikčným horizontom N sa rieši N problémov s horizontom 1:

Algoritmus 3.3 (Grieder a kol. (2005))

1. *Zvoľme invariantnú cieľovú množinu $\mathcal{X}_f$ a asociujme k nej stabilizujúci zákon riadenia. Nastavme $t = 0$.*

2. *Nájdime parametrické riešenie problému (3.7) pre $N = 1$, ktoré podľa Vety 3.2 dá PWA funkciu $u_t^* = \kappa_t(x_0)$, definovanú nad regiónmi $\mathcal{R}_{t,i}$. Označme $\mathcal{X}_t = \cup_i \mathcal{R}_{t,i}$.*

3. *Nastavme $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_t$, zvýšme $t = t + 1$ a opakujme postup od bodu 2 pokiaľ $\mathcal{X}_t \neq \mathcal{X}_{t-1}$.*

Implementácia takéhoto riešenia si vyžaduje pre každú počiatočnú podmienku najskôr zistiť minimálnu hodnotu indexu t^*, pre ktorú platí $x_0 \in \text{dom}(\kappa_{t^*})$. Potom sa akčný zásah vypočíta priamo z (3.10) pre $\kappa := \kappa_{t^*}$. Hodnota t^* tu zároveň označuje minimálny počet krokov potrebných k prevedeniu konkrétnej x_0 do zvolenej cieľovej množiny. Stabilita takéhoto riadenia je garantovaná zo samotnej jeho konštrukcie, ak je $\mathcal{X}_f$ invariantná a k nej prislúchajúci cieľový regulátor je vypočítaný riešením lineárnych maticových nerovností, ako je ukázané v Grieder a kol. (2005). Ako sme dokumentovali v Kvasnica (2009) na prípadovej štúdii zahŕňajúcej veľký počet náhodných PWA modelov, zostrojenie explicitného riešenia časovo optimálneho problému je v priemere desaťkrát rýchlejšie v porovnaní so štandardnými prístupmi (Borrelli a kol., 2005). Pokles výkonnosti spôsobený zmenou tvaru účelovej funkcie bol pritom rádovo iba v jednotkách percent.

V práci Herceg a kol. (2009) sme časovo optimálne riadenie hybridných systémov rozšírili o možnosť sledovania dopredu neznámeho, časovo premenlivého referenčného signálu x_{ref} kde ohraničenie (3.13e) nadobúda tvar $x_N = x_{\text{ref}}$. Podstata riešenia takejto úlohy je zhodná s Algoritmom 3.3 s jedným podstatným rozdielom: zatiaľ čo v (3.13) boli neznámymi parametrami iba počiatočné podmienky x_0, v tejto situácii sú parametrami x_0 a x_{ref}. Dimenzia parametrického priestoru je teda dvojnásobná, čo implikuje zvýšenie počtu regiónov. Výhodou je však fakt, že výsledný explicitný regulátor je časovo optimálny pre ľubovolnú zlučiteľnú hodnotu referencie. V Herceg a kol. (2009) sme výhody časovo optimálneho riadenia ilustrovali na prípadovej štúdii riadenia servopohonu, ktorý vykazoval nelineárnu charakteristiku kvôli prítomnosti mŕtvej zóny. Táto nelinearita bola najskôr nahradená hybridných PWA modelom. Následne experimentálna verifikácia syntetizovaného časovo-optimálneho prediktívneho regulátora jasne demonštrovala jeho hlavné výhody: splnenie ohraničení, vysporiadanie sa s nelinearitou a čo najrýchlejšie sledovanie premenlivej referencie.

Časovo optimálne prediktívne riadenie sa teda rieši iteračne sekvenciou samostatných jednokrokových optimalizačných problémov. Ako sme ukázali v Kvasnica a kol. (2009a), takýto prístup dovoľuje rozšíriť triedu predikčných modelov o PWA modely s *parametrickými neurčitosťami*. V tomto prípade uvažujeme predikčný model v tvare

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{+} &= f_{\text{PWA}}(x, \lambda, u) \\ &= A_i(\lambda)x + B_i u + c_i \quad \text{ak} \quad x \in \mathcal{D}_i, \end{aligned} \tag{3.14}$$

kde stavová matica $A_i(\lambda)$ je pre každý mód i vyjadrená ako konvexná kombinácia viacerých stavových reprezentácií, teda

$$A_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n_\lambda} \lambda_j A_{i,j}, \tag{3.15}$$

pričom n_λ vyjadruje počet vrcholových reprezentácií $A_{i,j}$. Explicitné riešenie časovo optimálneho prediktívneho riadenia je potom vyjadrené ako explicitná funkcia mapujúca vektor (x, λ) na akčné zásahy. Tieto zásahy sú pritom časovo optimálne *pre každú, dopredu neznámu* hodnotu vektora λ s $\sum_j \lambda_j = 1$ a $0 \leq \lambda_j \leq 1$ pre $j = 1, \ldots, n_\lambda$. Keďže je regulátor stabilizujúci pre každú hodnotu neurčitého parametra λ, je zároveň *robustne* stabilizujúci. To dovoľuje použiť tento prístup napríklad na riadenie Takagi-Sugeno fuzzy systémov (Takagi a Sugeno, 1985), kde parameter λ reprezentuje aktiváciu jednotlivých funkcií príslušnosti (Kvasnica a kol., 2009b).

4 Znižovanie zložitosti explicitného prediktívneho riadenia

Ako bolo uvedené v Kapitole 3.3, explicitný zákon prediktívneho riadenia pre lineárne a hybridné predikčné modely nadobúda tvar po čiastiach afinnej funkcie $u^* = \kappa(x)$, ktorá je tvorená polytopickými regiónmi $\mathcal{R}_i$ a k nim asociovanými afinnými zákonmi riadenia. Implementácia takéhoto riadenia v reálnom čase si vyžaduje pre každé meranie stavov x vyhodnotenie funkcie $\kappa(x)$ pri dodržaní tvrdých ohraničení na výpočtový čas a spotrebovanú pamäť. Len pre ilustráciu uveďme, že pre typické dimenzie, pre ktoré sa dá takéto explicitné riešenie "jednoducho" získať (t.j. pre $n_x \leq 5$) každý región zaberá v pamäti približne $50n_x$ bajtov a vyžaduje si približne $20n_x$ výpočtových operácií na vyhodnotenie, či $x \in \mathcal{R}_i$. Celkový počet regiónov pritom nezriedka presahuje rádovo tisícky, predovšetkým pre vysoké predikčné horizonty. Ak teda uvažujeme o implementácii explicitného prediktívneho riadenia na lacných platformách s nízkym výpočtovým výkonom a obmedzenou pamäťou, je nevyhnutné znížiť počet regiónov na akceptovateľnú hranicu. Táto úloha sa v literatúre označuje ako *znižovanie zložitosti explicitného prediktívneho riadenia*. Podrobný prehľad dostupných metód je uvedený v Kapitole 2.

V tejto kapitole uvažujeme, že explicitný zákon riadenia, t.j. funkcia κ je daná a snažíme sa o jej náhradu inou, jednoduchšou funkciou $\tilde{\kappa}$, ktorá má menšiu pamäťovú a výpočtovú zložitosť. Rozlišujeme pritom dva spôsoby takéhoto nahradenia:

- *ekvivalentné nahradenie*, kde funkcia $\tilde{\kappa}$ zachováva všetky vlastnosti funkcie κ, t.j. keď pre všetky $x \in \operatorname{dom}(\kappa)$ platí $\tilde{\kappa}(x) = \kappa(x)$;

- *suboptimálne stabilizujúce nahradenie*, kde je $\tilde{\kappa}$ je iba približným nahradením funkcie κ, ale pritom zachováva garanciu asymptotickej spätnoväzbovej stability ak rovnakú garanciu poskytuje aj pôvodný zákon riadenia κ.

Dve nasledovné podkapitoly opisujú získanie ekvivalentného nahradenia na základe prác Kvasnica a Fikar (2010b) a Kvasnica a kol. (2011c), zatiaľ čo tretia podkapitola je venovaná suboptimálnemu nahradeniu publikovanému v Kvasnica a kol. (2011b).

4.1 Eliminácia saturovaných regiónov pomocou orezávania

Daný je explicitný zákon riadenia v tvare PWA funkcie κ, ktorá je definovaná nad celkovo R regiónmi $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, R$. Cieľom je zostrojiť jednoduchšiu funkciu $\tilde{\kappa}$ s $\tilde{R} < R$ regiónmi a tzv. *orezávací filter* ϕ tak, že bude platiť $\phi(\tilde{\kappa}(x)) = \kappa(x)$ pre všetky $x \in \operatorname{dom}(\kappa)$.

Ako sme ukázali v Kvasnica a Fikar (2010b), tento cieľ sa dá docieliť odstránením tých regiónov funkcie κ, kde akčný zásah nadobúda saturovanú hodnotu a následným prekrytím vzniknutých "dier" predĺžením nesaturovaných regiónov. Pre názornosť výkladu uvažujme, že ohraničenie na akčný zásah (3.7d) je vyjadrené v tvare $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, kde $\underline{u}$ a $\overline{u}$ predstavujú dolnú, respektívne hornú medzu dovoleného akčného zásahu. Označme pomocou $\mathcal{I}_{\max}$ indexy tých regiónov PWA funkcie κ, v ktorých je akčný zásah saturovaný na maxime (t.j. keď $\kappa(x) = \overline{u}$, $\forall x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$) a volajme tieto regióny *saturované na maxime*.

Podobne označme ako $\mathcal{I}_{\min}$ indexy regiónov *saturovaných na minime* a pomocou $\mathcal{I}_{\text{unsat}}$ indexy *nesaturovaných regiónov* kde $\underline{u} < \kappa(x) < \overline{u}$. Názorné grafické vyjadrenie je uvedené na Obr. 4.1(a), kde regióny č. 2, 3 a 4 sú nesaturované (t.j. $\mathcal{I}_{\text{unsat}} = \{2, 3, 4\}$), región č. 1 je saturovaný na minime a regióny č. 5 a 6 sú saturované na maxime.

