Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Habilitačná práca

Bratislava, 2019 **Ing. Juraj Oravec, PhD.**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Pokročilé metódy robustného riadenia energeticky náročných procesov

Habilitačná práca

Odbor: 5.2.14 Automatizácia

Bratislava, 2019 **Ing. Juraj Oravec, PhD.**

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel pod'akovat' všetkým, vd'aka ktorým táto práca vznikla. Vel'mi rád by som pod'akoval hlavne doc. Ing. Monike Bakošovej, CSc. za všetky cenné rady a vel'kú podporu. Za vel'kú podporu a motiváciu k práci d'akujem aj prof. Ing. Miroslavovi Fikarovi, DrSc. a doc. Ing. Michalovi Kvasnicovi, PhD..

Moje pod'akovanie patrí tiež všetkým súčasným aj bývalým kolegom z Ústavu informatizácie, automatizácie a matematiky, v abecednom poradí: Ing. Peter Bakaráč, Ing. L'uboš Čirka, PhD., Ing. Ján Drgoňa, PhD., Ing. Ján Dvoran, CSc., Ing. Juraj Holaza, PhD., Andrea Kalmárová, Ing. Martin Kalúz, PhD., Ing. Martin Klaučo, PhD., Katarína Macušková, prof. Ing. Alajos Mészáros, PhD., D.h.c., doc. Ing. Radoslav Paulen, PhD., Ing. Juraj Števek, PhD., Ing. Bálint Takács, PhD., Stanislav Vagač, Ing. Richard Valo, PhD., Ing. Anna Vasičkaninová, PhD. a Ing. Jana Závacká, PhD..

Za motiváciu k práci, za podnetné otázky a za pomoc pri dosahovaní experimentálnych výsledkov d'akujem tiež absolventom, kolegom a študentom, v abecednom poradí: Ing. Petra Artzová, Bc. Lenka Galčíková, Ing. Linda Hanulová, Bc. Michaela Horváthová, Lucia Míková, Ing. Nikola Míková, Ing. Natália Mikušová, Ing. Daniela Pakšiová, Bc. Michal Slávik a Bc. Rudolf Trautenberger.

Najväčšia vd'aka patrí mojej rodine za neúnavnú podporu.

Juraj Oravec
Bratislava, 2019

Mojej rodine

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Predkladaná habilitačná práca sa zaoberá možnosťami zvýšenia kvality robustného riadenia komplexných a energeticky náročných procesov.

Medzi typických predstaviteľov chemického, biochemického, petrochemického, potravinárskeho, aj farmaceutického priemyslu patria výmenníky tepla a chemické reaktory. Práve výmenníky tepla patria k najrozšírenejším procesným zariadeniam priemyselnej výroby vôbec. Z pohľadu riadenia je potrebné zohľadniť ich nelineárne správanie sa a vysokú energetickú náročnosť. Chemické reaktory majú taktiež komplexné nelineárne správanie sa, ktoré je navyše sprevádzané látkovou premennou. Z pohľadu riadenia chemických reaktorov je dôležité zabezpečiť posun rovnováhy chemických reakcií na stranu produktov tak, aby sa maximalizoval výťažok.

Okrem hlavného ekonomického aspektu maximalizácie zisku, respektíve minimalizácie nákladov, sa v poslednej dobe kladie stále väčší dôraz na udržateľnú priemyselnú produkciu, ktorá minimalizuje negatívne dopady na životné prostredie. Popri všetkých týchto cieľoch zostáva hlavným cieľom riadenia bezpečnosť výrobnej prevádzky.

Splniť všetky tieto ciele súčasne predstavuje náročný optimalizačný problém, ktorý si vyžaduje dostatočne kvalitné vedomosti o riadenom procese. Pri návrhu riadenia sa pracuje s komplexnými procesmi, ktorých kvalitný matematický opis je náročné získať, respektíve, z pohľadu výpočtovej náročnosti, je zložité s takýmto matematickým modelom efektívne narábať. Z tohto dôvodu sa ako perspektívny prístup k návrhu riadenia riadenia využívajú robustné metódy syntézy regulátorov.

Lineárne maticové nerovnosti (LMI) predstavujú efektívny nástroj, ako možno pri návrhu robustného riadenia zohľadniť neurčitý systém a súčasne zachovať efektívnu formuláciu v tvare konvexného optimalizačného problému.

Limitácie tohto prístupu k návrhu robustného riadenia sú v dvoch oblastiach. Prvou je miera konzervatívnosti tohto prístupu a druhou je celková výpočtová náročnosť riadenia v reálnom čase.

1.1 Prínosy práce

Predkladaná habilitačná práca si kladie za cieľ zvýšenie kvality riadenia pomocou pokročilých metód robustného riadenia formulovaného pomocou lineárnych maticových nerovností. Tento cieľ sa dosahuje dvomi spôsobmi. Najskôr sa zvyšuje kvalita riadenia zameraním sa na návrh metód robustného MPC, ktoré umožňujú redukciu konzervatívnosti, ako aj implementáciu pokročilých nástrojov, akými sú nesymetrické a mäkké obmedzenia. Druhým spôsobom je zvýšenie kvality návrhu robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu, ktorý znižuje výpočtovú náročnosť počas riadenia v reálnom čase. Kvalita riadenia sa vyhodnocuje s ohľadom na riadené veličiny, teda výstupy z riadeného systému, ako aj z pohľadu akčných zásahov, teda vstupov do systému. Tieto vstupy predstavujú priame surovinové alebo energetické náklady. Pre zjednodušenie implementácie dosiahnutých teoretických výsledkov do praxe, boli vytvorené softvérové nástroje, ktoré efektívnym a užívateľsky priateľským spôsobom umožňujú aplikáciu navrhnutých metód na riadenie reálnych procesov. S využitím vytvorených nástrojov je simulačne aj experimentálne vyhodnotená kvalita riadenia typických predstaviteľov priemyselnej výroby, a to výmenníka tepla a chemického reaktora.

S ohľadom na hlavný cieľ možno jednotlivé čiastkové prínosy predkladanej práce formulovať nasledovne:

1. návrh pokročilých metód v kontexte robustného MPC založeného na LMI;

2. návrh pokročilých metód v kontexte robustného riadenia založeného na

konvexnom liftingu;

3. vývoj softvérových nástrojov na jednoduchý návrh pokročilého robustného riadenia;

4. numerická a experimentálna implementácia a validácia navrhnutých prístupov robustného riadenia.

Dosiahnutie jednotlivých čiastkových cieľov je dokumentované prostredníctvom priložených publikovaných prác autora, doplnených o sprievodný vysvetľujúci komentár. Priložené práce sú v anglickom jazyku uvedené tak, ako boli publikované. Spoločne predstavujú ucelený súbor publikácií zaoberajúcich sa problematikou syntézy pokročilých metód robustného riadenia komplexných a energeticky náročných systémov s neurčitosťami.

Kapitola 2

Formulácia problému

Riadenie reálnych procesov nielen v chemickom priemysle si vyžaduje veľmi dobrú znalosť o správaní sa riadených systémov. Toto správanie sa riadeného systému je opísané pomocou matematického modelu, ktorý slúži na návrh riadenia. Kvalita modelu riadeného procesu tak priamo úmerne ovplyvňuje kvalitu navrhnutého riadiaceho systému. Na druhej strane, dôkladné opísanie správania sa systému priamo úmerne zvyšuje celkovú výpočtovú náročnosť, s akou sa pristupuje k návrhu riadenia. S ohľadom na možnosti výpočtovej kapacity počas riadenia v reálnom čase je nevyhnutná vhodná voľba kompromisu medzi kvalitou opisu a výpočtovou náročnosťou. Zavádzanie zjednodušujúcich predpokladov je spôsob, ktorým možno dosiahnuť primeranú úroveň výpočtovej zložitosti matematického modelu. Efektívnym spôsobom, ako zohľadniť pri návrhu pokročilého riadenia existenciu zjednodušujúcich predpokladov je formulovať *neurčitý model systému*. Následne je možné aplikovať širokú triedu *robustných* metód návrhu regulátora, ktoré sú schopné garantovať kvalitu a stabilitu uzavretého regulačného obvodu s ohľadom na neurčitý riadený systém. Zásadnou úlohou je návrh *efektívnych* prístupov robustného riadenia, ktoré minimalizujú konzervatívnosť s ohľadom na existujúce ohraničenia riadeného procesu.

2.1 Riadenie neurčitého systému

Systém, na ktorý vplývajú parametrické aj neparametrické neurčitosti možno zapísať v kompaktnom tvare stavového opisu v diskrétnej časovej oblasti:

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B(\alpha)u(k) + w(k)\,, \quad x(0) = x_0, \tag{2.1a}$$

$$y(k) = C x(k)\,, \tag{2.1b}$$

$$[A(\alpha), B(\alpha)] \in \mathbb{A},\ \mathbb{A} = \mathrm{convhull}([A_i, B_i]), \tag{2.1c}$$

kde $k \geq 0$ predstavuje riadiaci krok v diskrétnej časovej oblasti pre danú periódu vzorkovania t_s, $x(k) \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{d_\mathrm{x}}$ je vektor stavov, $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{d_\mathrm{u}}$ je vektor akčných zásahov a $w \in \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{d_\mathrm{w}}$ je vektor aditívnej neurčitosti. Tieto veličiny sú ohraničené pomocou polytopických množín, ktoré obsahujú počiatok vo svojom striktnom vnútri. Prvky matíc stavového opisu $[A(k)\ B(k)]$ sú časovo premenlivé v rámci polytopickej množiny Ψ, ktorá má tvar:

$$[A(k)\ \ B(k)] \in \Psi = \mathrm{convhull}\,\{[A_1\, B_1], \ldots, [A_L\, B_L]\}\,, \tag{2.2}$$

kde maticové páry $[A_1\, B_1], \ldots, [A_L\, B_L]$ reprezentuje vrcholy polytopu Ψ. Tieto vrcholy sú dané hraničnými hodnotami parametrických neurčitostí.

Cieľom robustnej syntézy je nájsť taký zákon riadenia

$$u(k) = \kappa(x(k)), \tag{2.3}$$

ktorý garantuje robustnú stabilitu s ohľadom na uvažované obmedzenia akčných zásahov a stavov systému. Pre zjednodušenie návrhu riadenia sa zákon riadenia (2.3) často transformuje do tvaru lineárneho stavového zákona riadenia

$$u(k) = K x(k)\,, \tag{2.4}$$

kde $K \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{u} \times d_\mathrm{x}}$ je matica spätnoväzbového regulátora.

2.2 Robustné riadenie založené na riešení lineárnych maticových nerovností

Lineárne maticové nerovnosti (angl.: *Linear Matrix Inequalities*, LMI, Boyd a kol. (1994)) patria medzi efektívny nástroj formulovania komplexných problémov návrhu regulátora v tvare konvexných optimalizačných problémov. Už základný problém posúdenia robustnej stability neurčitého systému pomocou Ljapunovovej teórie (Lyapunov, 1892) je v tvare LMI:

$$A_i^\top P A_i - P \prec 0, \tag{2.5}$$

kde $P = P^\top \succ 0$, pre $i = 1, 2, \ldots, L$.

