Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
Slovenská technická univerzita v Bratislave

Doc. Ing. Ivo Petráš, PhD.

Fractional-order systems and fractional-order controllers: Methods for their modelling, identification, and implementation

Vedný odbor: 020313 – Riadenie procesov

Autoreferát dizertácie pre získanie vedeckej hodnosti doktora technických vied

Košice, december 2012

Dizertácia k získaniu vedeckej hodnosti doktora technických vied sa predkladá ako súbor publikovaných prác vypracovaný podľa platných predpisov a to podľa vyhlášky SKVH č. 65/1977 Zb. z. v znení neskorších predpisov vykonaných vyhláškou SKVH č. 302/1990 Zb. z.

Dizertácia bola vypracovaná na Oddelení automatizácie a riadenia procesov, Ústave riadenia a informatizácie výrobných procesov Fakulty BERG Technickej univerzity v Košiciach. Výsledky publikované v prácach tvoriacich dizertáciu boli získané v rokoch 1997-2012 v rámci riešenia grantových úloh Vedeckej grantovej agentúry VEGA, Agentúry na podporu výskumu a vývoja APVV, ako aj v rámci zahraničných výskumných grantov a absolvovaných zahraničných výskumných pobytov autora.

Uchádzač: doc. Ing. Ivo Petráš, PhD.
Oddelenie automatizácie a riadenia procesov
Ústav riadenia a informatizácie výrobných procesov
Fakulta BERG Technickej univerzity v Košiciach
B. Němcovej 3, 042 00 Košice

Oponenti: prof. RNDr. Jozef Kačur, DrSc., FMFI UK Bratislava
prof. Ing. Roman Prokop, PhD., FAI UTB Zlín
prof. Ing. Ivan Taufer, DrSc., FEI U Pardubice
prof. Ing. Pavel Zítek, DrSc., SjF ČVUT Praha

Stanovisko k dizertácii vypracovala Fakulta BERG Technickej univerzity v Košiciach (pracovisko dizertanta v čase podania dizertácie).

Autoreferát bol rozoslaný dňa: 26.8.2013

Obhajoba dizertácie sa koná dňa 4.10.2013 o 11:00 hod pred komisiou č. 020313 pre obhajoby doktorských dizertácií z vedného odboru „Riadenie procesov“ na FCHPT STU, Radlinského 9, 812 37 Bratislava, v miestnosti VR FCHPT č. 154 (blok C).

S dizertáciou je možné sa oboznámiť na Oddelení pre vedu a výskum FCHPT STU Bratislava (Radlinského 9, 812 37 Bratislava).

Predseda komisie „ad hoc“ pre obhajoby doktorských dizertačných prác vo vednom odbore č. 020313 – Riadenie procesov

Prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
ÚIAM FCHPT STU Bratislava
Radlinského 9, 812 37 Bratislava

Ministerstvo školstva Slovenskej republiky
Slovenská technická univerzita v Bratislave

Doc. Ing. Ivo Petráš, PhD.

Fractional-order systems and fractional-order controllers: Methods for their modelling, identification, and implementation

Vedný odbor: 020313 – Riadenie procesov

Autoreferát dizertácie pre získanie vedeckej hodnosti
doktora technických vied

Košice, december 2012

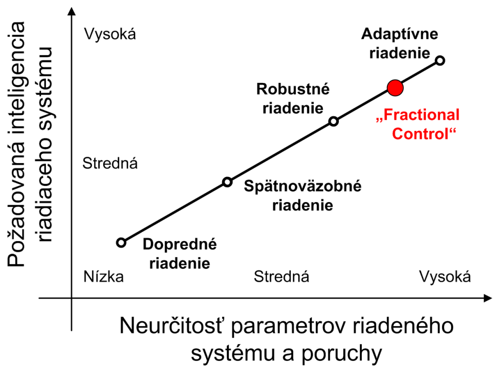
Obsah

1 Úvod

Predkladanú dizertačnú prácu tvorí súbor prác autora [P-1] až [P-11], ktoré boli uverejnené v rokoch 1999 - 2012.

Práca je venovaná niektorým aplikáciam derivácií a integrálov neceločíselného rádu v modelovaní a riadení procesov. Zaoberá sa hlavne využitím diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu na matematické modelovanie lineárnych a nelineárnych systémov, identifikáciou ich parametrov, metódami návrhu parametrov regulátorov neceločíselného rádu a ich analógovou a digitálnou implemetáciou.

Základné otázky súvisiace s problematikou derivácií a integrálov neceločíselného rádu, spôsoby opisu lineárnych a nelineárnych dynamických systémov neceločíselného rádu, problémy týkajúce sa stability takýchto systémov, numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu a niektoré vybrané modely nelineárnych systémov sú zahrnuté do monografie [P-1]. Ako sa ukázalo, stabilita takýchto systémov je stále otvorenou otázkou, ktorou je potrebné zaoberať sa, o čom svedčí aj príspevok [P-2] do knihy „Unsolved problems in mathematics and control systems"(Princeton University Press, 2004). V tomto príspevku je riešená problematika robustnej stability. Otázky identifikácie dynamických systémov neceločíselného rádu boli skúmané v prácach [P-3] a [P-4]. V článku [P-3] bola na účely identifikácie parametrov ekonomického systému, ktorý bol popísaný sústavou diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu, využitá úplná metóda najmenších štvorcov a v článku [P-4] bola navrhnutá nová identifikačná metóda, využívajúca Mittag-Lefflerovu funkciu, ktorá je základom riešenia diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu.



Obr. 1: *Približné delenie známych metód riadenia a postavenie riadenia tzv. „Fractional Control".*

Práce [P-5], [P-6] a [P-7] sa zaoberajú novými typmi regulátorov neceločíselného rádu a metódami návrhu parametrov takýchto regulátorov, ktoré sa využívajú na základnej (basic control) úrovni riadenia. Problematika adaptívneho riadenia s modelmi neceločíselného rádu je popísaná v práci [P-8]. Na implemetáciu nových typov regulátorov neceločíselného rádu boli vyvinuté metódy pre ich analógovú [P-9] a digitálnu implementáciu [P-10]. Praktické aspekty návrhu a implementácie týchto regulátorov sú zhrnuté v prehľadovej práci [P-11]. Využívanie regulátorov neceločíselného rádu v riadení má v anglickom jazyku ustálené slovné spojenie „fractional control". Ak by sme chceli zaradiť „fractional control" medzi existujúce spôsoby riadenia vzhľadom na neurčitosť parametrov riadenej sústavy, poruchy pôsobiace na sústavu a úroveň použitého riadenia, môžeme to urobiť tak, ako je to znázornené na Obr.1. Výsledky prác ukazujú, že ide o riadenie, ktoré je dostatočne robustné a veľmi vhodne využíva niektoré vlatnosti derivácie a integrálu neceločíselného rádu, ako je napríklad pamäťový efekt a ďalší stupeň voľnosti [13].

Predkladané práce tvoriace dizertáciu sú vybrané tak, aby autor mal rovnaký podiel na výstupe uvedenom v publikácii v prípade, že nie je jej jediným autorom.

2 Vedecké ciele a prínosy práce

Hlavným cieľom práce je predstaviť podiel autora v oblasti výskumu aplikácií derivácií a integrálov neceločíselného rádu v matematickom modelovaní a riadení procesov. Ide predovšetkým o metódy, ktoré by umožnili efektívne využiť diferenciálne rovnice neceločíselného rádu pre modelovanie reálnych procesov, identifikovať parametre takýchto modelov a metódy pre návrh parametrov a implementáciu regulátorov neceločíselného rádu na riadenie reálnych objektov. Za týmto účelom bolo, okrem vyššie uvedeného, potrebné rozpracovať aj metódy pre numerické riešenie diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu, aby ich bolo možné jednoducho aplikovať v praxi, napríklad aj pri digitálnej implementácii regulátorov neceločíselného rádu. Ďalej boli rozpracované aj otázky súvisiace so stabilitou systémov neceločíselného rádu, ktorá je nevyhnutným kritériom pre správne fungovanie každého systému. Preto bol výskum orientovaný aj na tieto podporné aspekty dôležité pre praktické aplikácie.

Na základe výsledkov uvedených v súbore prác tvoriacich dizertáciu boli publikované aj 4 monografie, z toho dve v zahraničných vydavateľstvách (Springer a World Scientific), 3 kapitoly v zahraničných monografiách, viac ako 55 článkov v recenzovaných časopisoch, viac ako 80 príspevkov v recenzovaných zborníkoch z vedeckých konferencií, 7 priemyselných aplikácií a podporný softvér (balíky funkcií) pre Matlab/Simulink publikovaný na MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange.

3 Hlavné výsledky dizertačnej práce

Hlavné výsledky predloženého súboru prác tvoriacich dizertáciu, dosiahnuté pri plnení vyššie uvedených vedeckých cieľov, je možné rozdeliť do nasledujúcich blokov:

- metódy pre numerické riešenie diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu, kde okrem rekurentných vzťahov pre riešenie diferenciálnych rovníc boli navrhnuté aj aproximačné metódy v diskrétnej oblasti,
- základné otázky súvisiace so stabilitou systémov neceločíselného rádu, pričom okrem klasickej teórie stability bola rozpracovaná aj robustná stabilita,
- metódy identifikácie dynamických systémov neceločíselného rádu, ktoré využívajú nové prístupy ako napríklad úplnú metódu najmenších štvorcov alebo Mittag-Lefflerovu funkciu,
- metódy pre návrh parametrov regulátorov ($PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátorov) neceločíselného rádu, pričom ide hlavne o metódu umiestnenia pólov, metódu využívajúcu minimalizáciu normy H_{∞}, metódu využívajúcu Bodeho ideálnu prenosovú funkciu a metódy pre adaptívne riadenie neceločíselného rádu,
- metódy pre implementáciu takýchto regulátorov neceločíselného rádu v analógovej a v digitálnej podobe.

Každý z týchto blokov je podrobnejšie charakterizovaný v ďalších častiach práce.

3.1 Matematické modelovanie reálnych dynamických systémov

3.1.1 Prehľad súčasného stavu

Diferenciálny počet neceločíselného (ľubovoľného reálneho) rádu je čoraz častejšie diskutovanou témou vedeckých výskumov a inžinierskych aplikácií. Myšlienka derivácie a integrálu neceločíselného rádu nie je nová. Pravdepodobne prvá zmienka o derivácii neceločíselného rádu bola v Leibnizovom liste L'Hospitalovi v roku 1695. Historicky prvou aplikáciou bola Abelova štúdia problému tautochronov z roku 1881. V posledných rokoch sa objavilo viacero prác, v ktorých je popísané využitie derivácie neceločíselného rádu v rôznych oblastiach vedy a výskumu (viď [23, 20, 30]).

V minulosti bola teória derivácie neceločíselného rádu doménou matematikov, pretože neexistoval jednoduchý matematický aparát pre jej jednoduchú aplikáciu. V súčasnosti sú už vyvinuté efektívne metódy pre analytické aj numerické riešenie derivácie a integrálu neceločíselného rádu. Sú tiež dobre rozpracované metódy pre riešenie diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu. Tieto metódy dávajú možnosti aplikovať deriváciu a integrál neceločíselného rádu v praktických aplikáciách napríklad vo fyzike, chémii, elektrotechnike, hutníctve, ekonomike a pod.

Na analýzu dynamických vlastností systémov je potrebné poznať ich presnú matematickú reprezentáciu vyjadrenú vhodným matematickým modelom. Tento model je vo väčšej alebo menšej miere abstrakciou a idealizáciou reálneho systému. Reálne systémy sú vo všeobecnosti sústavami neceločíselného rádu, aj keď u niektorých typov sústav je rád veľmi blízky celočíselnému rádu. Doposiaľ sa dynamické systémy popisovali ako sústavy celočíselného rádu bez ohľadu na nepriaznivé dôsledky, ktoré môže spôsobiť zanedbanie reálneho rádu systému. Zanedbanie reálneho rádu bolo zapríčinené neexistenciou jednoduchých matematických nástrojov pre popis takýchto sústav. Keďže v súčasnosti už existujú metódy a nástroje pre výpočet derivácií a integrálov neceločíselného rádu, je možné pri modelovaní zohľadniť aj reálny rád systému. Tento rád môže byť konštantný, premenlivý a dokonca aj distribuovaný. Takéto matematické modely sú adekvátnejšie na popis dynamických vlastností systémov ako doteraz používané modely s deriváciami a integrálmi celočíselného rádu a využívajú sa v rôznych oblastiach (viď napr.: [17, 21, 23, 27, 34, 35], atď.).

"... the temperature of the environment is time-dependent. Furthermore, as shown in Petras & Vinagre (2002), the transient unit response of the heat solid system could be fractional-order ...", H.S.Ahn et al., Sadhana (2009), 34(5):833-850.

Nie je žiadúce vytvárať nové matematické modely dynamických systémov tak, že napríklad v pôvodnej diferenciálnej rovnici nahradíme derivácie celočíselného rádu deriváciami neceločíselného rádu bez zmysluplného dôvodu. Existuje niekoľko faktorov, ktoré nám do značnej miery predurčujú to, že daný objekt alebo proces je potrebné popísať modelom, v ktorom sa vyskytuje integrál alebo derivácia neceločíselného rádu. Jednou z príčin adekvátnejšieho modelovania systémov pomocou derivácie neceločíselného rádu je pamäť systémov a prebiehajúcich procesov, pretože derivácia neceločíselného rádu je vynikajúcim nástrojom na zachytenie pamäťových a dedičných vlastností materiálov a procesov. K takýmto procesom patria napríklad elektrochemické procesy alebo procesy prenosu tepla. Dedičné chovanie vykazujú napríklad väzkopružné materiály alebo napríklad proces difúzie. Drsnosť alebo pórovitosť materiálu môže taktiež viesť k modelom s deriváciami neceločíselného rádu. Patrí sem napríklad kondenzátor, ktorého dosky (elektródy) majú drsný povrch. Napríklad už pri samotnom odvodzovaní matematického modelu elekrického obvodu s reálnym kondenzátorom zohľadňujeme tieto vlastnosti a výsledný model obsahuje deriváciu neceločíselného rádu. Rekurzivita ($u_{k+1} = qu_k$, $q =$ konšt.$, \forall k$) tiež vedie k derivácii neceločíselného rádu. Príkladom na rekurzivitu je RC obvod so stromovým alebo rebríkovitým usporiadaním súčiastok. Samostatnou časťou, ktorá môže viesť k modelom s deriváciami neceločíselného rádu je fraktalita a chaotické chovanie systémov (Brownov pohyb).

Na využitie derivácie a integrálu neceločíselného rádu v riadení procesov doteraz chýbajú vhodné metódy analýzy a identifikácie regulovaných sústav a metódy syntézy regulátorov a ich implementácií v praxi. Návrh týchto nových metód je hlavnou témou tejto doktorskej dizertačnej práce.

3.1.2 Matematický aparát: derivácia a integrál neceločíselného rádu

Na vyjadrenie derivácie a integrálu neceločíselného (ľubovoľného) rádu je možné definovať spoločný operátor ${}_aD_b^\alpha$, kde α ($\alpha \in R$) je rád a $[a, b]$ sú hranice operácie. Nejedná sa teda o lokálny operátor, ako je to v prípade derivácií celých rádov. V dizertácii sa využívajú tri definície derivácie (integrálu) neceločíselného rádu, ktoré sú pre širokú triedu funkcií navzájom ekvivalentné [27].

Grünwaldovu - Letnikovu definíciu (GLD) derivácie neceločíselného rádu α podľa premennej t je možné napísať v tvare:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(t - ih), \tag{1} $$

kde [.] znamená celočíselnú časť, a a t sú hranice operácie ${}_aD_t^\alpha f(t)$.

Riemannovu - Liouvillovu definíciu (RLD) derivácie neceločíselného rádu α je možné zapísať v nasledujúcom tvare:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \qquad (n - 1 < \alpha < n). \tag{2} $$

Caputovu definíciu (CD) derivácie neceločíselného rádu α je možné zapísať v nasledujúcom tvare:

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \qquad (n - 1 < \alpha < n). \tag{3} $$

Definícia (3) je veľmi vhodná pre praktické aplikácie, pretože ak je použitá Caputova derivácia v diferenciálnych rovniciach neceločíselného rádu, môžeme uvažovať s rovnakými počiatočnými podmienkami ako pri klasických diferenciálnych rovniciach, t.j. $f^{(m)}(0)$, pre $m = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Pri Riemannovej-Liouvillovej derivácii (2) môže nastať problém s interpretáciou počiatočných podmienok. Problémy súvisiace s fyzikálnou intepretáciou počiatočných podmienok pri použití Riemannovej-Liouvillovej derivácie a ich aplikáciou v reálnych úlohách bol riešený v práci [11].