Definícia 4.1 *Funkciu $\tilde{\kappa}$ voláme* vhodným nahradením *funkcie κ ak platí:*

1. *$\tilde{\kappa}(x) = \kappa(x)$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{unsat}}$,*
2. *$\tilde{\kappa}(x) \geq \overline{u}$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{max}}$,*
3. *$\tilde{\kappa}(x) \leq \underline{u}$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{min}}$.*

Vhodné nahradenie teda dovoľuje nadhodnotenie funkčných hodnôt v regiónoch saturovaných na maxime a ich podhodnotenie v regiónoch saturovaných na minime. Grafická ilustrácia vhodného nahradenia je uvedená na Obr. 4.1(c). Je to práve toto nad(pod)hodnotenie, ktoré dovoľuje znížiť počet regiónov funkcie $\tilde{\kappa}$ za predpokladu, že pôvodný zákon riadenia κ obsahuje aspoň jeden saturovaný región. Ako sme dokumentovali v Kvasnica a Fikar (2010b), táto požiadavka je splnená pre veľkú väčšinu prediktívnych problémov, predovšetkým ak sa používajú tesné ohraničenia na akčné zásahy a dlhé predikčné horizonty.

Veta 4.2 (Kvasnica a Fikar (2010b)) *Predpokladajme, že pre danú PWA funkciu κ existuje jej vhodné nahradenie $\tilde{\kappa}$ spĺňajúce Definíciu 4.1. Definujme orezávací filter*

$$\phi(\tilde{\kappa}(x)) := \max\{\underline{u}, \min\{\tilde{\kappa}(x), \overline{u}\}\}. \tag{4.1}$$

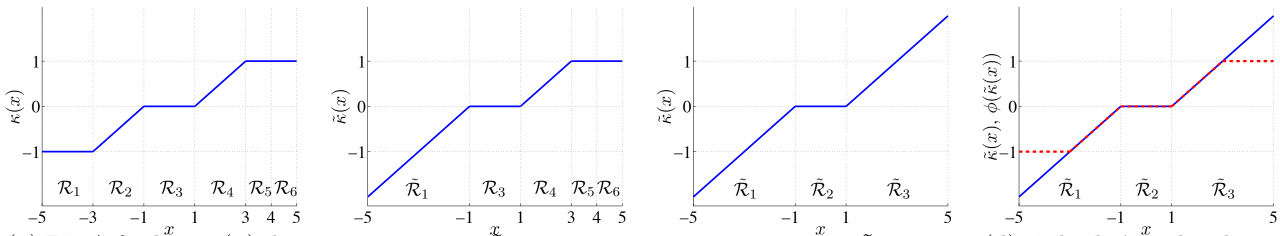
Potom platí $\phi(\tilde{\kappa}(x)) = \kappa(x)$ pre všetky $x \in \operatorname{dom}(\kappa)$ a teda funkcia $\phi(\tilde{\kappa})$ je ekvivalentným nahradením funkcie κ.

Dôkaz Vety 4.2 vychádza z faktu, že vzťah (4.1) je kompaktným vyjadrením troch pravidiel v tvare

$$\phi(\tilde{\kappa}(x)) = \begin{cases} \overline{u} & \text{ak } \tilde{\kappa}(x) \geq \overline{u}, \\ \underline{u} & \text{ak } \tilde{\kappa}(x) \leq \underline{u}, \\ \tilde{\kappa}(x) & \text{inak,} \end{cases} \tag{4.2}$$

ktoré "orezávajú" funkciu $\tilde{\kappa}$ tak, že sa dosiahne jej ekvivalencia s pôvodnou funkciou κ. Aplikácia tejto Vety je v grafickom vyjadrení uvedená na Obr. 4.1(d).

Vhodné nahradenie $\tilde{\kappa}$ sa dá zostrojiť použitím základných geometrických operácií (Kvasnica, 2009) za predpokladu, že funkcia κ je spojitá a jej doména je konvexná, čo je garantované, ak je získaná parametrickým riešením problému (3.7) formulovaného pre lineárne predikčné modely (Borrelli, 2003). Vezmime do úvahy dva susedné regióny $\mathcal{R}_s$ a $\mathcal{R}_n$ a k nim asociované zákony riadenia $u^* = F_s x + G_s$ resp. $u^* = F_n x + G_n$. Ak je jeden z regiónov saturovaný na minime (teda $s \in \mathcal{I}_{\min}$) a druhý nesaturovaný (teda $n \in \mathcal{I}_{\text{unsat}}$), potom zo spojitosti funkcie κ priamo vyplýva, že $F_n x + G_n \leq \overline{u}$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_s$.



(a) PWA funkcia $\kappa(x)$ definovaná nad 6 regiónmi v $\mathbb{R}^1$.

(b) Región $\tilde{\mathcal{R}}_1$ vznikne rozšírením regiónu $\mathcal{R}_2$ cez susedný saturovaný región $\mathcal{R}_1$.

(c) Región $\tilde{\mathcal{R}}_3$ je rozšírením regiónu $\mathcal{R}_4$ cez saturované susedné regióny $\mathcal{R}_5$ and $\mathcal{R}_6$.

(d) Vhodné nahradenie $\tilde{\kappa}$ ako PWA funkcia nad 3 regiónmi (plná čiara) a výsledok orezávania $\phi(\tilde{\kappa}(x))$ ekvivalentný s κ (prerušovaná čiara)

Obr. 4.1: Ilustrácia vhodného nahradenia $\tilde{\kappa}$ PWA funkcie κ.

Inými slovami, ak je možné saturovaný región $\mathcal{R}_s$ odstrániť a následne kompletne prekryť rozšírením nesaturovaného regiónu $\mathcal{R}_n$, potom dosiahneme *podhodnotenie* pôvodných funkčných hodnôt. Tento krok je ilustrovaný na Obr. 4.1(b). Podobná argumentácia platí aj ak je región $\mathcal{R}_s$ saturovaný na maxime, pričom dosiahneme *nadhodnotenie* funkčnej hodnoty, ako je zobrazené na Obr. 4.1(c). Rozšírenie nesaturovaných regiónov sa pritom dosiahne odstránením stien, cez ktoré tieto regióny susedia so saturovanými regiónmi. Pre úplnosť dodávame, že takýto postup sa dá aplikovať aj pre vyššie dimenzie stavového a vstupného priestoru. Kompletný algoritmus je podrobne opísaný v Kvasnica a Fikar (2010b).

Označme ako R_{unsat} počet nesaturovaných regiónov pôvodnej funkcie κ, pričom v praxi máme $R_{\text{unsat}} \ll R$ (Kvasnica a Fikar, 2010b). Potom zložitosť funkcie $\tilde{\kappa}$, vyjadrená počtom jej regiónov $\tilde{R}$, v najlepšom prípade spĺňa $\tilde{R} = R_{\text{unsat}}$ a v priemere $\tilde{R} = 1.3R_{\text{unsat}}$. Dôsledkom je teda podstatné zníženie zložitosti, ktoré je priamoúmerné pomeru počtu nesaturovaných regiónov zákona riadenia κ k celkovému počtu regiónov. Ako sme ilustrovali na veľkej prípadovej štúdii v Kvasnica a Fikar (2010b), priemerná hodnota tohto pomeru pri uvažovaní 600 náhodných explicitných regulátoroch sa pohybovala v rozmedzí od 4 po 13 v závislosti od dimenzie. Úspešnosť dosiahnutia najlepšieho scenára (t.j. keď $\tilde{R} = R_{\text{unsat}}$) bola pritom v intervale od 60 do 98 percent.

4.2 Eliminácia saturovaných regiónov pomocou separácie

V práci Kvasnica a kol. (2011c) sme myšlienku eliminácie saturovaných regiónov ďalej vylepšili tak, že sa vytvorí modifikovaný zákon riadenia $\tilde{\kappa}(x)$, ktorého počet regiónov je vždy rovný počtu nesaturovaných regiónov pôvodnej funkcie κ, za predpokladu, že κ je spojitá funkcia a jej regióny sa neprekrývajú. Vtedy totiž platí $\mathcal{I}_{\max} \cap \mathcal{I}_{\min} \cap \mathcal{I}_{\text{unsat}} = \emptyset$ a teda

$$u^* = \kappa(x) = \begin{cases} F_i x + G_i & \text{ak } x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\text{unsat}}}, \\ \overline{u} & \text{ak } x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}, \\ \underline{u} & \text{ak } x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Predpokladajme, že $x \in \operatorname{dom}(\kappa)$ a zároveň $x \notin \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\text{unsat}}}$. V tomto prípade máme iba dve možnosti: buď $\kappa(x) = \underline{u}$ alebo $\kappa(x) = \overline{u}$. V štandardnom prístupe sa príslušná možnosť určí postupným prehľadávaním regiónov $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$ a $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$, čo je náročné na výpočtový čas ako i na operačnú pamäť (keďže je potrebné tieto regióny uchovávať v pamäti). Ak však nájdeme *separačnú funkciu*, ktorá striktne separuje množiny regiónov $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}} := \cup_{i \in \mathcal{I}_{\max}} \mathcal{R}_i$ od $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}} := \cup_{j \in \mathcal{I}_{\min}} \mathcal{R}_j$, potom môžeme na zjednodušenie funkcie κ použiť nasledovné tvrdenie, dôsledok ktorého je ilustrovaný na Obr. 4.2(a).

Tvrdenie 4.3 (Kvasnica a kol. (2011c)) *Ak existuje funkcia $p : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa $p(x) > 0$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{max}}$ a zároveň $p(x) < 0$ pre všetky $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{min}}$, potom zákon riadenia v tvare*

$$u^* = \tilde{\kappa}(x) = \begin{cases} K_i x + L_i & \text{ak } x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{unsat}}, \\ \overline{u} & \text{ak } p(x) > 0, \\ \underline{u} & \text{ak } p(x) < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

je pre všetky $x \in \operatorname{dom}(\kappa)$ ekvivalentný pôvodnému zákonu riadenia $u^* = \kappa(x)$.

Praktickosť Tvrdenia 4.3 leží vo fakte, že overenie, či $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$ (alebo $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$) sa nahrádza znamienkom funkcie p v bode x. Tým pádom je možné všetky saturované regióny kompletne odstrániť, čím sa šetrí potrebná pamäť a zrýchľuje sa vyhodnotenie funkcie $\tilde{\kappa}$. Postup implementácie modifikovaného zákona riadenia $\tilde{\kappa}(x)$ je potom nasledovný:

1. Najskôr zistíme, či sa x nachádza v niektorom z nesaturovaných regiónov $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\text{unsat}}}$. Ak áno, potom sa optimálny akčný zásah vypočíta priamo z $u^* = K_i x + L_i$, kde i označuje číslo regiónu obsahujúceho x.