Trieda optimalizačných problémov založená na riešení LMI sa nazýva semidefinitné programovanie (angl.: *Semidefinite Programming*, SDP, Vandenberghe a Boyd (1996)). SDP predstavujú všeobecnú formuláciu mnohých tried konvexných optimalizačných problémov často využívaných pri návrhu riadenia, akými sú lineárne programovanie (angl.: *Linear Programming*, LP), kvadratické programovanie (angl.: *Quadratic Programming*, QP), kvadraticky ohraničené kvadratické programovanie (angl.: *Quadratically Constrained Quadratic Programming*, QCQP), aj programovanie kužeľov druhého rádu (angl.: *Second-order Cone Programming*, SOCP) (Boyd a Vandenberghe, 2004).

Optimalizačné problémy formulované pomocou SDP majú často lineárnu účelovú funkciu a obmedzenia sú v tvare LMI:

$$A_0 + \sum_{i=0}^{L} A_i X_L \succeq 0, \tag{2.6}$$

kde $A_i = A_i^\top$, $i = 0, 1, \ldots, L$, sú dané štvorcové symetrické matice a $X_i = X_i^\top$ sú matice optimalizovaných premenných. Potom štandardná, primárna forma (angl.: *Primal Form*) SDP je v tvare:

$$\min_X \quad \langle C, X \rangle \tag{2.7}$$

$$\text{s.t.}: \quad \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m \tag{2.8}$$

$$X \succeq 0, \tag{2.9}$$

kde $A_i = A_i^\top$, $C = C^\top$, $X = X^\top$ a označenie $\langle C, X \rangle = \operatorname{tr}\left(C^\top X\right) = \sum_{i,j} C_{i,j} X_{i,j}$ predstavuje stopu matice (angl.: *Trace*). Konvexná množina prípustných hodnôt (angl.: *Ffeasibility Set*) riešenia SDP vymedzená pomocou LMI sa nazýva spektrahedron (angl.: *Spectrahedron*) a je definovaná v tvare:

$$\mathbb{X}_{\text{feas}} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : A_0 + \sum_{i=0}^{m} A_i X_i \succeq 0 \right\}. \tag{2.10}$$

Na riešenie SDP je dostupných viacero kvalitných softvérových nástrojov. V prostredí `MATLAB` sú to napríklad voľne dostupný riešiteľ (angl.: *Solver*) `SeDuMi` (Sturm, 1999) a komerčný produkt `MOSEK` (MOSEK, 2019), ktorý je na akademické účely k dispozícií zdarma.

Kapitola 3

Pokročilé metódy robustného MPC

Riadenie energeticky náročných procesov si vyžaduje aplikáciu pokročilých metód radenia založených na optimalizácií akčných zásahov. Tieto systémy majú komplexné matematické modely, často ovplyvnené mnohými neurčitými parametrami. Preto je na riadenie týchto systémov vhodné navrhnúť robustného MPC, ktoré v súčasnosti predstavuje jeden z najpokrokovejších prístupov k riadeniu neurčitých systémov. Nevýhodou týchto metód riadenia sú ich relatívne vysoké výpočtové nároky, ako aj konzervatívnosť výsledného riešenia. V tejto kapitole sú zhrnuté tri metódy, pomocou ktorých je možné zvýšiť kvalitu riadenia robustného prediktívneho riadenia založeného na modeli (angl.: *Model Predictive Control*, MPC, Bemporad a Morari (1999)) založeného na LMI, pričom sa kladie dôraz aj na efektivitu výpočtovej náročnosti. Prvá metóda redukuje konzervatívnosť pomocou formulácie *alternatívnych* prístupov k návrhu robustného MPC. Pri návrhu riadenia sa využíva princíp synergického efektu kombinácie vhodných stratégii riadenia. Druhá metóda umožňuje efektívne narábanie s požadovanými ohraničeniami pomocou formulácie *kvázi nesymetrických ohraničení*. Tretia metóda umožňuje zvýšiť kvalitu riadenia a redukovať energetickú zát'až pomocou formulácie *mäkkých ohraničení* v kontexte LMI.

Veľkou výhodou teoretických konceptov návrhu robustného MPC predstavených v tejto kapitole je, že sú vzájomne ľubovoľne kombinovateľné, čím je možné získať synergický efekt pri zvýšení kvality riadenia a úsporách energie.

3.1 Alternatívne prístupy k návrhu robustného MPC

Základné teoretické východiská tohto prístupu boli formulované v práci Oravec (2014) a neskôr boli tieto metódy návrhu robustného MPC podrobnejšie rozpracované vo viacerých prácach (Oravec a Bakošová, 2015a,c).

V tejto kapitole predpokladá, že na neurčitý systém v tvare (2.1) nepôsobia aditívne neurčitosti w, respektíve, že ich vplyv bol formulovaný pomocou intervalových parametrických neurčitostí.

3.1.1 Alternatívne formulácie Ljapunovovej funkcie

Pojem *alternatívne* prístupy označuje triedu metód návrhu robustného MPC založeného na lineárnych maticových nerovniciach, kde sa pomocou kombinácie existujúcich prístupov formulujú nové, *alternatívne* prístupy.

Základným stavebným kameňom návrhu robustného MPC je Ljapynovova funkcia (angl.: *Lyapunov Function*, Lyapunov (1892)), ktorá sa využíva na garanciu robustnej stability uzavretého regulačného obvodu. Nevýhodou je *konzervatívnosť* podmienky robustnej stability, ktorá môže negatívne ovplyvniť výslednú kvalitu riadenia. Snaha redukovať konzervatívnosť vedie k rôznym alternatívnym formuláciám Ljapunovovej funkcie.

V súčasnosti veľká trieda metód návrhu robustného MPC pomocou LMI vychádza z pôvodnej práce Kothare a kol. (1996). Táto práca bola založená na *jednoduchej* kvadratickej Ljapunovovej funkcií (angl.: *Common Quadratic Lyapunov Function*, CQLF, Boyd a kol. (1994)). Predpokladá sa, že pre Ljapunovovu funkciu $V : \mathbb{R}^{d_x} \to \mathbb{R}^{d_x}$

$$V(x) = x^\top P x, \tag{3.1}$$

existuje $P = P^\top \succ 0$. To umožňuje pri návrhu robustného MPC zostrojiť robustnú pozitívne invariantnú elipsoidálnu množinu (angl.: *Robust Positive Invariant Ellipsoidal Set*, Blanchini (1999)), ktorá má svoj stred v počiatku a polomery jednotlivých osí závisia od inverznej hodnoty vlastných čísel matice P. Navrhuje sa tak jedna elipsoidálna množina s ohľadom na všetky vrcholy neurčitého systému (2.1), ktorá sa snaží čo najtesnejšie aproximovať skutočnú neznámu robustne pozitívnu invariantnú množinu.

Prístup predstavený v práci Kothare a kol. (1996) bol neskôr upravený v ďalších prácach. Významným prínosom bolo nahradenie CQLF pomocou *parametricky závislej Ljapunovovej funkcie* (angl.: *Parameter Dependent Lyapunov Function*, PDLF, Cuzzola a kol. (2002)). Uvažovanie PDLF umožnilo navrhnúť samostatnú maticu Ljapunovovej funkcie zvlášť pre každý vrchol neurčitého systému (2.1). Súčasne je robustná stabilita uzavretého regulačného obvodu garantovaná pomocou konštrukcie *spoločnej* matice PDLF. Vďaka tomu prístupu je možné navrhnúť regulátor s ohľadom na menej konzervatívne riešenie podmienky robustnej stability. Keďže sa metóda predstavená v práci Cuzzola a kol. (2002) dala aplikovať len na špeciálny prípad časovo-invariantnej neurčitosti, tento nedostatok bol odstránený v práci Mao (2003).

Iný spôsob, ako sa vysporiadať s konzervatívnosťou spôsobenou riešením MIN-MAX optimalizačného problému, bol predstavený v prácach Ding a kol. (2007, 2004); Wan a Kothare (2003). Redukcia konzervatívnosti bola dosiahnutá pomocou rozdelenia úlohy návrhu robustného regulátora na dve časti. V prvej časti sa regulátor navrhuje s dôrazom na kvalitu riadenia, pričom sa zohľadní len nominálny systém, teda idealizovaný systém, na ktorý nepôsobia žiadne neurčitosti.

Následne je potrebné zabezpečiť robustnú stabilitu uzavretého regulačného obvodu. Preto sa v druhej časti formulujú ohraničenia optimalizačného problému s ohľadom na všetky vrcholové systémy, ale bez explicitných požiadaviek na mieru kvality riadenia vyjadrenú kvadratickým kritériom kvality.

Tento prístup k návrhu robustného MPC dosahuje nízku mieru konzervatívnosti a vysokú kvalitu, ak sa pracovné podmienky neurčitého systému nachádzajú v blízkosti nominálneho systému. Kvalita riadenia sa vyhodnocuje pomocou kvadratického kritéria J, ktorého hodnotu sa snažíme minimalizovať:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(x(k)^\top \, Q \, x(k) + u(k) \, R \, u(k) \Big) , \tag{3.2}$$

kde $Q \succeq 0$, $R \succ 0$ sú vhodne zvolené váhové matice.

Konzervatívnosť návrhu robustného MPC je tiež ovplyvnená spôsobom, akým sa manipuluje s akčnými zásahmi. Robustné MPC je schopné garantovať dodržanie ohraničení na akčné zásahy, ale pri riadení je potrebné zabezpečiť, aby sa neporušili ohraničenia na akčné zásahy pri konzervatívnom návrhu regulátora. Z tohto dôvodu nemusí dochádzať k úplnému využívaniu celého dostupného rozsahu hodnôt akčných zásahov. V prácach Cao a Lin (2005); Huang a kol. (2011); Zhang a kol. (2013) bol postupne rozpracovaný prístup, ktorý využíva dodatočnú saturáciu vypočítaných hodnôt akčných zásahov. Vďaka tomu je možné naplno využiť celý rozsah akčných zásahov. Garancia robustnej stability uzavretého regulačného obvodu je zabezpečená pomocou parametricky závislej Ljapunovovej funkcií s ohľadom na akčné zásahy.

Vzájomnými kombináciami existujúcich prístupov k zníženiu konzervatívnosti návrhu robustného MPC pomocou LMI sme predstavili 10 nových *alternatívnych* metód. Podrobnosti ohľadom konštrukcie príslušného optimalizačného problému v tvare SDP pre jednotlivé metódy možno nájsť v práci Oravec a Bakošová (2015a).