3.1.3 Spôsoby popisu dynamických systémov neceločíselného rádu

Existuje niekoľko spôsobov, ktorými môžeme matematicky popísať systémy neceločíselného rádu. V tejto časti spomenieme niekoľko z nich. Vo všeobecnosti na popis lineárneho systému neceločíselného rádu môžeme využiť diferenciálnu rovnicu neceločíselného rádu v tvare [27]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + \ldots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + \ldots + b_1 D^{\beta_1} u(t) + b_0 D^{\beta_0} u(t), \tag{4}$$

kde $D^\gamma \equiv {}_0D_t^\gamma$ je Riemannova-Liouvilleova, Caputova alebo Grünwaldova-Letnikova derivácia neceločíselného rádu v závislosti od interpretácie použitých počiatočných podmienok a ich fyzikálneho významu.

V mnohých inžinierskych aplikáciách sa často používa Laplaceova transformácia, ktorá pre RLD, GLD and CD derivácie a integrály neceločíselného rádu r s nulovými počiatočnými podmienkami má tvar [23]:

$$\mathcal{L}\{{}_aD_t^{\pm r} f(t); s\} = s^{\pm r} F(s). \tag{5}$$

S využitím Laplaceovej transformácie (5) môžeme systém neceločíselného rádu (4) popísať korešpondujúcou prenosovou funkciou v tvare [27]:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \ldots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \ldots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s^{\beta_k})}{P(s^{\alpha_k})}, \tag{6}$$

kde a_k $(k = 0, \ldots n)$, b_k $(k = 0, \ldots m)$ sú konštanty a α_k $(k = 0, \ldots n)$, β_k $(k = 0, \ldots m)$ sú ľubovoľné reálne alebo iracionálne čísla, ktoré môžu byť zoradené ako $\alpha_n > \ldots > \alpha_1 > \alpha_0$ a $\beta_m > \ldots > \beta_1 > \beta_0$.

Lineárny časovo nemenný (LTI) systém neceločíselného rádu môže byť vyjadrený aj v stavovom tvare [P-1]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\mathbf{r}} x(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t), \end{aligned} \tag{7}$$

kde $x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^m$ a $y \in \mathrm{R}^p$ sú stavový, vstupný a výstupný vektor systému, $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{p\times n}$ a $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_n]^T$ sú neceločíselné rády. Ak $r_1 = r_2 = \ldots r_n \equiv \mathbf{r}$, systém (7) je tzv. deliteľného rádu, ináč je to systém tzv. nedeliteľného rádu.

V tejto dizertačnej práci uvažujeme aj so všeobecným zápisom nelineárneho systému neceločíselného nedeliteľného rádu v tvare [P-1]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{r_i} x_i(t) &= f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \\ x_i(0) &= c_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

kde f_i sú nelineárne funkcie a c_i sú počiatočné podmienky. Vektorový zápis systému (8) je:

$$D^{\mathbf{r}} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{9}$$

kde $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_n]^T$ pre $0 < r_i < 2$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$.

3.1.4 Riešenie diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu

Na riešenie diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu existuje viacero metód, ktoré boli publikované v priebehu posledných rokov. Analytické metódy riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu boli popísané v práci [27]. Numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu boli popísané napríklad v prácach [8, 15, 27, 29].

V práci [P-1] bola popísaná numerická metóda riešenia diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu, ktorú je možno s výhodou použiť okrem riešenia lineárnych aj na riešenie nelineárnych diferenciálnych rovníc neceločíselného rád. Táto metóda využíva princíp krátkej pamäti popísaný v práci [27].

Pre praktický numerický výpočet derivácie alebo integrálu neceločíselného rádu je možné odvodiť vzťah založený na GLD (1), ktorý má tvar:

$$ {}_{(k-L/h)}D_{kh}^{\pm r} f(t) \approx h^{\mp r} \sum_{i=v}^{k} (-1)^i \binom{\pm r}{i} f_{k-i} = h^{\mp r} \sum_{i=v}^{k} c_i^{(\pm r)} f_{k-i}, \tag{10} $$

kde h je krok výpočtu a kde $v = 0$ pre $k < (L/h)$ alebo $v = k-(L/h)$ pre $k > (L/h)$, pričom L je dĺžka pamäti a $(-1)^i\binom{\pm r}{i}$ sú binomické koeficienty $c_i^{(\pm r)}$, $(i = 0, 1, \ldots)$, pre ktoré platí vzťah [8]:

$$ c_0^{(\pm r)} = 1, \qquad c_i^{(\pm r)} = \left(1 - \frac{1 + (\pm r)}{i}\right) c_{i-1}^{(\pm r)}. \tag{11} $$

Je samozrejmé, že použitím princípu krátkej pamäti dochádza k chybe pri výpočte. Ak je funkcia ohraničená $f(t) \leq M$, potom môžeme určiť odhad dĺžky pamäti L pre požadovanú presnosť ϵ podľa vzťahu [27]:

$$ L \geq \left(\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1-r)|} \right)^{1/r}. \tag{12} $$

Na odvodenie všeobecného tvaru numerického riešenia uvažujme diferenciálnu rovnicu neceločíselného rádu v tvare začiatočnej úlohy (initial value problem):

$$ {}_aD_t^r y(t) = f(y(t), t) \tag{13} $$

s počiatočnými podmienkami $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, kde $n - 1 < r < n$. S využitím aproximácie (10) získame vyjadrenie pre numerické riešenie, ktoré môže byť zapísané ako [P-1]:

$$ y(t_k) = f\left(y(t_k), t_k\right) h^r - \sum_{i=v}^{k} c_i^{(r)} y(t_{k-i}), \tag{14} $$

kde $t_k = kh$. Pre tzv. pamäťový člen vyjadrený sumou môže byť využitý princíp krátkej pamäti alebo môžeme uvažovať s nekonečne dlhou pamäťou a v takom prípade $v = 1$ pre všetky hodnoty k vo vzťahu (14).

V prípade, že je potrebné riešiť viacčlenné diferenciálne rovnice neceločíselného rádu, kde sa v rovnici vyskytuje n derivácií neceločíselného rádu, je výhodné urobiť rozklad na n diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu s využitím substitúcie $y(t) \equiv x_1(t)$ a ďalej $D^{\alpha_1} x_1(t) = x_2(t), \ldots, D^{\alpha_n} x_n(t) = g(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t))$.

3.1.5 Stabilita dynamických systémov neceločíselného rádu

V monografii [P-1] boli skúmané otázky stability lineárnych a nelineárnych systémov neceločíselného rádu. Hoci myšlienka definície stability systémov neceločíselného rádu bola profesorom Matignonom popísaná v práci [19], bolo potrebné systematicky usporiadať a popísať metódy pre vyšetrovanie stability lineárných a nelineárných systémov neceločíselného rádu.

Klasické metódy vyšetrovania stability, ako napríklad Routh-Hurwitzovo kritérium, nemôžu byť vzhľadom na reálny rád systému použité, preto bolo potrebné nájsť iné postupy. Hlavnou príčinou je to, že pri systéme neceločíselného rádu dostávame namiesto polynómu n-tého stupňa takzvaný pseudopolynóm, ktorý je mnohoznačnou funkciou. Korene takejto funkcie ležia na Riemannových listoch, ktoré tvoria Riemannovu plochu. Ich hľadanie už nie je triviálne. Prvý Riemannov list je najdôležitejší, pretože iba korene ležiace na tomto liste majú vplyv na stabilitu systému. Je nutné poznamenať, že mapovanie prvého Riemannovho listu $-\pi < \arg(s) < \pi$ do Gaussovej komplexnej roviny sa robí pomocou transformácie $w = s^q$ a teda korešpondujúca oblasť v Gaussovej komplexnej rovine w je definovaná $-q\pi < \arg(w) < q\pi$, kde q je neceločíselný rád systému. Z uvedeného vyplýva, že stabilná oblasť v Gaussovej komplexnej rovine potom nie je jej ľavá polovica, ale je to výsek daný transformačným vzťahom. Je samozrejmé, že pre $q = 1$ dostaneme klasický prípad. V monografii [P-1] bolo na príkladoch ukázané, ako je možné posúdiť stabilitu vybraných lineárnych, aj lokálnu stabilitu nelineárnych systémov neceločíselného rádu.

V práci [P-2] bola sformulovaná otázka robustnej stability pre prípad systému neceločíselného rádu, ktorého parametre sú neurčité, ale je známy interval, v ktorom sa tieto parametre nachádzajú. Ide o stále otvorenú otázku. V monografii [P-1] bola neurčitosť parametrov systému rozšírená aj na neurčitosť jeho rádu. Vyšetrovanie robustnej stability je potom možné urobiť s využitím modifikácie Kharitonovho teorému. Kharitonov teorém a následne 4 Kharitonove polynómy sú použiteľné iba pre prípad systému celočíselného rádu. Modifikácia teorému spočíva v tom, že je potrebné vyšetriť 2^n polynómov, kde n je počet intervalov s neurčitými parametrami. Charakteristický pseudopolynóm pre všeobecný prípad môžeme potom zapísať v tvare:

> "The problem of generalization of the robust stability test procedure for a general linear time invariant fractional-order (LTI-FO) systems has been discussed by Petras et al. [28]. Petras et al. [29] proposes an approach based on intuitive extension of Kharitonov edge theorem for interval polynomials for investigating the stability of linear time invariant fractional-order system with small number of uncertain intervals." — P.S. Nataraj et al., Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. (2010), 15(4): 946–955.

$$P(s, o, q) = \sum_{i=0}^{n} [q_i^-, q_i^+] s_i^{[o^-, o^+]}, \tag{15}$$

kde $q^\pm$ je parametrická intervalová neurčitosť a $o^\pm$ je rádová intervalová neurčitosť.

V monografii [P-1] bolo na príkladoch ukázané, že autorom navrhnutý postup je možné použiť na vyšetrovanie robustnej stability lineárnych systémov neceločíselného rádu. Ako bolo ďalej ukázané aj v práci [P-4], neurčitosť parametrov systému a aj jeho rádu je problém, ktorý je často potrebné riešiť v praktických aplikáciách.

3.1.6 Vybrané modely systémov neceločíselného rádu

V monografii [P-1], ale aj v ďalších prácach tvoriacich dizertáciu [P-3, P-4, P-7, P-11], boli popísané nové matematické modely procesov a systémov, ktoré využívajú diferenciálne rovnice neceločíselného rádu. Bolo ukázané, že tieto modely sú adekvátnejšie ako klasické a lepšie popisujú reálne správanie systému.

Súčasťou monografie [P-1] je aj balík funkcií pre Matlab, ktorý je voľne dostupný na web stránke MathWorks, Inc., File Exchange. Balík obsahuje výber 15 základných matematických modelov chaotických systémov neceločíselného rádu v podobe funkcií, pomocou ktorých je možné veľmi jednoducho simulovať stavové trajektórie a časové priebehy týchto chaotických systémov pre zadaný čas simulácie, parametre systému a zvolené počiatočné podmienky. Tento balík funkcií (toolbox) s názvom *Fractional-Order Chaotic Systems* s demo ukážkami je dostupný na: *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27336*.

"The principal goal of this monograph is to introduce the reader to a new and rapidly growing branch of dynamical systems called fractional-order chaotic systems. … Although many classes of fractional-order chaotic systems are not discussed, the book is a very nice first step towards a systematic description of this new and interesting direction of research." — Y. V. Rogovchenko, Zentralblatt MATH, recenzia monografie [P-1], Zbl 1228.34002, 2012.

Niektoré modely nelineárnych systémov neceločíselného rádu, ktoré sú popísané v monografii [P-1] boli prevzaté z iných publikovaných prác, iné boli čiastočne modifikované a 3 systémy boli odvodené a popísané autorom dizertácie. Výber spomínaných 15 modelov bol urobený tak, aby tieto modely predstavovali aplikácie v základných oblastiach vedy a výskumu, ako napríklad elektrotechnika, chémia, fyzika, ekonomika, atď. V práci boli popísané aj niektoré spôsoby riadenia takýchto systémov. Pre každý systém je okrem popisu matematického modelu neceločíselného rádu, s využitím Jacobianu vyšetrená aj lokálna stabilita systému a odvodené numerické riešenie sústavy diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu opisujúcich model systému. Toto numerické riešenie je potom implementované už vo vyššie spomenutom toolboxe ako funkcia pre Matlab.

"Petras [8] designed fractional-order Chua's system." — Y. N. Ning et al., Chin. Phys. B (2012), 21(8),080503.

Veľká pozornosť je v monografii [P-1] venovaná modelom elektrických obvodov, napríklad aj veľmi známemu systému, takzvanému Chuovmu systému neceločíselného rádu. Po prvýkrát bol autorom odvodený model, kde sa prirodzenou cestou objavili derivácie neceločíselného rádu. Iní autori častokrát iba nahradili derivácie celočíselného rádu deriváciami neceločíselného rádu bez uvedenia dôvodu. Tento prístup nie je správny. Dôvody pre použitie modelu s deriváciou neceločíselného rádu boli podrobne popísané v práci a tiež bol ukázaný postup, ako správne odvodiť modely rôznych elektrických obvodov, ktoré však nemusia nevyhnutne používať deriváciu alebo integrál neceločíselného rádu.

"As was demonstrated recently by Petras in case of Chua's system [20], if one derives the equations properly, not all equations are of fractional order." — X. Y. Wang, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. (2009), 14(8): 3351–3357.

"As discussed in Petras (2008), the models containing derivatives of fractional order such as fractional-order Van der Pol can represent electrical circuits if one admits that the real capacitors and inductors have memory …" — M. S. Tavazoei et al., Journal of Vibration and Control (2009), 15(6): 803-819.

3.2 Identifikácia systémov neceločíselného rádu

3.2.1 Prehľad súčasného stavu

Ako už bolo ukázané viacerými autormi, matematické modely s deriváciami neceločíselného rádu sú adekvátnejšie na popis dynamických vlastností reálnych systémov. Vo všeobecnosti je však u sústav typu (4) nutné okrem konštantných koeficientov a_k, b_k $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ identifikovať aj rády derivácií $\beta_k, \alpha_k\,(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, ktoré nie sú celočíselné, ale reálne a teda nemožno použiť klasické identifikačné metódy. V práci [9] bola navrhnutá identifikačná metóda, ktorá využíva kombináciu metódy derivácie prechodových chrakteristík a metódu pasívneho prehľadávania intervalu na ktorom sa hľadajú neznáme rády $\beta_k, \alpha_k\,(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ pre rôznu jemnosť delenia intervalu.

Okrem identifikácie systémov neceločíselného rádu v časovej oblasti je možno využiť aj frekvenčnú oblasť. Metóda identifikácie vo frekvenčnej oblasti na identifikáciu parametrov modelu elektrochemickýh procesov a parametrov modelu flexibilného robotického ramena bola popísaná v práci [21]. Ďalšie aplikácie identifikačných metód vo frekvenčnej oblasti je možné nájsť v práci [24]. Identifikácia parametrov IPMC (Ionic Polymer Metal Composite) modelu neceločíselného rádu v podobe Marquardt algoritmu bola podrobne popísaná v práci [5].

Hľadanie efektívnej identifikačnej metódy pre modely neceločíselného rádu je stále otvorenou otázkou. V ďalších častiach práce popíšeme dva nové prístupy identifikácie parametrov takýchto modelov. Prvý prístup je navrhnutý v stavovom priestore a druhý rieši úlohu v časovej oblasti.

3.2.2 Identifikácia v stavovom priestore

Je všeobecne známe, že stavový priestor má v teórií automatického riadenia významné postavenie. Je vhodný pre návrh LQ riadenia, vyšetrovanie stability z priebehu stavových trajektórií a hlavne popis vlastností systému je z hľadiska viacerých potrebných matematických úkonov efektívnejší ako klasický vstupno-výstupný opis.

V práci [P-3] bola navrhnutá identifikačná metóda, ktorá využíva stavový priestor a matematický model v podobe sústavy diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu:

$$
\begin{aligned}
{}_0D_t^{q_1} x_1(t) &= a_{11}\; x_1(t) + a_{12}\; x_2(t) + a_{13}\; x_3(t) + c_1, \\
{}_0D_t^{q_2} x_2(t) &= a_{21}\; x_1(t) + a_{22}\; x_2(t) + a_{23}\; x_3(t) + c_2, \\
{}_0D_t^{q_3} x_3(t) &= a_{31}\; x_1(t) + a_{32}\; x_2(t) + a_{33}\; x_3(t) + c_3.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc (16) bol použitý nasledujúci algoritmus. Najprv pomocou maticového prístupu popísaného v práci [29] bola zostavená derivačná matica $\mathbf{D}$. Kroneckerov produkt matice koeficientov $\mathbf{A}$ a jednotkovej matice $\mathbf{E}_n$, kde n je počet uzlov, v ktorých je derivácia počítaná, je definovaný ako

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{E}_n \tag{17}$$

Potom matica výsledného algebrického systému je

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{C} \tag{18}$$

Vektor pravej strany $\mathbf{c}$ musí byť transformovaný do stĺpcového vektora $\mathbf{r}$, kde dĺžka vektora je $3 \times n$ (n je počet dátových bodov), aby vyhovoval rovnici:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{r}, \tag{19}$$

kde $\mathbf{X}$ je matica koordinátov $[\mathbf{x}_1(t),\ \mathbf{x}_2(t),\ \mathbf{x}_3(t)]$ z bodov ležiacich na krivke, ktorou prekladáme namerané dáta.