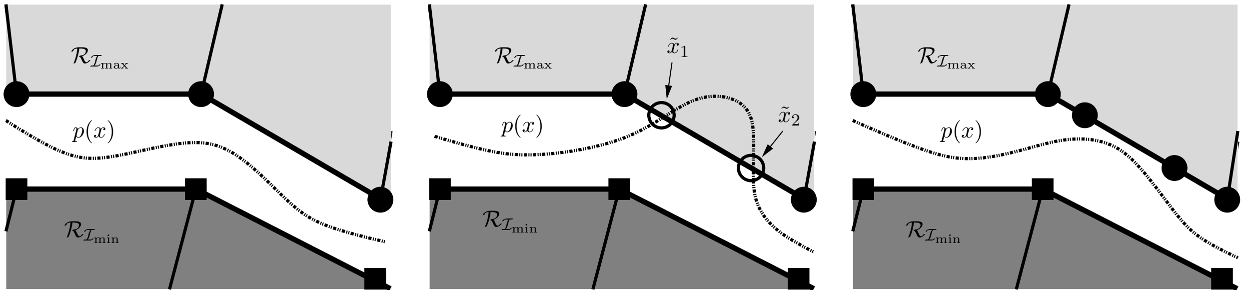
2. Ak $x \notin \mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\text{unsat}}}$, potom sa vyhodnotí funkcia $p(x)$ a jej znamienko určí, či $u^* = \overline{u}$ alebo $u^* = \underline{u}$.

Základnou úlohou je určenie takej separačnej funkcie $p(x)$, ktorá je dostatočne jednoduchá, aby jej vyhodnotenie zaberalo čo najmenej času a aby jej uloženie spotrebovalo čo najmenej pamäte. Teoretickou komplikáciou je pritom fakt, že množiny, ktoré sa snažíme separovať sú vo všeobecnosti nekonvexné[1].

Uvažujme separačnú funkciu v tvare polynómu vo viacerých premenných, t.j.

$$p(x) := \sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq \delta} \alpha_{i_1,\ldots,i_\delta} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \tag{4.5}$$

[1]Nekonvexnými sú pritom únie $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}} := \cup_{i \in \mathcal{I}_{\max}} \mathcal{R}_i$ resp. $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}} := \cup_{i \in \mathcal{I}_{\min}} \mathcal{R}_i$. Jednotlivé regióny $\mathcal{R}_i$ sú vždy konvexné polytopy podľa Vety 3.2.



(a) Striktná separácia vrcholov môže znamenať striktnú separáciu príslušných nekonvexných oblastí.

(b) Vo všeobecnosti však takýto záver neplatí. V tom prípade nájdeme body $\tilde{x}$, v ktorých je striktná separácia porušená.

(c) Pridaním narušiteľských bodov $\tilde{x}$ a opakovaným riešením (4.6) sa získa nový polynóm $p(x)$, ktorý sa opäž musí certifikovať pomocou hľadania $\tilde{x}$.

Obr. 4.2: Množiny $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$ a $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$ tvorené jednotlivými regiónmi v $\mathbb{R}^2$, vrcholy $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\max}}$ (kruhy) a $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\min}}$ (štvorce), polynomiálny separátor $p(x)$.

kde n je dimenzia stavového priestoru, δ označuje vopred zvolený rád polynómu a α_i sú jeho parametre. Výhodou polynomického tvaru je, že jeho koeficienty sa dajú nájsť riešením problému lineárneho programovania v tvare

$$
\begin{aligned}
\epsilon^* = \max_{\epsilon,\alpha_i} \quad & \epsilon && \text{(4.6a)}\\
\text{s.t.} \quad & p(v_i) \geq \epsilon, \quad \forall v_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\max}}, && \text{(4.6b)}\\
& p(v_j) \leq -\epsilon, \ \forall v_j \in \mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\min}}. && \text{(4.6c)}\\
& \epsilon > 0, && \text{(4.6d)}
\end{aligned}
$$

kde $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\max}}$ sú vrcholy regiónov $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$ a $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\min}}$ označuje vrcholy regiónov $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$. Pre fixnú hodnotu argumentu sú totiž ohraničenia (4.6b) a (4.6c) lineárne v α_i. Ak je problém (4.6) neriešiteľný, neexistuje striktná separácia množín $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$ a $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$. Uvažujme preto $\epsilon^* > 0$. Vo všeobecnosti pre $\delta > 1$ však separovateľnosť vrcholov ešte nezaručuje separovateľnosť príslušných množín, ako je dokumentované na Obr. 4.2(b). Preto musíme vykonať dodatočnú certifikačnú fázu, v ktorej hľadáme body $\tilde{x}$, v ktorých daný polynóm zasahuje do príslušnej oblasti, t.j.

$$
\tilde{x}_{i,k} = \{x \mid p(x) - f_{i,k}x + g_{i,k} = 0, \ x \in \mathcal{R}_i\}, \tag{4.7}
$$

kde $f_{i,k}$ a $g_{i,k}$ označujú parametre i-tého definujúceho polpriestoru k-tého regiónu. Tieto "narušiteľké" body sa dajú potom získať riešením problému nelineárneho programovania. Ak $\tilde{x} = \emptyset \ \forall i, k$, potom máme garanciu, že $p(x)$ je validným striktným separátorom množín $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\max}}$ a $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\min}}$. V opačnom prípade sa pridajú body $\tilde{x}_{i,k}$ do zoznamu bodov $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\max}}$ resp. $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_{\min}}$ a celý postup sa opakuje, dokým $\tilde{x} \neq \emptyset$, viď Obr. 4.2(c).

Aplikácia tohto postupu na veľké množstvo náhodne vygenerovaným explicitných regulátorov ukázala nasledovné zistenia:

- na separáciu postačujú relatívne nízke rády polynómov s $\delta \leq 5$,

- faktor redukcie zložitosti sa pohyboval v intervale od 1.8 po 31,
- pamäťová a výpočtová kapacita potrebná na vyhodnotenie $p(x)$ v (4.4) je zanedbateľná,
- čas potrebný na zostrojenie separátora $p(x)$ sa pohybuje rádovo v sekundách aj pre veľmi komplikované regulátory s rádovo desaťtisíc regiónmi.

4.3 Stabilizujúca polynomiálna aproximácia explicitného prediktívneho riadenia

Ak pripustíme určitú stratu optimálnosti pri nahradení pôvodného explicitného regulátora $u^* = \kappa(x)$ inou funkciou $\tilde{\kappa}$, potom sme v Kvasnica a kol. (2008) a Kvasnica a kol. (2011b) ukázali, že za určitých miernych podmienok je možné eliminovať *všetky* regióny PWA funkcie κ. Vzniká suboptimálny, ale pritom stabilizujúci regulátor $u^* = \tilde{\kappa}(x)$, kde $\tilde{\kappa}$ je polynóm vo viacerých premenných v tvare

$$\tilde{\kappa}(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_\delta x^\delta, \tag{4.8}$$

kde δ je vopred určený rád polynómu a x^i je umocnenie jednotlivých prvkov vektora $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, t.j. $x^i = [x_1^i,\ x_2^i,\ \ldots,\ x_{n_x}^i]^T$. Úlohou je nájsť maticové koeficienty $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tak, aby boli splnené tri základné požiadavky:

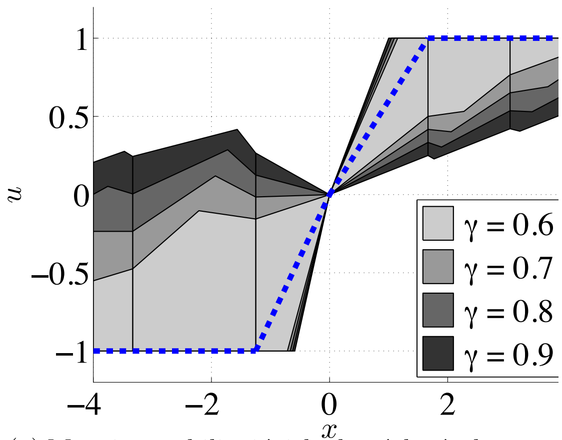
1. $\tilde{\kappa}(x)$ asymptoticky stabilizuje daný PWA systém do počiatku,
2. $\tilde{\kappa}(x)$ zaručuje rekurzívnu riešiteľnosť, t.j. splnenie ohraničení na stavy a akčné zásahy,
3. $\tilde{\kappa}(x)$ aproximuje pôvodný zákon riadenia $\kappa(x)$.

Ak takýto polynomický regulátor dokážeme nájsť, jeho implementácia v prostredí reálneho času je extrémne jednoduchá. V prvom rade, keďže hľadáme jediný spojitý polynóm, jeho pamäťová zložitosť nezávisí od počtu regiónov pôvodného optimálneho regulátora κ. Pre rády $\delta \leq 9$ sa pamäťový odtlačok takéhoto polynómu pohybuje v okolí 100 bajtov. Druhou výhodou je rýchle získanie hodnoty akčného zásahu, ktoré si vyžaduje iba evaluáciu daného polynómu v konkrétnom stave x.

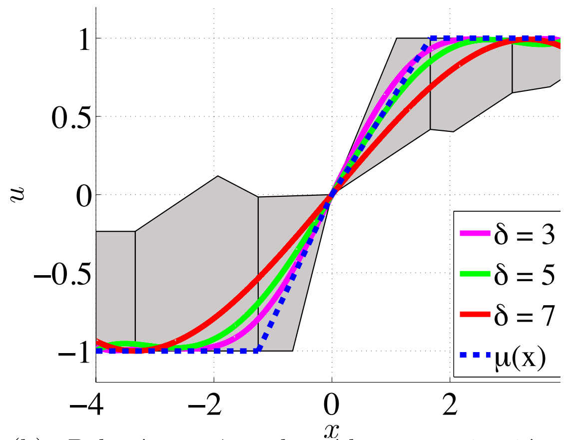
Predpokladajme, že je daná PWA Ljapunovova funkcia V, ktorá certifikuje, že $u^* = \kappa(x)$ je stabilizujúci zákon riadenia. Potom pre ľubovolné $0 \leq \gamma < 1$ pomocou

$$\mathcal{S}(V, \gamma) := \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ u \end{smallmatrix}\right] \;\middle|\; u \in \mathcal{U},\ x \in \Omega,\ f_{\text{PWA}}(x, u) \in \Omega,\ V(f(x, u)) \leq \gamma V(x) \right\}, \tag{4.9}$$

označujeme množinu stabilizujúcich akčných zásahov, ktoré garantujú splnenie ohraničení a minimálny pokles hodnoty Ljapunovej funkcie. Ω tu pritom označuje invariantnú množinu, t.j. $\Omega = \{x \mid V(x) \leq \epsilon\}$ pre ľubovolné $\epsilon > 0$. Funkcia V a množina Ω sa dajú získať buď riešením vhodne zvoleného tvaru optimalizačného problému (3.7), ako bolo ukázané



(a) Množina stabilizujúcich akčných zásahov pre rôzne hodnoty parametra γ. Pre $\gamma \to 0$ tieto množiny "kolabujú" na optimálny stabilizujúci regulátor κ (modrá prerušovaná čiara).