Poznámka 1 (Výpočtová náročnosť) *Výpočtová náročnosť spojená s riešením optimalizačného problému v tvare SDP je približne daná* $\mathcal{O}(n_\mathrm{o}^3 n_\mathrm{r})$, *kde* n_o *je počet skalárnych optimalizačných premenných a* n_r *je počet riadkov uvažovaných LMI (Gahinet a kol., 1994, chap.8). Výpočtová náročnosť alternatívnych prístupov k návrhu robustného MPC je vyššia v porovnaní s pôvodnými prístupmi, ktorých kombináciou vznikli. Je to spôsobené tým, že sa pôvodný optimalizačný problém rozširuje o viaceré optimalizované premenné, teda sa zvyšuje dominantný kubický člen* n_o. *Na druhej strane sa vyriešením zložitejšieho optimalizačného problemu redukuje celková konzervatívnosť návrhu robustného MPC.*

3.1.2 Algoritmus a implementácia alternatívnych prístupov k návrhu robustného MPC

Návrh alternatívnych prístupov k návrhu robustného MPC je sformulovaný vo všeobecnom tvare pomocou Algoritmu 1. Detaily návrhu alternatívnych prístupov možno nájsť v práci Oravec a Bakošová (2015a).

Algorithm 1 Alternatívny prístup k návrhu robustného MPC.

vstupy: stavy systému $x(k)$, neurčitý systém (2.1), požiadavky na kvalitu (váhové matice Q, R, ohraničenia $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$)
výstup: akčný zásah $u(k)$
1: vyriešiť príslušný optimalizačný problém v tvare SDP (Oravec a Bakošová, 2015a)
2: $K(k) \leftarrow Y(k)\ X(k)^{-1}$
3: $u(k) \leftarrow K x(k)$

Softvérová implementácia vybraných alternatívnych prístupov k návrhu robustného MPC v prostredí MATLAB/Simulink je voľne dostupná v rámci toolboxu `MUP` na stránkach:
`https://bitbucket.org/oravec/mup/wiki/`

Po nainštalovaní je k dispozícií aj voľne stiahnuteľný DEMO projekt pre prostredie príkazového riadku, ako aj pre prostredie Simulink. DEMO projekt pre prostredie príkazového riadku je možné spustiť pomocou príkazu:

```
>>mup_rmpc_demo
```

DEMO projekt pre prostredie Simulink je možné spustiť pomocou príkazu:

```
>>mup_rmpcblock_demo
```

Výsledky získané v oblasti alternatívnych metód návrhu robustného MPC boli získané s ohľadom na viaceré komplexné systémy. Možnosti zvýšenia kvality riadenia a zníženia spotreby energie boli analyzované simulačne pre sieť výmenníkov tepla v práci Bakošová a Oravec (2014), aj experimentálne pre laboratórny doskový výmenník tepla v práci Oravec a kol. (2016). Možnosti zvýšenia kvality riadenia chemického reaktora boli analyzované simulačne v prácach Oravec a Bakošová (2015b,c), aj experimentálne pre laboratórny chemický reaktor, v ktorom prebiehal proces neutralizácie v práci Oravec a kol. (2018).

3.2 Robustné MPC s nesymetrickými ohraničeniami

Praktická implementácia riadenia technologických procesov si často vyžaduje zohľadnenie *nesymetrických ohraničení* akčných zásahov alebo výstupov systému. Nesymetrické ohraničenia akčných zásahov sú také, ktoré majú hodnotu ustáleného stavu posunutú mimo strednej hodnoty intervalu vymedzenú rozsahom limitných hodnôt. Nesymetrické ohraničenia výstupov systému majú analogickú štruktúru.

Formulácia nesymetrických ohraničení pomocou LMI nie je triviálnou úlohou, nakoľko konštrukcia LMI je založená na ohraničeniach v tvare noriem. Formulácia ohraničení pomocou noriem má tú nevýhodu, že sa stráca vedomosť o *znamienku* hodnoty ohraničenej veličiny v odchýlkovom tvare. Preto sa stráca vedomosť o tom, ktoré z nesymetrických limitov majú byť aktívne.

Tradičné prístupy k návrhu robustného MPC sú založené na konzervatívnom prístupe, kedy sa nesymetrické ohraničenie aproximuje symetrickým ohraničením. Nevýhodou tohto prístupu je, že sa zanedbáva časť rozsahu hodnôt akčných zásahov alebo výstupov systému, ktoré sú v skutočnosti k dispozícií.

Efektívnym spôsobom, ako zohľadniť nesymetrické ohraničenia pri návrhu robustného MPC a zachovať pri tom výhody spojené s formuláciou založenou na LMI je implementácia *kvázi nesymetrických ohraničení*. Základné teoretické východiská tohto prístupu boli formulované v práci Oravec (2014) a neskôr publikované v práci Oravec a kol. (2017b).

Výhodou tohto prístupu k návrhu robustného MPC je to, že je možné aplikovať ho s ohľadom na mnohé ďalšie metódy návrhu robustného MPC, ktoré boli predstavené v literatúre, napríklad Cao a Lin (2005); Cuzzola a kol. (2002); Ding a kol. (2007, 2004); Huang a kol. (2011); Mao (2003); Wan a Kothare (2003); Yang a kol. (2013); Zhang a kol. (2013) a podobne.

3.2.1 Kvázi nesymetrické ohraničenia

Nesymetrické ohraničenia akčných zásahov a výstupov systému možno formulovať vo všeobecnom tvare

$$u(k) \in \mathbb{U}, \qquad \mathbb{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{u}} : u_{\min} \preceq u \preceq u_{\max} \right\}, \tag{3.3a}$$

$$y(k) \in \mathbb{Y}, \qquad \mathbb{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{y}} : y_{\min} \preceq y \preceq y_{\max} \right\}, \tag{3.3b}$$

kde vo všeobecnosti $u_{\min} \neq -u_{\max}$, $y_{\min} \neq -y_{\max}$.

Princípom implementácie *kvázi* nesymetrických ohraničení je spôsob, akým sa formulujú ohraničenia. Na rozdiel od tradičných spôsobov formulovania časovo-invariantných ohraničení sa limitné hodnoty stanovia nanovo v každom riadiacom kroku, teda sa formulujú ako *časovo premenlivé* symetrické ohraničenia. Aktuálne limitné hodnoty sa určia na základe toho, ktoré ohraničenie sa očakáva ako limitné.

Na odhad aktívnych ohraničení sa využíva *indikátorová funkcia* (angl.: *Indicator Function*, Boyd a Vandenberghe (2004), kap. 5.1). Tá na základe *pomocného zákona riadenia* indikuje, či sa očakáva aktívne ohraničenie na hornej alebo na dolnej medzi.

Pomocný zákon riadenia sa navrhne jednorázovo ešte pred samotným riadením s ohľadom na konzervatívne symetrické ohraničenia. Vypočíta sa tak pomocný akčný zásah v tvare

$$\widetilde{u}(k) = K_0 \, x(k) \,, \tag{3.4}$$

kde $K_0 \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{u} \times d_\mathrm{x}}$ je matica *pomocného regulátora*.

Pomocný regulátor sa získa vyriešením pomocného optimalizačného problému v tvare SDP

$$\min_{\gamma_0, X_0, Y_0} \gamma_0 \tag{3.5a}$$

$$\text{s.t.:} \begin{bmatrix} X_0 & \star & \star & \star \\ A_i X_0 + B_i Y_0 & X_k & \star & \star \\ \sqrt{Q} X_k & \mathit{0} & \gamma_k I & \star \\ \sqrt{R} H_k & \mathit{0} & \mathit{0} & \gamma_k I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.5b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star \\ x_0 & X_0 \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.5c}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & \star \\ Y_0 & U_{\min} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.5d}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & \star \\ C[A_i X_0 + B_i Y_0] & Y_{\min} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.5e}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, L$. V optimalizačnom probléme (3.5) predstavuje symbol $\star$ prvok matice so symetrickou štruktúrou. I predstavuje jednotkovú maticu a $\mathit{0}$ je jednotková matica príslušného rozmeru.

Optimalizačný problém v tvare (3.5) sa vyrieši jedenkrát pred samotným riadením s ohľadom na optimalizované premenné: γ_0, X_0, Y_0. Matice $U_{\min}$, $Y_{\min}$ ohraničujú akčné zásahy a výstupy systému s ohľadom na konzervatívny MIN-MAX prístup, teda s ohľadom na menšie z maximálnych nesymetrických ohraničení.

Robustná stabilita uzavretého regulačného obvodu s ohľadom na kvázi nesymetrické ohraničenia je garantovaná práve pomocou pomocného zákona riadenia v tvare (3.4).

Pre riešiteľný optimalizačný problém v tvare SDP (3.5) sa pomocný regulátor vypočíta

$$K_0 = Y_0 \, X_0^{-1}. \tag{3.6}$$

Pomocný regulátor umožňuje výpočet pomocného akčného zásahu $\widetilde{u}$ prostredníctvom zákona riadenia (3.4) a pomocného výstupu systému $\widetilde{y}$ pomocou modelu systému.

Následne je možné nesymetrické ohraničenia pomocou *Schurovho doplnku* (angl.: *Schur Complement*, Boyd a Vandenberghe (2004), kap. C.4) efektívne transformovať do tvaru LMI. Získa sa tak optimalizačný problém v tvare SDP s lineárnou účelovou funkciou a s ohraničeniami v tvare LMI. Výsledný optimalizačný problém v tvare SDP je tvare

$$\min_{\gamma,X,Y} \gamma \tag{3.7a}$$

$$\text{s.t.:} \begin{bmatrix} X_k & \star & \star & \star \\ A_i X_k + B_i Y_k & X_k & \star & \star \\ \sqrt{Q} X_k & \mathit{0} & \gamma_k I & \star \\ \sqrt{R} Y_k & \mathit{0} & \mathit{0} & \gamma_k I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.7b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star \\ x_k & X_k \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.7c}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ Y_k & U_{\max,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.7d}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ C[A_i X_k + B_i Y_k] & Y_{\max,i,k} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.7e}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, L$. V optimalizačnom probléme (3.7) predstavuje symbol $\star$ prvok matice so symetrickou štruktúrou. I predstavuje jednotkovú maticu a $\mathit{0}$ je jednotková matica príslušného rozmeru.

Optimalizačný problém v tvare (3.7) sa rieši v každom kroku riadenia s ohľadom na optimalizované premenné: γ, X, Y. Na rozdiel od tradičných prístupov k návrhu robustného MPC sa v ohraničeniach formulovaných pomocou LMI (3.7d), (3.7e) predpokladajú časovo premenlivé prvky $U_{\max,k}$, $Y_{\max,i,k}$.

Nakoľko pri riadení v reálnom čase môže dochádzať k prepínaniu medzi regulátormi, tak stabilita je garantovaná pomocou konštrukcie Ljapunovovej funkcie pre uzavretý regulačný obvod s ohľadom na všetky kombinácie limitných hodnôt akčných zásahov a výstupov systému.

Ďalšie technické podrobnosti možno násjť v práci Oravec a kol. (2017b).

Poznámka 2 (Výpočtová náročnosť) *Výhodou návrhu robustného MPC s kvázi nesymetrickými ohraničeniami je, že tento prístup vôbec nezvyšuje výpočtovú zložitosť pôvodného optimalizačného problému v tvare SDP* (3.7)*. K miernemu navýšeniu výpočtovej náročnosti počas riadenia v reálnom čase* *dochádza v dôsledku rozhodovania/prepínania medzi limitmi nesymetricky ohraničených veličín. Avšak toto navýšenie je zanedbateľné v porovnaní s riešením optimalizačného problému. Implementácia si vyžaduje návrh pomocného regulátora, ktorý nezvyšuje výpočtovú záťaž, pretože sa realizuje ešte pred samotným riadením v reálnom čase.*

3.2.2 Algoritmus a implementácia robustného MPC s nesymetrickými ohraničeniami

Návrh robustného MPC s nesymetrickými ohraničeniami je sformulovaný v Algoritme 2.