Keďže uvažujeme o hľadaní optimálnej krivky v 3D priestore, nie je možné použiť klasickú metódu najmenších štvorcov, ale musíme použiť úplnú metódu najmenších štvorcov, kde budeme uvažovať najkratšiu (kolmú) vzdialenosť od nameraného bodu v priestore k hľadanej krivke. Táto metóda je v zahraničnej literatúre známa aj ako „total least squares". V našom prípade sú optimálne hodnoty parametrov $\mathbf{q}$, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{c}$ potom získané minimalizáciou sumy kolmých vzdialeností nameraných dát $\mathbf{P}_k$=[GDP$_k$, INF$_k$, UE$_k$], ktorými boli v práci [P-3] stavy národných ekonomík, k modelovanej trajektórii $T(t)$, čo môže byť zapísané ako:

$$E = \sum_{k=1}^{n} d(\mathbf{P}_k, T(t)), \tag{20}$$

kde n je počet nameraných bodov. Výsledkom tohoto optimalizačného procesu sú optimálne hodnoty parametrov $\mathbf{q}_{opt}, \mathbf{A}_{opt}, \mathbf{c}_{opt}$ a matica bodov $\mathbf{X}$, ktoré reprezentujú modelovanú trajektóriu.

V tejto súvislosti je potrebné poznamenať, že navrhovaný identifikačný postup je možné teoreticky rozšíriť až do n-rozmerného stavového priestoru. Keďže uvažujeme s kolmou vzdialenosťou medzi nameraným bodom a hľadanou krivkou, je možné aj ináč geometricky interpretovať štvorec tejto vzdialenosti. V práci [26] bola navrhnutá geometrická intepretácia, ktorú autor spolu s ďalším spoluautorom nazvali „total least circles". Kritérium minimalizácie je v takom prípade definované ako

"The article by Petras and Podlubny is a very readable tutorial on the subject of total least squres, which they call least circles from the geometric interpretation of the technique.– P. Teetor, R/Finance Conference 2011.

$$E = \sum_{i} \pi \left[d\Big((x_i, y_i), f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \Big) \right]^2, \tag{21}$$

pričom je vidieť, že známy vzťah je vynásobený číslom π, kde $d\Big((x_i, y_i), f\Big)$ je vzialenosť medzi nameranými bodmi (x_i, y_i) a krivkou danou modelom f. Tento postup je aplikovateľný aj pre 3D priestor. V takom prípade dostaneme namiesto kruhov gule. V prípade n-rozmerného priestoru pojde o hypersféry. Tieto postupy boli podrobne opísané a diskutované v práci [26].

Za účelom vytvárania statických a dynamickýh modelov systémov z nameraných dát s využitím úplnej metódy najmenších štvorcov bol autorom v spolupráci s inými spoluautormi vytvorený balík funkcií pre Matlab s názvom *Total Least Squares Method*, ktorý je voľne dostupný na web stránke MathWorks, Inc., File Exchange (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31109*) a tiež funkcia `fit_3D_data()` (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12395*).

3.2.3 Identifikácia v časovej oblasti

Na identifikáciu parametrov modelu v podobe diferenciálnej rovnice neceločíselného rádu bola v práci [P-4] popísaná nová identifikačná metóda, ktorá je založená na použití Mittag-Lefflerovej funkcie. Podstata metódy je nasledovná: Keď hľadáme matematický model z nameraných dát, je zaužívanou praxou, že vyberáme vhodnú krivku a identifikujeme jej parametre použitím nejakého kritéria (najčastejšie metódy najmenších štvorcov). Pri novej metóde poukazujeme na to, že vybratie konkrétnej krivky znamená, že proces je modelovaný pomocou diferenciálnej rovnice, pre ktorú je daná krivka jej riešením.

Napríklad, ak prekladáme namerané dáta rovnicou $y(t) = at + b$ (lineárny regresný model) znamená to, že proces je modelovaný ako riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu s dvomi počiatočnými podmienkami:

$$y'' = 0, \quad y(0) = b, \quad y'(0) = a. \tag{22}$$

Podobne je to ak prekladáme dáta funkciou $y = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$, to znamená, že proces je modelovaný ako riešenie diferenciálnej rovnice v tvare:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = b, \quad y'(0) = a\omega. \tag{23}$$

Vybraním ďalšej veľmi často používanej funkcie v tvare $y = ae^{bt}$ postulujeme, že proces je modelovaný ako riešenie diferenciálnej rovnice v tvare:

$$y' - b\,y = 0, \quad y(0) = a. \tag{24}$$

Ak uvažujeme naďalej týmto smerom, môžeme hovoriť, že namiesto postulovania krivky, ktorá má modelovať namerané dáta, je možné postulovať tvar diferenciálnej rovnice a identifikovať jej parametre za určených počiatočných podmienok. Napríklad, ak chceme namerané dáta modelovať krivkou v tvare:

$$y = y_0\, E_{\alpha,1}(a\, t^{\alpha}), \tag{25}$$

kde $E_{\alpha,\beta}(z)$ je Mittag-Lefflerova funkcia definovaná ako [27]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \tag{26}$$

potom parametre, ktoré majú byť identifikované sú α, a, a y_0.

Ak sú namerané dáta modelované funkciou (25), to znamená, že sú modelované ako riešenie nasledujúcej diferenciálnej rovnice neceločíselného rádu, ktorá využíva Caputovu definíciu derivácie rádu α:

$$_0D_t^{\alpha} y(t) - a\, y(t) = 0, \quad y(0) = y_0. \tag{27}$$

V práci [P-4] bola použitá vyššie popísaná metóda na identifikáciu parametrov modelu vybíjania elektrického obvodu v podobe diferenciálnej rovnice neceločíselného rádu. Za týmto účelom bola vytvorená a publikovaná funkcia pre Matlab s názvom `mlffit()` (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32170*).

3.3 Regulátory neceločíselného rádu

3.3.1 Prehľad súčasného stavu

V priemyselných aplikáciách sa stále vo veľkej miere využívajú Proporcionálno-Integračno-Derivačné (PID) regulátory. Ako bolo uvedené napríklad v knihe [1], tak 95% riadiacich slučiek v praxi je tvorených PID/PI regulátormi. Riadiace algoritmy založené na PID regulátoroch patria teda stále medzi najpopulárnejšie. Táto popularita spočíva hlavne v ich efektívnosti a funkčnej jednoduchosti.

Už z minulosti sú známe niektoré pokusy využívať deriváciu a integrál neceločíselného rádu v riadení. Ako príklad je možné uviesť priekopnícku prácu profesora Tustina z roku 1958, kde s využitím integrálu neceločíselného rádu riadil masívny objekt [31]. Ďalej je možné spomenúť aj ďalšie využitie integrálu neceločíselného rádu v riadení [18], ktoré navrhol profesor Manabe v roku 1961 alebo veľmi podobný návrh profesora Carlsona z roku 1961 na riadenie servomotorov [6].

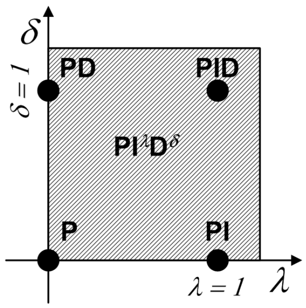
Klasický tvar PID regulátora je možné zovšeobecniť na regulátor, ktorý bude mať neceločíselný rád pri integračnej a derivačnej zložke. Týmto zovšeobecnením dostávame $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátor neceločíselného rádu. Je definovaný prenosovou funkciou [28]:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \ + T_i s^{-\lambda} + T_d s^{\delta}, \quad (\lambda, \delta \in R), \tag{28}$$

kde $E(s)$ je obraz regulačnej odchýlky na vstupe a $U(s)$ je obraz výstupu z regulátora. Prenosovej funkcii (28) zodpovedá v časovej oblasti diferenciálno-integrálna rovnica neceločíselného rádu

$$u(t) = Ke(t) + T_i \, {}_0D_t^{-\lambda} e(t) + T_d \, {}_0D_t^{\delta} e(t), \tag{29}$$

kde λ je rád integrovania, δ je rád derivovania, K, T_i a T_d sú parametre regulátora.



Obr. 2: *Klasické typy PID regulátorov v rovine $\lambda - \delta$.*

Všetky klasické druhy PID regulátorov sú partikulárnymi prípadmi $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátorov (Obr. 2): pri $\lambda = 1$ a $\delta = 1$ máme klasický PID regulátor, pre $\lambda = 1$ a $\delta = 0$ dostávame PI regulátor, pri $\lambda = 0$ a $\delta = 1$ máme PD regulátor a pre $\lambda = 0$ a $\delta = 0$ získame iba proporčný člen (P regulátor). Vďaka tomu, že rády integrátora a derivátora môžu nadobúdať aj hodnoty odlišné od 0 alebo 1, umožňujú regulátory typu $PI^{\lambda}D^{\delta}$ lepšie prispôsobiť riadenie povahe riadenej sústavy. Na praktickú implementáciu regulátorov neceločíselného rádu musia byť pre daný proces vhodnou metódou navrhnuté parametre regulátora: $K, T_i, T_d, \lambda, \delta$.

Okrem vyššie popísaného $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátora neceločíselného rádu existujú aj jeho rôzne modifikácie, ako napríklad $P[ID]^{\alpha}$ alebo $[PI]^{\alpha} - [PD]^{\beta}$ a tiež úplne iné koncepcie ako je CRONE regulátor a jeho tri generácie [24], Lead-Lag kompenzátory [21] alebo TID regulátor [16]. Velmi dobrý prehľad existujúcich typov regulátorov neceločíselného rádu, ich rôznych modifikácií a tiež prehľad existujúcich metód pre návrh ich parametrov je urobený v monografiách [5, 21]. To, že sa jedná o významnú oblasť výskumu dokazuje aj fakt, že v USA bol v roku 2009 profesorovi Chenovi udelený patent na metódu pre návrh parametrov regulátorov neceločíselného rádu [12].

3.3.2 Metóda návrhu parametrov regulátorov neceločíselného rádu založená na umiestnení pólov

“Petras [proposed] a method based on the pole distribution of the characteristic equation in the complex plane (Petras, 1999).” — A. Biswas et al., Engineering Applications of Artificial Intelligence (2009), 22(2): 343-350.

“Petras (1999) [suggested] a method based on the pole distribution ...” — G. G. Roy at al., International Journal of Bio-Inspired Computation (2010), 2(5):303-309.

“Petras [9] came up with a method based on the pole distribution of the characteristic equation in the complex plane.” — A. Rajasekhar et al., Lecture Notes in Computer Science (2011), Springer, 670-678.

V práci [P-5] bola vypracovaná nová metóda pre návrh parametrov regulátora neceločíselného rádu, ktorá je založená na princípe metódy dominantných koreňov. Táto metóda využíva niektoré vlastnosti komplexnej premennej. Jej podstata vychádza z umiestnenia pólov (koreňov) charakteristickej rovnice v Gaussovej komplexnej rovine. Vzdialenosť pólov od imaginárnej osi udáva mieru stability. Póly, ktoré su k imaginárnej osi najbližšie z ľava sú dominantné a určujú výsledné chovanie regulačného obvodu. Pri syntéze regulátora je snaha dosiahnuť to, aby priebeh regulovanej veličiny bol totožný so zložkou riešenia odpovedajúcej dominantným koreňom. Hodnoty dominantných koreňov, ktoré majú byť riešením charakteristickej rovnice sa stanovia na základe požiadaviek na kvalitu regulačného obvodu. To znamená, že dominantné korene určíme pre žiadanú mieru stability σ a mieru tlmenia $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$, kde ω_n je prirodzená frekvencia, pričom tlmená prirodzená frekvencia oscilácií je $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Týmto podmienkam vyhovuje pár komplexne združených koreňov

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d. \tag{30}$$

Parametre regulátora sa nastavujú tak, aby ostatné korene charakteristickej rovnice boli od dominantných koreňov vzdialené čo najviac vľavo.

Pri regulátore neceločíselného rádu nám oproti klasickému regulátoru celočíselného rádu pribudli ďalšie parametre, a to rád derivácie δ a rád integrálu λ. Dáva nám to viac možností pre lepšie zohľadnenie dynamických vlastností regulovaných sústav, nakoľko máme viac stupňov voľnosti. Pri syntéze regulátora je možné okrem žiadanej miery stability a miery tlmenia definovať aj prípustnú regulačnú odchýlku.

Návrh parametrov regulátora je možné v zásade rozdeliť na dve časti:

1. **Návrh parametra K**
   Pri návrhu parametra K vychádzame zo vzťahu pre prípustnú regulačnú odchýlku $e_\infty[\%]$:
   $$K = (100/e_\infty) - a_0, \tag{31}$$
   kde a_0 je absolútny člen z modelu riadenej sústavy.

2. **Návrh parametrov Td, δ, Ti, λ**
   Pre žiadanú mieru stability a mieru tlmenia vyhovuje už uvedený pár komplexne združených koreňov (30). Rovnako, ako pri klasickej metóde dominantných koreňov, pri návrhu používame charakteristickú rovnicu uzavretého regulačného obvodu. Rovnica má tvar:
   $$C(s)P(s) + 1 = 0. \tag{32}$$

Po dosadení prenosovej funkcie regulátora a prenosovej funkcie regulovaného systému do charakteristickej rovnice (32) a po úpravách dostaneme charakteristickú rovnicu v nasledujúcom tvare:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^{\beta_k} + (K + T_i s^{-\lambda} + T_d s^{\delta}) = 0. \tag{33}$$

Táto algebrická rovnica (33) je uvedená vo všeobecnom tvare pre regulovaný systém neceločíselného rádu, ktorý môžeme popísať n-člennou diferenciálnou rovnicou a pre $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátor neceločíselného rádu. Pre jednotlivé partikulárne prípady $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátora a rôzne regulované systémy môžeme odvodiť iné výsledné tvary charakteristickej rovnice.

Z matematického pohľadu ide nie o polynóm, ale o tzv. pseudopolynóm, pričom tu nemožno hovoriť ani o jeho stupni. Po vyriešení tejto rovnice dostaneme parametre regulátora. Riešenie urobíme tak, že dosadíme jeden z dvojice komplexných koreňov do rovnice (33), ďalej parametre sústavy a parameter K, ktorý sme si vypočítali podľa prípustnej regulačnej odchýlky (31). Keďže sa jedná o funkciu komplexnej premennej, charakteristická rovnica (33) bude mať reálnu časť a imaginárnu časť a teda získame dve rovnice. Výsledkom riešenia týchto rovníc sú parametre regulátora neceločíselného rádu navrhnutého pre žiadanú mieru stability, mieru tlmenia a maximálnu prípustnú trvalú regulačnú odchýlku, pokiaľ absentuje integračná zložka v regulátore.

Riešenie charakteristickej rovnice a teda aj návrh parametrov regulátora K, T_i, λ, T_d a δ je možné urobiť napríklad aj numerickou metódou, pričom pojde o riešenie úlohy:

$$\min_{K_p,T_i,\lambda,T_d,\delta} ||C(s)P(s)+1||_{s=-\sigma\pm j\omega_d}.$$

kde $C(s)$ je obrazový prenos regulátora a $P(s)$ je obrazový prenos riadenej sústavy.

Popísaná metóda návrhu umožňuje navrhnúť parametre $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátora, ktorý zabezpečuje žiadanú mieru stability, mieru tlmenia a odstráni trvalú regulačnú odchýlku. Pokiaľ je potrebné navrhnúť regulátor neceločíselného rádu tak, aby zabezpečoval okrem vyššie spomenutej miery tlmenia a miery stability aj požadovanú amplitúdovú A_m a fázovú bezpečnosť Φ_m pre špecifikovanú medznú frekvenciu ω_{cg}, ktoré sú mierou robustnosti, môžeme pre korekciu resp. nový návrh parametrov regulátora využiť nasledujúce vzťahy [21]:

$$|C(j\omega_{cg})P(\omega_{cg})|_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB}$$

$$\arg(C(j\omega_{cg})P(\omega_{cg})) = -\pi + \Phi_m$$

Vyššie uvedené vzťahy sa často využívajú pre autonastavovacie techniky regulátorov. Všetky doteraz publikované výsledky ukazujú, že takto navrhnuté regulátory neceločíselného rádu sú dostatočne robustné a kvalitatívne zabezpečujú lepšiu reguláciu, ako klasické regulátory celočíselného rádu.