(b) Polynómy rôznych rádov aproximujúce optimálny zákon riadenia a zároveň spĺňajúce inklúziu (4.10) pre množinu $\mathcal{S}(V, 0.7)$.

Obr. 4.3: Príklad stabilizujúcich množín a aproximácie optimálneho riadenia polynómom.

v Baotić a kol. (2006), alebo dodatočne podľa postupu v Johansson (2003); Grieder a kol. (2005).

Pre zvolený po častiach afinný typ systému a Ljapunovovej funkcie sa dá množina $\mathcal{S}(V,\gamma)$ zostrojiť štandardnými prístupmi analýzy dosiahnuteľnosti (Christophersen, 2007, Kap. 10.4) a reprezentovať ako vo všeobecnosti nekonvexná únia polytopov $\mathcal{S}(V,\gamma) = \cup_i \mathcal{S}_i$, kde $\mathcal{S}_i$ sú polytopy v $x-u$ priestore. Počet týchto polytopov je pritom priamoúmerný počtu regiónov optimálneho zákona riadenia κ. Ilustračné zobrazenie množiny $\mathcal{S}(V,\gamma)$ pre rôzne hodnoty parametra γ je uvedené na Obr. 4.3(a).

Veta 4.4 (Christophersen (2007)) *Nech je daná množina $\mathcal{S}(V,\gamma)$. Potom ľubovolný regulátor $u = \tilde{\kappa}(x)$ spĺňajúci*

$$\left[\begin{smallmatrix} x \\ \tilde{\kappa}(x) \end{smallmatrix} \right] \in \mathcal{S}(V,\gamma) \tag{4.10}$$

asymptotický stabilizuje systém $x^+ = f_{PWA}(x,\, \tilde{\kappa}(x))$ do počiatku pre ľubovolné $x \in \Omega$.

Veta 4.4 predstavuje základný teoretický koncept prezentovanej aproximačnej schémy, kde hľadáme polynomický regulátor v tvare (4.8) tak, aby bol pre každé prípustné x "obsiahnutý" v množine $\mathcal{S}(V,\gamma)$. Netriviálnosť riešenia tohto problému vyplýva z faktu, že inklúzia (4.10) musí platiť *pre všetky* $x \in \Omega$, a nielen pre niektoré stavy (napr. pre vrcholy jednotlivých polytopov tvoriacich množinu $\mathcal{S}$). Ďalšou komplikáciou je nekonvexnosť tejto množiny. Ilustrácia polynomiálnej aproximácie optimálneho zákona riadenia polynómami rôznych rádov je zobrazená na Obr. 4.3(b).

V Kvasnica a kol. (2008) sme ukázali, že problém nájdenia polynomického regulátora spĺňajúceho inklúziu (4.10) pre všetky $x \in \Omega$ sa dá formulovať ako nájdenie rozkladu polynómov na sumy štvorcov ich monomiálov (Parrilo, 2004). Kvôli veľkej výpočtovej zložitosti je však táto výpočtová metóda aplikovateľná iba na triviálne prípady kde počet polypov tvoriacich $\mathcal{S}(V, \gamma)$ nepresahuje 150 (Kvasnica a kol., 2010b). V Kvasnica a kol. (2011b) sme preto navrhli efektívnejší spôsob, založený na riešení problému lineárneho programovania. Tento prístup je aplikovateľný na oveľa väčšiu škálu problémov aj vo vyšších dimenziách.

Analýza aplikácie takéhoto prístupu na veľký počet náhodne generovaných scenárov ukázala nasledovné závery:

- stabilizujúci polynomický regulátor (4.8) sa dá efektívne nájsť pre explicitné prediktívne regulátory rádovo s tisíckou regiónov,
- hlavnou výpočtovou prekážkou je veľký počet ohraničení vo výslednom probléme lineárneho programovania, ktorý sa často pohybuje rádovo v miliónoch,
- strata optimálnosti v dôsledku aproximácie sa pohybovala v rozmedzí od 12 do 80 percent,
- v dôsledku faktu, že Veta 4.4 je iba postačujúcou podmienkou spätnoväzbovej stability sa celková úspešnosť nájdenia polynomickej aproximácie pohybovala na úrovni 60 %,
- opísaný postup je aplikovateľný aj na nájdenie stabilizujúceho polynomického regulátora pre lineárne systémy.

5 Výpočtové nástroje

5.1 Syntéza a implementácia explicitného prediktívneho riadenia

V práci Kvasnica a kol. (2004b) bol predstavený programový balík *Multi-Parametric Toolbox* (MPT), ktorý sa dočkal významnej revízie v Kvasnica (2009); Kvasnica a Fikar (2010a); Kvasnica a kol. (2010c). Ako už samotný jeho názov napovedá, ide o toolbox určený na riešenie problémov parametrického programovania aplikovaných primárne na úlohy prediktívneho riadenia. Toolbox umožňuje jednoduché a pohodlné definovanie problémov prediktívneho riadenia pre lineárne a hybridné systémy, získanie explicitných riešení takýchto úloh, ako i následnú verifikáciu prediktívnych regulátorov. Naviac toolbox automaticky generuje spustiteľný kód explicitných prediktívnych regulátorov, čo dovoľuje ich priame nasadenie v prostredí reálneho času. Toolbox je dostupný pod open-source licenciou zo stránky `http://control.ee.ethz.ch/~mpt`, pričom od roku 2004 bolo zaznamenaných viac ako 25000 stiahnutí. Jednotlivé funkcie toolboxu a spôsob jeho použitia sú prehľadne dokumentované v Kvasnica (2009). V tejto kapitole sa obmedzíme na ilustráciu najnovších rozšírení, ktoré sú rozdelené do dvoch kategórií.

5.1.1 Formulovanie a riešenie zložitých úloh prediktívneho riadenia

Pri návrhu prediktívneho riadenia pre reálne aplikácie sa často stretávame s požiadavkou na špecifický tvar riešeného optimalizačného problému. Preto bola do balíka MPT pridaná možnosť ľubovolného rozšírenia základného problému (3.7) tak, aby bolo toto rozšírenie jednoducho definovateľné a riešiteľné. Hlavnou výhodou je pritom fakt, že užívateľ sa môže plne koncentrovať na definíciu problému, zatiaľ čo MPT sa stará o výpočtovú stránku. Výsledkom je pritom štandardný prediktívny regulátor v tvare objektu, ktorý sa dá ďalej spracovať (napr. vo forme generovania spustiteľného kódu opísaného v ďalšej podkapitole).

Táto nová vlastnosť, podrobne dokumentovaná v Kvasnica (2009); Kvasnica a Fikar (2010a) využíva na definíciu optimalizačného problému modelovací jazyk YALMIP (Löfberg, 2004). V MPT pritom užívateľ najskôr vytvorí "kostru" optimalizačného problému, ekvivalentnú zápisu (3.7). Potom použitím jednoduchých jazykových konštrukcií môže pridať vlastné ohraničenia tak, aby dosiahol požadovanú formuláciu. Príklady použitia zahŕňajú napríklad:

- pridanie ohraničení na koncový predikovaný stav vo forme pevného terminálneho stavu $x_N = x_f$, prípadne terminálnej množiny $x_N \in \mathcal{X}_f$, ktorá môže byť aj nekonvexná,
- použitie časovo-premenlivých ohraničení na stavy, akčné zásahy a výstupy,
- pridanie move-blockingu na zníženie počtu stupňov voľnosti,
- definícia ohraničení spôsobujúcich kontraktivitu systému a tým pádom spätnoväzbovú stabilitu,

- zavedenie logických ohraničení vo forme implikácií ($\Rightarrow$) a ekvivalencií ($\Leftrightarrow$).

Po vhodnom rozšírení základnej kostry optimalizačného problému o užívateľské ohraničenia následne tento modifikovaný zápis užívateľ posunie balíku MPT, ktorý zostrojí jeho explicitné riešenie. S týmto riešením môže potom užívateľ ďalej pracovať, napr. overiť jeho stabilizujúce vlastnosti, overiť jeho výkonnosť prostredníctvom simulácií, prípadne ho priamo exportovať do zvolenej hardvérovej platformy.

5.1.2 Generovanie spustiteľného kódu pre explicitné prediktívne regulátory

V explicitnom prediktívnom riadení, tak, ako bolo opísané v Kapitole 3.3 je cieľom nájdenie explicitného tvaru zákona riadenia $u^* = \kappa(x)$, kde κ je PWA funkcia. Implementácia takéhoto zákona riadenia si vyžaduje vyhodnotenie funkcie κ, čo sa najčastejšie realizuje postupným prehľadávaním regiónov tvoriacich túto funkciu. V práci Kvasnica a kol. (2010c) sme podrobne demonštrovali, že najnovšia verzia balíka MPT dokáže takýto prehľadávací algoritmus automaticky vytvoriť vo forme kódu v jazyku C/C++. Od užívateľa sa pritom nevyžadujú žiadne znalosti tohto programovacieho jazyka. Následné prevedenie prehľadávacieho algoritmu na cieľové implementačné zariadenie sa dá realizovať prostredníctvom Real-Time Workshopu (RTW). Užívateľ najskôr vytvorí v balíku Simulink vhodnú schému, do ktorej pridá blok MPT regulátora. Pri následnej aktivácii RTW sa potom celá schéma automaticky skompiluje a prehrá sa na podporovanú hardvérovú platformu. Alternatívne MPT poskytuje možnosť exportu do "čistého" C-kódu, ktorý nie je viazaný na RTW a dá sa preto pripojiť k ľubovolnej aplikácii.

Naviac balík MPT v najnovšej verzii podporuje export prediktívnych regulátorov do natívneho formátu podporovaného širokou škálou programovateľných logických regulátorov (Programmable Logic Controller, PLC). V tomto prípade toolbox najskôr prevedie opis PWA funkcie κ na vhodnú dátovú štruktúru, ktorá je následne prepojená s prehľadávacím algoritmom. Tento je implementovaný v jazyku Ladder Logic, ktorý predstavuje štandard v programovaní PLC.

5.2 Optimalizačný prístup k modelovaniu PWA systémov

V práci Kvasnica a kol. (2011d) bol predstavený výpočtový nástroj *Autoprox*, čo je toolbox ná automatickú tvorbu po čiastkach afinných hybridných aproximácií ľubovolných nelineárnych funkcií. Problém, ktorý riešime, je nasledovný: je daný model nelineárneho systému $x^+ = f(z)$, kde $z = (x, u)$ a $f(\cdot)$ je nelineárne vektorové pole, ktorého analytický tvar je známy. Naviac predpokladáme, že prípustné hodnoty stavov a akčných zásahov ležia v množinách $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, resp. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$. Takýto systém chceme aproximovať PWA modelom $x^+ = \tilde{f}(z)$, kde $\tilde{f}$ je po častiach afinná funkcia, t.j.