Algorithm 2 Robustné MPC s nesymetrickými ohraničeniami Oravec a kol. (2017a).

vstupy: stavy systému $x(k)$, neurčitý systém (2.1), požiadavky na kvalitu (váhové matice Q, R, nesymetrické ohraničenia $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$, pomocný regulátor K_0)
výstup: nesymetricky ohraničený akčný zásah $u(k)$

$\widetilde{u}(k) \leftarrow K_0\, x(k)$
$\widetilde{y}_i(k) \leftarrow C\,(A_i + B_i\, K_0)\; x(k)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, L$
aktualizovať $\mathbb{U}_{\max,k}$ s ohľadom na $\widetilde{u}(k)$
aktualizovať $\mathbb{Y}_{\max,k}$ s ohľadom na $\widetilde{y}(k)$
vyriešiť SDP (3.7) s ohľadom na $\mathbb{U}_{\max,k}$, $\mathbb{Y}_{\max,k}$
if SDP (3.7) je riešiteľný **then**
  $K(k) \leftarrow Y(k)\; X(k)^{-1}$
  $u(k) \leftarrow K\, x(k)$
  $\hat{y}_i(k) \leftarrow C\,(A_i + B_i\, K_k)\; x(k)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, L$
  if $u(k) \notin \mathbb{U}$ **or** $\hat{y}_i(k) \notin \mathbb{Y}$ **then**
    $u(k) \leftarrow \widetilde{u}(k)$
  end if
else
  $u(k) \leftarrow \widetilde{u}(k)$
end if

Softvérová implementácia nesymetrických ohraničení v prostredí MAT-

LAB je voľne dostupná na stránke:
https://bitbucket.org/oravec/nonsym_lmi_rmpc

Po nainštalovaní je k dispozícií aj voľne stiahnuteľný DEMO projekt pre prostredie príkazového riadku, ktorý je možné spustiť pomocou príkazu:

```
>>rmpc_nonsym demo
```

Robustné MPC s nesymetrickými ohraničeniami bolo úspešne aplikované na riadenie doskového výmenníka tepla v práci Oravec a kol. (2017a). Pri návrhu sa implementovala integračná zložka na odstránenie trvalej regulačnej odchýlky. Na minimalizovanie vplyvu šumu merania sa implementoval Hebkého filter. Spolu s nesymetrickými ohraničeniami sa tak dosiahlo zvýšenie kvality riadenia, ako aj zníženie energetickej záťaže.

3.3 Robustné MPC s mäkkými ohraničeniami

Pri riadení technologických procesov sa často možno stretnúť s požiadavkou dodržiavať hodnoty akčných zásahov alebo riadených veličín v určitom požadovanom rozsahu. Tieto rozsahy môžu predstavovať pracovné podmienky, pri ktorých dochádza k optimálnej prevádzke, minimalizuje sa opotrebenie akčných členov, alebo sa minimalizuje energetická záťaž. V prípade nevyhnutnosti je možné tieto pracovné podmienky dočasne porušiť, ale z dlhodobého hľadiska je žiadúce udržiavať hodnoty daných rozsahov. Tento typ pracovných podmienok je možné efektívne formulovať pomocou mäkkých ohraničení.

Výhodou tohto prístupu k návrhu robustného MPC s mäkkými ohraničeniami je to, že je možné aplikovať ho s ohľadom na mnohé ďalšie metódy návrhu robustného MPC, ktoré boli predstavené v literatúre, napríklad Cao a Lin (2005); Cuzzola a kol. (2002); Ding a kol. (2007, 2004); Huang a kol. (2011); Mao (2003); Wan a Kothare (2003); Yang a kol. (2013); Zhang a kol. (2013) a podobne.

3.3.1 Mäkké ohraničenia v tvare LMI

Uvažujeme mäkké ohraničenia, ktoré je možné zapísať v tvare

$$u(k) \in \mathbb{U}_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{U}_{\mathrm{h}}, \tag{3.8}$$

$$y(k) \in \mathbb{Y}_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{Y}_{\mathrm{h}}, \tag{3.9}$$

kde $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}, \mathbb{U}_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}^{d_{\mathrm{u}}}$ a $\mathbb{Y}_{\mathrm{s}}, \mathbb{Y}_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}^{d_{\mathrm{y}}}$ sú množiny mäkkých a tvrdých ohraničení akčných zásahov a výstupov systému.

Pri návrhu robustného MPC sa uvažuje kvadratická penalizácia porušenia mäkkých ohraničení v tvare

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x(k)^\top Q\, x(k) + u(k)\, R\, u(k) + s_{\mathrm{y}}^\top Q_{\mathrm{sy}}\, s_{\mathrm{y}} + s_{\mathrm{u}}^\top R_{\mathrm{su}}\, s_{\mathrm{u}} \right), \tag{3.10}$$

kde $s_{\mathrm{y}}, s_{\mathrm{u}} \geq 0$ sú vektory ktorých hodnota zodpovedá veľkosti porušenia mäkkých ohraničení. Prirodzene, čiastkovým cieľom riadenia je minimalizácia hodnoty jednotlivých prvkov týchto vektorov. Na to sa využívajú diagonálne matice penalizácie porušenia akčných zásahov $Q_{\text{sy}}, R_{\text{su}} \succ 0$, pričom s ohľadom na vlastné čísla matíc platí, že determinant $|R| \ll |R_{\text{su}}|$ a determinant $|Q| \ll |Q_{\text{sy}}|$.

Následne je možné mäkké ohraničenia pomocou Schurovho doplnku efektívne transformovať do tvaru LMI. Získa sa tak optimalizačný problém v tvare SDP s lineárnou účelovou funkciou a s ohraničeniami v tvare LMI. Výsledný optimalizačný problém v tvare SDP má tvar

$$\min_{\gamma, X, Y, G, \tilde{s}_{\text{u}}, \tilde{s}_{\text{y}}} \gamma + q_{\text{sy}}^{\top} \tilde{s}_{\text{y}} + r_{\text{su}}^{\top} \tilde{s}_{\text{u}} \tag{3.11a}$$

$$\text{s.t.:} \begin{bmatrix} X_k & \star & \star & \star \\ A^{(0)} X_k + B^{(0)} H_k & X_k & \star & \star \\ \sqrt{Q} X_k & \mathit{0} & \gamma_k I & \star \\ \sqrt{R} H_k & \mathit{0} & \mathit{0} & \gamma_k I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.11b}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ A_i X_k + B_i H_k & X_k \end{bmatrix} \succ 0, \tag{3.11c}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star \\ x_k & X_k \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.11d}$$

$$\begin{bmatrix} U_{\max} & \star \\ G_k^{\top} & X_k \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.11e}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ C[A_i X_k + B_i H_k] & Y_{\max} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.11f}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ E_{\text{u}} Y_k & U_{\text{soft},k}(\tilde{s}_{\text{u}}) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{3.11g}$$

$$\begin{bmatrix} X_k & \star \\ E_{\text{y}} C(A_i X_k + B_i Y_k) & Y_{\text{soft},k}(\tilde{s}_{\text{y}}) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{3.11h}$$

kde $i = 1, 2, \ldots, L$. V optimalizačnom probléme (3.11) predstavuje symbol $\star$ prvok matice so symetrickou štruktúrou. I predstavuje jednotkovú maticu a $\mathit{0}$ je jednotková matica príslušného rozmeru.

Optimalizačný problém v tvare (3.11) sa rieši v každom kroku riadenia s ohľadom na optimalizované premenné: γ, X, Y, G, H, U_{soft}, Y_{soft} $\tilde{s}_{\text{u}}$, $\tilde{s}_{\text{y}}$. Robustná stabilita uzavretého regulačného obvodu je garantovaná pomocou kvadratickej Ljapunovovej funkcie $V(x) = x^{\top} P x$, kde $P = P^{\top} \succ 0$, $X = \gamma P^{-1}$.

Premenné $\tilde{s}_{\mathrm{u}}$ a $\tilde{s}_{\mathrm{y}}$ nadobúdajú kvadratickú hodnotu porušenia mäkkých ohraničení akčných zásahov a výstupov systému, teda pre jednotlivé prvky vektorov platí, že $\tilde{s}_{\mathrm{u},j} = s_{\mathrm{u},j}^2$, $\tilde{s}_{\mathrm{y},j} = s_{\mathrm{y},j}^2$. Matice G, H zabezpečujú garanciu spätnoväzbovej stability s ohľadom na dodatočnú saturáciu akčných zásahov.

Matica zosilnenia lineárneho zákona riadenia (2.4) s ohľadom na mäkké ohraničenia sa následne vypočíta na základe riešenia SDP (3.11) s využitím optimalizovaných premenných X, Y:

$$K = YX^{-1}. \tag{3.12}$$

Ďalšie podrobnosti k návrhu robustného MPC s mäkkými ohraničeniami možno nájsť v práci Oravec a Bakošová (2016).

Poznámka 3 (Výpočtová náročnosť) *Výpočtová náročnosť spojená s riešením optimalizačného problému v tvare SDP je približne daná $\mathcal{O}(n_{\mathrm{o}}^3 n_{\mathrm{r}})$, kde n_{o} je počet skalárnych optimalizačných premenných a n_{r} je počet riadkov uvažovaných LMI (Gahinet a kol., 1994, chap.8). Návrhom robustného MPC s mäkkými ohraničeniami v tvare SDP* (3.11) *sa mierne zvýši výpočtová náročnosť, nakoľko bol kubický člen n_{o} zvýšený o toľko skalárnych optimalizovaných premenných, koľko je akčných zásahov a výstupov systému s mäkkými ohraničeniami. Lineárny člen n_{r} bol zvýšený o $(d_{\mathrm{u}} + 2d_{\mathrm{x}} + d_{\mathrm{y}})$ riadkov.*

3.3.2 Algoritmus a implementácia robustného MPC s mäkkými ohraničeniami

Návrh robustného MPC s mäkkými ohraničeniami je sformulovaný v Algoritme 3.