3.3.3 Metóda návrhu parametrov regulátorov neceločíselného rádu pomocou H_∞ normy

V práci [P-6] bola popísaná nová metóda návrhu parametrov regulátora neceločíselného rádu, ktorá využíva vlastnosti normy H_∞, pričom je známe, že norma opisuje veľkosť signálu s jeho maximálnou hodnotou. Nech f je funkcia, ktorá zobrazuje imaginárnu os do komplexnej roviny; $f : jR \to C$, potom ∞-norma funkcie f je definovaná [7]:

"Petras and Hypiusova (2002) also suggested a numerical multicriteria optimisation method for the H_∞ case." — D. Valerio et al., Acta Polytechnica Hungarica (2006), 3(4): 55-70.

$$||f(j\omega)||_\infty = \sup|f(j\omega)|, \qquad \forall\omega. \tag{34}$$

Ak $P(s)$ je prenosová funkcia systému, potom jej H_∞ norma je maximálna hodnota frekvenčnej charakteristiky $P(j\omega)$ pre všetky ω. V Bodeho amplitúdovej charakteristike je to najväčšia amplitúda a v Nyquistovej charakteristike je to maximálna vzdialenosť Nyquistovej krivky od počiatku súradnicovej osi.

Aby pri návrhu robustného riadenia boli zahrnuté aj neurčitosti, tak sa minimalizuje veľkosť citlivostných prenosových funkcií opisujúcich uzavretý regulačný obvod. Pre tieto účely sú bežne skúmané tieto citlivostné funkcie:

- *nominálna citlivostná funkcia:*

$$S(\omega) = \frac{E(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{1}{1 + P_n(j\omega)C(j\omega)}, \tag{35}$$

- *nominálna doplnková citlivostná funkcia:*

$$T(\omega) = \frac{Y(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{P_n(j\omega)C(j\omega)}{1 + P_n(j\omega)C(j\omega)}, \tag{36}$$

kde $P_n(j\omega)$ je prenosová funkcia nominálneho modelu riadenej sústavy a $C(j\omega)$ je prenosová funkcia regulátora.

Pri návrhu parametrov regulátora uvažujeme s nominálnou citlivostnou funkciou a doplnkovou citlivostnou funkciou. Úlohu je potom možné formulovať tak, aby $|S(\omega)|$ a $|T(\omega)|$ boli čo najmenšie pre všetky ω. Funkcie S a T nemôžu byť súčasne malé vo všetkých frekvenciách, preto sa musí urobiť vhodný kompromis. Riešením je urobiť S a T malé v rôznych frekvenčných pásmach.

Aby nominálna citlivostná funkcia $S(\omega)$ mala malú amplitúdu, regulátor navrhujeme tak, aby platilo:

$$W_e(\omega)|S(\omega)| \leq 1, \qquad \omega \in [0, \pi], \tag{37}$$

kde $W_e(\omega)$ je nezáporná váhová funkcia. Ak sa nominálna frekvenčná odozva systému $P_n(j\omega)$ podstatne líši od aktuálnej frekvenčnej odozvy systému $P_a(j\omega)$, môže nastať problém so splnením vzťahu (37). V skutočnosti by malo platiť:

$$|W_e(\omega)S_a(\omega)| \leq 1, \qquad \omega \in [0, \pi], \tag{38}$$

kde

$$S_a(\omega) = \frac{1}{1 + P_n(j\omega)C(j\omega)}. \tag{39}$$

Vzťah (39) definuje citlivostnú funkciu aktuálneho procesu. Pretože funkcia $S_a(\omega)$ je neznáma, overenie (38) sa nemôže urobiť priamočiaro. Tento problém je možné vyriešiť, ak pri návrhu regulátora môžeme stanoviť maximálnu nezhodu medzi nominálnym modelom a aktuálnou dynamikou riadeného procesu.

Predpokladajme, že nezhoda medzi nominálnou frekvenčnou charakteristikou $P_n(j\omega)$ a aktuálnou frekvenčnou charakteristikou $P_a(\omega)$ bude vyjadrená v multiplikatívnej forme:

$$|P_a(\omega) - P_n(j\omega)| \leq |P_n(j\omega)|W_y(\omega), \tag{40}$$

kde $W_y(\omega)$ je reálna nezáporná váhová funkcia. Systémy s týmto druhom neurčitosti spĺňajú podmienku (38) vtedy, ak platí nasledujúca nerovnosť [7]:

$$||W_e(j\omega)|S(j\omega)| + W_y(j\omega)|T(j\omega)|||_\infty \leq 1. \tag{41}$$

Aj je uzavretý obvod stabilný, potom nerovnica (41) sa zjednoduší na tvar:

$$\max_{\omega\in[0,\pi]} (W_e(j\omega)|S(i\omega)| + W_y(j\omega)|T(j\omega)|) \leq 1. \tag{42}$$

Nerovnosti (41) a (42) sú podmienky robustnosti.

Ak ako regulátor uvažujeme regulátor neceločíselného rádu s prenosovou funkciou (28), ktorá má vo frekvenčnej oblasti tvar:

$$G_r(j\omega) = K \ + T_i(j\omega)^{-\lambda} + T_d(j\omega)^{\delta}, \tag{43}$$

potom pre odhad parametrov regulátora môžeme napísať nasledujúci funkcionál:

$$J(K, T_i, \lambda, T_d, \delta, \omega) = |W_e(j\omega)S(j\omega)| + |W_y(j\omega)T(j\omega)|. \tag{44}$$

Ak do vzťahu (42) dosadíme v citlivostnej funkcii $S(j\omega)$ a doplnkovej citlivostnej funkcii $T(j\omega)$ prenos regulátora a prenos regulovanej sústavy $G_s(s)$, potom pre funkcionál (44) dostávame nasledujúci vzťah:

$$\max_{\omega\in[0,\pi]} J(K, T_i, \lambda, T_d, \delta, \omega) = \max_{\omega\in[0,\pi]} \left[\frac{W_e(j\omega) + W_y(j\omega)|G_s(i\omega)G_r(j\omega)|}{|1 + G_s(j\omega)G_r(j\omega)|}\right] \leq 1. \tag{45}$$

Po dosadení frekvenčného prenosu regulátora (43) a frekvenčného prenosu regulovanej sústavy do vzťahu (45) a derivovaním funkcionálu $J(K, T_i, \lambda, T_d, \delta, \omega)$ podľa jednotlivých neznámych parametrov regulátora, dostávame sústavu 5 rovníc o 5 neznámych pre výpočet neznámych parametrov regulátora.

Na vhodný výber váhových funkcií W_e a W_y sa dajú využiť doporučené hodnoty parametrov $k_{x0}; k_{x\infty}; \omega_k$, ktoré sú uvedené v tabuľke č.1 v práci [P-6]. Váhová funkcia W je potom definovaná nasledujúcimi parametrami:

$$W = [k_{x0}; k_{x\infty}; \omega_k],$$

kde k_{x0} a $k_{x\infty}$ sú veličiny amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky (pre dolnú a hornú frekvenciu) a ω_k je frekvencia, pri ktorej amplitúdová frekvenčná charakteristika pretína x-ovú os. Pričom ω_s, v tabuľke č.1 v práci [P-6], je prvá frekvencia, pri ktorej Bodeho charakteristika pretína hodnotu 0 [dB] a e_∞ je požadovaná trvalá regulačná odchýlka uzavretého regulačného obvodu.

3.3.4 Metóda návrhu parametrov regulátorov neceločíselného rádu založená na Bodeho ideálnej prenosovej funkcii

Profesor Bode vo svojej knihe z roku 1945 o spätnoväzobných zosilňovačoch navrhol podobu takzvanej ideálnej prenosovej funkcie, ktorá môže byť vyjadrená nasledujúcim vzťahom [4]:

$$L(s) = \left(\frac{s}{\omega_{gc}}\right)^{\alpha}, \tag{46}$$

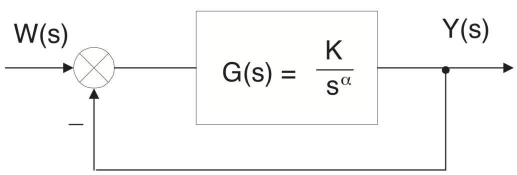
kde ω_{gc} je žiadaná medzná frekvencia a α je sklon ideálnej Bodeho charakteristiky, ktorú on vo svojej práci pomenoval „cut-off" charakteristika. Fázová bezpečnosť potom je $\Phi_m = \pi(1+\alpha/2)$ pre všetky hodnoty zosilnenia. Amplitúdová bezpečnosť A_m je nekonečná. Napríklad konštantná fázová bezpečnosť 60^o, 45^o a 30^o korešponduje so sklonom amplitúdovej časti Bodeho charakteristiky $\alpha = -1.33$, -1.5 a -1.66. Nyquistova charakteristika pre Bodeho ideálnu prenosovú funkciu je priama čiara prechádzajúca počiatkom pod uhlom $\arg(L(j\omega)) = \alpha\pi/2$.

Bodeho ideálna prenosová funkcia (46) môže byť použitá aj ako referenčný systém pre návrh parametrov regulátora neceločíselného rádu pre žiadanú amplitúdovú a fázovú bezpečnosť. Ide v podstate o integrál neceločíselného rádu. Pre otvorený regulačný obvod potom môžeme napísať nasledujúci tvar referenčnej prenosovej funkcie:

$$G(s) = \frac{K}{s^{\alpha}}, \qquad (0 < \alpha < 2), \tag{47}$$

a pre uzavretý regulačný obvod zobrazený na Obr. 3 má referenčná prenosová funkcia tvar:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K}{s^{\alpha} + K}, \qquad (0 < \alpha < 2). \tag{48}$$



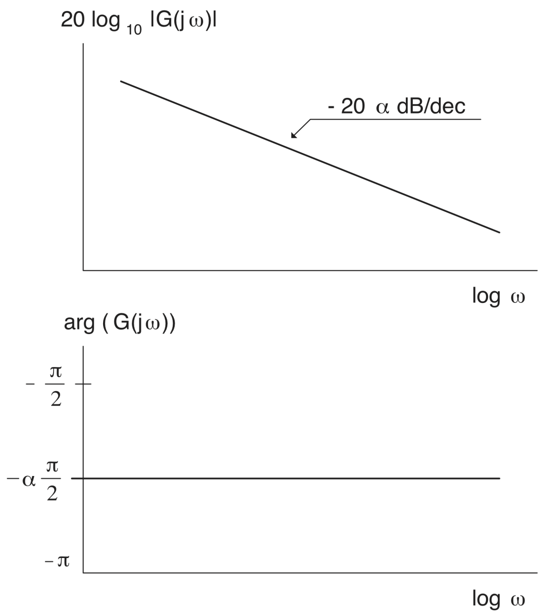
Obr. 3: Regulačný obvod s Bodeho ideálnou prenosovou funkciou.

Všeobecné charakteristiky Bodeho ideálnej prenosovej funkcie môžeme zosumarizovať nasledovne (viď [P-7, P-8]):

(a) Otvorený regulačný obvod (47):

- Amplitúda: konštantný sklon $-\alpha 20 dB/dec.$;
- Medzná frekvencia: funkcia parametra K;
- Fáza: vodorovná čiara $-\alpha\frac{\pi}{2}$;
- Nyquistova charakteristika: rovná čiara s argumentom $-\alpha\frac{\pi}{2}$.

(b) Uzavretý regulačný obvod (48):



Obr. 4: Bodeho charakteristiky prenosovej funkcie (47).

- Amplitúdová bezpečnosť: nekonečná;
- Fázová bezpečnosť: konštantná : $\Phi_m = \pi\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

V práci [P-7] boli navrhnuté parametre regulátora neceločíselného rádu na riadenie otáčok jednosmerného motora (DCM) s využitím Bodeho ideálnej prenosovej funkcie a to tak, aby preregulovanie bolo nezávislé od zmien pri rôznom zaťažení motora. Vo frekvenčnej oblasti to znamená, že fázová bezpečnosť je nezávislá od zmien zaťaženia motora.

Ak uvažujeme prenosovú funkciu riadeného objektu, napríklad jednosmerného motora, v tvare:

$$G_{DCM}(s) = \frac{K_{DCM}}{s(\tau s + 1)}, \tag{49}$$

potom fázová bezpečnosť regulačného obvodu je daná ako

$$\Phi_m = \arg\left[C(j\omega_g) G_{DCM}(j\omega_g)\right] + \pi, \tag{50}$$

kde $j\omega_g$ je medzná frekvencia. Nezávislá fázová bezpečnosť je inými slovami povedané konštantná fáza vo fázovej časti Bodeho charakteristiky. To môže byť zabezpečné regulátorom v podobe

$$C(s) = k_1 \frac{k_2 s + 1}{s^\mu}, \quad k_1 = 1/K_{DCM}, \quad k_2 = \tau. \tag{51}$$

Takýto regulátor neceločíselného rádu (51) zabezpečuje konštantnú fázu a výsledná fázová bezpečnosť Φ_m je potom daná iba parametrom μ:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \arg\left[C(j\omega) G_{DCM}(j\omega)\right] + \pi = \arg\left[\frac{k_1 K_{DCM}}{(j\omega)^{(1+\mu)}}\right] + \pi \\ &= \arg\left[(j\omega)^{-(1+\mu)}\right] + \pi = \pi - (1+\mu)\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{52}$$

3.3.5 Metódy pre adaptívne riadenie neceločíselného rádu

Adaptívne metódy riadenia boli pomerne dobre rozpracované okolo roku 1960. Stali sa štandardnou súčasťou učebníc o riadení [2]. Jeden z adaptačných mechanizmov je známy pod skratkou MRAC (Model Reference Adaptive Control). V práci [P-8] bol rozšírený tento známy adaptačný prístup a to dvoma spôsobmi:

1. **Nové nastavovacie MIT pravidlo s deriváciou neceločíselného rádu:**

   Ako je všeobecne známe v MIT pravidle, pomer zmeny parametrov je závislý od adaptačného zosilnenia γ. S využitím vlastnosti derivácie neceločíselného rádu je možné docieliť, aby pomer zmeny parametrov závisel okrem adaptačného zosilnenia γ aj na ráde derivácie α a to použitím nového MIT pravidla:

   $$\frac{\mathrm{d}^\alpha \theta}{\mathrm{d}^\alpha t} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}, \tag{53}$$

   kde α je reálne číslo (rád derivácie) a e je rozdiel (chyba) medzi referenčným výstupom a výstupom zo systému. Nové adaptačné pravidlo (53) je možné upraviť aj na tvar:

   $$\theta = -\gamma I^\alpha \left[\frac{\partial J}{\partial \theta}\right] = -\gamma I^\alpha \left[e \frac{\partial e}{\partial \theta}\right]; \qquad I^\alpha \equiv D^{-\alpha} \tag{54}$$

   Pre $\alpha = 1$ dostávame klasický tvar nastavovacieho pravidla. V práci [P-8] bolo ukázané, že už pri jednoduchom modeli je možné rýchlejšie nastaviť neznáme parametre, ak $\alpha = 1.25$ a nie ako je to pri klasickom prípade, ak $\alpha = 1$.

2. **Využitie referenčného modelu neceločíselného rádu:**

   Pri riešení klasických MRAC problémov s referenčným modelom je referenčný model často tvorený sústavou druhého rádu. Triedu referenčných modelov môžeme rozšíriť tak, že budeme využívať sústavy neceločíselného rádu.

   V práci [P-8] bolo na jednoduchom simulačnom príklade ukázané, že pre systém popísaný prenosovou funkciou v tvare:

   $$G(s) = \frac{1}{s+1}, \tag{55}$$

   je možné pre nastavenie (adaptáciu) dopredného zosilnenia využiť výstup z referenčného modelu v tvare:

   $$Y_m(s) = \frac{1}{s^{0.25}+1} U_c(s), \tag{56}$$

   kde u_c je referenčný vstupný signál a y_m je referenčný výstup.

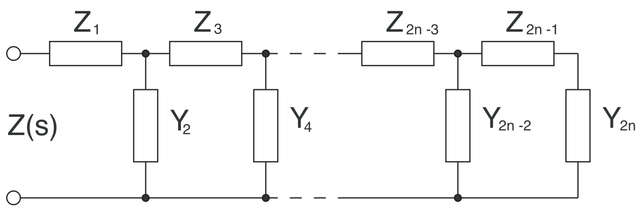
   Ak by sme použili $\alpha = 1$ v nastavovacom pravidle (53), bolo by veľmi obtiažne sledovať referenčný výstup aj na značne veľkom časovom intervale. Ak použijeme referenčný model neceločíselného rádu, potom je to pomerne jednoduchá úloha, ak si zvolíme $\alpha \in (0, 1)$. V práci [P-8] bol použitý referenčný model (56) s adaptačným zosilnením $\gamma = 15$, ktorý dobre sledoval chovanie systému (55).

3.3.6 Metódy pre analógovú implementáciu regulátorov

Pre analógovú implementáciu regulátorov neceločíselného rádu je potrebné mať elektrické obvody alebo elementy, ktoré vykazujú chovanie reálneho integrátora a/alebo derivátora. Obvody s takýmto chovaním sa nazývajú „fractance” a majú nasledujúce vlastnosti [22, 14]. Fáza v Bodeho charakteristike je konštantná a nezávislá od frekvencie na určitom frekvenčnom rozsahu. Je možné zostrojiť filter, ktorý má nastavovateľnú charakteristiku tak, že ju nemožno realizovať použitím iných bežných súčiastok alebo obvodov. Existuje niekoľko typov *fractance*. Veľmi populárnym je tzv. „domino ladder”, pričom ide o rebríkovité usporiadanie rezistorov, kondenzátorov a cievok. Návrh požadovanej impedancie *fractance* je možné vykonať pomocou rozvoja do reťazového zlomku (CFE), ktorý poskytuje racionálnu aproximáciu požadovanej impedancie. Je známe, že takáto aproximácia je vhodnejšia pre realizáciu analógového operátora neceločíselného rádu ako iné elektrické obvody [10].