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} A_1 z + c_1 & \text{ak } z \in \mathcal{D}_1 \\ & \vdots \\ A_{n_L} z + c_{n_L} & \text{ak } z \in \mathcal{D}_{n_L}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Model (5.1) je pritom iba kompaktnou reprezentáciou všeobecného PWA opisu (3.5). Úlohou je nájsť PWA aproximáciu $\tilde{f}$ s vopred určeným počtom regiónov n_L tak, aby bola minimalizovaná aproximačná chyba

$$e_{\text{aprx}} := \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{U}} (f(z) - \tilde{f}(z))^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}u. \tag{5.2}$$

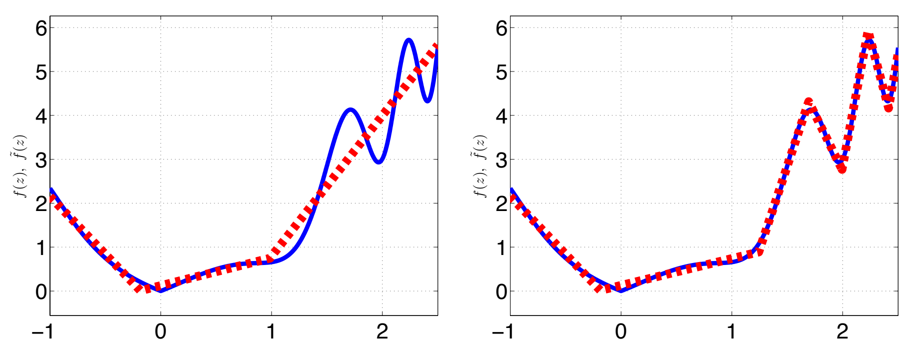
Uvažujme najskôr scenár, kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $\operatorname{dom}(f) = [\underline{z}, \overline{z}]$. Potom sa optimálna PWA aproximácia dá nájsť riešením nasledovného optimalizačného problému:

$$\min_{a_i, c_i, r_i} \quad \sum_{i=1}^{n_L} \Big(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \big(f(z) - (a_i z + c_i)\big)^2 \, \mathrm{d}z \Big) \tag{5.3a}$$

$$\text{s.t.} \quad \underline{z} \le r_1 \le \cdots \le r_{n_L - 1} \le \overline{z}, \tag{5.3b}$$

$$a_i r_i + c_i = a_{i+1} r_i + c_{i+1}, \; i = 1, \ldots, n_L - 1, \tag{5.3c}$$

kde r_i vyjadrujú hranice jednotlivých regiónov v tvare $\mathcal{D}_i = [r_{i-1}, r_i]$ s $r_0 = \underline{z}$ a $r_{n_L} = \overline{z}$. Ohraničenie (5.3b) pritom garantuje, že nájdeme neprekrývajúce sa regióny (viď Definíciu 3.1). Výsledná PWA aproximácia bude naviac spojitá vďaka (5.3c). Úloha (5.3) je problémom nelineárneho programovania v premenných r_i, a_i a c_i a jej riešenie sa dá nájsť štandardnými metódami garantujúcimi globálnu optimálnosť (Adjiman a kol., 1996; Papamichail a Adjiman, 2004; Chachuat a kol., 2006). Príklad optimálnej PWA aproximácie funkcie $f(z) = |z| + 0.5z^2 - \sin(z^3)$ je znázornený na Obr. 5.1.

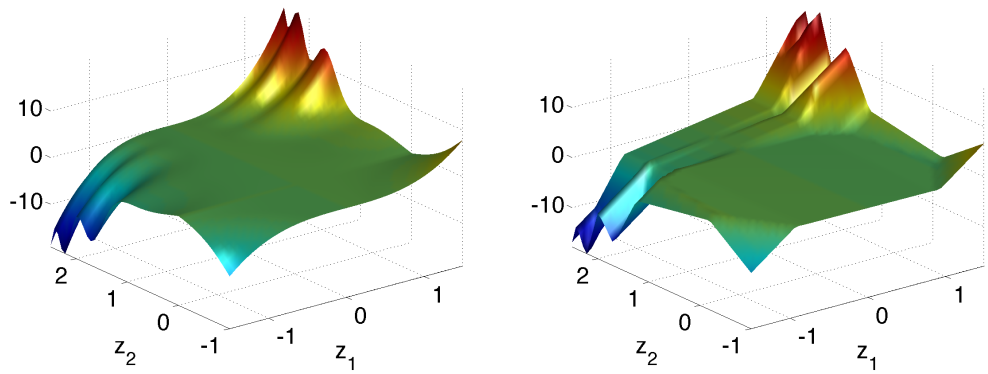


(a) PWA aproximácia s $n_L = 3$ regiónmi.

(b) PWA aproximácia s $n_L = 7$ regiónmi.

Obr. 5.1: Graf funkcie $f(z) = |z| + 0.5z^2 - \sin(z^3)$ na intervale $[-1, 2.5]$ (modrá čiara) a optimálna PWA aproximácia $\tilde{f}(z)$ (červená prerušovaná čiara).

Aproximácia viacrozmerných funkcií sa dá redukovať na sériu aproximácií jednorozmerných funkcií za predpokladu, že funkcia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je separovateľná, t.j. keď sa dá písať v tvare $f(z_1, \ldots, z_n) = f_1(z_1) + \cdots + f_n(z_n)$. Uvažujme pre názornosť funkciu $f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ s $\operatorname{dom}(f) = [\underline{z}_1, \overline{z}_1] \times [\underline{z}_2, \overline{z}_2]$. Zavedením substitúcií $y_1 = (z_1 + z_2)$ a $y_2 = (z_1 - z_2)$ je jednoducho overiteľné, že platí $1/4(y_1^2 + y_2^2) = z_1 z_2$. Funkcie $f_1(y_1) = y_1^2$ a $f_2(y_2) = y_2^2$ sú pritom iba funkciami jednej premennej a preto môžeme ich respektívne



(a) Graf funkcie $f(z_1, z_2)$.

(b) PWA aproximácia $\tilde{f}(z_1, z_2)$

Obr. 5.2: Optimálna PWA aproximácia funkcie $f(z_1, z_2) = f_1(z_1)f_2(z_2)$ s $f_1(z_1) = z_1^3$ a $f_2(z_2) = |z_2| + 0.5z_2^2 - \sin{(z_2)}^3$ na doméne $[-1.5,\ 1.5] \times [-1,\ 2.5]$.

aproximácie $\tilde{f}_1(y_1) \approx y_1^2$ a $\tilde{f}_2(y_2) \approx y_2^2$ získať riešením problému (5.3). Výsledná PWA aproximácia $\tilde{f}(z_1, z_2) \approx f(z_1, z_2)$ potom nadobúda tvar

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = {}^1\!/\!{}_4(\tilde{f}_{y_1}(z_1 + z_2) - \tilde{f}_{y_2}(z_1 - z_2)). \tag{5.4}$$

Rovnaký prístup sa dá použiť na získanie optimálnych aproximácií ľubovoľných separovateľných nelineárnych funkcií bez ohľadu na dimenziu. Technické detaily sú podrobne opísané v Kvasnica a kol. (2011d). Príklad aproximácie funkcie $f(z_1, z_2) = f_1(z_1)f_2(z_2)$ s $f_1(z_1) = z_1^3$ a $f_2(z_2) = |z_2| + 0.5z_2^2 - \sin{(z_2)}^3$ je na Obr. 5.2.

Balík *Autoprox* sprístupňuje vyššie uvedenú procedúru všeobecnej verejnosti vo forme matlabovského toolboxu, ktorý je šírený pod open-source licenciou zo stránky projektu `http://www.kirp.chtf.stuba.sk/~sw/`. Vstupom do toolboxu je analytický tvar nelineárnej funkcie f a počet aproximačných regiónov. Toolbox pritom sám rozozná, či ide o aproximáciu všeobecných funkcií, alebo o aproximáciu dynamických systémov. Výstupom z toolboxu je PWA model, buď v tvare internej dátovej štruktúry, alebo vo forme ekvivalentného zápisu v modelovacom jazyku HYSDEL (Torrisi a Bemporad, 2002). To dáva používateľovi možnosť ďalej model ručne upravovať a dolaďovať, ako i použiť ho na syntézu riadenia. Toolbox taktiež poskytuje grafické užívateľské rozhranie, ktoré sprehľadňuje a zrýchľuje definovanie vstupných dát, predovšetkým pri aproximácii zložitých funkcií vo viacerých rozmeroch.

6 Záver

Predložená habilitačná práca mapuje hlavné prínosy autora v oblasti nasadenia prediktívneho riadenia na platformách s limitovaným výpočtovým výkonom a pamäťou. Hlavným prvkom na dosiahnutie tohto cieľa je parametrické riešenie optimalizačného problému, čo vedie na explicitný zákon riadenia vo forme po častiach afinnej funkcie κ. Takúto vlasnosť nadobúda, ak je predikčný model lineárny alebo hybridný. V poslednom čase sa však do popredia dostáva otázka, či je možné takého explicitné riešenia zostrojiť aj pre všeobecné nelineárne modely. Prvé náznaky sa objavili v prácach Fotiou a kol. (2006); Bates a kol. (2011), kde bolo získané explicitné riešenie pre špeciálny tvar polynomických predikčných modelov. Následná implementácia takýchto riešení si však vyžaduje hľadanie koreňov polynómu, čo je problematické v prostredí reálneho času. Alternatívu predstavujú prístupy založené na rozdelení priestoru parametrov na hyperboxy s následnou lokálnou linearizáciou pôvodného nelineárneho problému v každom boxe (Grancharova a Johansen, 2009). Nevýhodou je suboptimálnosť výsledného riadenia, ako i jeho vysoká zložitosť. Vo všeobecnosti sa v tejto oblasti neočakáva zásadný pokrok, keďže pre nelineárne systémy je už aj priebežné nasadenie prediktívneho riadenia pomerne zložité z praktického ako i teoretického hľadiska.