Softvérová implementácia mäkkých ohraničení v prostredí MATLAB/Simulink je voľne dostupná v rámci toolboxu `MUP` na stránkach:
`https://bitbucket.org/oravec/mup/wiki/SOFT-CON`

Po nainštalovaní je k dispozícií aj voľne stiahnuteľný DEMO projekt pre prostredie príkazového riadku, ako aj pre prostredie Simulink. DEMO projekt pre prostredie príkazového riadku je možné spustiť pomocou príkazu:

```
>>mup_rmpc_soft_con_demo
```

Algorithm 3 Robustné MPC s mäkkými ohraničeniami Oravec a Bakošová (2016).

vstupy: stavy systému $x(k)$, neurčitý systém (2.1), požiadavky na kvalitu (váhové matice Q, R, Q_{sy}, R_{su}, ohraničenia $\mathbb{U}_{\mathrm{h}}$, $\mathbb{Y}_{\mathrm{h}}$, $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}$, $\mathbb{Y}_{\mathrm{s}}$)
výstup: akčný zásah $u(k)$
1: vyriešiť SDP (3.11)
2: $K(k) \leftarrow Y(k)\ X(k)^{-1}$
3: $u(k) \leftarrow Kx(k)$

DEMO projekt pre prostredie Simulink je možné spustiť pomocou príkazu:

```
>>mup_rmpcblock_soft_con_demo
```

Robustné MPC s mäkkými ohraničeniami bolo úspešne aplikované na riadenie doskového výmenníka tepla v práci Oravec a kol. (2017c). Dosiahlo sa tak zvýšenie kvality riadenia, ako aj zníženie energetickej zát'aže vyjadrenej prostredníctvom celkovej energie spotrebnej na ohrev horúceho média.

Kapitola 4

Robustné riadenie pomocou konvexného liftingu

Riadenie energeticky náročných procesov si vyžaduje aplikáciu pokročilých metód založených na optimalizácií akčných zásahov. Často sa využívajú metódy robustného MPC. Nevýhodou týchto metód je, že si vyžadujú výraznú výpočtovú zát'až počas riadenia v reálnom čase. V porovnaní s výpočtom akčných zásahov pomocou robustného MPC je možné pristúpit' k robustnému návrhu regulátora s využitím metódy *konvexného liftingu*. Nakol'ko je výrazná čast' výpočtovej náročnosti delegovaná na prípravnú fázu riadenia, tak samotné riadenie v reálnom čase je výpočtovo efektívnejšie. Na druhej strane, nevýhodou tejto metódy, v porovnaní s robustným MPC, môže byt' schopnost' zohl'adnit' len neurčité systémy s menším počtom stavov systému. Tento prístup k návrhu robustného riadenia je založený na práci Nguyen a kol. (2017) a bol významným spôsobom rozšírený v práci Orvaec a kol. (2019).

4.1 Princípy robustného riadenia s konvexným liftingom

Robustné riadenie pomocou konvexného liftingu (angl.: *Convex Lifting*, Nguyen a kol. (2017)) je založené na dvoch fázach. Prvá fáze, ktorá sa nazýva aj *off-line fáza*, je prípravná, nakoľko sa realizuje ešte pred samotným riadením. Druhá fáza sa nazýva aj *on-line fáza*, pretože prebieha počas samotného riadenia v reálnom čase.

V rámci off-line fázy sa definuje množina prípustných hodnôt stavov $\mathbb{X}_{\text{feas}}$, nad ktorou je možné navrhnúť robustné riadenie pomocou konvexného liftingu. V rámci tejto množiny sa tiež navrhne robustne pozitívne invariantná (angl.: *Robust Positive Invariant*, RPI, Blanchini (1999)) množina $\mathbb{Z}$. Táto množina je robustná vzhľadom na parametrické a aditívne neurčitosti systému (2.1). Pre RPI množinu $\mathbb{Z}$ sa navrhne príslušný lineárny zákon riadenia v tvare (2.4). Tento zákon riadenia sa použije na riadenie vždy, keď stavy systému x patria do RPI množiny $\mathbb{Z}$. Počas off-line fázy sa tiež definuje samotný konvexný lifting stavového priestoru mimo RPI množiny, teda na doplnku množiny $\mathbb{X}_{\text{lift}} = \mathbb{X}_{\text{feas}} \setminus \mathbb{Z}$.

V rámci on-line fázy sa pre každé meranie/odhad stavov $x(k)$ vypočíta príslušný vektor akčných zásahov $u(k)$. Hodnoty akčného zásahu sa vypočítajú buď vyriešením optimalizačného problému v tvare lineárneho programovania (angl.: *Linear Programming*, LP, Boyd a Vandenberghe (2004), kap. 4.3) alebo pomocou lineárneho zákona riadenia (2.4).

Pomocou LP sa akčný zásah navrhne vtedy, ak $x(k) \in \mathbb{X}_{\text{lift}}$. V opačnom prípade, teda ak $x(k) \notin \mathbb{X}_{\text{lift}} \Rightarrow x(k) \in \mathbb{Z}$, tak sa akčný zásah $u(k)$ vypočíta pomocou (2.4).

4.2 Konštrukcia RPI množiny

Konštrukcia RPI množiny sa realizuje v rámci off-line fázy a je založená na vyriešení optimalizačného problému v tvare semidefinitného programovania (angl.: *Semidefinite Programming*, SDP, Vandenberghe a Boyd (1996)).

$$\min_{Z,Y} -\log\det(Z) \tag{4.1a}$$

$$\text{s.t.}: \begin{bmatrix} Z & \star \\ A_i Z + B_i Y & Z \end{bmatrix} \succ 0, \tag{4.1b}$$

kde $i = 1, \ldots, L$ a optimalizované premenné sú matice $X \in \mathbb{R}^{d_\text{x} \times d_\text{x}}$ a $Y \in \mathbb{R}^{d_\text{u} \times d_\text{x}}$. X je inverzná Ljapunovova matica $Z = Z^\top \succ 0 \in \mathbb{R}^{d_\text{x} \times d_\text{x}}$ kvadratickej

Ljapunovovej funkcie:

$$V(x) = x^\top \widetilde{Z} x = x^\top Z^{-1} x, \tag{4.2}$$

kde $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}^\top \succ 0 \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{x} \times d_\mathrm{x}}$. $Y \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{u} \times d_\mathrm{x}}$ je pomocná matica parametrizácie lineárneho zákona riadenia:

$$K = Y Z^{-1}. \tag{4.3}$$

Riešením optimalizačného problému v tvare SDP (4.1) sa získa elipsoidálna aproximácia maximálnej RPI množiny. Tvar tejto elipsoidálnej RPI množiny je určený maticou Z^{-1}, ktorá bola optimalizovaná s ohľadom na maximalizáciu svojho objemu.

Pri návrhu RPI množiny sa zohľadnili všetky vrcholy generované parametrickými neurčitosťami systému (2.1). Aby sa zachovala vhodná štruktúra optimalizačného problému, tak sa pri výpočte Z^{-1} nezohľadnili aditívne neurčitosti systému (2.1).

Aditívne neurčitosti spolu s obmedzeniami akčných zásahov a stavov systému sa zohľadňujú následne v iteratívnej procedúre. V rámci tejto procedúry sa v každej iterácií zohľadní aditívna neurčitosť pomocou Minkowského súčtu (resp. Pontrajaginovho odčítania) (angl.: *Minkowski Sum*, Borrelli a kol. (2017)) množiny $\mathbb{W}$. S ohľadom na množinu dosiahnuteľnosti (angl.: *Reachability Set*, Borrelli a kol. (2017)) sa zohľadnia obmedzenia na akčné zásahy a stavy systému (2.1). Skonštruuje sa tak výsledná polytopická RPI množina $\mathbb{Z}$. Ďalšie technické detaily spojené s konštrukciou RPI množiny sú uvedené v práci Nguyen a kol. (2017).

4.3 Konštrukcia konvexného liftingu

Aby bolo možné vypočítať v rámci on-line fázy akčný zásah pre stavy systému x, ktoré nepatria do RPI množiny, je potrebné zostrojiť *konvexný lifting*. Cieľom je zostrojiť tento konvexný lifting nad *množinou konvergencie* (angl.: *Domain of Attraction*) $\mathcal{X}$.

Nech je daný neurčitý systém (2.1) a nech je daný zákon riadenia v tvare:

$$u(k) = \kappa(x(k)), \quad u(k) \in \mathbb{U}. \tag{4.4}$$

Potom pre danú hodnotu parametra λ, $0 \leq \lambda < 1$ je množina konvergencie $\mathcal{X} \subset \mathbb{X}$ taká, pre ktorú platí, že:

$$(A(\alpha)\, x(k) + B(\alpha)\, \kappa(x(k))) \oplus \mathbb{W} \subseteq \lambda\, \mathcal{X}, \tag{4.5}$$

$$\forall x(k) \in \mathcal{X}, \quad \forall [A(\alpha), B(\alpha)] \in \Psi. \tag{4.6}$$

Maximálna množina $\lambda-$konvergencie P_λ je množina obsahujúca všetky $\lambda-$konvergentné množiny v množine $\mathbb{X}$.

Pre potreby návrhu robustného riadenia pomocou konvexného liftingu uvažujeme, že množina konvergencie $\mathcal{X}$ je pre dané $0 \leq \lambda < 1$ aproximáciou maximálnej množiny $\lambda-$konvergencie P_λ, teda, že platí $\mathcal{X} = P_\lambda$. Súčasne možno bez straty na všeobecnosti predpokladať, že $\mathbb{Z} \subset P_\lambda$.

Cieľom je zostrojiť konvexný lifting $\ell(x) \geq 0$ nad množinou konvergencie $\mathcal{X}$ pre ktorý platí, že $\ell(x) = 0$ vtedy a len vtedy, ak $x \in \mathbb{Z}$. Ďalšie technické podrobnosti ohľadom konštrukcie $\mathcal{X}$, respektíve P_λ, možno nájsť v prácach Blanchini (1999); Nguyen a kol. (2017).

Pri návrhu konvexného liftingu sa zostrojí množina V_1 vrcholov RPI množiny $\mathbb{Z}$ a množina V_2 vrcholov RPI množiny $\mathbb{Z}$. Samotnou podstatou robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu je, že k týmto množinám sa zostroja pomocné množiny $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ s *liftingom* do vyššieho priestoru reálnych čísel:

$$\hat{V}_1 = \left\{ \left[x^\top, 0\right]^\top \subset \mathbb{R}^{d_\mathrm{x}+1} : x \in V_1 \right\}, \tag{4.7a}$$

$$\hat{V}_2 = \left\{ \left[x^\top, c\right]^\top \subset \mathbb{R}^{d_\mathrm{x}+1} : x \in V_2 \right\}, \tag{4.7b}$$

kde $c > 0$ je vhodne zvolená konštanta.

Skonštruovať konvexný lifting znamená vyriešiť optimalizačný problém parametrického lineárneho programovania (angl.: *Parametric Linear Programming*, pLP, Borrelli a kol. (2017)) v tvare

$$\ell(x) = \min_z z \tag{4.8a}$$

$$\text{pre: } x \in \mathcal{X}, \tag{4.8b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \Pi, \tag{4.8c}$$

kde optimalizovanou premennou s ohľadom na množinu parametrov $x \in \mathbb{R}^{d_x}$ je $z \in \mathbb{R}^1$. $\Pi \in \mathbb{R}^{d_x+1}$ je polytopická množina, ktorá vznikne ako konvexná obálka zo zjednotenia konvexných množín $\hat{V}_1$ a $\hat{V}_2$ (4.7).

Z konštrukcie konvexného liftingu vyplýva, že hodnota optimalizovanej premennej z nadobúda kladné hodnoty len nad množinou $\mathbb{X}_{\text{lift}}$, teda pre všetky stavy systému $x \in \mathbb{X}_{\text{feas}}$, pre ktoré súčasne platí, že $x \notin \mathbb{Z}$.