V práci [P-9] bola popísaná metóda CFE, ktorá aproximuje iracionálnu funkciu vyjadrujúcu spojitý operátor neceločíselného rádu, pričom táto metóda nevyžaduje žiadnu ďalšiu transformáciu. Hodnoty elektrických súčiastok (R, L, C) sú priamo determinované zo získaného reťazového zlomku. Ak pri pasívnych súčiastkách dostaneme záporné hodnoty, je možné využiť konvertor negatívnej impedancie pracujúci s operačným zosilňovačom, ktorý bol taktiež popísaný v práci [P-9].

"Analogue realisations of a fractional order controller have been developed in the literature: Petras, Podlubny, O'Leary, Dorcak and Vinagre (2002), Podlubny, Petras,Vinagre, Dorcak and O'Leary (2002), Podlubny et al. (2003a, b) and..." — P. Varshney et al., International Journal of Electronics (2008), 95(6): 531-547.



Obr. 5: Rebríkovitá štruktúra (domino ladder).

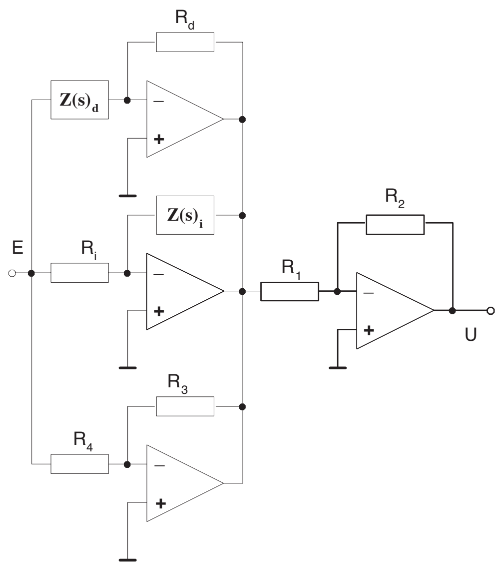
Uvažujme schému rebríkovíteho usporiadania obvodu, ktorý je zobrazený na Obr. 5, kde $Z_{2k-1}(s)$ a $Y_{2k}(s)$, $k = 1, \ldots, n$, sú dané impedancie elektrických súčiastok. Výslednú impedanciu $Z(s)$ celého obvodu je možné vyjadriť jednoducho v tvare reťazového zlomku:

$$Z(s) = Z_1(s) + \cfrac{1}{Y_2(s) + \cfrac{1}{Z_3(s) + \cfrac{1}{Y_4(s) + \cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \atop \cfrac{1}{Y_{2n-2}(s) + \cfrac{1}{Z_{2n-1}(s) + \cfrac{1}{Y_{2n}(s)}}}}}}} \tag{57}$$

Vzťah medzi rebríkovitým usporiadaním zobrazeným na Obr. 5 a reťazovým zlomkom (57) poskytuje jednoduchú metódu pre návrh obvodu s požadovanou impedanciou $Z(s)$, pričom priamo získame nominálne hodnoty potrebných elektrických súčiastok. Racionálna aproximácia derivátora a integrátora neceločíselného rádu α môže byť formálne vyjadrená ako

$$s^{\pm\alpha} \approx \left\{ \frac{P_p(s)}{Q_q(s)} \right\}_{p,q} = Z(s), \tag{58}$$

kde p a q sú rády racionálnej aproximácie, P a Q sú polynómy stupňov p a q. Okrem metódy reťazových zlomkov je možné hodnoty elektrických súčiastok vypočítať aj priamo, a to metódou, ktorá zovšeobecňuje Warburgovu impedanciu $As^{-\alpha}$, kde A je nezávislé od uhlovej frekvencie a $0 < \alpha < 1$. Táto impedancia sa objavuje v rozhraní elektróda/elektrolyt [33]. Ďalšie aproximačné metódy je možné nájsť v práci [32].



Obr. 6: Analógová implementácia PI$^\lambda$D$^\delta$ regulátora.

Na Obr. 6 je znázornená analógová implementácia PI$^\lambda$D$^\delta$ regulátora neceločíselného rádu. Derivátor neceločíselného rádu je aproximovaný pomocou impedancie $Z(s)_d$ a integrátor neceločíselného rádu je aproximovaný pomocou impedancie $Z(s)_i$, kde rády oboch aproximácií sú $0 < \alpha < 1$. Pre rády väčšie ako 1, impedancie neceločíselných rádov môžu byť kombinované s klasickými operátormi celočíselných rádov.

Ak predpokladáme $R_2 = R_1$, potom pre parametre regulátora neceločíselného rádu môžeme napísať vzťahy:

$$K = \frac{R_3}{R_4}, \quad T_i = \frac{Z(s)_i}{R_i}, \quad T_d = \frac{R_d}{Z(s)_d}.$$

V prípade, že sú použité identické rezistory R v sérii a identické kondenzátory C paralelne v štruktúre rebríkovitého usporiadania, potom výsledné chovanie elektrického obvodu bude mať charakter operátora integrovania/derivovania polovičného rádu. Realizácia takýchto obvodov a následné merania boli okrem práce [P-9] popísané aj v práci [25].

3.3.7 Metódy pre digitálnu implementáciu regulátorov

Pre digitálnu implementáciu regulátorov neceločíselného rádu je nutné mať vhodnú diskrétnu aproximáciu spojitého operátora $s^{\pm r}$ $(r \in R)$, ktorá môže byť vyjadrená pomocou generujúcej funkcie $s \approx \omega(z^{-1})$. Táto generujúca funkcia a jej rozvoj do reťazového zlomku alebo mocninového radu nám potom priamo určujú tvar aproximácie a aj príslušné koeficienty [15]. Následne je možné takéto diskrétne ekvivalenty operátora neceločíselného rádu využiť pri realizácii regulátora neceločíselného rádu, ktorý môže byť implementovaný v tejto diskrétnej podobe na akomkoľvek zariadeni pracujúcom s diskrétnym časom, s určitou periódou vzorkovania. Takýmto zariadením môže byť napríklad PLC automat, priemyselný počítač s IO kartou, PIC procesor alebo FPGA. Popis niektorých praktických realizácií je možné nájsť v [5].

Vo všeobecnosti, ak je spojitá funkcia $f(t)$ aproximovaná diskrétnou funkciou $f(kh)$, kde h je veľkosť aproximačnej siete (krok), aproximácia derivácie neceločíselného rádu r môže byť vyjadrená ako [5, 21]:

$$y_h(kh) = h^{\mp r} \left(\omega\left(z^{-1}\right)\right)^{\pm r} f_h\left(kh\right), \tag{59}$$

kde z^{-1} je posunutý operátor Z-transformácie a $\omega\left(z^{-1}\right)$ je generujúca funkcia.

Ako generujúcu funkciu $\omega(z^{-1})$ môžeme použiť nasledujúci vzťah [3]:

$$\omega(z^{-1}) = \left(\frac{1}{\beta T}\frac{1-z^{-1}}{\gamma + (1-\gamma)z^{-1}}\right), \tag{60}$$

kde β a γ sú parametre pre nastavenie zosilnenia a fázy a T je vzorkovacia perióda. Napríklad, ak $\beta = 1$ a $\gamma = \{0, 1/2, 7/8, 1, 3/2\}$, potom generujúca funkcia (60) bude Eulerovým dopredným operátorom, Tustinovým operátorom, Al-Alaoui operátorom, Eulerovým spätným operátorom alebo implicitným Adamsovým pravidlom. Týmto spôsobom môže byť generujúca funkcia nastavená oveľa presnejšie podľa požiadaviek.

Rozvoj generujúcej funkcie môže byť urobený v podstate troma spôsobmi. Prvý spôsob je rekurzívna schéma. Napríklad v práci [P-10] bola použitá Muirova rekurzívna aproximácia. Druhý spôsob je rozvoj generujúcej funkcie do mocninového radu (PSE). V tomto prípade je získaná aproximácia v tvare polynómu stupňa p, čo je v podstate vyjadrenie v podobe FIR filtra. Tretí spôsob je rozvoj generujúcej funkcie do reťazového zlomku (CFE), ktorý vedie k racionálnej aproximácii a výsledný tvar aproximácie je v podobe IIR filtra. V podstate je možné použiť aj niektorú spojitú aproximáciu popísanú v práci [32] a následne ju pomocou funkcie `c2d()` v Matlabe prekonvertovať na diskrétnu podobu.

Výsledná prenosová funkcia aproximujúca operátor neceločíselného rádu pomocou PSE metódy môže byť získaná použitím vzťahu [P-1, P-7, P-10]:

$$D^{\pm r}(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{F(z)} \approx \ \mathrm{PSE}\left\{(\omega(z^{-1}))^{\pm r}\right\}_p \simeq P_p(z^{-1}), \tag{61}$$

kde $Y(z)$ je Z-transformácia výstupnej sekvencie $y(kT)$, $F(z)$ je Z-transformácia vstupnej sekvencie $f(kT)$, PSE$\{u\}$ je vyjadrenie, ktorého výsledkom je rozvoj funkcie u do mocninového radu, $D^{\pm r}(z)$ je diskrétny ekvivalent operátora neceločíselného rádu a $P_p(z^{-1})$ je polynóm stupňa p premennej z^{-1}.

Napríklad, pri použití princípu krátkej pamäti [27], Eulerovho operátora spätnej diferencie a metódy PSE, diskrétny ekvivalent integro-diferenciálneho operátora neceločíselného rádu $(\omega(z^{-1}))^{\pm r}$ je potom daný ako

$$D^{\pm r}(z^{-1}) = (\omega(z^{-1}))^{\pm r} = T^{\mp r} z^{-[L/T]} \sum_{i=0}^{[L/T]} (-1)^i \binom{\pm r}{i} z^{[L/T]-i}, \tag{62}$$

kde L je dĺžka pamäti a $(-1)^i \binom{\pm r}{i}$ sú binomické koeficienty počítané podľa (11).

"Ivo Petras proposed a MATLAB function dfod2(), which can be used in FIR filter approximation of fractional-order differentiators [173]." — C. A. Monje et al., Fractional-order Systems and Controls (2010), Springer, p. 198.

Táto metóda aproximácie operátora neceločíselného rádu v diskrétnej oblasti v podobe FIR filtra bola autorom implementovaná aj v Matlabe v podobe funkcie, ktorá je voľne dostupná na web stránke MathWorks, Inc., File Exchange ako funkcia `dfod2()` (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3673*).

Výsledná prenosová funkcia aproximujúca operátor neceločíselného rádu metódou CFE môže byť vyjadrená vzťahom [P-1, P-7, P-10]:

$$\begin{aligned} D^{\pm r}(z^{-1}) &= \frac{Y(z)}{F(z)} \approx \mathrm{CFE}\left\{(\omega(z^{-1}))^{\pm r}\right\}_{p,q} \\ &\simeq \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_n z^{-n}}, \end{aligned}$$

kde CFE$\{u\}$ je rozvoj funkcie u do reťazového zlomku; p a q sú rády aproximácie, P a Q sú polynómy stupňov p a q, kde spravidla $p = q = n$.

V práci [P-10] bol pre priamu diskretizáciu spojitého operátora neceločíselného rádu s^r $(0 < r < 1)$ použitý Tustinov operátor a jeho rozvoj pomocou metódy CFE. V práci [P-7] bola na zostavenie generujúcej funkcie využitá myšlienka použiť kombinovanú podobu Eulerovho operátora spätnej diferencie a Tustinovho operátora s tým, že je možné nastaviť pomer medzi oboma operátormi. Takto definovaný nový operátor má tvar:

$$(\omega(z^{-1}))^{\pm r} = \left(\frac{1+a}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}\right)^{\pm r}, \tag{63}$$

kde a je pomerový člen a r je neceločíselný rád. Pomerový člen a je množstvo fázového posunu a tento nastavovací člen je vhodný pre riešenie inžinierskych problémov.

Na rozvoj nového diskrétneho operátora (63) je možné využiť metódu CFE. Výsledná diskrétna prenosová funkcia, aproximujúca operátor neceločíselného rádu, môže byť vyjadrená v tvare [P-1, P-7]:

$$\begin{aligned} (\omega(z^{-1}))^{\pm r} &\approx \left(\frac{1+a}{T}\right)^{\pm r} \mathrm{CFE}\left\{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}\right)^{\pm r}\right\}_{p,q} \\ &= \left(\frac{1+a}{T}\right)^{\pm r} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} = \left(\frac{1+a}{T}\right)^{\pm r} \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_n z^{-n}}, \end{aligned} \tag{64}$$

kde CFE$\{u\}$ je rozvoj funkcie u do reťazového zlomku; p a q sú rády aproximácie, P a Q sú polynómy stupňov p a q, kde zvyčajne $p = q = n$.

Táto metóda aproximácie operátora neceločíselného rádu v diskrétnej oblasti v podobe IIR filtra bola autorom implementovaná aj v Matlabe v podobe funkcie, ktorá je voľne dostupná na web stránke MathWorks, Inc., File Exchange ako funkcia `dfod1()` (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3672*). Modifikácia tejto aproximačnej metódy bola autorom implementovaná v Matlabe ako funkcia `dfod3()` (*http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31358*).

Je potrebné poznamenať, že pre aplikácie z oblasti riadenia je vhodné, aby získaná racionálna aproximácia v podobe diskrétnej prenosovej funkcie, by mala byť stabilná a neminimálne fázová. Ďalej, pre lepšie vlastnosti vo frekvenčnej oblasti, bolo by výhodné získať takú diskrétnu aproximáciu, ktorej póly a nuly ležia pozdĺž úsečky $z \in (-1, 1)$ v rovine z. Ako bolo ukázané v práci [P-10], navrhnuté aproximačné techniky vyhovujú spomenutým požiadavkám.

Vyššie popísané aproximačné techniky boli autorom využité aj na vytvorenie funkcie `DFOC()` v Matlabe, ktorá je diskrétnou podobou regulátora neceločíselného rádu a umožňuje simulovať riadenie procesov pomocou regulátora neceločíselného rádu (viď *http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33761*).

Ako bolo ukázané v prácach [P-1, P-10, P-11], aproximácia v podobe IIR filtra je vhodnejšia pre praktickú implementáciu, ako aproximácia v podobe FIR filtra. Z praktického hľadiska si vyžaduje menší počet koeficientov a teda má aj menšie nároky na pamäť a výkon procesora. Výsledky sú pritom porovnateľné už pri voľbe rádu aproximácie $n = 4$ v IIR podobe s rádom aproximácie $n = 100$ pri FIR podobe.

Pre praktickú implementáciu diskrétneho regulátora neceločíselného rádu je potrebné vyriešiť množsvo ďalších problémov. V práci [P-11] boli zosumarizované niektoré praktické aspekty aplikácií regulátorov neceločíselného rádu. Medzi tie najdôležitejšie môžeme považovať:

- obmedzenia na typ a rozsah vstupov a výstupov u zariadení, na ktorých sa realizuje regulátor neceločíselného rádu,
- obmedzenia súvisiace s návrhom riadenia (nelinearity, dynamika procesu, neurčitosti, poruchy),
- rôzne modifikácie riadiaceho systému s regulátorom neceločíselného rádu, ako napríklad filtrácia žiadanej hodnoty kvôli mäkšiemu nábehu riadenia, filtrácia derivačnej zložky, obmedzenia integračnej zložky,
- vhodný návrh kódu pre implementáciu regulátora neceločíselného rádu (nastavenie priorít, efektívne slučky, vhodná voľba premenných),
- mať môžnosť kvantitatívne vyhodnotiť správanie sa riadiaceho systému (napr. Harrisov index).

Niektoré praktické implementácie regulátorov neceločíselného rádu na riadenie objektov a procesov v nich prebiehajúcich boli podrobne popísané napríklad v prácach [P-7, P-11], kde sa regulátory neceločíselného rádu aplikovali na riadenie otáčok DC motora a na riadenie elektrického ohrievača. Ďalšie príklady praktickej aplikácie týchto regulátorov je možné nájsť aj v práci [5].

4 Závery pre prax a ďalší rozvoj vedy

Predkladaná dizertačná práca sa venuje hlavne metódam pre matematické modelovanie systémov neceločíselného rádu, identifikácii parametrov týchto modelov, metódam vyšetrovania stability takýchto systémov, metódam pre návrh parametrov a metódam pre implementáciu nových typov regulátorov neceločíselného rádu na najnižšej úrovni riadenia. V práci sú spomenuté aj otázky vyššieho stupňa riadenia a to adaptívneho riadenia s využitím derivácií a integrálov neceločíselného rádu.