Na zrýchlenie zostrojenia explicitného riešenia bola v Kapitole 3.4 predstavená reformulácia problému na problém minimalizácie času. Iteračný spôsob jeho zostrojenia založený na riešení jednokrokových problémov naviac umožňuje zobrať do úvahy neurčitosti v predikčných modeloch, čo vedie na robustný prediktívny regulátor. Otázka robustnosti má pritom v praxi zásadný význam. Robustnosť vzhľadom na aditívne poruchy je v literatúre dostatočne rozpracovaná, za všetky spomeňme práce Raković a kol. (2004); Diehl a Björnberg (2004); Lazar a Heemels (2006); Wang a kol. (2009); Limon a kol. (2010). Väčším problémom sa javí vysporiadanie sa s parametrickými neurčitosťami, predovšetkým pri použití hybridných predikčných modelov. Napriek tomu aj v tejto oblasti existuje bohatý výskum (Raković a kol., 2007; Artstein a Raković, 2008; Besselmann a kol., 2008b,a; Kvasnica a kol., 2009a; Mayne a kol., 2009; Raković a Barić, 2010). V súčasnosti sa ako najperspektívnejší javí smer stochastického prediktívneho riadenia, kde poruchy a neurčitosti sú vyjadrené pravdepodobnostnými rozloženiami. Ako bolo ukázané napr. v Kouvaritakis a kol. (2004); Couchman a kol. (2006); van den Boom a kol. (2007), takto formulované prediktívne riadenie má veľa výhod v praxi. Otvorenou otázkou ostáva syntéza explicitných riešení takýchto úloh, kde hlavným problém vo všeobecnosti predstavuje nekonvexnosť pravdepodobnostných ohraničení.

Otázkou, ktorej autor prikladá najväčšiu dôležitosť do budúcnosti, je samotná povaha explicitných regulátorov v tom zmysle, že zákon riadenia sa vypočíta iba raz pre všetky prípustné počiatočné podmienky a jeho následná zmena za behu riadiaceho systému nie je možná. To znamená, že je vylúčená napríklad zmena ladiacich parametrov (váhové matice Q_N, Q_x a Q_u v (3.7a)), ako i zmena predikčného modelu. Prvý krok k získaniu explicitného regulátora laditeľného "za behu" bol ukázaný v Barić a kol. (2005), kde autori získali explicitné riešenie, ktoré je okrem stavov naviac funkciou váhového koeficienta Q_u. Logickým pokračovaním by teda malo byť hľadanie "úplnej" parametrizácie, t.j. získanie κ ako funkcie x, Q_u, Q_x, ako i Q_N. Podobnou témou je získanie takého explicitného zákona riadenia, ktorý dovolí za behu zmeniť predikčný model, čo by viedlo k syntéze "univerzálneho" regulátora. Na vyriešenie tejto úlohy sa ako najperspektívnejšie javí použitie Brunovského kanonickej formy (Hermida-Alonso a kol., 1996), ktorá dovoľuje vyňať časovo-premenlivé parametre systému z predikčného problému a presunúť ich do stavovej spätnej väzby. Hlavnou komplikáciou je pritom nelinearita výsledného zákona riadenia.

Na dosiahnutie implementovateľnosti explicitných regulátorov v prostredí tvrdých výpočtových a pamäťových ohraničení bola v Kapitole 4 predstavená trojica metód, ktorá dodatočne znižuje zložitosť funkcie κ jej nahradením jednoduchšou funkciou. Pri takomto nahradení zohrávajú hlavnú úlohu geometrické vlastnosti PWA funkcií, menovite fakt, že veľká časť regiónov takýchto funkcií býva v praxi asociovaná so saturovaným akčným zásahom. Metódy v podkapitolách 4.1 a 4.2 takéto regióny kompletne odstraňujú a nahrádzajú buď predĺžením nesaturovaných regiónov, alebo priradením vhodnej separačnej funkcie. V oboch prípadoch dochádza k podstatnému zníženiu zložitosti, nezriedka presahujúcemu faktor 10. Metóda v podkapitole 4.3 ide ešte ďalej a eliminuje všetky regióny danej PWA funkcie. Využíva sa pritom voľnosť Ljapunovej funkcie, čo dovoľuje zostrojiť množinu stabilizujúcich regulátorov pre daný hybridný systém s ohraničeniami. Následne sa hľadá jednoduchý regulátor v tvare polynómu tak, aby bol kompletne obsiahnutý v tejto oblasti. Práve tento smer patrí medzi najperspektívnejšie, keďže získaný regulátor je čo sa týka pamäťových a výpočtových nárokov porovnateľný so štandardnými PI/PID regulátormi.

Hoci metódy dokumentované v Kapitole 4 vedú k zásadnému, rádovo desaťnásobnému zníženiu zložitosti explicitného prediktívneho riadenia, sú to metódy dodatočného znižovania zložitosti. Prvoradou teoretickou otázkou v tomto smere je formulovať samotný problém prediktívneho riadenia tak, aby sa hneď získalo jednoduché riešenie. Ako sme videli v Kap. 4.1 a 4.2, vhodným odstránením saturovaným regiónov sa nijako nemení optimálnosť zákona riadenia. Otvorenou otázkou ostáva, ako pôvodný optimalizačný problém riešiť tak, aby tieto regióny nemuseli v explicitnom riešení vôbec vzniknúť. Veľmi zaujímavou sa tiež javí analógia medzi znižovaním zložitosti explicitného prediktívneho riadenia a štandardnou otázkou kompresie dát ako takou. Prvý krok týmto smerom sme podnikli v Szücs a kol. (2011) kde sa zníženie pamäťovej náročnosti dosiahne aplikáciou Huffmanovho kódovania. Ak budeme regióny tvoriace explicitný zákon riadenia interpretovať ako grafické objekty, potom sa ďalším perspektívnym smerom javí využitie fraktálovej kompresie (Lu, 1993).

V Kapitole 5 boli predstavené dva softvérové nástroje, balík Multi-Parametric Toolbox a balík Autoprox. Prvý z nich slúži na pohodlné formulovanie a vyriešenie úloh prediktívneho riadenia pre lineárne a hybridné predikčné modely. Dôraz je pritom kladený na ucelenosť nástroja tak, aby zabezpečoval celý sled úloh typických v riadení od modelovania, cez syntézu riadenia, cez jeho overenie až po implementáciu. Nástroj Autoprox je vhodným doplnkom balíka MPT v tom zmysle, že je schopný automaticky vygenerovať optimálnu hybridnú aproximáciu daného nelineárneho procesu, ktorá sa dá následne spracovať balíkom MPT.

Literatúra

C. S. Adjiman, I. P. Androulakis, C. D. Maranas a C. A. Floudas. A global optimization method, αBB for process design. *Computers and Chemical Engineering*, 20:419–424, 1996.

Alessandri, Angelo, Sacone, Simona, Siri a Silvia. Modelling and optimal receding-horizon control of maritime container terminals. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 6(1):109–133, 2007. ISSN 1570-1166.

Z. Artstein a S. V. Raković. Feedback and invariance under uncertainty via set-iterates. *Automatica*, 44(2):520–525, 2008.

B. Bank, J. Guddat, D. Klatte, B. Kummer a K. Tammer. *Non-Linear Parametric Optimization*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

M. Baotić. *Optimal Control of Piecewise Affine Systems – a Multi-parametric Approach*. Dr. sc. thesis, ETH Zurich, Zurich, Switzerland, 2005.

M. Baotic, F. Borrelli, A. Bemporad a M. Morari. Efficient On-Line Computation of Constrained Optimal Control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(5):2470–2489, 2008.

M. Baotić, F. J. Christophersen a M. Morari. Constrained Optimal Control of Hybrid Systems with a Linear Performance Index. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(12):1903–1919, 2006.

M. Barić, M. Baotić a M. Morari. On-line Tuning of Controllers for Systems with Constraints. V *Proc. of the Conf. on Decision & Control*, 8288–8293. Sevilla, Spain, 2005.

D. J. Bates, P. Rostalski, I. Fotiou, A. Beccuti a M. Morari. Numerical algebraic geometry for optimal control applications. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011.

A. Beccuti, S. Mariethoz, S. Cliquennois, S. Wang a M. Morari. Explicit Model Predictive Control of DC-DC Switched Mode Power Supplies with Extended Kalman Filtering. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 56(6):1864 – 1874, 2009.

R. E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.

A. Belloli, D. Niederberger, M. Morari a P. Ermanni. Structural Vibration Control via R-L Shunted Active Fiber Composites. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(3):275–287, 2007.

A. Bemporad a C. Filippi. Suboptimal explicit RHC via approximate multiparametric quadratic programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117(1):9–38, 2003.

A. Bemporad, L. Giovanardi a F. Torrisi. Performance driven reachability analysis for optimal scheduling and control of hybrid systems. Výskumná správa AUT00-15, Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, Switzerland, 2000a.

A. Bemporad a M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35(3):407–427, 1999.

A. Bemporad, M. Morari, V. Dua a E. N. Pistikopoulos. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38(1):3–20, 2002.

A. Bemporad, F. Torrisi a M. Morari. Optimization–based verification and stability characterization of piecewise affine and hybrid systems. V B. Krogh a N. Lynch, redaktori, *Hybrid Systems: Computation and Control*, diel 1790 zo série *Lecture Notes in Computer Science*, 45–58. Springer Verlag, 2000b.

A. Bemporad, F. Torrisi a M. Morari. Verification of mixed logical dynamical models — the batch evaporator process benchmark. Výskumná správa AUT00–04, Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, Switzerland, 2000c.

D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*, diel I. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2nd vydanie, 2000.

T. Besselmann, J. Löfberg a M. Morari. Explicit MPC for LPV systems. V *Conference on Decision and Control, CDC*. 2008a.

T. Besselmann, J. Löfberg a M. Morari. Explicit MPC for systems with linear parameter-varying state transition matrix. V *International Federation of Automatic Control World Congress*. 2008b.

G. Bitsoris. Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems. *Int. Journal of Control*, 47(6):1713–1726, 1988.

F. Blanchini. Set invarinace in control — A survey. *Automatica*, 35:1747–1767, 1999.

S. Bolognani, S. Bolognani, L. Peretti a M. Zigliotto. Design and implementation of model predictive control for electrical motor drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(6):1925–1936, 2009.

F. Borrelli. *Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems*, diel 290 zo série *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, 2003.

F. Borrelli, M. Baotić, A. Bemporad a M. Morari. Dynamic Programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. *Automatica*, 41:1709–1721, 2005.

F. Borrelli, A. Bemporad, M. Fodor a D. Hrovat. An MPC/Hybrid System Approach to Traction Control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3):541 – 552, 2006.

S. Boyd a L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

M. Branicky. *Studies in hybrid systems: modeling, analysis, and control*. Doktorská práca, LIDS–TH 2304, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1995.