Konštrukcia konvexného liftingu je zhrnutá pomocou Algoritmu 4. Ďalšie technické podrobnosti ohľadom konštrukcie konvexného liftingu možno nájsť v práci Nguyen a kol. (2017).

Algorithm 4 Konštrukcia konvexného liftingu Nguyen a kol. (2017).

vstup: RPI množina $\mathbb{Z}$, aproximácia množiny konvergencie $\mathcal{X} = P_\lambda$ pre dané λ a parameter ladenia c

výstup: konvexný lifting $\ell(x)$

1: $V_1 \leftarrow \mathcal{V}(\mathbb{Z})$, $\hat{V}_1 = \left\{ \left[x^\top, 0\right]^\top \subset \mathbb{R}^{d_x+1} : x \in V_1 \right\}$

2: $V_2 \leftarrow \mathcal{V}(\mathcal{X})$, $\hat{V}_2 = \left\{ \left[x^\top, c\right]^\top \subset \mathbb{R}^{d_x+1} : x \in V_2 \right\}$

3: $\Pi \leftarrow \text{convhull}\left(\hat{V}_1 \cup \hat{V}_2\right)$

4: $\ell(x) \leftarrow$ riešenie (4.8)

4.4 Výpočet akčného zásahu mimo RPI množiny

Cieľom je vypočítať hodnoty akčných zásahov nad množinou konvexného liftingu $\mathbb{X}_{\text{lift}}$, teda mimo RPI množiny $\mathbb{Z}$. V takom prípade sa akčný zásah $u \in \mathbb{U}$ vypočíta pomocou riešenia nasledujúceho optimalizačného problému v tvare LP:

$$\begin{bmatrix} \gamma^\star \\ u(k)^\star \end{bmatrix} = \arg \min_{\gamma, u(k)} \gamma \tag{4.9a}$$

$$\text{pre:} \quad a_i^\top (A_j\, x(k) + B_j\, u(k) + w) + b_i \le \gamma\, \ell(x(k)), \tag{4.9b}$$

$$\gamma \ge 0, \quad u(k) \in \mathbb{U}, \quad \forall i \in \ell_N, \quad \forall w \in \mathbb{W}, \tag{4.9c}$$

$$\forall [A_j, B_j] \in \mathcal{V}(\mathbb{Z}), \tag{4.9d}$$

kde $\mathcal{V}(\mathbb{Z})$ predstavuje množinu vrcholov RPI množiny a ℓ_N je množina všetkých afinných funkcií tvoriacich konvexný lifting nad množinou $\mathbb{X}_{\text{lift}}$.

4.5 Algoritmus robustného riadenia s konvexným liftingom

Robustné riadenie založené na konvexnom liftingu je sumarizované pomocou Algoritmu 5.

Algorithm 5 Robustné riadenie založené na konvexnom liftingu Nguyen a kol. (2017).

vstup: neurčitý systém (2.1)
výstup: akčný zásah $u(k)$
I: *off-line fáza:*
výpočet RPI množiny $\mathbb{Z}$ a príslušného regulátora K
výpočet konvexného liftingu nad množinou $\mathbb{X}_{\text{lift}}$
II: *on-line fáza:*
if $x(k) \in \mathbb{X}_{\text{lift}}$ **then**
na základe riešenia LP (4.9) vypočítať akčný zásah $u(k)$
else if $x(k) \in \mathbb{Z}$ **then**
$u(k) = K\,x(k)$
end if

4.6 Laditeľné RPI množiny

Nevýhodou pôvodného prístupu konštrukcie RPI množín pre potreby návrhu robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu, ktorý bol predstavený v práci Nguyen a kol. (2017) je, že sa priamo nezohľadňujú žiadne kritéria na kvalitu riadenia. Tvar RPI množiny založený na riešení SDP (4.1) bol optimalizovaný s ohľadom na maximalizáciu svojho objemu. Avšak v rámci navrhnutej RPI množiny je s použitím lineárneho zákona riadenia (2.4) garantovaný len *nejaký* pokles hodnoty Ljapunovovej funkcie. Prirodzene, maximalizácia RPI množiny $\mathbb{Z}$ vedie k minimalizácii agresivity regulátora K lineárneho zákona riadenia (2.4).

Ďalšou nevýhodou pôvodného prístupu k návrhu robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu je, že SDP (4.1) explicitne nezohľadňuje vplyv aditívnych neurčitostí systému (2.1). Tieto aditívne neurčitosti sú následne implicitne zohľadnené v rámci interatívnej procedúry. Ak lineárny regulátor K navrhnutý nad RPI množinou Z nie je dostatočne agresívny, potom iteratívna procedúra zohľadňujúca aditívnu neurčitosť môže viesť na výrazne zredukovanú RPI množinu $\mathbb{Z}$. V najhoršom prípade PRI množinu nie je možné zostrojiť, teda $\mathbb{Z} = \varnothing$.

Tieto nedostatky je možné odstrániť uvažovaním analogických princípov návrhu robustného riadenia, ktoré boli predstavené v práci Kothare a kol. (1996). Navyše je tak možné pri návrhu robustného riadenia explicitne zohľadniť požiadavky na kvalitu riadenia.

Konštrukcia *laditeľných* RPI množín je založená na riešení nasledujúceho optimalizačného problému v tvare SDP

$$\min_{\gamma_j, X_j, Y_j} \gamma_j \tag{4.10a}$$

$$\text{s.t.:} \begin{bmatrix} X_j & \star & \star & \star \\ A_i X_j + B_i Y_j & X_j & \star & \star \\ Q_j^{1/2} X_j & 0 & \gamma_j I & \star \\ R_j^{1/2} Y_j & 0 & 0 & \gamma_j I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.10b}$$

kde $j = 1, i = 1, \ldots, L$, optimalizované premenné sú $0 < \gamma_j \in \mathbb{R}$, Y_j, a *vážená* inverzná matica $X_j = X_j^\top \in \mathbb{R}^{d_x \times d_x}$ kvadratickej Ljapunovovej funkcie:

$$V(x) = x^\top P_j x, \tag{4.11}$$

kde $P_j = \gamma_j X_j^{-1}$ je vážená Ljapunovova matica, ktorá je rozdielna od $\widetilde{Z} = Z^{-1}$ (4.2).

Na základe prípustného riešenia SDP (4.10) sa zostrojí príslušný zákon riadenia v tvare

$$u = K_j x, \tag{4.12}$$

pre j.-tu parametrizáciu zákona riadenia

$$K_j = Y_j X_j^{-1}. \tag{4.13}$$

SDP (4.10) sa rieši pre zadané váhové matice $0 \preceq Q_j \in \mathbb{R}^{d_x \times d_x}$, $0 \prec R_j \in \mathbb{R}^{d_u \times d_u}$, pre ktoré platí, že

$$V(x(0)) \leq -\sum_{k=0}^{\infty} \Big(x(k)^\top Q_j x(k) + u(k)^\top R_j u(k) \Big) . \tag{4.14}$$

Váhové matice Q_j, R_j tak predstavujú laditeľný stupeň voľnosti pri konštrukcii RPI množiny. Každý *kandidát* na výslednú polytopickú RPI množinu tak môže byť systematicky ladený pre dosiahnutie akceptovateľného kompromisu medzi výsledným objemom RPI množiny a kvalitou riadenia. Táto kvalita riadenia závisí od navrhnutého regulátora K_j a jeho schopnosti minimalizovať vplyv aditívnej neurčitosti w. Technické detaily možno nájsť napríklad v prácach Kothare a kol. (1996); Orvaec a kol. (2019).

Pripomeňme si, že počas on-line fázy sa v každom kroku riadenia akčný zásah u vypočíta buď vyriešením optimalizačného problému v tvare LP alebo aplikáciou lineárneho zákona riadenia, pozri Algoritmus 5. Z pohľadu výpočtovej náročnosti on-line fázy je výpočtovo/energeticky výhodnejšie, ak sa akčný zásah získa práve vyriešením lineárneho zákona riadenia. Preto je z pohľadu výpočtovej/energetickej náročnosti snaha maximalizovať objem RPI množiny $\mathbb{Z}$ v rámci množiny prípustných riešení $\mathbb{X}_{\text{feas}}$, na úkor objemu množiny $\mathbb{X}_{\text{feas}}$.

Prirodzene, výsledná veľkosť RPI množiny $\mathbb{Z}$ sa zmenšuje s rastúcou agresivitou regulátora a naopak. Preto je pre výslednú kvalitu riadenia potrebné vhodne zvoliť tento kompromis vyjadrený voľbou váhových matíc Q_j, R_j.

4.7 Prepínanie zákonov riadenia

Problémom ladenia RPI množín s ohľadom na kvalitu riadenia je, ako vhodne vyriešiť voľbu kompromisu medzi veľkosťou navrhnutej RPI množiny a požiadavkami na kvalitu riadenia. Efektívnym riešením môže byť práve implementácia prepínania medzi viacerými vhodne navrhnutými zákonmi riadenia (angl.: *Switching Control Law*).

Preto sa pre návrh robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu počas off-line fázy, teda pred samotným riadením, navrhne dvojica RPI množín $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, s príslušnou dvojicou regulátorov K_1, K_2.

Veľká-pomalá RPI množina $\mathbb{Z}_1$ je navrhnutá vzhľadom na maximalizáciu svojho objemu s ohľadom na množinu prípustných riešení $\mathbb{X}_{\text{feas}}$. V dôsledku maximalizácie objemu RPI množiny $\mathbb{Z}_1$ je príslušný regulátor K_1 navrhnutý nad touto množinou málo agresívny.

Malá-rýchla RPI množina $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_1$ je navrhnutá tak, aby bol príslušný regulátor K_2 navrhnutý nad touto množinou dostatočne agresívny a zabezpečil tak požadovanú mieru konvergencie stavov systému do počiatku.

Dvojica RPI množín $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$ a príslušných regulátorov K_1, K_2 sú navrhnuté vyriešením optimalizačného problému v tvare SDP (4.10). *Veľká-pomalá* RPI množina $\mathbb{Z}_1$ a regulátor K_1 sa získa vyriešením SDP (4.10) pre $j = 1$. *Malá-rýchla* RPI množina $\mathbb{Z}_2$ a regulátor K_2 sa vypočíta vyriešením SDP (4.10) pre $j = 2$. Výsledná kvalita riadenia závisí od vhodnej voľby dvojice váhových matíc Q_j, R_j in (4.10) pre $j = 1, 2$.

Následne sa počas on-line fázy, teda počas samotného riadenia procesu v reálnom čase, prepína medzi dvomi zákonmi riadenia podľa toho, v ktorej RPI množine sa aktuálne nachádzajú stavy systému. Teda ak $x(k) \in \mathbb{Z}_2$, potom

$$u(k) = K_2\, x(k)\,, \tag{4.15}$$

inak ak platí, že $x(k) \in \mathbb{Z}_1 \setminus \mathbb{Z}_2$ potom

$$u(k) = K_1\, x(k)\,, \tag{4.16}$$

inak $u(k)$ je dané vyriešením LP (4.9).