Metódy a prostriedky rozpracované autorom, ktoré sú obsiahnuté v predkladanej dizertačnej práci, spolu s prudkým rozvojom výpočtovej techniky umožňujú široké uplatnenie týchto nástrojov v riadení procesov, ale aj využitie v rôznych iných vedných a inžinierskych oblastiach.

Rozpracovanie numerických metód na riešenie lineárnych a nelineárnych diferenciálnych rovníc neceločíselného rádu umožnilo veľmi jednoduché využitie nových typov modelov pre popísanie dynamického chovania systémov neceločíselného rádu. Na vybraných modeloch bolo ukázané, ako je možné modelovať a simulovať chovanie reálnych systémov s využitím prostredia Matlabu, pre ktoré bola urobená aj počítačová podpora v podobe balíkov funkcií.

Pre praktické využitie nových matematických modelov boli v dizertačnej práci navrhnuté aj metódy pre identifikáciu parametrov nových typov modelov, kde oproti klasickým metódam je potrebné identifikovať aj reálny rád modelu. K už existujúcim metódam idetifikácie parametrov vo frekvenčnej oblasti bola navrhnutá a popísaná metóda identifikácie parametrov v stavovom priestore s využitím úplnej metódy najmenších štvorcov a metóda v časovej oblasti, ktorá využíva nový prístup založený na Mittag-Lefflerovej funkcii.

Vyriešenie niektorých otázok klasickej a robustnej stability prispelo k rozvoju nového smeru v oblasti zovšeobecnenia teórie stability systémov neceločíselného rádu.

Jednou z nosných častí práce, sú autorom navrhnuté a rozpracované metódy pre nastavenie parametrov regulátorov neceločíselného rádu. Aby bolo možné tieto nové regulátory použiť na riadenie reálnych procesov, je potrebné správne nastaviť parametre regulátorov na základe určitých požiadaviek na riadenie. Pri týchto regulátoroch nastavujeme aj reálny rád derivovania a integrovania v regulátore.

Analógové metódy pre aproximáciu operátora neceločíselného rádu v podobe elektrických obvodov, takzvaných *fractance*, umožňujú okrem iného aj implementáciu regulátorov neceločíselného rádu v analógovej podobe.

Autorom navrhnuté rôzne formy diskrétnych aproximácií operátora neceločíselného rádu prispeli k možnostiam praktického využitia tohto operátora na digitálnu implementáciu regulátorov neceločíselného rádu na rôznych zariadeniach, ako sú napríklad PLC automaty. Až tieto nové metódy a algoritmy umožňujú široké uplatnenie nových typov regulátorov v praxi, nakoľko v súčasnosti sa väčšina riadiacich systémov na najnižšej úrovni riadenia realizuje práve na báze PLC automatov.

Záverom je možné konštatovať, že autorove výsledky umožňujú širokú aplikáciu nových navrhnutých metód v praxi. Tieto výsledky predstavujú tiež vhodný základ pre ďalšie pokračovanie výskumu a rozvoj vedy v oblasti aplikácie derivácií a integrálov neceločíselného rádu v riadení procesov.

Literatúra

[1] Astrom, K. J. and Hagglund, T.: *Advanced PID Control*, ISA Society, 2006.

[2] Astrom, K. J. and Wittenmark, B.: *Adaptive Control*, Adison-Wesley, 1995.

[3] Barbosa, R. S., Machado, J. A. T., and Silva, M. F.: Time domain design of fractional differintegrators using least-squares, *Signal Processing*, vol. 86, 2006, pp. 2567–2581.

[4] Bode, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Tung Hwa Book Company, 1949.

[5] Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., and Petráš, I.: *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, World Scientific, Singapore, 2010.

[6] Carlson, G. E. and Halijak, C. A.: Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 11, no. 2, 1964, pp. 210–213.

[7] Doyle, J. C., Francis, B. A., and Tannenbaum, A. R.: *Feedback Control Theory,* Macmillan, New York, 1992.

[8] Dorčák, Ľ.: *Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems*, UEF-04-94, Slovak Acad. Sci., Košice, 1994.

[9] Dorčák, Ľ., Terpák, J., Leško, V., and Koštial, I.: *Identification of Fractional-Order Dynamical Systems,* In: Proc. of the Process Control, Vol. 2, Jún 1996, Horný Bečva, Česká Republika.

[10] Dutta Roy, S. C.: On the realization of a constant-argument immitance of fractional operator, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, vol. 14, no. 3, 1967, pp. 264–374.

[11] Heymans, N. and Podlubny, I.: Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheologica Acta*, vol. 45, no. 5, 2006, pp. 765–772.

[12] Chen, Y. Q.: Tuning methods for fractional-order controllers, US Patent, US07599752, 2009.

[13] Chen, Y. Q., Petráš, I., and Xue, D.: *Fractional Order Control - A Tutorial*, In: Proc. of the American Control Conference - ACC '09, 10-12 June 2009, St. Louis, MO, USA, pp. 1397–1411.

[14] Ichise, M., Nagayanagi, Y., and Kojima, T.: An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes, *J. Electroanal. Chem.*, vol. 33, 1971, pp. 253–265.

[15] Lubich, Ch.: Discretized fractional calculus, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 17, no. 3, 1986, pp. 704–719.

[16] Lurie, B. J.: Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller, US Patent, US5371670, 1994.

[17] Magin, R. L.: *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, Inc., Connecticut, 2006.

[18] Manabe, S.: The Non-Integer Integral and its Application to Control Systems, *ETJ of Japan*, vol. 6, no. 3-4, 1961, pp. 83–87.

[19] Matignon, D.: *Stability result on fractional differential equations with applications to control processing*, In: IMACS - SMC proceeding, July, 1996, Lille, France, pp. 963–968.

[20] Miller, K. S. and Ross, B.: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.

[21] Monje, C. A., Chen, Y. Q., Vinagre, B. M., Xue, D., and Feliu-Batlle, V.: *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer, 2010.

[22] Nakagava, M. and Sorimachi, K.: Basic characteristics of a fractance device, *IEICE Trans. fundamentals*, vol. E75 - A, no. 12, 1992, pp. 1814–1818.

[23] Oldham, K. B. and Spanier, J.: *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York - London, 1974.

[24] Oustaloup, A.: *La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthese et Applications*, Hermes, Paris, 1995.

[25] Petráš, I., Podlubny, I., O'Leary, P., Dorčák, Ľ., and Vinagre, B. M.: *Analogue Realization of Fractional Order Controllers*, Faculty of BERG, Technical University of Košice, 2002.

[26] Petráš, I. and Podlubny, I.: Least squares or least circles?: A comparison of classical regression and orthogonal, *Chance*, vol. 23, no. 2, pp. 38–42.

[27] Podlubny, I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[28] Podlubny, I.: Fractional-Order Systems and $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$ -Controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, 1999, pp. 208–213.

[29] Podlubny, I., Chechkin, A. V., Škovránek, T., Chen, Y. Q., and Vinagre, B. M.: Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 228, no. 8, 1 May 2009, pp. 3137–3153.

[30] Samko, S., Kilbas, A., and Marichev, O.: *Fractional Integrals and derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[31] Tustin, A., Allanson, J. T., Layton, J. M., and Jakeways, R. J.: The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive Objects, *The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 105C (1), 1958.

[32] Vinagre, B. M., Podlubny, I., Hernández, A., and Feliu, V.: Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 3, no. 3, 2000, pp. 231–248.

[33] Wang, J. C.: Realizations of generalized warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines, *J. of Electrochem. Soc.*, vol. 134, no. 8, 1987, pp. 1915–1920.

[34] West, B. J., Bologna, M., and Grigolini, P.: *Physics of Fractal Operators*, Springer, New York, 2003.

[35] Westerlund, S.: *Dead matter has memory!*, Causal Consulting, Kalmar, 2002.

5 Zoznam prác tvoriacich dizertáciu

[P-1] **Petráš, I.**: *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer-Verlag, HEP, New York, 2011, p. 218, ISBN 978-3-642-18100-9.

[P-2] **Petráš, I.**, Chen, Y.Q., Vinagre, B.M.: *Robust stability test for interval fractional order linear systems*, In: V. Blondel and A. Megretski Eds. Unsolved problems in mathematics and control systems, Princeton University Press, USA, 2004, pp. 208–211, ISBN 0-691-11748-9.

[P-3] Škovránek, T., Podlubny, I., **Petráš, I.**: Modeling of the national economies in state-space: a fractional calculus approach, *Economic Modelling*, vol. 29, no. 4, 2012, pp. 1322–1327, ISSN 0264-9993.

[P-4] **Petráš, I.**, Sierociuk, D., Podlubny, I.: Identification of parameters of a half-order system, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, 2012, pp. 5561–5566, ISSN 1053-587X.

[P-5] **Petráš, I.**: The fractional - order controllers: Methods for their synthesis and application, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 50, no. 9-10, 1999, pp. 284–288, ISSN 1335-3632.

[P-6] **Petráš, I.**, Hypiusová, M.: *Design of fractional - order controllers via H_∞ norm minimisation*, In: J. Mikleš and V. Veselý Eds. Selected Topics in Modeling and Control, vol. 3, 2002, pp. 50–54, STU Press Bratislava, ISBN 80-227-1815-7.

[P-7] **Petráš, I.**: Fractional-order feedback control of a DC motor, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 60, no. 3, 2009, pp. 117–128, ISSN 1335-3632.

[P-8] Vinagre, B. M., **Petráš, I.**, Podlubny, I., Chen, Y.Q.: Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in Model-Reference Adaptive control, *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1-4, 2002, pp. 269–279, ISSN 0924-090X.

[P-9] Podlubny, I., **Petráš, I.**, Vinagre, B.M., O'Leary, P., Dorčák, Ľ.: Analogue realization of fractional-order controllers, *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1-4, 2002, pp. 281–296, ISSN 0924-090X.

[P-10] Vinagre, B. M., Chen, Y. Q., **Petráš, I.**: Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator, *Journal of The Franklin Institute*, vol. 340, no. 5, 2003, pp. 349–362, ISSN 0016-0032.

[P-11] **Petráš, I.**: Tuning and implementation methods for fractional-order controllers, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 15, no. 2, 2012, pp. 282–303, ISSN 1311-0454.

6 Prehľad citačného ohlasu na predložené práce podľa SCI

Celkový počet citácií (bez autocitácií a semiautocitácií) podľa SCI na všetky doteraz publikované práce autora je **703** k dátumu 13.12.2012, z toho počet SCI citácií na práce tvoriace predloženú dizertáciu predstavuje **297** citácií. Z uvedeného počtu je 14 citácií na monografiu [P-1]. Článok [P-2] bol citovaný 12 krát, článok [P-5] má 61 citácií, článok [P-6] má 5 citácií, článok [P-7] má 4 citácie, článok [P-8] má 34 citácií, článok [P-9] má 114 citácií, článok [P-10] má 53 citácií a články [P-3], [P-4] a [P-11] sú z roku 2012 a zatiaľ na nich nie sú evidované SCI citácie.

Celkový prehľad citačného ohlasu podľa SCI je uvedený na disku CD-ROM, ktorý je súčasťou tohto autoreferátu ako jeho príloha.

7 Najdôležitejšie vybrané práce autora

7.1 Monografie, učebnice, kapitoly v monografiách

1. Petráš, I.: *Fractional Calculus and its Applications*, In: Yang, Xin-She Eds. Mathematical Modeling with Multidisciplinary Applications, John Wiley & Sons, 2012, kap. 15, pp. 357–391, ISBN 978-1-118-29441-3.
2. Petráš, I.: *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, HEP, Springer-Verlag, 2011, p. 218. ISBN 978-3-642-18100-9.
3. Petráš, I.: *Fractional derivatives, fractional integrals, and fractional differential equations in Matlab*, In: A. Assi Eds. Engineering Education and Research Using MATLAB, InTech, 2011, kap.10, pp. 239–264, ISBN 978-953-307-656-0.
4. Caponetto, R., Dongola, G., Fortuna, L., Petráš, I.: *Fractional Order Systems: Modelling and Control Applications*, World Scientific Publishing, Singapore, 2010, p. 178. ISBN 978-981-4304-19-1.
5. Petráš, I.: *Fractional-order chaotic systems*, 1. vyd. Košice: Reprocentrum, 2009, p. 126, ISBN 978-80-553-0112-9.
6. Petráš, I., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M.: *Robust stability test for interval fractional order linear systems*, In: V. Blondel and A. Megretski Eds. Unsolved problems in mathematics and control systems, Princeton University Press, USA, 2004, pp. 208–2011, ISBN 0-691-11748-9.
7. Petráš, I.: *Fractional – Order Control Systems: Theory and Applications*, FBERG TU Košice, 2004, p. 113, ISBN 80-8073-095-4.
8. Petráš, I., Podlubny, I. , O'Leary, P., Dorčák, Ľ., Vinagre, B.M.: *Analog Realizations of Fractional Order Controllers*, TU Košice, 2002, p. 84, ISBN 80-7099-627-7.
9. Petráš, I., Hypiusová, M.: *Design of fractional - order controllers via H_∞ norm minimisation*, In: J. Mikleš and V. Veselý Eds. Selected Topics in Modeling and Control, vol. 3, 2002, pp. 50–54, STU Press Bratislava, ISBN 80-227-1815-7.
10. Petráš, I.: *Teória automatického riadenia (návody na cvičenia)*, Elfa s.r.o, Košice, 2001, p. 52, ISBN 80-88964-92-X.

7.2 Publikácie vo vedeckých časopisoch

Vedecké práce v časopisoch evidovaných v Current Contents (CC):

1. Baleanu, D., Garra, R., Petráš, I.: A fractional variational approach to the fractional Basset-type equation, *Reports on Mathematical Physics*, vol. 72, no. 1, 2013, pp. 57–64 (prijaté do tlače v 2012).
2. Podlubny, I., Skovranek, T., Vinagre, B.M., Petráš, I., Verbitsky, V., Chen, Y.Q.: Matrix approach to discrete fractional calculus III: non-equidistant grids, variable step length, and distributed orders, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 371, no. 1990, 2013, (prijaté do tlače v 2012).
3. Sierociuk, D., Dzielinski, A., Grzegorz, S., Petráš, I., Podlubny, I., Škovranek, T.: Modeling Heat Transfer in Heterogeneous Media Using Fractional Calculus, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 371, no. 1990, 2013, (prijaté do tlače v 2012).
4. Sierociuk, D., Podlubny, I., Petráš, I.: Experimental evidence of variable-order behavior of ladders and nested ladders, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 2, 2013, pp. 459–466, (prijaté do tlače v 2012).
5. Petráš, I., Sierociuk, D., Podlubny, I.: Identification of parameters of a half-order system, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 2, 2012, pp. 5561–5566.
6. Petráš, I.: Chaos in Fractional-order Population Model, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, no. 4, 2012, pp. 1250072-1–1250072-6.
7. Škovránek, T., Podlubný, I., Petráš, I.: Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach, *Economic Modelling*, vol. 29, no. 4, 2012, pp. 1322–1327.
8. Petráš, I.: Tuning and implementation methods for fractional-order controllers, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 15, no. 2, 2012, pp. 282–303.
9. Baleanu, D., Petráš, I., Asad, J.H., Velasco, M.P.: Fractional Pais–Uhlenbeck Oscillator, *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 51, no. 4, 2012, pp. 1253–1258.
10. Petráš, I., Magin, R.: Simulation of drug uptake in a two compartmental fractional model for a biological system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 16, no.12, 2011, pp. 4588–4595.
11. Petráš, I.: An Effective Numerical Method and Its Utilization to Solution of Fractional Models Used in Bioengineering Applications, *Advances in Difference Equations*, vol. 2011, pp. 1–14.
12. Petráš, I.: Modeling and numerical analysis of fractional-order Bloch equations, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 2, 2011, pp. 341–356.
13. Petráš, I.: Fractional-order memristor-based Chua's circuit, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, vol. 57, no. 12, 2010, pp. 975–979.
14. Petráš, I.: Discussion on: "Simple fractional order model structures and their applications in control system design", *European Journal of Control*, vol. 16, no. 6, 2010, pp. 697–698.

15. Petráš, I.: A note on the fractional-order Volta's system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 2, 2010, pp. 384–393.
16. Petráš, I.: Chaos in the fractional-order Volta's system: modeling and simulation, *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, no. 1-2, 2009, pp. 157–170.
17. Petráš, I.: A note on the fractional-order Chua's system, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 38, no. 1, 2008, pp. 140–147.
18. Vinagre, B. M., Chen, Y.Q., Petráš, I.: Two Direct Tustin Discretization Methods for Fractional-Order Differentiator/Integrator, *Journal of The Franklin Institute*, vol. 340, no. 5, 2003, pp. 349–362.
19. Podlubny, I., Petráš, I., Vinagre, B.M., O'Leary, P., Dorčák, Ľ.: Analogue Realization of Fractional-Order Controllers, *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1-4, 2002, pp. 281–296.
20. Vinagre, B. M., Petráš, I., Podlubny, I., Chen, Y.Q.: Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control, *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1-4, 2002, pp. 269–279.