R. Cagienard, P. Grieder, E. Kerrigan a M. Morari. Move Blocking Strategies in Receding Horizon Control. *Journal of Process Control*, 17(6):563–570, 2007.

S. D. Cairano, A. Bemporad, I. Kolmanovsky a D. Hrovat. Model predictive control of nonlinear mechatronic systems: an application to a magnetically actuated mass spring damper. V *2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid*. 2006.

E. F. Camacho a C. Bordons. *Model Predictive Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, London, 1999.

M. Cannon, V. Deshmukh a B. Kouvaritakis. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, 39:1487–1494, 2003.

B. Chachuat, A. B. Singer a P. I. Barton. Global methods for dynamic optimization and mixed-integer dynamic optimization. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 45(25):8373–8392, 2006.

F. J. Christophersen. *Optimal Control of Constrained Piecewise Affine Systems*, diel 359 zo série *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, 2007.

F. J. Christophersen, M. Baotić a M. Morari. Optimal Control of Piecewise Affine Systems: A Dynamic Programming Approach. V T. Meurer, K. Graichen a E. D. Gilles, redaktori, *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, diel 322 zo série *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 183–198. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2005. ISBN 3-540-27938-5.

F. J. Christophersen, M. Kvasnica, C. N. Jones a M. Morari. Efficient evaluation of piecewise control laws defined over a large number of polyhedra. V P. J. A. S. G. Tzafestas, redaktor, *Proceedings of the European Control Conference ECC '07*, 2360–2367. 2007.

D. Corona a B. De Schutter. Adaptive cruise control for a SMART car: A comparison benchmark for MPC-PWA control methods. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(2):365–372, 2008.

P. Couchman, M. Cannon a B. Kouvaritakis. Stochastic MPC with inequality stability constraints. *Automatica*, 42(12):2169–2174, 2006.

M. Cychowski, K. Szabat a T. Orlowska-Kowalska. Constrained model predictive control of the drive system with mechanical elasticity. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 56(6):1963–1973, 2009. ISSN 0278-0046.

S. L. de Oliveira Kothare a M. Morari. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 45(6):1052–1071, 2000.

B. De Schutter a T. Van den Boom. On model predictive control for max-min-plus-scaling discrete event systems. *Automatica*, 37(7):1049–1056, 2001.

D. den Hertog. *Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming: Algorithms and Complexity*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1994.

M. Diehl a Björnberg. Robust Dynamic Programming for Min-Max Model Predictive Control of Constrained Uncertain Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(12):2253–2257, 2004.

P. Falcone, F. Borrelli, J. Asgari, H. Tseng a D. Hrovat. Predictive active steering control for autonomous vehicle systems. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 15(3):566–580, 2007. ISSN 1063-6536.

G. Ferrari-Trecate. Hybrid Identification Toolbox (HIT). 2005. Available from `http://www-rocq.inria.fr/who/Giancarlo.Ferrari-Trecate/HIT_toolbox.html`.

G. Ferrari-Trecate, M. Muselli, D. Liberati a M. Morari. A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. V M. D. Benedetto a A. Sangiovanni-Vincentelli, redaktori, *Proc. 4th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, diel 2034 zo série *Lecture Notes in Computer Science*, 218–231. Springer-Verlag, 2001.

R. Findeisen, L. Biegler a F. Allgöwer, redaktori. *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2006. To appear.

A. Fleming, D. Niederberger, S. Moheimani a M. Morari. Control of Resonant Acoustic Sound Fields by Electrical Shunting of a Loudspeaker. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(4):689–703, 2007.

R. Fletcher a S. Leyffer. Numerical experience with lower bounds for MIQP branch–and–bound. *SIAM J. Optim.*, 8(2):604–616, 1998.

C. A. Floudas. *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization*. Oxford University Press, 1995.

I. Fotiou, P. Rostalski, P. Parrilo a M. Morari. Parametric Optimization and Optimal Control using Algebraic Geometry Methods. *International Journal of Control*, 79(11):1340–1358, 2006.

T. Gal a J. Nedoma. Multiparametric linear programming. *Management Science*, 18:406–442, 1972.

C. Garcia, D. Prett a M. Morari. Model predictive control: Theory and practive - a survey. *Automatica*, 25(3):335–348, 1989.

T. Geyer, G. Papafotiou a M. Morari. Hybrid Model Predictive Control of the Step-Down DC–DC Converter. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(6):1112–1124, 2008a.

T. Geyer, G. Papafotiou a M. Morari. Model Predictive Direct Torque Control — Part I: Concept, Algorithm and Analysis. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 56(6):1894–1905, 2009.

T. Geyer, F. Torrisi a M. Morari. Optimal complexity reduction of polyhedral piecewise affine systems. *Automatica*, 44(7):1728–1740, 2008b.

N. Giorgetti, G. Ripaccioli, A. Bemporad, I. Kolmanovsky a D. Hrovat. Hybrid model predictive control of direct injection stratified charge engines. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 11(5):499–506, 2006. ISSN 1083-4435.

A. Grancharova a T. A. Johansen. Computation, approximation and stability of explicit feedback min–max nonlinear model predictive control. *Automatica*, 45(5):1134–1143, 2009.

P. Grieder. *Efficient Computation of Feedback Controllers for Constrained Systems*. Doktorská práca, ETH Zurich, Automatic Control Laboratory, 2004.

P. Grieder, F. Borrelli, F. D. Torrisi a M. Morari. Computation of the constrained infnite time linear quadratic regulator. *Automatica*, 40:701–708, 2004a.

P. Grieder, M. Kvasnica, M. Baotic a M. Morari. Stabilizing low complexity feedback control of constrained piecewise affine systems. *Automatica*, 41, issue 10:1683–1694, 2005.

P. Grieder, M. Lüthi, P. A. Parrilo a M. Morari. Stability & feasibility of receding horizon control. V *Proc. of the European Control Conference*. Cambridge, UK, 2003.

P. Grieder, Z. Wan, M. Kothare a M. Morari. Two level model predictive control for the maximum control invariant set. V *American Control Conference*. Boston, Massachusetts, 2004b.

W. Heemels, J. Schumacher a S. Weiland. Linear complementarity systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(4):1234–1269, 2000.

W. P. M. Heemels, B. De Schutter a A. Bemporad. Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37(7):1085–1091, 2001.

M. Herceg, M. Kvasnica a M. Fikar. Minimum-time predictive control of a servo engine with deadzone. *Control Engineering Practice*, 2009.

J. A. Hermida-Alonso, M. P. Perez a T. Sanchez-Giralda. Brunovsky's canonical form for linear dynamical systems over commutative rings. *Linear Algebra and its Applications*, 131–147, 1996.

S. Hovland, K. E. Willcox a J. T. Gravdahl. Explicit MPC for large-scale systems via model reduction. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 31(4), 2008.

ILOG, Inc. *CPLEX 8.0 User Manual*. Gentilly Cedex, France, 2003. `http://www.ilog.fr/products/cplex/`.

L. Jianqiang, P. Hailong, L. Xin, H. Yuebang a C. Yong. Hybrid systems model and control of a small unmanned helicopter. V *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese*, 641–645. 2008.

T. Johansen a A. Grancharova. Approximate explicit constrained linear model predictive control via orthogonal search tree. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48:810–815, 2003.

M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems: A Computational Approach*, diel 284 zo série *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, 2003.

C. Jones a M. Morari. Approximate Explicit MPC using Bilevel Optimization. V *European Control Conference*. Budapest, Hungary, 2009.

C. N. Jones, E. C. Kerrigan a J. M. Maciejowski. Lexicographic Perturbation for Multiparametric Linear Programming with Applications to Control. *Automatica*, 2005. Submitted.

E. Kerrigan a J. Maciejowski. Soft constraints and exact penalty functions in model predictive control. V *Proc. UKACC International Conference (Control 2000)*. Cambridge, UK, 2000.

T. Keviczky, F. Borrelli, K. Fregene, D. Godbole a G. Balas. Decentralized receding horizon control and coordination of autonomous vehicle formations. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 16(1):19–33, 2008. ISSN 1063-6536.

B. Kouvaritakis, M. Cannon a V. Tsachouridis. Recent developments in stochastic MPC and sustainable development. *Annual Reviews in Control*, 28(1):23–35, 2004.

M. Kvasnica. *Efficient Software Tools for Control and Analysis of Hybrid Systems*. Doktorská práca, ETH Zurich, ETH Zurich, Physikstrasse 3, 8092 Zurich, Switzerland, 2008.

M. Kvasnica. *Real-Time Model Predictive Control via Multi-Parametric Programming: Theory and Tools*. VDM Verlag, Saarbruecken, 2009.

M. Kvasnica, F. J. Christophersen, M. Herceg a M. Fikar. Polynomial approximation of closed-form MPC for piecewise affine systems. V *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 3877–3882. Seoul, Korea, 2008.

M. Kvasnica a M. Fikar. Design and implementation of model predictive control using multi-parametric toolbox and yalmip. V *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, 999–1004. Yokohama, Japan, 2010a.

M. Kvasnica a M. Fikar. Performance-lossless complexity reduction in explicit mpc. V *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control 2010*, 5270–5275. 2010b.

M. Kvasnica, M. Fikar, Ľ. Čirka a M. Herceg. *Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control. Textbook*, kapitola Complexity Reduction in Explicit Model Predictive Control, 241–288. STU Bratislava - NTNU Trondheim, 2011a.

M. Kvasnica, P. Grieder a M. Baotić. Multi-Parametric Toolbox (MPT). 2004a. Available from `http://control.ee.ethz.ch/~mpt/`.

M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotic a M. Morari. Multi-Parametric Toolbox (MPT). V *Hybrid Systems: Computation and Control*, 448–462. 2004b.

M. Kvasnica a M. Herceg. HYSDEL 3.0. 2010. Available from `http://kirp.chtf.stuba.sk/~kvasnica/hysdel3/`.

M. Kvasnica, M. Herceg, Ľ. Čirka a M. Fikar. Robust Adaptive Minimum-Time Control of Piecewise Affine Systems. V *Conference on Decision and Control, CDC*. Shanghai, China, 2009a.

M. Kvasnica, M. Herceg, Ľ. Čirka a M. Fikar. Time-optimal control of takagi-sugeno fuzzy systems. V *Proceedings of the 10th European Control Conference*, 916–921. Budapest, Hungary, 2009b.

M. Kvasnica, M. Herceg, Ľ. Čirka a M. Fikar. Model predictive control of a CSTR: A hybrid modeling approach. *Chemical papers*, 64(3):301–309, 2010a.