Cieľom je súčasne dosiahnuť minimalizáciu energetickej/výpočtovej náročnosti on-line fázy a maximalizovať kvalitu riadenia. Tieto ciele sa dosahujú tak, že sa minimalizuje frekvencia nutnosti riešiť optimalizačný problém v tvare LP maximalizáciou množiny $\mathbb{Z}_1$ na úkor množiny $\mathbb{X}_{\text{lift}}$. Zákon riadenia prislúchajúci k tejto *veľkej-pomalej* RPI množine (4.16) sa využíva len po nevyhnutnú dobu, pretože akonáhle stavy systému dosiahnú *malú-rýchlu* RPI množinu $\mathbb{Z}_2$, tak sa riadenie prepne na zákon riadenia (4.15).

Nakoľko sa do riadenia v reálnom čase zavádza princíp prepínania medzi množinou zákon riadenia, tak je potrebné certifikovať robustnú stabilitu uzavretého regulačného obvodu s ohľadom na prepínanie medzi regulátormi.

Túto garanciu možno získať tak, že sa zostrojí Ljapunovova funkcia uzavretého regulačného obvodu s ohľadom na všetky uvažované zákony riadenia. Kvadratickú Ljapunovovu funkciu, ktorá vyhovuje tejto podmienke možno získať vyriešením nasledujúceho optimalizačného problému v tvare SDP

$$\text{find } G \tag{4.17a}$$

$$\text{s.t.: } [A_i + B_i K_j]^\top G [A_i + B_i K_j] - G \prec 0, \tag{4.17b}$$

kde $G = G^\top \succ 0$, $i = 1, \ldots, L$, $j = 1, 2$, je matice kvadratickej Ljapunovovej funkcie uzavretého regulačného obvodu v tvare

$$V_{\mathrm{cl}}(x(k)) = x(k)^\top G \, x(k)\,. \tag{4.18}$$

Ak existuje prípustné riešenie optimalizačného problému (4.17), tak potom je uzavretý regulačný obvod robustne stabilný s ohľadom na prepínanie medzi uvažovanými zákonmi riadenia.

Poznámka 4 (Viacnásobné laditeľné RPI množiny) *Kvalitu riadenia možno zvýšiť pomocou viacnásobného návrhu N RPI množín $\mathbb{Z}_1 \subset \mathbb{Z}_2 \ldots \subset \mathbb{Z}_N$, ktoré môžu byť efektívne skonštruované vyriešením optimalizačného problému v tvare SDP* (4.10) *pre N párov váhových matíc $[Q_j\, R_j]$, $j = 1, \ldots, N$. Nevýhodou takéhoto prístupu je zvýšená pamäťová náročnosť na uchovanie N polytopických $\mathbb{Z}_j$ množín, N matíc regulátorov K_j, ako aj zvýšená výpočtová/energetická náročnosť on-line fázy spôsobená nevyhnutnosťou viacnásobného riešenia problému príslušnosti bodu k RPI množine (angl.: Point Location Problem).*

Poznámka 5 (Výpočtová náročnosť) *Výpočtová náročnosť spojená s riešením optimalizačného problému v tvare SDP je približne daná $\mathcal{O}(n_{\mathrm{o}}^3\, n_{\mathrm{r}})$, kde n_{o} je počet skalárnych optimalizačných premenných a n_{r} je počet riadkov uvažovaných LMI (Gahinet a kol., 1994, chap.8). Návrhom robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu s prepínaním medzi zákonmi riadenia dôjde k nahradeniu pôvodného optimalizačného problému v tvare SDP* (4.1) *za dva optimalizačné problémy v tvare SDP* (4.10)*. Výpočtová náročnosť sa mierne zvýši, ale dominantný kubický člen n_{o} bol zvýšený len o dve optimalizované premenné, a to γ_1, γ_2. Lineárny člen n_{r} bol zvýšený o $2(d_{\mathrm{x}}+d_{\mathrm{u}})$ riadkov. Toto mierne zvýšenie výpočtovej náročnosti nie je z pohľadu riadenia relevantné, nakoľko k nemu dochádza len jednorazovo, počas off-line fázy.*

4.8 Algoritmus riadenia s využitím laditeľných RPI množín

Návrh robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu s využitím laditeľných RPI množín je zhrnutý v Algoritme 6.

Algorithm 6 Robustné riadenie založené na konvexnom liftingu s využitím laditeľných RPI množín Orvaec a kol. (2019).

vstupy: neurčitý systém (2.1), požiadavky na kvalitu (váhové matice Q_j, R_j pre j = 1,2)
výstup: akčný zásah $u(k)$
I: *off-line fáza:*
výpočet RPI množín $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$ a príslušných regulátorov K_1, K_2
výpočet konvexného liftingu nad množinou $\mathbb{X}_{\text{lift}}$
II: *on-line fáza:*
if $x(k) \in \mathbb{X}_{\text{lift}}$ **then**
na základe riešenia LP vypočítať akčný zásah $u(k)$
else if $x(k) \in \mathbb{Z}_2$ **then**
$u(k) = K_2\, x(k)$
else if $x(k) \in \mathbb{Z}_1$ **then**
$u(k) = K_1\, x(k)$
end if

4.9 Interpolácia zákona riadenia

Návrhu viacnásobných laditeľných RPI množín vedie k zvýšenej výpočtovej náročnosti off-line fázy, teda prípravnej fázy návrhu regulátora. Jednou z možností, ako túto nevýhodu prekonať je uvažovať s *interpoláciou* zákona riadenia v rámci on-line fázy, teda počas riadenia v reálnom čase. Umožní sa tým ladenie *agresivity* regulátora nad vopred definovanou množinou explicitne skonštruovaných hraničných hodnôt regulátora bez dodatočnej potreby riešiť ďalší optimalizačný problém. Táto metóda návrhu robustného riadenia je v súčasnosti v stave analýzy vlastností uzavretého regulačného obvodu.

Kapitola 5

Záver

Predložená habilitačná práca sumarizuje hlavné prínosy autora v oblasti návrhu, vývoja a implementácie pokročilých metód robustného riadenia komplexných a energeticky náročných systémov chemického priemyslu. Hlavnými prínosmi tejto práce sú:

1. Navrhnutie pokročilých metód v kontexte robustného MPC založeného na LMI. Slnenie tohto cieľa je dokumentované v kapitole 3, kde boli postupne predstavené alternatívne prístupy k návrhu robustného MPC, originálny prístup implementácie nesymetrických obmedzení založený na časovo-premenlivých symetrických obmedzeniach, ako aj mäkké obmedzenia formulované v kontexte LMI.

2. Navrhnutie pokročilých metód v kontexte robustného riadenia založeného na konvexnom liftingu. Slnenie tohto cieľa je dokumentované v kapitole 4, v ktorej je predstavený originálny prístup umožňujúci pri návrhu robustného riadenia explicitne zohľadniť požiadavky na kvalitu pomocou laditeľných RPI množín. Súčasne sa redukuje výpočtová/energetická náročnosť riadenia v reálnom čase.

3. Tvorba softvérových nástrojov na jednoduchý návrh pokročilého robustného riadenia. Slnenie tohto cieľa bolo dokumentované v priložených publikovaných prácach prostredníctvom všetkých simulačných a experimentálne nameraných výsledkov, ktoré boli získane práve pomo-

cou vytvoreného a voľne dostupného toolboxu `MUP`: `https://bitbucket.org/oravec/mup/wiki/Home`

4. Numerická a experimentálna implementácia a validácia navrhnutých prístupov robustného riadenia. Slnenie tohto cieľa je dokumentované prostredníctvom priložených prác publikovaných v kvalitných vedeckých časopisoch a na významných medzinárodných konferenciách.

Budúce rozšírenia tejto práce sa môžu zamerať na splnenie nasledujúcich cieľov:

- analýza ďalších možností implementácie pokročilých metód do návrhu robustného MPC založeného na LMI, ako napríklad obmedzenie veľkosti zmeny akčného zásahu (angl.: *Slew Rate Constraints*),
- analýza vlastností návrhu robustného riadenia pomocou konvexného liftingu založeného na interpolácií zákonov riadenia,
- aktualizácia voľne dostupného softvérového nástroja na návrh robustného MPC založeného na LMI,
- vývoj voľne dostupného softvérového nástroja na návrh robustného riadenia pomocou konvexného liftingu.

Literatúra

M. Bakošová a J. Oravec: Robust model predictive control for heat exchanger network. *Applied Thermal Engineering*, 73(1):924–930, 2014.

A. Bemporad a M. Morari: Robust Model Predictive Control: A Survey. V *Robustness in Identification and Control*, 207–226. Springer London, 1999.

F. Blanchini. Set Invariance in Control. *Automatica*, 35:1747–1767, 1999.

F. Borrelli, A. Bemporad a M. Morari: *Predictive Control for Linear and Hybrid Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2017.

S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron a V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.

S. Boyd a L. Vandenberghe: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, USA, 2004.

Y. Y. Cao a Z. Lin: Min-max MPC algorithm for LPV systems subject to input saturation. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, 153:266–272, 2005.

F. A. Cuzzola, J. C. Geromel a M. Morari: An Improved Approach for Constrained Robust Model Predictive Control. *Automatica*, 38:1183–1189, 2002.

B. Ding, Y. Xi, M. T. Cychowski a T. O'Mahony: Improving Off-line Approach to Robust MPC Based-on Nominal Performance Cost. *Automatica*, 43:158–163, 2007.

B. Ding, Y. Xi a S. Li: A Synthesis Approach of On-line Constrained Robust Model Predictive Control. *Automatica*, 40:163–167, 2004.

P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub a M. Chilali: *LMI Control Toolbox*. The MATH Works, Nitick, USA, 1994.

H. Huang, D. Li, Z. Lin a Y. Xi: An Improved Robust Model Predictive Control Design in the Presence of Actuator Saturation. *Automatica*, 47:861–864, 2011.

M. V. Kothare, V. Balakrishnan a M. Morari: Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, 32:1361–1379, 1996.

A. M. Lyapunov: *The General Problem of the Stability of Motion (in Russian)*. Doktorská práca, University Kharkov, Kharkov, Russia, 1892.

J. W. Mao: Robust Stabilization of Uncertain Time-Varying Discrete Systems and Comments on "An Improved Approach for Constrained Robust Model Predictive Control". *Automatica*, 39:1109–1112, 2003.

MOSEK. 2019. `https://mosek.com/`.

N. A. Nguyen, S. Olaru, P. Rodríguez-Ayerbe a M. Kvasnica: Convex liftings-based robust control design. *Automatica*, 77:206–213, 2017.

J. Oravec: *Robustné prediktívne riadenie chemickotechnologických procesov*. Doktorská práca, ÚIAM FCHPT STU v Bratislave, Radlinského 9, 812 37 Bratislava, 2014.

J. Oravec a M. Bakošová: Alternative LMI-based robust MPC design approaches. V *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Robust Control Design*, 8, 180–184. Elsevier, Bratislava, Slovak Republic, 2015a.

J. Oravec a M. Bakošová: Robust model-based predictive control of exothermic chemical reactor. *Chemical Papers*, 69(7), 2015b.