Vedecké práce v časopisoch indexovaných vo Web of Science/Scopus:

Domáce časopisy:

1. Dzielinski, A., Sierociuk, D., Sarwas, G., Petráš, I., Podlubny, I., Škovránek, T.: Identification of the Fractional-Order Systems: A Frequency Domain Approach, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 16, no. 1, 2011, pp. 26–33.
2. Petráš, I., Bednárová, D.: Total least squares approach to modeling: A Matlab toolbox, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 15, no. 2, 2010, pp. 158–170.
3. Petráš, I.: Fractional-order feedback control of a DC motor, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 60, no. 3, 2009, pp. 117–128.
4. Petráš, I., Bednárová, D., Podlubny, I.: Description of behavior of national economies in state space, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 13, no. 1, 2008, pp. 183–186.
5. Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I., Dorčáková, F.: Electronic realization of the fractional-order systems, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 12, no. 3, 2007, pp. 231–237.
6. Petráš, I.: Method for simulation of the fractional order chaotic systems, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 11, no. 4, 2006, pp. 273–277.
7. Podlubny, I., Petráš, I., Vinagre, B.M., Chen, Y.Q., O'Leary, P. , Dorčák, Ľ.: Realization of fractional order controllers, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 8, no. 4, 2003, pp. 233–235.
8. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Terpák, J., Zborovjan, M.: Comparison of the methods for discrete approximation of the fractional-order operator, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 8, no. 4, 2003, pp. 236–239.
9. Petráš, I.: Control of fractional-order Chua's system, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 53, no. 7-8, 2002, pp. 219–222.

10. Petráš, I., Vinagre, B. M.: Practical application of digital fractional-order controller to temperature control, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 7, no. 2, 2002, pp. 131–137.
11. Petráš, I.: The fractional - order controllers: Methods for their synthesis and application, *Journal of Electrical Engineering*, vol. 50, no. 9-10, 1999, pp. 284–288.
12. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Control quality enhancement by fractional-order controllers, *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 2, 1998, pp. 143–148.

Zahraničné časopisy:

1. Gonzalez, M., Monje, C. A., Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I.: A method for incorporating fractional-order dynamics through PID control system retuning, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 86, no. 4, 2013 (prijaté do tlače v 2012).
2. Baleanu, D., Asad, J.H., Petráš, I., Elegan, S., Bilgen, A.: Fractional Euler-Lagrange equation of Caldirola-Kanai oscillator, *Romanian Reports in Physics*, vol. 64, Supliment, 2012, pp. 1171–1177.
3. Baleanu, D., Asad, J.H., Petráš, I.: Fractional-order two-electric pendulum, *Romanian Reports in Physics*, vol. 64, no. 4, 2012, pp. 907–914.
4. Petráš, I.: Stability of fractional order systems with rational orders: A survey, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 12, no. 3, 2009, pp. 269–298.
5. Petráš, I., Podlubny, I.: State space description of national economies: The V4 countries, *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 52, 2007, pp. 1223–1233.
6. Petráš, I., Dorčák, Ľ.: Fractional-Order Control Systems: Modelling and Simulation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 6, no. 2, 2003, pp. 205–232.
7. Koštial, I., Nemčovský, P., Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I., Rogaľ, M., Halmo, M.: Real time blast furnace modeling, *Metallurgy*, vol. 40, no. 3, 2001, pp. 147–150.

Vedecké práce v iných recenzovaných/abstrahovaných časopisoch:

Domáce časopisy:

1. Petráš, I.: Nové typy elektrotechnických súčiastok a ich možné, *Časopis pre elektrotechniku a energetiku*, vol. 16, no. 5, 2010, pp. 32–33.
2. Petráš, I.: Realization of fractional order controller based on PLC and its utilization to temperature control, *Transfer inovácií*, vol. 14, 2009, pp. 34–38.
3. Terpák, J., Dorčák, Ľ. , Petráš, I., Čečko, R.: Modelovanie termodynamiky procesov, *Acta Metallurgica Slovaca*, vol. 11, no. 1, 2005, pp. 351–356.
4. Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I. , Prokop, J., Zábavník, V.: Nepriame meranie teplôt ocele v panve a v medzipanve, *Acta Metallurgica Slovaca*, vol. 11, no. 1, 2005, pp. 66–71.

5. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Terpák, J., Zborovjan, M., Homišin, J.: Analogue electronic model of the fractional – order controlled object, *Acta Mechanica Slovaca*, vol. 3-C, 2004, pp. 73–78.
6. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Terpák, J., Zborovjan, M.: Comparison of the methods for discrete approximation of the fractional-order operator, *Acta Mechanica Slovaca*, vol. 4-B, 2003, pp. 83–86.
7. Petráš, I., Dorčák, Ľ.: Niektoré možnosti realizácie regulátora neceločíselného rádu, *EnvirAutom*, vol. 4, no.1, 1999, pp. 83–90.
8. Petráš, I., Horovčák, P., Terpák, J.: Riadenie otáčok DC motora s využitím regulátorov neceločíselného rádu, *EnvirAutom*, vol. 6, no. 1, 2001, pp. 135–141.
9. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Koštial, I., Petráš, I.: Trojrozmerný model vysokopecného procesu, *AT&P Journal*, vol. 8, 2001, pp. 50–51.
10. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I.: Monitorovací a predikčný model vysokopecného procesu, *EnvirAutom*, vol. 5, no. 2, 2000, pp. 140–145.
11. Petráš, I., Dorčák, Ľ.: Metódy návrhu parametrov regulátorov neceločíselného rádu, *EnvirAutom*, vol. 5, no. 1, 2000, pp. 32–41.
12. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Modelovanie neceločíselného regulačného obvodu, *EnvirAutom*, vol. 3, no. 1-2, 1998, pp. 68–71.
13. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Metódy aplikácie regulátorov neceločíselného rádu, *AT&P Journal*, vol. 4, 1998, pp. 59–60.

Zahraničné časopisy:

1. Petráš, I., Bednárová, D.: Control of Fractional-Order Nonlinear Systems: A Review, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 5 no. 2, 2011, pp. 96–100.
2. Petráš, I., Podlubný, I.: Least squares or least circles?: A comparison of classical regression and orthogonal, *Chance*, vol. 23, no. 2, 2010, pp. 38–42.
3. Petráš, I., Dorčák, Ľ. : The frequency method for stability investigation of fractional control systems, *Journal of Stability and Control Theory and Applications*, vol. 2, no. 1-2, 1999, pp. 75–85.

7.3 Príspevky v zborníkoch z vedeckých konferencií

Zborníky zo zahraničných konferencií preindexované vo Web of Science/Scopus:

1. Sierociuk, D., Petráš, I.: Modeling of Heat Transfer Process by Using Discrete Fractional-Order Neural Networks, In: *Proc. of thr 16th International Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics*, Miedzyzdroje, Poland, August 22-25, 2011.
2. Podlubny, I., Skovranek, T., Verbickij, V., Chen,Y.Q., Vinagre, B., Petráš, I.: Discrete fractional calculus: non-equidistant grids and variable step length, In: *Proc. of the MESA-1 The Fifth Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications (FDTA'11), 2011 ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA2011)*, August 28-31, 2011, Washington, DC., USA, DETC2011-47623.

3. Sierociuk, D., Dzielinski, A., Sarwas, G., Petráš, I., Podlubny, I., Skovranek, T.: Modeling Heat Transfer In Heterogeneous Media Using Fractional Calculus, In: *Proc. of the MESA-1 The Fifth Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications (FDTA'11), 2011 ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA2011)*, August 28-31, 2011, Washington, DC., USA, DETC2011-47374.
4. Petráš, I.: Practical Aspects of Tuning and Implementation of Fractional-Order Controllers, In: *Proc. of the MESA-1 The Fifth Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications (FDTA'11), 2011 ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA2011)*, August 28-31, 2011, Washington, DC., USA, DETC2011-47053.
5. Dzieliński, A., Sarwas, G., Sierociuk, D., Škovránek, T., Petráš, I.: Frequency response based identification of fractional order dynamical systems. In: *ICCC 2011 Proceedings of the 12th International Carpatian Control Conference*, 25-28 May 2011, Velké Karlovice, Czech Republic. - S.l.: IEEE, 2011, pp. 102-106.
6. Záhorčák, G., Petráš, I.: Control system of mobile robot. In: *ICCC 2011 Proceedings of the 12th International Carpatian Control Conference*, 25-28 May 2011, Velké Karlovice, Czech Republic. - S.l.: IEEE, 2011, pp. 473–477.
7. Babic, J., Takáč, G., Petráš, I., Bednárová, D.: Identification of model parameters and control of heater on laboratory object. In: *ICCC 2011 Proceedings of the 12th International Carpatian Control Conference*, 25-28 May 2011, Velké Karlovice, Czech Republic. - S.l.: IEEE, 2011, pp. 6–9.
8. Petráš, I. : Stability test procedure for a certain class of the fractional-order systems, *ICCC 2011 Proceedings of the 12th International Carpatian Control Conference*, 25-28 May 2011, Velké Karlovice, Czech Republic. - S.l.: IEEE, 2011, pp. 307–311.
9. Coopmans, C., Petráš, I., Chen, Y.Q.: Analogue fractional-order generalized memristive devices. In: *ASME 2009 Proceedings of the International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference: DETC2009*, August 30 - September 2, 2009, San Diego, California, USA. S.l. : ASME, 2009, pp. 1–10.
10. Petráš, I., Chen, Y.Q., Coopmans, C.: Fractional-order memristive systems. In: *ETFA 2009 14th International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, September 22-26, 2009, Mallorca, Spain. S.l.: IEEE, 2009, pp. 1–8.
11. Petráš, I., Bednárová, D.: Fractional - order chaotic systems. In: *ETFA 2009 14th International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, September 22-26, 2009, Mallorca, Spain. S.l.: IEEE, 2009, pp. 1–8.
12. Chen, Y.Q:, Petráš, I., Xue, D.: Fractional order control - A tutorial. In: *Proc. of the American Control Conference*, St.Louis, Missouri, USA, June 10-12, 2009, pp. 1397–1411.
13. Petráš, I. A Note on the Fractional-Order Cellular Neural Networks, In: *Proc. of the IEEE World Congress on Computational Intelligence, International Joint Conference on Neural Networks*, Vancouver, Canada, July 16-21, 2006, pp. 2000–2003.

14. Petráš, I., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Podlubny, I.: Stability of Linear Time Invariant Systems with Interval fractional Order and Interval Coefficients, In: *Proc. of the second IEEE International Conference on Computational Cybernetics*, Vienna, August 30–September 1, 2004, pp. 341–346.

Ostatné recenzované zborníky zo zahraničných konferencií:

1. Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I., Valsa, J., Gonzales, E., Horovčák, P.: Electronic realization of the fractional-order, In: *Proceedings of the SGEM 2012: 12th International Multidisciplinary Scientific GeoConference: conference proceedings*, Volume 3, 17-23 June, 2012, Albena, Bulgaria, 2012, pp. 103–110.
2. Petráš, I., Magin, R.: Numerical solution of two compartmental biological system, In: *FDA'10 Proc. of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*, University of Extremadura, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010, pp. 1–5.
3. Petráš, I., Bedárová, D.: Control of fractional-order chaotic systems: A survey of control strategies. In: *FDA'10 Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*, University of Extremadura, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010, pp. 1–4.
4. Petráš, I.: Fractional-order biological system model: A case of two-predators and one-prey. In: *FDA'10 Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*, University of Extremadura, Badajoz, Spain, October 18-20, 2010, pp. 1–4.
5. Petráš, I., Bednárová, D.: Identification of dynamical system in state space: A total least squares approach. In: *ICCC'2010 Proceedings of 11th International Carpathian Control Conference*, 26-28 May, 2010, Eger, Hungary - Miskolc: Rekatel, 2010, pp. 419–422.
6. Bednárová, D., Petráš, I., Podlubný, I.,Škovránek, T., O'leary, P.: Total least squares in modeling: Matlab toolbox. In: *ICCC'2010 Proc. of 11th International Carpathian Control Conference*, 26-28 May, 2010, Eger, Hungary - Miskolc: Rekatel, 2010, pp. 327–330.
7. Bednárová, D., Petráš, I., Podlubný, I.: Total least squares method and its utilization in modelling and control of processes. In: *ICCC'2009 Proceedings of 10th international carpathian control conference*, Zakopane, Poland, May 24-27, 2009. Krakow: AGH - University of Science and Technology, 2009, pp. 371–374
8. Petráš, I.: Stability of the fractional-order systems. In: *ICCC'2009 Proceedings of 10th international carpathian control conference*, Zakopane, Poland, May 24-27, 2009. Krakow: AGH - University of Science and Technology, 2009, pp. 15–18.
9. Škovránek, T., Despotovic, V., Podlubný, I., Petráš, I., Bednárová, D.: Matlab realization of a new method for identification of systems of arbitrary real order. In: *Technical Computing Prague 2008: Sborník příspěvků 16. ročníku konference*, Kongresové centrum ČVUT, Praha, November 11, 2008. Praha: Humusoft, 2008.

10. Petráš, I., Bednárová, D., Pivka, L.: A survey of fractional-order chaotic systems, In: *Proceedings of the ICCC'2008*, Sinaia, Romania, May 25-28, pp. 506–509.
11. Podlubný, I., Škovránek, T., Bednárová, D., Petráš, I.: State space desription of national economies: the Scandinavian countries. In: *Information sciences 2007: Proceedings of the 10th Joint Conference*, Salt Lake City, Utah, USA, 18 - 24 July 2007. S.l.: World Scientific Publishing, 2007.
12. Petráš, I.: Fractional order controllers: A survey of possible digital realizations. In: *Symposium on Applied Fractional Calculus*, Badajoz (Industrial Engineering School), October 15-17, 2007. Badajoz: University of Extremadura, 2007.
13. Petráš, I., Bednárová, D.: Simulation of the fractional order chaotic system in Matlab/Simulink. In: *Symposium on Applied Fractional Calculus*, Badajoz (Industrial Engineering School), October 15-17, 2007. Badajoz: University of Extremadura, 2007.
14. Čarnogurská, M., Petráš, I., O'Leary, P., Terpák, J.: Image processing and indirect measurement as a part of quality control. In: *Proc. of the ICCC'2006*, Beskydy, May 28-31, Czech Republic, pp. 101–104.
15. Petráš, I., Bednárová, D., Dorčák, Ľ., Terpák, J.: Methods for design of fractional chaotic systems. In: *Proc. of the ICCC'2006*, Beskydy, May 28-31, Czech Republic, pp. 429–432.
16. Dorčák, Ľ. Petráš, I.,Terpák, J.: Design of the fractional-order PID controller. In: *ICCC '2006 Proceedings of 7th International Carpathian Control Conference*, Rožnov pod Radhoštem, Czech republic, May 29-30, 2006. Ostrava: VŠB TU, 2006. pp. 121–124.
17. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I., Maduda, V.: Combustion control on PLC B&R. In: *ICCC'2006 Proc. of 7th International Carpathian Control Conference*, Rožnov pod Radhoštěm, May 29-31, 2006. Ostrava: VŠB TU, 2006. pp. 565–568.
18. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I., Maduda, V.: Aplikácia riadenia spaľovania na PLC. In: *Process Control 2006 Proceedings of the 7th International Scientific-Technical Conference*, June 13-16, 2006, Kouty nad Desnou, Czech Republic. pp. r222-1-r222-6.
19. Dorčák, Ľ., Terpák, J. Petráš, I.: Návrh robustného $PI^{\lambda}D^{\delta}$ regulátoora neceločíselného rádu. In: *Process Control 2006 Proceedings of the 7th International Scientific - Technical Conference*, June 13-16, 2006, Kouty nad Desnou, Czech Republic. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2006. pp. r221-1-r222-6.
20. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Podlubný I., Tepák J., O'Leoary P.: Implementation of fractional-oder controllers on PLC B&R 2005, In: *Proceedings of the ICCC'2005*, vol. I, Miskolc-Lillafured, Hungary, May 24-27, 2005, pp. 141–144.
21. Horovčák, P., Petráš I.: External references in XML with PHP, In: *Proc. of the ICCC'2005*, vol. I., Miskolc-Lillafured, Hungary, May 24-27, pp. 477–482.
22. Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I., Prokop, J., Zábavník V., Zelený S., Galajda D., Dadej L.: Models for monitoring of the liquid stel temperature in the ladle and tundish, In: *Proceedings of the ICCC'2005*, vol. II., Miskolc-Lillafured, Hungary, May 24-27, 2005, pp. 149–154.