M. Kvasnica, J. Löfberg a M. Fikar. Stabilizing polynomial approximation of explicit MPC. *Automatica*, 2011b. Accepted.

M. Kvasnica, J. Löfberg, M. Herceg, Ľ. Čirka a M. Fikar. Low-complexity polynomial approximation of explicit MPC via linear programming. V *Proceedings of the American Control Conference*, 4713–4718. Baltimore, USA, 2010b.

M. Kvasnica, I. Rauová a M. Fikar. Automatic code generation for real-time implementation of model predictive control. V *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, 993–998. Yokohama, Japan, 2010c.

M. Kvasnica, I. Rauová a M. Fikar. Simplification of explicit mpc feedback laws via separation functions. V *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, to appear. Milano, Italy, 2011c.

M. Kvasnica, A. Szücs a M. Fikar. Automatic derivation of optimal piecewise affine approximations of nonlinear systems. V *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, to appear. Milano, Italy, 2011d.

M. Lazar a W. Heemels. A New Dual-Mode Hybrid MPC Algorithm with a Robust Stability Guarantee. *Analysis and Design of Hybrid Systems 2006*, 2006.

R. Lazimy. Improved algorithm for mixed-integer quadratic programs and a computational study. *Mathematical Programming*, 32:100–113, 1985.

D. Limon, I. Alvarado, T. Alamo a E. Camacho. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*, 20(3):248–260, 2010.

D. Lingxun, D. Lihua a F. Heping. Hybrid time-optimal predictive control for mechanical systems with backlash nonlinearity. V *Mechtronic and Embedded Systems and Applications, 2008. MESA 2008. IEEE/ASME International Conference on*, 281–285. 2008.

J. Löfberg. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. V *Proc. of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan, 2004. Available from `http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/`.

G. Lu. Fractal image compression. *Signal Processing: Image Communication*, 5(4):327–343, 1993.

J. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, 2002.

A. Makhorin. *GLPK - GNU Linear Programming Kit*, 2001. `http://www.gnu.org/directory/libs/glpk.html`.

S. Mariethoz, M. Herceg a M. Kvasnica. Model Predictive Control of buck DC-DC converter with nonlinear inductor. V *IEEE COMPEL, Workshop on Control and Modeling for Power Electronics*. Zurich, Switzerland, 2008.

S. Mariethoz, U. Mäder a M. Morari. High-speed FPGA implementation of observers and explicit model predictive controllers. V *IEEE IECON, Industrial Electronics Conf.*. Porto, Portugal, 2009.

D. Mayne, S. Raković, R. Findeisen a F. Allgöwer. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case. *Automatica*, 45(9):2082–2087, 2009.

D. Mayne a W. Schroeder. Robust time-optimal control of constrained linear systems. *Automatica*, 33(12):2103–2118, 1997.

D. Q. Mayne a S. Raković. Model predicitive control of constrained piecewise-affine discrete-time systems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 13(3):261–279, 2003.

D. Q. Mayne, J. Rawlings, C. Rao a P. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.

E. Meadows a J. Rawlings. *Nonlinear Process Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

R. Möbus, M. Baotic a M. Morari. Multi-Object Adaptive Cruise Control. *Hybrid Systems: Computation and Control*, 2623:359–374, 2003.

M. Morari, M. Baotić a F. Borrelli. Hybrid systems modeling and control. *European Jornal of Control*, 9(2-3):177–189, 2003.

G. Naus, R. van den Bleek, J. Ploeg, B. Scheepers, R. van de Molengraft a M. Steinbuch. Explicit mpc design and performance evaluation of an acc stop-and-go. V *American Control Conference, 2008*, 224–229. 2008. ISSN 0743-1619.

A. Neumaier. Complete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction. V A. Iserles, redaktor, *Acta Numerica*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Cambridge University Press, 2004.

D. Niederberger, S. Behrens, A. Fleming, S. Moheimani a M. Morari. Adaptive Electromagnetic Shunt Damping. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 11(1):103–108, 2006.

D. Niederberger a M. Morari. An Autonomous Shunt Circuit for Vibration Damping. *Journal of Smart Materials and Structures*, 15:359–364, 2006.

G. Papafotiou, T. Geyer a M. Morari. A hybrid model predictive control approach to the direct torque control problem of induction motors. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 17:1572–1589, 2007.

G. Papafotiou, J. Kley, K. Papadopoulos, P. Bohren a M. Morari. Model Predictive Direct Torque Control — Part II: Implementation and Experimental Evaluation. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 56(6):1906–1915, 2009.

I. Papamichail a C. S. Adjiman. Global optimization of dynamic systems. *Computers and Chemical Engineering*, 28:403–415, 2004.

P. A. Parrilo. Sums of squares of polynomials and their applications. V *ISSAC '04: Proceedings of the 2004 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, 1–1. New York, NY, USA, 2004.

H. Peyrl, G. Papafotiou a M. Morari. Model Predictive Torque Control of a Switched Reluctance Motor. V *IEEE International Conference on Industrial Technology*. 2009.

S. Qin a T. Badgewell. An overview of industrial model predictive control technology. V *Chemical Process Control - V*, diel 93, no. 316, 232–256. AIChe Symposium Series - American Institute of Chemical Engineers, 1997.

S. Raković, E. Kerrigan, D. Mayne a K. Kouramas. Optimized robust control invariance for linear discrete-time systems: Theoretical foundations. *Automatica*, 43(5):831–841, 2007.

S. V. Raković a M. Barić. Parameterized Robust Control Invariant Sets for Linear Systems: Theoretical Advances and Computational Remarks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7):1599–1614, 2010. ISSN 0018-9286.

S. V. Raković, P. Grieder, M. Kvasnica, D. Q. Mayne a M. Morari. Computation of invariant sets for piecewise affine discrete time systems subject to bounded disturbances. V *IEEE Conference on Decision and Control*, 1418–1423. 2004.

J. B. Rawlings a K. R. Muske. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(10):1512–1516, 1993.

J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud a J. Papon. Model predictive heuristic control–application to industrial processes. *Automatica*, 14:413–428, 1978.

J. Roll, A. Bemporad a L. Ljung. Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming. *Automatica*, 40:37–50, 2004.

J. A. Rossiter a P. Grieder. Using interpolation to improve efficiency of multiparametric predictive control. *Automatica*, 41:637–643, 2005.

S. Rozgonyi a K. M. Hangos. Hybrid Modelling and Control of an Industrial Vaporizer. V *Proc. on the Intern. Conf. on Process Control*. Bratislava, Slovakia, 2005.

S. Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Springer-Verlag, 1999.

F. Scibilia, S. Olaru a M. Hovd. Approximate explicit linear MPC via delaunay tessellation. V *Proceedings of the 10th European Control Conference*. Budapest, Hungary, 2009.

P. O. M. Scokaert, D. Q. Mayne a J. B. Rawlings. Suboptimal Model Predictive Control (Feasibility Implies Stability). *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(3):648–654, 1999.

E. D. Sontag. Nonlinear regulation: The piecewise linear approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26(2):346–358, 1981.

J. Spjøtvold, P. Tøndel a T. A. Johansen. A Method for Obtaining Continuous Solutions to Multiparametric Linear Programs. V *IFAC World Congress*. Prague, Czech Republic, 2005.

D. J. Struik. *A Source book in mathematics, 1200-1800 / edited by D. J. Struik*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.,, 1969.

R. Suard, J. Löfberg, P. Grieder, M. Kvasnica a M. Morari. Efficient computation of controller partitions in multi-parametric programming. V *Proc. 43th IEEE Conf. on Decision and Control*, 3643–3648. Bahamas, 2004.

S. Summers, C. Jones, J. Lygeros a M. Morari. A multiscale approximation scheme for explicit model predictive control with stability, feasibility, and performance guarantees. V *IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai, China, 2009.

A. Szücs, M. Kvasnica a M. Fikar. A memory-efficient representation of explicit mpc solutions. V *Conference on Decision and Control*, submitted. Orlando, USA, 2011.

T. Takagi a M. Sugeno. Fuzzy identications of fuzzy systems and its applications to modelling and control. *IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics*, 15:116–132, 1985.

P. Tøndel a T. Johansen. Complexity reduction in explicit linear model predictive control. V *Proc. of 15-th IFAC World Congress*. 2002.

P. Tøndel, T. Johansen a A. Bemporad. An algorithm for multiparametric quadratic programming and explicit mpc solutions. *Automatica*, 39(3):489–497, 2003a.

P. Tøndel, T. A. Johansen a A. Bemporad. Evaluation of Piecewise Affine Control via Binary Search Tree. *Automatica*, 39(5):945–950, 2003b.

F. D. Torrisi a A. Bemporad. HYSDEL – A Tool for Generating Computational Hybrid Models for Analysis and Synthesis Problems. *IEEE TCST – Special Issue on Computer Automated Multi-Paradigm Modeling*, 2002. Submitted.

A. Ulbig, S. Olaru, D. Dumur a P. Boucher. Explicit solutions for nonlinear model predictive control: A linear mapping approach. V S. G. Tzafestas a P. J. Antsaklis, redaktori, *Proc. of of the European Control Conference 2007*, 3295–3302. 2007.

G. Valencia-Palomo a J. Rossiter. Using Laguerre functions to improve efficiency of multi-parametric predictive control. V *Proceedings of the American Control Conference*, 4731–4736. Baltimore, USA, 2010.

T. van den Boom, B. Heidergott a B. D. Schutter. Complexity reduction in MPC for stochastic max-plus-linear discrete event systems by variability expansion. *Automatica*, 43(6):1058–1063, 2007.

A. C. Van Der Heijden, A. F. A. Serrarens, M. K. Camlibel a H. Nijmeijer. Hybrid optimal control of dry clutch engagement. *International Journal of Control*, 80(11):1717 – 1728, 2007.

M. Vasak, M. Baotic, M. Morari, I. Petrovic a N. Peric. Constrained optimal control of an electronic throttle. *International Journal of Control*, 79(5):465–478, 2006.

C. Wang, C.-J. Ong a M. Sim. Convergence properties of constrained linear system under MPC control law using affine disturbance feedback. *Automatica*, 45(7):1715–1720, 2009.

C. Wen, X. Ma a B. E. Ydstie. Analytical expression of explicit MPC solution via lattice piecewise-affine function. *Automatica*, 45(4):910 – 917, 2009. ISSN 0005-1098.

H. Williams. *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, Third Edition, 1993.

L. Zadeh a L. Whalen. On optimal control and linear programming. *IRE Trans. Automatic Control*, 7:45–46, 1962.

M. Zeilinger, C. Jones a M. Morari. Robust stability properties of soft constrained MPC. V *IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, 2010.