J. Oravec a M. Bakošová. Robust MPC based on nominal system optimization and weighted control input saturation. V *54th IEEE Conference on Decision and Control*. 2015c.

J. Oravec a M. Bakošová. Soft constraints in the robust MPC design via LMIs. V *American Control Conference*, 3588–3593. Boston, Massachusetts, USA, 2016.

J. Oravec, M. Bakošová a L. Hanulová: Experimental investigation of robust mpc design with integral action for a continuous stirred tank reactor. V *57th IEEE Conference on Decision and Control*, diel 57, 2611–2616. Miami, Florida, USA, 2018.

J. Oravec, M. Bakošová, A. Mészáros a N. Míková: Experimental investigation of alternative robust model predictive control of a heat exchanger. *Applied Thermal Engineering*, 774–782, 2016.

J. Oravec, M. Bakošová, D. Pakšiová, N. Mikušová a K. Batárová: Advanced robust mpc design of a heat exchanger: Modeling and experiments. V L. P. Antonio Espuña, Moisès Graells, redaktor, *27th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, 1585–1590. Elsevier, Barcelona, Spain, 2017a.

J. Oravec, M. Kvasnica a M. Bakošová: Quasi-non-symmetric input and output constraints in LMI-based robust MPC. V *Preprints of the 20th IFAC World Congress, Toulouse, France*, diel 20, 11829–11834. 2017b.

J. Oravec, D. Pakšiová, M. Bakošová a M. Fikar: Soft-constrained alternative robust MPC: Experimental study. V *Preprints of the 20th IFAC World Congress, Toulouse, France*, diel 20, 11877–11882. 2017c.

J. Orvaec, J. Holaza, M. Horváthová, N. A. Nguyen, M. Kvasnica a M. Bakosova: Convex-lifting-based robust control design using the tunable robust invariant sets. *European Journal of Control*, 2019.

J. F. Sturm: Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11:625–653, 1999.

L. Vandenberghe a S. Boyd: Semidefinite Programming. *SIAM Review*, 38:49–95, 1996.

Z. Wan a M. V. Kothare: An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 39:837–846, 2003.

W. Yang, G. Feng a T. J. Zhang: Robust Model Predictive Control of Uncertain Linear Systems with Persistent Disturbances and Input Constraints. V *European Control Conference, Zürich, Switzerland*, 542–547. 2013.

L. Zhang, J. Wang a K. Li: Min-Max MPC for LPV Systems Subject to Actuator Saturation by a Saturation-Dependent Lyapunov Function. V *Chinese Control Conference, Xi'an, China*, 4087–4092. 2013.

Curriculum Vitae

Juraj Oravec

Dátum narodenia: 1. február 1987
Štátna príslušnosť: Slovenská republika
E-mail: juraj.oravec@stuba.sk
Webová stránka: `uiam.sk/~oravec`

Vzdelanie

PhD. študijný program: Riadenie procesov, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2014

- *prospel s vyznamenaním* – cena rektora STU
- 2013, september–október: študíjny pobyt v *Crystal Design Laboratory*, Iwate University, Morioka, Japonsko (Prof. K. Shimizu)
- 2014: *EECI Graduate School on Control – Model Predictive Control* (Prof. J. Maciejowski), Supeléc, Paríž, Francúzsko
- 2013: *EECI Graduate School on Control – Robust Hybrid Control Systems* (R. G. Sanfelice), Supeléc, Paríž, Francúzsko

Ing. študijný program: Automatizácia a informatizácia v chémii a potravinárstve, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2010

– *prospel s vyznamenaním* – cena dekana FCHPT, STU

Bc. študijný program: Automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2008.

– *prospel s vyznamenaním* – cena dekana FCHPT, STU

Ocenenia

2014 Cena rektora STU v Bratislave

– za vynikajúce plnenie študijných povinností počas celého štúdia

2013 Cena rektora STU v Bratislave – Študent roka 2013

– v kategórii doktorandi FCHPT

2011 Cena Slovenskej spoločnosti pre kybernetiku a informatiku pri SAV

– za prezentáciu príspevku na konferencii ELITECH'11

2010 Cena za najlepšiu diplomovú prácu

– cena udelená spoločnosťou Fermas, s.r.o.

2010 2. miesto – Študentská vedecká konferencia na univerzite

– sekcia: Automatizácia, aplikovaná informatika

2009 1. miesto – 11. Študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– sekcia: Informatizácia, informačné technológie

2008 1. miesto – 10. Študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– sekcia: Informatizácia, informačné technológie

Prednášky na zahraničných univerzitách a "Keynote Lectures" na medzinárodných konferenciách

2019 Shinshu University, Nagano, Japonsko

- Prednáška: *Advanced Robust Model Predictive Control for Energy Intensive Plants*

2018 Technical University Dortmund, Nemecko

- Prednáška: *Advanced Techniques for Energy Efficient LMI-based Robust MPC Design*

2018 21st Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction

- *Keynote Lecture*: *Robust Model Predictive Control of a Plate Heat Exchanger*

2018 Ruhr University Bochum, Nemecko

- Prednáška: *Fixed Memory Parallel Explicit MPC*

2018 Shinshu University, Nagano, Japonsko

- Prednáška: *LMI-based Robust Model Predictive Control: Theory and Applications*

2017 ShanghaiTech University, Čína

- Prednáška: *Model Predictive Control*

2016 19th Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction

- *Keynote Lecture*: *Robust Model Predictive Control of Heat Exchangers in Series*

2016 RWTH University, Aachen, Nemecko

– Prednáška: *Robust Model Predictive Control Design Based on Linear Matrix Inequalities*

2014 17th Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction

– *Keynote Lecture*: *PDLF-based Robust MPC of a Heat Exchanger Network*

Predseda a spolu-predseda na medzinárodných konferenciách

2018 57th IEEE Conference on Decision and Control, Miami, Florida, USA
sekcia: *Process Control*

2018 21st Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction, Praha, Česká republika
sekcia: *Waste and Wastewater Treatment*

2017 21st IEEE International Conference on Process Control, Štrbské Pleso, Slovenská republika
sekcia: *Applications and Case Studies*

2015 European Control Conference, Linz, Austria
sekcia: *Computer Aided Methods*

2015 19th IEEE International Conference on Process Control, Štrbské Pleso, Slovenská republika
sekcia: *Algorithms and Computing for Control*

2014 17th Conference on Process Integration, Modelling and Optimisation for Energy Saving and Pollution Reduction
sekcia: *Industrial Application and Optimal Design*

2013 19th IEEE International Conference on Process Control, Štrbské Pleso, Slovenská republika
sekcia: *Robotic Control*

2013 40th International Conference of Slovak Society of Chemical Engineering, Tatranské Matliare, Slovenská republika
sekcia: *Simulation, Optimization and Control*

Získané granty

2015–2016 Grant na podporu excelentných tímov mladých výskumníkov STU v Bratislave

2014 Grant na podporu mladých výskumníkov STU v Bratislave

2013 SAIA – Národný štipendijný program SR: výskumný pobyt na Iwate University, Morioka, Japonsko

2013 *Support Grant of EECI Graduate School on Control*

2013 Grant na podporu mladých výskumníkov STU v Bratislave

Aktivity

2018 20. slovenská študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– člen organizačného výboru

2017 19. slovenská študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– člen organizačného výboru

2016 18. slovenská študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– člen organizačného výboru

2015 17. slovenská študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– člen organizačného výboru

2014 16. slovenská študentská vedecká konferencia v odbore chémie a chemickej a potravinárskej technológie

– člen organizačného výboru

2011–2014 Akademický senát FCHPT

– študentská časť

Aktívna účasť na akciách popularizujúcich vedu a štúdium

2019 ERASMUS Meeting, VŠCHT, Praha

2017 – 2018 Európska noc výskumníkov, Bratislava

2017 – 2018 Vedecký veľtrh, Bratislava

2016 – 2018 MiniErasmus FCHPT

2018 Letná škola STU 2018

2015 – 2017 Kariérny deň, Partizánske

2017 Dotkni sa chémie, SOŠ Nováky

2014 – 2016 Chemický jarmok – CHEMSHOW, FCHPT

2016 – 2019 Týždeň otvorených dverí FCHPT

2016 – 2018 Týždeň otvorených laboratórií, ÚIAM FCHPT

Zamestnanie

2014–2019 Vedecko-výskumný/pedagogický pracovník, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Slovenská technická univerzita v Bratislave.

2011–2014 Vedecko-výskumný/pedagogický pracovník, Fakulta chemickej a potravinárskej technológie, Slovenská technická univerzita v Bratislave.

Priložené publikované práce

J. Oravec – J. Holaza – M. Horváthová – N. A. Nguyen – M. Kvasnica – M. Bakošová: Convex-lifting-based robust control design using the tunable robust invariant sets. *European Journal of Control*, 2019.

J. Oravec – M. Bakošová – M. Trafczynski – A. Vasičkaninová – A. Mészáros – M. Markowski: Robust model predictive control and PID control of shell-and-tube heat exchangers. *Energy*, 159:1–10, 2018.

J. Oravec – M. Bakošová – M. Trafczynski – A. Vasičkaninová – A. Mészáros – M. Markowski: Experimental investigation of alternative robust model predictive control of a heat exchanger. *Applied Thermal Engineering*, 105:774–782, 2016.

M. Bakošová – J. Oravec: Robust model predictive control for heat exchanger network. *Applied Thermal Engineering*, 73:924–930, 2014.

J. Oravec – M. Bakošová: Robust model-based predictive control of exothermic chemical reactor. *Chemical Papers*, 69 (10):1389–1394, 2015.

A. Vasičkaninová – M. Bakošová – Ľ. Čirka – M. Kalúz – J. Oravec: Robust controller design for a laboratory heat exchanger. *Applied Thermal Engineering*, 128:1297–1309, 2018.

J. Oravec – M. Kvasnica – M. Bakošová: Quasi-Non-Symmetric Input and Output Constraints in LMI-based Robust MPC. *IFAC World Congress, Toulouse, France*, 20:11829–11834, 2017.

J. Oravec – D. Pakšiová – M. Bakošová – M. Fikar: Soft-Constrained Alternative Robust MPC: Experimental Study. *IFAC World Congress,*

Toulouse, France, 20:11877–11882, 2017.

J. Oravec – M. Bakošová – L. Hanulová: Experimental Investigation of Robust MPC Design with Integral Action for a Continuous Stirred Tank Reactor. *IEEE Conference on Decision and Control, Miami, Florida, USA*, 57:2611–2616, 2018.

J. Oravec – M. Bakošová: Robust MPC Based on Nominal System Optimization and Weighted Control Input Saturation. *IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan*, 54: 6239–6244, 2015.

J. Oravec – M. Bakošová – D. Pakšiová – N. Mikušová – K. Batárová: Robust MPC Based on Nominal System Optimization and Weighted Control Input Saturation. *European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, 27: 1585–1590, 2017.

J. Oravec – M. Bakošová: Alternative LMI-based Robust MPC Design Approaches. *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 8: 180–184, 2015.