23. Dorčák, Ľ., Budiš, J., Petráš, I., Terpák, J., Zborovjan, M., Pivka, L.: Electronic realization of the fractional – order controlled object, In: *Proceedings of the ICCC'2004*, Zakopane, Poland, May 25–28, 2004, pp. 391–396.
24. Vinagre, B.M., Petráš, I., Podlubny, I., Chen, Y.Q.: Stability of fractional-order model reference adaptive control, In: *Proc. of the MTNS'2002*, August 12-16, 2002, Notre Dame, USA. pp. 118–121.
25. Petráš, I., Chen, Y.Q, Vinagre, B.M.: Robust stability test for interval fractional order linear system, In: *Proc. of the MTNS'2002*, August 12-16, 2002, Notre Dame, USA, pp. 115–117.
26. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Koštial, I., Petráš, I.: A simulation model for blast furnace operation, In: *Proceedings of Process Control 2002*, Kouty nad Desnou, Czech Republic, June 9-12, 2002, pp. R145-1-8.
27. Petráš, I., Vinagre, B. M., Dorčák, Ľ., Feliu, V.: Fractional Digital Control of a Heat Solid: Experimental Results, In: *Proceedings of the ICCC'2002*, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 365–370.
28. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Koštial, I., Petráš, I.: Mathematical model of the theoretical temperature of the blast furnace, In: *Proceedings of the ICCC'2002*, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 167–172.
29. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I., Terpák, J.: Fractional-order state space models, In: *Proc. of the ICCC'2002*, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, pp. 193–198.
30. Dorčák, Ľ., Terpák, J., Koštial, I., Petráš, I.: Control of speed of turboexhausters for aglomeration belt, In: *Proceedings of the ICCC'2002*, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 335–340.
31. Petráš, I., Chen, Y.Q., Vinagre, B. M.: A Robust Stability Test Procedure for a Class of Uncertain LTI Fractional-Order Systems, In: *Proc. of the ICCC'2002*, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 247–252.
32. Vinagre, B. M., Petráš, I., Merchan P., Dorčák, Ľ.: Two digital realizations of fractional controllers: Application to temperature control of a solid, In: *Proc. of the ECC'2001*, September 4-7, Seminario de Vilar, Porto, Portugal, pp. 1764–1767.
33. Petráš, I., Podlubny, I., O'Leary P., Dorčák, Ľ.: Analogue fractional-order controllers: Realization, tuning and implementation, In: *Proc. of the ICCC'2001*, May 22-25, Krynica, Poland, pp. 9–14.
34. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I., Terpák, J.: State-space controller design for the fractional-order regulated system, In: *Proc. of the ICCC'2001*, May 22-25, Krynica, Poland, pp. 15–20.
35. Petráš, I., Grega, S.: Digital fractional-order controllers: A possible hardware realization, In: *Proceedings of the ICCC'2001*, May 22-25, Krynica, Poland, pp. 217–222.
36. Koštial, I., Nemčovský, P., Rogaľ, M., Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I .: Blast furnace process control, In: *Proc. of IFAC Workshop, Future trends in Autom. in Mineral and Metal Processing*, August 22-24, 2000, Finland, pp. 263–268.

37. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I., Kostúr, K.: Simulácia regulačného obvodu neceločíselného rádu, In: *Proc. of MOSIS'99*, vol. 2, April 27-29, 1999, Rožnov pod Radhoštem, Czech Republic, pp. 213–218.
38. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Terpák, J., Koštial, I.: Fractional-order control systems, In: *Proceedings of the 3rd DAAAM Workshop „Intelligent Manufacturing Systems"*, 29th November 2001, Košice, pp. 61–62.

Zborníky z domácich konferencií preindexované vo Web of Science/Scopus:

1. Petráš, I.: A new discrete approximation of the fractional-order operator, In: *Proc. of the 2012 13th IEEE International Carpathian Control Conference (ICCC)*, May 28-31, 2012, High Tatras, Slovak Republic, pp. 547–551.
2. Dorčák, L., Terpák, J., Petráš, I., Valsa, J., Gonzalez, E.: Comparison of the electronic realization of the fractional-order system and its model, In: *Proc. of the 2012 13th IEEE International Carpathian Control Conference (ICCC)*, May 28-31, 2012, High Tatras, Slovak Republic, pp. 119–124.
3. Skovranek, T., Podlubny, I., Petráš, I., Bednarova, D.: Data fitting using solutions of differential equations: Fractional-order model versus integer-order model, In: *Proc. of the 2012 13th IEEE International Carpathian Control Conference (ICCC)*, May 28-31, 2012, High Tatras, Slovak Republic, pp. 703–710.
4. Podlubny, I., Petráš, I., Škovránek, T.: Fitting of experimental data using Mittag-Leffler function, In: *Proc. of the 2012 13th IEEE International Carpathian Control Conference (ICCC)*, May 28-31, 2012, High Tatras, Slovak Republic, pp. 578–581.
5. Petráš, I., Chen, Y.Q.: Fractional-order circuit elements with memory, In: *Proc. of the 2012 13th IEEE International Carpathian Control Conference (ICCC)*, May 28-31, 2012, High Tatras, Slovak Republic, pp. 552–558.

Ostatné recenzované zborníky z domácich konferencií:

1. Petráš, I.: Implementation of fractional order controller on PLC and its application to heater temperature control. In: *Principia Cybernetica '09: Konferencia katedier ústavov automatizácie a kybernetiky strojníckych a technologických fakúlt univerzít Českej republiky a Slovenskej republiky*, 2.-4.9.2009, Herľany, Košice: TU, 2009, pp. 25-1-25-10.
2. Podlubný, I., Bednárová, D., Škovránek, T., Petráš, I.: Modelovanie ekonomík štátov v stavovom priestore. In: *Ekonomika a proces poznávania: Zborník vedeckej konferencie doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov*, Prešov, 16. november 2009, pp. 1–5.
3. Petráš, I., Bednárová D., Podlubný I.: Analysis of behaviour of national economies in state space, In: *Proc. of the ICCC2007*, High Tatras, May 24-27, 2007, pp. 544–547.
4. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Terpák, J., Zborovjan, M.: Comparison of the methods of discrete approximation of the fractional-order operator, In: *Proceedings of the ICCC'2003 conference*, High Tatras, May 26-29, 2003, pp. 851–856.

5. Petráš, I., Grega, S., Dorčák, Ľ.: Digital fractional order controllers realized by PIC microprocessor: Experimental results, In: *Proceedings of the ICCC'2003 conference*, High Tatras, May 26-29, 2003, pp. 873–876.
6. Podlubny, I., Petráš, I., Vinagre B. M., Chen, Y.Q., O'Leary, P., Dorčák. Ľ.: Realization of fractional order controllers, In: *Proceedings of the ICCC'2003 conference*, High Tatras, May 26-29, 2003, pp. 877–880.
7. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Terpák, J.: Algoritmy pre riešenie modelov neceločíselného rádu v stavovom priestore, In: *Proc. of the Informatics and Algorithms 2002 Conference*, Prešov, September 12-13, 2002, pp. 124–129.
8. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I.: Algoritmy pre riadenie odsávania aglomeračného pásu, In: *Proceedings of the Informatics and Algorithms 2002 Conference*, Prešov, September 12-13, 2002, pp. 252–256.
9. Petráš, I., Hypiusová, M.: Design of fractional - order controllers via H_∞ norm minimisation, In: *Proc. of the IFAC conference, Control Systems Design*, June 18-20, 2000, Bratislava, Slovak Republic, pp. 454–457.
10. Petráš, I., Dorčák, Ľ.: Modelovanie a simulácia diskrétnych regulačných obvodov neceločíselného rádu, In: *Proc. of the Informatics and Algorithms 2000 conference*, Prešov, September 7-8, 2000, pp. 152–155.
11. Petráš, I.: Feedback control of chaotic fractional-order Chua's system, In: *Proceedings of the ICCC'2000*, May 23-26, High Tatras, Slovak Rep., pp. 471–474.
12. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: The modelling and analysis of fractional-order control systems in discrete domain, In: *Proc. of the ICCC'2000*, May 23-26, 2000, High Tatras, Slovak Republic, pp. 257–260.
13. Petráš, I., Dorčák, Ľ., O'Leary, P., Vinagre, B. M., Podlubny, I.: The modelling and analysis of fractional-order control systems in frequency domain, In: *Proc. of the ICCC'2000*, May 23-26, High Tatras, Slovak Rep., pp. 261–264.
14. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I.: The modelling and analysis of fractional-order regulated systems in the state space, In: *Proc. of the ICCC'2000*, May 23-26, 2000, High Tatras, Slovak Republic, pp. 185–188.
15. Petráš, I., Dorčák, Ľ.: Frekvenčné charakteristiky regulačného obvodu s neceločíselným rádom oneskorenia, In: *Proc. of the Informatics and Algorithms 1999 Conference*, Prešov, September 9-10, 1999, pp. 164–167.
16. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Neceločíselné metódy v riadení, In: *Proc. of the Process Control 1999 Conference*, May 31-June 3, 1999, Tatranske Matliare, pp. 6–10.
17. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Porovnanie regulátorov celočíselného a neceločíselného rádu na laboratórnom objekte, In: *Proceedings of the ICAMC98/ ASRTP'98*, September 8-12, Tatranske Matliare, pp. 451–454.
18. Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I.: Algoritmy na výpočet miery stability a miery tlmenia regulačných obvodov neceločíselného rádu, In: *Proc. of the ICAMC'98/ ASRTP'98*, Sept. 8-12, Tatranske Matliare, 1998, pp. 243–246.
19. Petráš, I., Stremeň, M.: Snímač malých prietočných množstiev plynných médií, In: *Proc. of the ICAMC'98/ASRTP'98*, September 8-12, Tatranske Matliare, pp. 314–317.

20. Terpák, J., Dorčák, Ľ., Petráš, I., Koštial, I., Nemčovský, P.: Matematický model prúdenia plynných médií vsádzkou vysokej pece, In: *Proc of the ICAMC'98/ ASRTP'98*, September 8-12, Tatranske Matliare, pp. 251–254.
21. Koštial, I., Nemčovský, P., Dorčák, Ľ., Terpák, J., Petráš, I .: Model riadenia vysokej pece, In: *Proc. of the ICAMC'98/ASRTP'98*, September 8-12, Tatranske Matliare, pp. 501–504.
22. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Algoritmy pre riadenie sústav neceločíselného rádu, In: *Proc. of the Informatics and Algorithms 1998 Conference*, Prešov, September 3-4, 1998, pp. 202–206.
23. Petráš, I., Dorčák, Ľ., Koštial, I.: Návrh regulátora neceločíselného rádu so zadanou mierou stability a mierou tlmenia, In: *Proc. of the 9th International BERG Conference*, Košice, Slovak Republic, September 2-5, 1997, pp.116–119.

Zostavovateľské práce:

1. Petráš, I., Podlubny, I., Kostúr, K., Kačur, J., Mojžišová, A. (Eds.): Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC), High Tatras, May 28-31, 2012, IEEE, p. 790, ISBN 978-1-4577-1866-3.
2. Chen, Y. Q., Petráš, I., Vinagre, B.M.: *A List of Laplace and Inverse Laplace Transforms Related to Fractional Order Calculus*, 2001, dostupné online: http://people.tuke.sk/ivo.petras/foc_laplace.pdf.

7.4 Realizácia výsledkov v praxi

Zodpovedný riešiteľ a riešiteľ priemyselných aplikácií:

1. HZ P-101-0052/12: „Analýza možnosti dosiahnutia maximálnej teploty fúkaného horúceho vetra (THV cieľ 1200^{o}C) pre vysokú pec“, pre US Steel Košice, s.r.o. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Ľubomír Dorčák, CSc.
2. HZ P-101-0032/12: „Databáza vstupnej kontroly“, pre SWEEP Slovakia, s.r.o., Kechnec. Zodpovedný riešiteľ: doc. Ing. Ivo Petráš, PhD.
3. HZ P-101-0004/11: „Výskum teplo-fyzikálnych vlastností tenkých fólií“, pre Chemosvit Folie, a.s., Svit. Zodpovedný riešiteľ: doc. Ing. Ivo Petráš, PhD.
4. Monitorovanie teploty tekutej ocele v pánve, US Steel Košice, s.r.o. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Imrich Koštial, CSc. a ICOS, a.s., 2005.
5. Nepriame meranie teploty v LD konvertore v US Steel Košice, s.r.o.. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Karol Kostúr, CSc. a Procesná automatizácia, a.s., 2005.
6. Algoritmy pre riadenie odsávania aglomeračného pásu a riadenie rýchlosti terboexhaustorov, US Steel Košice, s.r.o. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Imrich Koštial, CSc. a SIEMENS, s.r.o., 2002.
7. Matematický model, monitorovací a riadiaci systém vysokej pece č. 3, US Steel Košice, s.r.o. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Imrich Koštial, CSc. a ATIM, s.r.o., (1999 - 2001).

Riešiteľ projektov pre podporu vzdelávania a výskumu:

1. Centrum excelentného výskumu získavania a spracovania zemských zdrojov na FBERG (1. a 2. etapa) – CEV: OPVaV-200812.1I01-S0RO, (2008-2012). Zodpovedný riešiteľ: Fakulta BERG, TU Košice.
2. Rozvojový projekt č. 4003 (budovanie Laboratória priemyselných riadiacich systémov - LPRS), Fakulta BERG, TU Košice, 2005. Zodpovedný riešiteľ: prof. Ing. Karol Kostúr, CSc.
3. Projekt 90511-CP-1-2001-UKMINERVA-MPP: „M-buttons: Mathematics Context Help System (thesaurus.maths.org)" v rámci programu Socrates-Minerva. Zodpovedný riešiteľ: prof. RNDr. Igor Podlubný, CSc. (2002-2004).

Publikovaný SW (počítačová podpora) pre Matlab/Simulink:

1. Petráš, I.: Discrete Fractional-Order PID Controller, MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2011.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33761
2. Petráš, I.: Digital fractional-order differentiator and integrator - new IIR type, MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2011.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31358
3. Petráš, I., Bednárová, D., Škovránek, T., Podlubný, I.: Total Least Squares Method, MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2011.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31109
4. Petráš, I.: Fractional Order Chaotic Systems, MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2009.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27336
5. Petráš, I., Podlubný, I.: Orthogonal Linear Regression in 3D-space by using Principal Components Analysis. MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2006.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/12395
6. Petráš, I.: Digital Fractional Order Differentiator/Integrator - FIR type. MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2003.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3673
7. Petráš, I.: Digital Fractional Order Differentiator/Integrator - IIR type. MathWorks, Inc., Matlab Central File Exchange, 2003.
   http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3672

Zodpovedný riešiteľ úspešne vyriešených vedeckých projektov:

1. VEGA 1/0390/10: „Metódy, algoritmy a prostriedky pre modelovanie, analýzu a syntézu riadiacich systémov technologických objektov a procesov".
2. SK-PL-0052-09: „Neceločíselné metódy v riadení a v spracovaní signálov".
3. VEGA 1/3132/06: „Výskum a vývoj metód pre modelovanie a riadenie chaotických systémov neceločíselného rádu".

Summary

The submitted dissertation consists of a book [P-1] and a collection of several related articles [P-2]–[P-11].

The basic questions related to fractional calculus, description of linear and nonlinear fractional-order systems, stability, numerical methods for solution of fractional differential equations and selected models of the fractional-order systems are included in [P-1]. Problem of robust stability for fractional-order systems is solved in work [P-2]. The methods for parameters identification of the fractional-order systems in state space and time domain were investigated in articles [P-3] and [P-4]. New type of the fractional-order controllers and methods for tuning of the controller parameters were published in article [P-5], [P-6], and [P-7]. The problem of the fractional-order adaptive control was described in paper [P-8]. For practical implementation of the fractional-order controllers were developed the methods for their analogue [P-9] and digital realization [P-10]. A survey of practical aspects of design and implementation of the fractional-order controllers was done in article [P-11].

The main contributions of the work included: new models of the fractional-order systems, identification methods for such models, methods for tuning and implementation of the fractional-order controllers, methods for stability investigation and methods for numerical solution of the fractional differential equations. These methods proposed by the author are the modern direction in the automation and process control, which can be called *fractional control*.

Резюме

Данная диссертация состоит из монографии [P-1] и нескольких связанных с нею статей [P-2]–[P-11].

В монографии [P-1] рассматриваются основные вопросы связанные с исчислением дробного порядка, линейные и нелинейные системы дробного порядка, устойчивость их решений, численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка, а также избранные модели систем дробного порядка. Решению задачи о робастной устойчивости систем дробного порядка посвящена работа [P-2]. В статьях [P-3] и [P-4] предметом исследований были методы для определения параметров систем дробного порядка в пространстве состояний и во временной области. Новые виды регуляторов дробного порядка и методы для настройки параметров таких регуляторов были представлены в статьях [P-5], [P-6] и [P-7]. Задача об адаптивном управлении дробного порядка исследовалась в статье [P-8]. С целью внедрения регуляторов дробного порядка в приложениях были разработаны методы для их аналоговой [P-9] и цифровой [P-10] реализации. Обзор практических аспектов разработки и внедрения регуляторов дробного порядка был осуществлен в статье [P-11].

К основным результатам предложенной диссертации относятся следующие: новые модели систем дробного порядка; методы идентификации параметров таких моделей; методы для настройки и имплементации регуляторов дробного порядка; методы исследования устойчивости и методы численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Перечисленные методы, разработанные автором, представляют собой современное направление в автоматизации и управлении процессами, для которого можно пользоваться названием *методы управления дробного порядка.*